SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
STAVEBNÁ FAKULTA

Polomerovo Moorovské grafy

Bakalárska práca

SVF-5342-50476

2010 **Jaromír Sýs**

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
STAVEBNÁ FAKULTA

Polomerovo Moorovské grafy

Bakalárska práca

SVF-5342-50476

Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie

Číslo a názov študijného odboru: 9.1.9 aplikovaná matematika

Vedúci záverečnej práce/školiteľ: doc. RNDr. Martin Knor, PhD.

Bratislava 2010 **Jaromír Sýs**

Čestné prehlásenie
Vyhlasujem, že som bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím citovanej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

Bratislava 22.05.2009 . . . .

Vlastnoručný podpis

Poďakovanie
Rád by som sa poďakoval môjmu konzultantovi pánovi doc. RNDr. Martinovi Knorovi, PhD. za jeho cenné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi ochotne poskytoval pri tvorbe tejto práce.

SÚHRN

V tejto bakalárskej práci hľadám pomocou počítačového programu grafy, ktoré môžu byť svojou voľnejšou definíciou dobrou alternatívou k vzácnym Moorovým grafom a to Polomerovo Moorove grafy. Uvádzam nájdené spoľahlivé výsledky pre polomer 3 a stupne 3,4,5,6 a 7 pričom program sa dá použiť aj pre vyššie stupne a verím, že aj pre vyššie polomery. V súčasnosti pri bežnej rýchlosti osobného počítača nie je možné nájsť všetky Polomerovo Moorove grafy so stupňom výrazne väčším ako uvádzam a preto som sa zameral len na jednu málo početnú podskupinu Polomerovo Moorových grafov. Použitý algoritmus pre veľké grafy pracuje pomaly ale môže slúžiť ako základ pre ďalšie skúmanie. Prikladám aj program, ktorý prehľadne vykresľuje grafy stupňov 3,4 a 5.

ABSTRAKT

In this bachelor thesis I search for graphs by computer program. They can be used as an alternative to precious Moore graphs because of their lighter definition. Those graphs are called Small Radially Moore graphs. I put forward reliable findings for radius 3 and degrees 3,4,5,6, and 7 (three, four, five, six, and seven). Program can be used for higher degrees too and, as I believe, for higher radiuses. Nowadays, there is no way to find all of the Small Radially Moore graphs with markedly higher degree, than I present, on common personal computers. That is why I focus only on small-scale subgroup of Small Radially Moore graphs. Used algorithm is working slowly for large graphs, but it can be used as a basis for further investigation. In addition I enclose program which delineate graphs of three, four and five degrees clearly.

Obsah

1. ÚVOD

Grafy sú matematické štruktúry ktoré používame pre modely párových vzťahov medzi skúmanými objektmi. Grafy používané v teórii grafov by sme nemali zamieňať s grafmi funkcií a inými druhmi grafov. Štruktúry, ktoré môžu byť reprezentované ako grafy sú všadeprítomné a mnoho problémov z praxe, môžme reprezentovať grafmi. Ako graf môžeme chápať napríklad model odkazov na webové stránky. Veľa grafov sa využíva napr. v cestovaní, biológií, architektúre počítačových čipov a v mnohých ďalších oblastiach. O vývoj algoritmov pre prácu s grafmi, je preto veľký záujem.

Ako sa teória grafov vyvíjala, definovali sa rôzne „špeciálne" grafy, ktoré vynikali nejakou vlastnosťou. Medzi takéto grafy patria aj Moorove grafy, ktoré sú v praxi kvôli svojim charakteristikám žiadané. Problém je v tom, že Moorových grafov je veľmi málo. Preto sa skúmajú také grafy, ktoré sa svojimi vlastnosťami približujú k vlastnostiam Moorových grafov a také sú aj Polomerovo Moorove grafy. Je známe, že Polomerovo Moorove grafy existujú pre polomery 1 a 2 a ľubovoľný stupeň. Počítačom sa našli aj Polomerovo Moorove grafy polomeru 3 a stupňa 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Cieľom mojej práce je napísať počítačový program v jazyku C, ktorý mi pre polomer 3 a rôzne stupne nájde Polomerovo Moorove grafy. Výstupy z tohto programu som sa snažil následne graficky interpretovať.

2. ZÁKLADNÉ POJMY

Všetky definície z tejto kapitoly je možné v úplnom znení nájsť v učebnici teórie grafov od M. Knora [7].

DEFINÍCIA: **Graf** je usporiadaná dvojica G = (V(G),E(G)), kde V(G) je konečná množina a E(G) je množina dvojprvkových podmnožín množiny V(G). Prvky V(G) voláme **vrcholy** a prvky E(G) voláme **hrany**.

Graf zobrazujeme tak, že vrcholy kreslíme ako malé kružnice alebo kruhy a hrany ako čiary, ktoré spájajú príslušné dva vrcholy. Graf je teda definovaný ako súbor vrcholov a hrán, pričom hrany spájajú vrcholy. Nie je teda dôležité rozloženie vrcholov a hrán v priestore ani ich tvar. Dôležité je len to, ktoré hrany sú priradené ku ktorým vrcholom. Takže jeden graf je možné nakresliť rôznymi spôsobmi. Táto vlastnosť sa nazýva Izomorfizmus. Grafy G a G' sú izomorfné práve vtedy, keď existuje také zobrazenie f : V(G) →V(G`), že platí :

$$\{ i, j \} \in E(G) \leftrightarrow \{ f(i), f(j) \} \in E(G`)$$

Teda, G a G' sa líšia iba rôznou indexáciou svojich vrcholov.

Všimnime si, že každému prvku z množiny vrcholov V(G) môže prislúchať ľubovoľné množstvo hrán z E(G), ale každej hrane z množiny E(G) odpovedajú práve dva vrcholy. Vo všeobecnosti môžeme uvažovať hrany, ktorých množina vrcholov sa skladá z dvoch totožných vrcholov, ale pre potreby mojej práce budem uvažovať vždy hranu ako množinu dvoch rôznych vrcholov.

DEFINÍCIA: Nech G = (V(G),E(G)) je graf a $v \in V(G)$. Počet tých hrán grafu G, ktoré obsahujú v nazývame **stupeň** vrchola v a označujeme ho $deg_G(v)$.
Ak majú všetky vrcholy v grafe rovnaký stupeň, graf voláme pravidelný.

Neskôr v práci budem mať obvykle obmedzený maximálny stupeň v grafe a budem dopĺňať do grafu hrany tak aby som neprekročil tento maximálny stupeň.

DEFINÍCIA: Postupnosť $v_0, v_1, \ldots, v_k$ *je* **sled** grafu G=(V(G),E(G)), ak platí $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k \in$ V(G) a $v_i v_{i+1} \in E(G)$ pre $0 \leq i < k$. Dĺžka tohto sledu je k.

V prípade, keď $v_i \neq v_j$ pre každé i a j spĺňajúce $0 \leq i < j \leq k$ tak tento sled je **cesta** dĺžky k.

Ak $k \geq 3$ a pre $0 \leq i < j \leq k$ platí $v_i = v_j$ práve vtedy, keď $i = 0$ a $j = k$, tak tento sled nazývame **kružnica** dĺžky k.

Sled v grafe je teda taká postupnosť vrcholov, že každé dva vedľajšie vrcholy v tejto postupnosti sú spojené hranou. Cesta je taký sled, v ktorom sa žiadny vrchol neopakuje a kružnica je taký sled, v ktorom je posledný vrchol totožný s prvým.

DEFINÍCIA: Nech je G = (V(G),E(G)) graf a u ,$v \in$ V(G) sú vrcholy grafu. **Vzdialenosť** vrcholov u a v – $dist_G(u,v)$, je dĺžka najkratšej cesty začínajúcej v u a končiacej vo v.

Pre potreby mojej práce budem uvažovať vždy len také grafy, v ktorých pre každé u a $v \in$ V(G) existuje v G cesta z u do v (súvislé grafy).

DEFINÍCIA: Nech je G = (V(G),E(G)) graf a $v \in$ V(G). Potom **excentricita** vrchola v je :

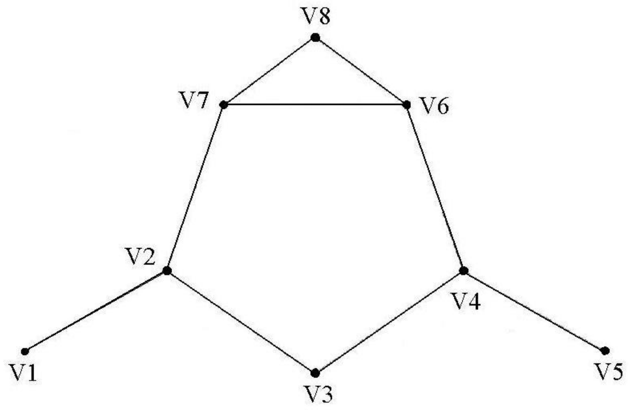
$$e_G(v) = \max_{u \in \mathrm{V(G)}} dist\mathrm{G}(u, v)$$

DEFINÍCIA: Nech je G = (V(G),E(G)) graf. **Priemer** grafu G je *diam*(G) a **polomer** grafu G je *rad*(G), kde

$$diam(G) = \max_{u \in \mathrm{V(G)}} e_G(v)$$

$$rad(G) = \min_{u \in \mathrm{V(G)}} e_G(v)$$

Vzdialenosť vrcholov si môžme predstaviť ako počet hrán, ktoré musíme prejsť aby sme sa dostali z jedného vrchola do druhého. Ak si zmeriame vzdialenosti z jedného vrchola do všetkých ostatných, tak najväčšia z týchto vzdialeností je excentricita vrchola. Najväčšia excentricita v grafe sa nazýva priemer a najmenšia polomer grafu. Priemer mi teda udáva, aká je najväčšia vzdialenosť v grafe a polomer je vždy pridružený k nejakému vrcholu a to takému m,   z ktorého je najväčšia vzdialenosť k ľubovoľnému inému vrcholu najmenšia.



obr.č.1

Parametre grafu na obr.č.1:

Vrcholy sú označené $V_1 - V_8$.

Hranou je napríklad V_1 V_2.

Sledom a cestou v grafe G môže byť napr. V_1 ,V_2 ,V_7 ,V_6, V_4.

Kružnicou v grafe G môže byť napr. V_2 ,V_3 ,V_4 ,V_6, V_7.

Vzdialenosť vrcholov V_1 ,V_5 = $dist_G(V_1, V_5) = 4$.

Stupeň vrcholov: $deg_G(V_1) = deg_G(V_5) = 1$, $deg_G(V_2) = deg_G(V_4) = deg_G(V_6) = deg_G(V_7) = 3$, $deg_G(V_3) = deg_G(V_8) = 2$

Excentricita:

$e_G(V1) = e_G(V5) = 4$, $e_G(V2) = e_G(V3) = e_G(V4) = e_G(V6) = e_G(V7) = e_G(V8) = 3$.

Priemer = *diam*(G) = 4, polomer = *rad*(G) = 3.

3. TYPY GRAFOV

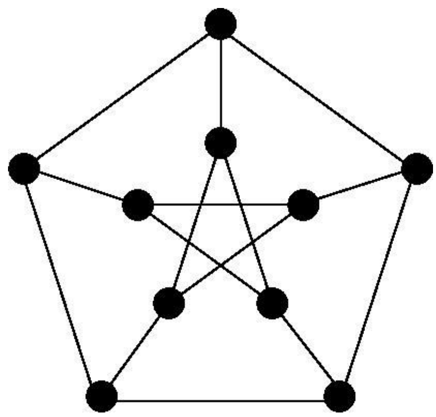
3.1 MOOROVE GRAFY

DEFINÍCIA: Pravidelný graf stupňa t a s priemerom r obsahuje najviac M_{rt} vrcholov. Ak má práve M_{rt} vrcholov volá sa Moorov graf.

$$M_{rt} = 1 + t + t(t-1) + t(t-1)^2 + \dots + t(t-1)^{r-1}$$

Vysvetlenie je jednoduché. Nech *v* je vrchol pravidelného grafu stupňa *t* a s priemerom *r* . Potom počet všetkých vrcholov zo vzdialenosťou od *v* 1, je *t*. Z každého z týchto *t* vrcholov vychádza *t* hrán, pričom jedna z nich končí vo *v*. Takže počet všetkých vrcholov so vzdialenosťou od *v* 2, je $t(t-1)$ a zo vzdialenosťou *i* je $t(t-1)^{i-1}$. Takto vznikne akési ohraničenie počtu vrcholov pre daný priemer a stupeň. Toto ohraničenie ako uvádza [5] prvýkrát používa E. F. Moore po ktorom ho Hoffman a Singleton pomenovali.

Hoffman a Singleton dokázali [5], že Moorove grafy existujú pre stupeň 2,3. Existenciu a neexistenciu Moorových grafov všeobecných stupňov riešia autori E. Bannai aT. Ito [1] a autor R.M. Damerell [3]. Stále je otvoreným problémom, či pre stupeň 57 Moorove grafy existujú alebo nie. Moorove grafy pre priemer 1 a stupeň ≥ 1 sú kompletné grafy (také, ktoré obsahujú všetky možné hrany). Pre stupeň 2 sú kružnice. Moorov graf priemeru 2 a stupňa 3 sa nazýva Petersenov (na obr.č.2) a Moorov graf priemeru 2 a stupňa 7 sa nazýva Hoffman-Singletonov. Moorove grafy sú teda okrem stupňa 57 už všetky známe.



obr.č.2

3.2 GRAFY BLÍZKE MOOROVÝM GRAFOM

Keďže Moorových grafov je veľmi málo, štúdium sa zameralo na hľadanie takých, ktoré majú pri pevne stanovenom priemere a stupni čo najviac vrcholov. Takáto úloha sa nazýva degree – diameter problem. Rozdiel medzi počtom vrcholov tohto grafu a maximálnym možným počtom vrcholov (M_{rt}) voláme defekt.Vieme, že okrem cyklu na štyroch vrcholoch neexistujú grafy s defektom 1 [2][4]. Existuje viacero publikácií, kde autori ukazujú pre aké priemery a stupne neexistujú grafy s defektmi väčšími ako1. V nasledujúcej tabuľke sú vypísané pre určený priemer a stupeň najväčšie nájdené grafy, pričom čísla v bunkách reprezentujú počet vrcholov v týchto grafoch. Rišením degree – diameter problému sa zaoberá množstvo matematikov a stále sa nachádzajú nové výsledky takže je pravdepodobné, že tabuľka sa stane v relatívne krátkej dobe neaktuálna. Na internete je viacero zoznamov pravidelne aktualizovaných výsledkov spolu s autormi riešení.

Pre lepšiu predstavu uvediem jednoduchú aplikáciu degree-diameter problému.

V paralelných počítačoch je napojených na seba viacero procesorov, ktoré pracujú súbežne a teda je ideálne mať ich zapojených v sieti čo najviac, pretože pri zložitých výpočtoch pracujú rýchlejšie. (pri jednoduchých výpočtoch sa naopak efektivita stráca kvôli zdĺhavému prenosu informácií medzi jednotlivými procesormi). Pri navrhovaní štruktúry siete je žiadúce minimalizovať vzdialenosti potrebné na prenos dát medzi jednotlivými procesormi (priemer grafu). Pochopiteľne na každý procesor môže byť napojených len obmedzený počet tokov dát, zberníc. Degree-diameter problém rieši problém ideálneho zapojenia takýchto procesorov.

deg\diam	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
3	10	20	38	70	132	196	336	600	1 250
4	15	41	96	364	740	1 320	3 243	7 575	17 703
5	24	72	210	624	2 772	5 516	17 030	57 840	187 056
6	32	110	390	1 404	7 917	19 383	76 461	307 845	1 253 615
7	50	168	672	2 756	11 988	52 768	249 660	1 223 050	6 007 230
8	57	253	1 100	5 060	39 672	131 137	734 820	4 243 100	24 897 161
9	74	585	1 550	8 200	75 893	279 616	1 686 600	12 123 288	65 866 350
10	91	650	2 286	13 140	134 690	583 083	4 293 452	27 997 191	201 038 922
11	104	715	3 200	19 500	156 864	1 001 268	7 442 328	72 933 102	600 380 000
12	133	786	4 680	29 470	359 772	1 999 500	15 924 326	158 158 875	1 506 252 500
13	162	851	6 560	40 260	531 440	3 322 080	29 927 790	249 155 760	3 077 200 700
14	183	916	8 200	57 837	816 294	6 200 460	55 913 932	600 123 780	7 041 746 081
15	186	1 215	11 712	76 518	1 417 248	8 599 986	90 001 236	1 171 998 164	10 012 349 898
16	198	1 600	14 640	132 496	1 771 560	14 882 658	140 559 416	2 025 125 476	12 951 451 931
17	274	1 610	19 040	133 144	3 217 872	18 495 162	220 990 700	3 372 648 954	15 317 070 720
18	307	1 620	23 800	171 828	4 022 340	26 515 120	323 037 476	5 768 971 167	16 659 077 632
19	338	1 638	23 970	221 676	4 024 707	39 123 116	501 001 000	8 855 580 344	18 155 097 232
20	381	1 958	34 952	281 820	8 947 848	55 625 185	762 374 779	12 951 451 931	78 186 295 824

3.3 POLOMEROVO MOOROVE GRAFY

Ukázali sme si, že hľadanie najväčšieho možného počtu vrcholov pri danom priemere a stupni má svoje opodstatnenie. Takéto doteraz nájdené grafy až na niekoľko výnimiek nemôžeme nazvať Moorovými, lebo nespĺňajú podmienku počtu vrcholov. My však môžeme študovať také grafy, ktoré nespĺňajú niektorú inú podmienku z definície Moorových grafov. Ako takúto alternatívu k Moorovým grafom môžeme definovať Polomerovo Moorove grafy.

DEFINÍCIA: Pravidelný graf stupňa t a s polomerom r a priemerom nanajvýš r+1 obsahuje najviac M_{rt} vrcholov. Ak má práve M_{rt} vrcholov volá sa Polomero Moorov graf.

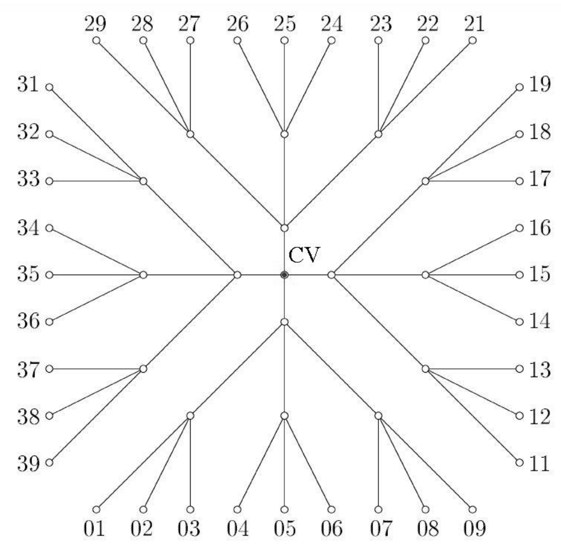
$$M_{rt} = 1 + t + t(t-1) + t(t-1)^2 + \ldots + t(t-1)^{r-1}$$

Je známe, že Polomerovo Moorove grafy existujú pre polomery 1 a 2 a ľubovoľný stupeň. M.Knor ukázal [6], že existujú Polomerovo Moorove grafy polomeru tri a stupňa 3,4,5,6,7.

Na ilustráciu takýchto grafov modifikujem príklad z predchádzajúcej kapitoly.

V paralelných počítačoch je napojených na seba viacero procesorov, ktorých sa snažíme zapojiť podľa určitých podmienok čo najviac. Pri navrhovaní siete zapojenia je žiadúce minimalizovať vzdialenosti potrebné na prenos dát medzi jednotlivými procesormi (priemer grafu). Navyše chceme mať v sieti zapojený taký uzol, z ktorého je vzdialenosť do ľubovoľného iného procesora čo najmenšia (polomer grafu). Pochopiteľne na každý procesor môže byť napojených len obmedzený počet tokov dát, zberníc. Ideálnym modelom takejto siete je Polomerovo Moorov graf.

Polomerovo Moorov graf je definovaný aj polomerom a ten sa vždy viaže k nejakému vrcholu. Tento vrchol budem volať centrálny vrchol – CV. Vieme, že vzdialenosť z tohto vrchola do ľubovoľného iného je zhora ohraničená a teda vieme, že každý Polomerovo Moorov graf obsahuje podgraf, ktorý je stromom (súvislý graf bez kružníc) koreniacim v CV (pozri obr.č.3). V tomto strome môžme dopĺňať hrany len do koncových vrcholov, na obrázku označených číslom, lebo ostatné už majú maximálny stupeň. Za koncové vrcholy v strome budem považovať tie vrcholy, ktoré majú stupeň 1 (práve koncové vrcholy sú na obrázku očíslované).



obr.č.3

4. HĽADANIE POLOMEROVO MOOROVÝCH GRAFOV

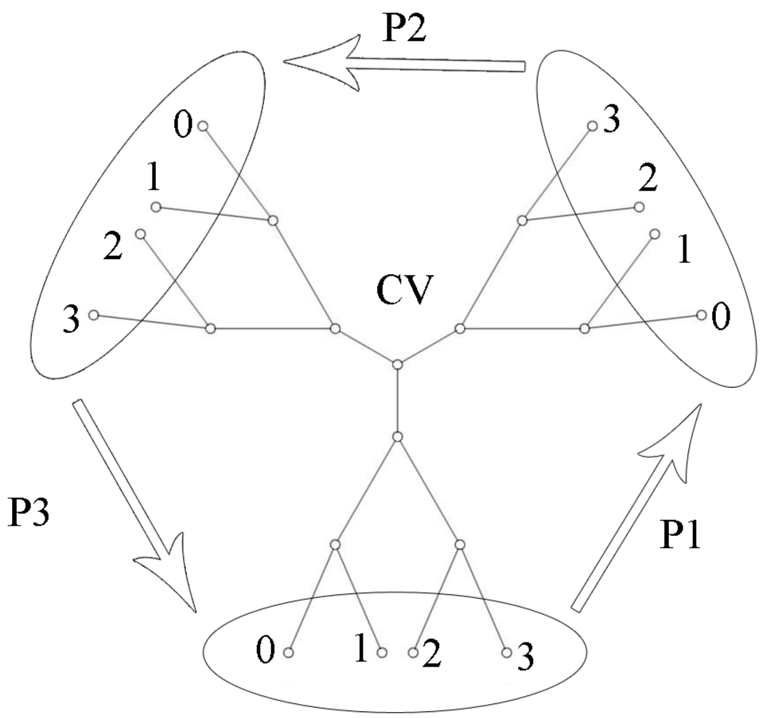
Niekoľko matematikov sa venovalo hľadaniu Polomerovo Moorových grafov. Pre polomer 1 sú riešenia triviálne, polomer 2 rieši N.Lopez [8]. Polomeru 3 ako som už uviedol sa venuje M.Knor [6]. V nasledujúcich kapitolách popisujem spôsob, s ktorým je možné Polomerovo Moorove grafy nájsť. Venujem sa polomeru 3 a začnem stupňom tri. Stupeň jedna a dva vynechávam, pretože hľadať pre tieto stupne Polomerovo Moorove grafy je triviálne a zbytočné popisovať.

4.1 PROGRAM PRE VÝPOČET GRAFOV STUPŇA 3

4.1.1 GRAFY STUPŇA 3

Keď chceme zostrojiť Polomerovo Moorove grafy stupňa 3, musíme teda najprv zostrojiť strom na M_{rt} vrcholoch. Z obr.č.4 vidíme, že tento strom má $t(t-1)^{r-1}$ koncových vrcholov do ktorých môžeme doplĺňať hrany. Aby sme získali Polomerovo Moorov Graf z definície vieme, že musíme hrany doplniť tak, aby výsledný graf mal priemer najviac 4. Ak získame taký graf, ktorý by mal priemer 3 získame dokonca Moorov graf. Z CV stromu vychádza t

vetiev a práve vzdialenosti koncových vrcholov z jednej takejto vetvy do inej sú zatiaľ najväčšie. Z týmto poznatkom by bolo nelogické spájať dva vrcholy z tej istej vetvy vychádzajúcej z CV. Pri stupni 3 má každý vrchol pridružené tri hrany. V koncových vrcholoch je práve jedna hrana už použitá a teda dopĺňam iba dve. Najrozumnejšie z hľadiska minimalizovania priemeru je teda vrchol spojiť s takými dvoma vrcholmi, z ktorých každý je z inej vetvy. Ak si koncové vrcholy každej vetvy označíme číslicami 0 – 3 (pozri obrázok) tak môžeme množinu hrán koncových vrcholov jednej vetvy končiacich v druhej vetve zakódovať do štvorice čísiel 0 – 3. Z tejto štvorice potom prvá číslica kóduje, v ktorom vrchole z jednej vetvy končí prvý vrchol z inej vetvy. Podobne druhá číslica mi hovorí, v ktorom vrchole končí druhý vrchol . . . Takže vieme graf zakódovať do trojice permutácií čísiel 0 – 3 (na obr.č.4 to sú P1, P2, P3). Pokiaľ by boli tieto tri permutácie rovnaké a graf si nakreslíme v takom tvare ako je na obrázku, v grafe vzniknú rotačné symetrie so stredom rotácie v CV. Jednoducho, keď si graf na obr.č.4 (s už doplnenými hranami podľa P1 = P2 = P3) otočíme o 120 alebo 240 stupňov, natočený obrázok bude vyzerať rovnako. Tento fakt mi pomôže tým, že vrcholy všetkých troch vetiev v tomto grafe majú rovnaké vlastnosti napr. excentricitu a teda bude jednoduchšie zistiť, či je daný graf Polomerovo Moorov.



obr.č.

4.1.2 Popis programu

Program v prílohe č.1 hľadá všetky Polomerovo Moorove grafy, ktoré sa dajú zapísať v tvare jednej permutácie čísiel 0 – 3. Graf som sa v počítači rozhodol reprezentovať ako dvojrozmerné pole, v ktorom prvý index je číslo vrchola v, druhý je číslo hrany e a samotná hodnota poľa je číslo vrchola s ktorým je v s hranou e spojené.

Program sa dá rozčleniť podľa týchto bodov:

1. Vytvorenie stromu (ktorý je pre všetky grafy rovnaký)
2. Vygenerujem si všetky možné permutácie a teda všetky potencionálne grafy.
3. Postupne pre všetky potencionálne grafy:

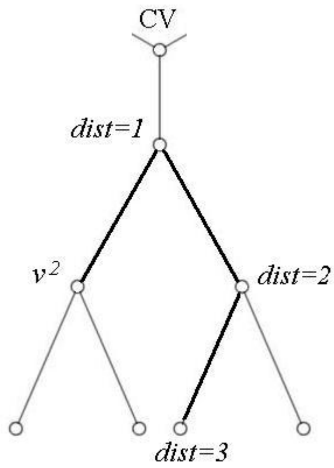
   -Pomocou algoritmu prehľadávania do šírky zistím excentricitu všetkých vrcholov.

   -Vypíšem výsledky, ak graf spĺňa podmienky Polomerovo Moorovho Grafu zapíšem do súboru permutáciu, ktorá ho určuje.

Algoritmus prehľadávania do šírky:

- Do prázdnej fronty vložím vrchol w, ktorého excentricitu hľadám a priradím mu nulovú vzdialenosť vzd(w) = 0.
- Vzdialenosti všetkých ostatných vrcholov v položím vzd(v) = ∞.
- Vytiahnem prvý vrchol z fronty (v_1).
- Prezriem všetky jeho susedné vrcholy (v_2) a pre každý z nich:
  - Ak je vzd(v_2) > ako vzd(v_1) + 1,
    - vzd(v_2) = vzd(v_1) + 1
    - Vložím (v_2) do fronty
- Keď je vo fronte nejaký vrchol alebo ak existuje vrchol ktorého vzd = ∞, vráť sa na tretí krok, t.j. Vytiahnem prvý vrchol z fronty (v_1).
- Excentricita $w = \max_{v \in V(G)} \text{vzd}(v)$

Už po vytvorení stromu poznáme definitívnu vzdialenosť z CV do ľubovoľného iného vrchola. Označme si všetky vrcholy grafu G zo vzdialenosťou i od CV v^i. Vzdialenosť z takéhoto vrchola do CV je i a z polomeru grafu vieme, že vzdialenosť z CV do ľubovoľného iného je najviac rad(G). Potom vidíme, že vzdialenosť každého vrchola v^i do ľubovoľného iného je najviac *rad* (G) + i. Takže vieme, že excentricita vrcholov v^1 je najviac *rad* (G) + 1 a teda v programe, ktorý hľadá Polomerovo Moorove grafy nemusím zisťovať pomocou prehľadávania do šírky excentricitu týchto vrcholov. Aby sa program ešte viac urýchlil môžem vynechať ešte ďalšie vrcholy. Z obr.č.5 vidíme, že z každého vrchola v^2 je vzdialenosť do ľubovoľného koncového vrchola tej istej vetvy koreniacej v CV najviac rovná 3. Pretože každý z koncových vrcholov jednej vetvy spájam hranou s iným vrcholom ďalších vetiev, vzdialenosť v^2 do ľubovoľného vrchola je vždy najviac 4 a teda v programe mi stačí kontrolovať iba excentricitu koncových vrcholov. V kapitole 4.1.1 som popísal, že pri použití rovnakých permutácií na spájanie vrcholov všetkých vetiev majú vrcholy týchto vetiev rovnaké excentricity a teda v programe kontrolujem iba excentricitu koncových vrcholov patriacich jednej vetve koreniacej v CV. Pri stupni tri teda zisťujem excentricitu namiesto 22 vrcholov iba 4. V ďalšom texte budem vetvu stromu koreniacu v centrálnom vrchole nazývať iba vetva.



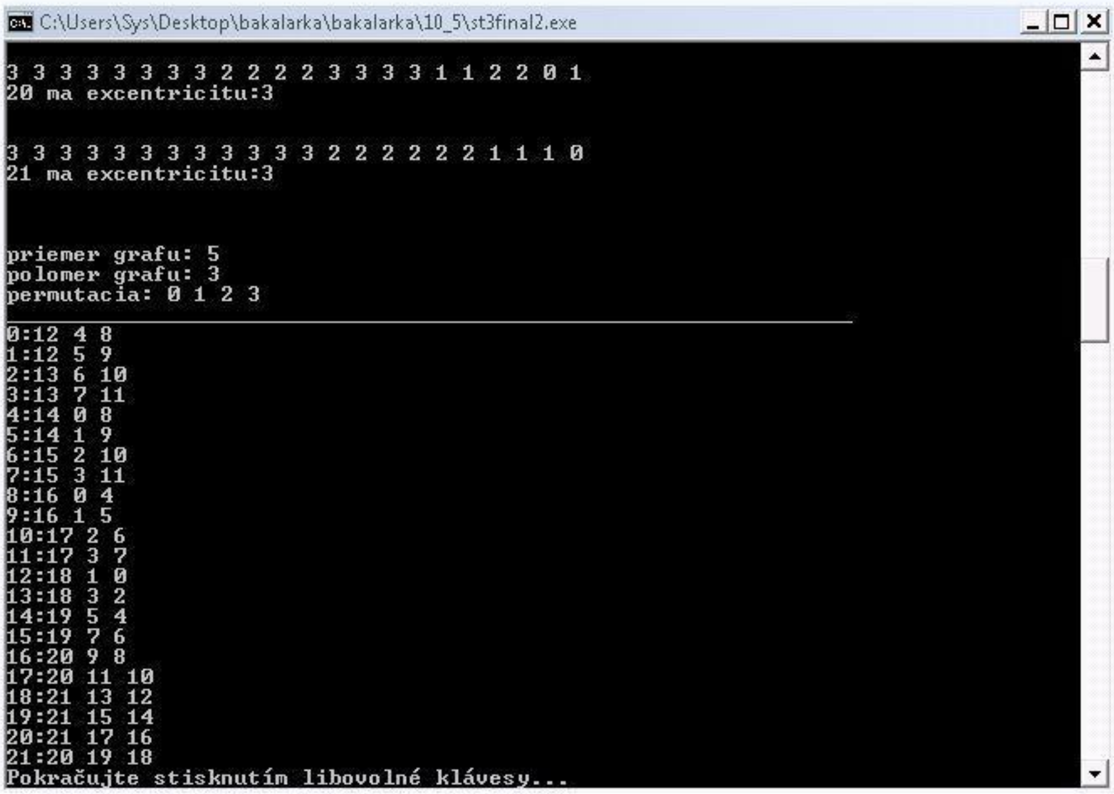
obr.č.5

Výstup programu:

Program zapisuje pod seba permutácie určujúce Polomerovo Moorove grafy do súboru *vysledky.txt*

V konzolovom okne mi program píše podrobnejší výstup pre každý graf:

- vzdialenosti prvého vrchola k ostatným vrcholom postupne v riadku
- poradové číslo prvého vrchola a jeho excentricitu
- vzdialenosti druhého vrchola k ostatným vrcholom postupne v riadku
- poradové číslo druhého vrchola a jeho excentricitu
- ...
- vzdialenosti posledného vrchola k ostatným vrcholom postupne v riadku
- poradové číslo posledného vrchola a jeho excentricitu
- priemer grafu
- polomer grafu
- permutácia, ktorá graf určuje
- výpis grafu tak, že v riadkoch pod sebou pre všetky vrcholy vypíše: " číslo vrchola: čísla susedných vrcholov „



obr.č.6

Výsledky:

Program mi zo všetkých 24 testovaných grafov (počet permutácií štyroch prvkov je 4!) našiel 17 Polomerovo Moorových grafov.

Zavediem si operátor O, ktorého aplikáciou na množinu čísiel (permutáciu P určujúcu graf), sa mi každý prvok z tejto množiny zvýši o jedna a najväčší prvok z tejto množiny sa bude rovnať nule.

$$O(\{P\}) : \quad p_i` = p_i + 1 \, , \; i \in \langle 1,n \rangle$$

$$p_j` = 0 \, , \; p_j = \max(p_i) \, , \; i \in \langle 1,n \rangle$$

Kde O je operátor, {P} je množina na ktorú O aplikujememe, *p* sú prvky tejto množiny a *p*` sú prvky ktoré pomocou O získame.

Po aplikácií operátora O na permutáciu P ktorá reprezentuje graf dostávame permutáciu P`, ktorá reprezentuje nejaký iný graf. Ak množina P obsahuje iba celé čísla z intervalu < 0, *n-1* > a *n* je počet prvkov P, tak po *n* - násobnom aplikovaní tohto operátora na množinu P dostávame identitu. Pre grafy stupňa 3 teda pre každú permutáciu:

$$O(O(O(O(\{P\})))) = P$$

Teraz usporiadam množinu všetkých permutácií grafov stupňa 3 za pomoci operátora O. Permutácie Polomerovo Moorových Grafov a zároveň výsledky programu zapíšem tučne.

P	0 1 2 3	1 0 2 3	0 2 1 3	0 1 3 2	0 3 2 1	3 1 2 0
O({P})	**1 2 3 0**	**2 1 3 0**	**1 3 2 0**	**1 2 0 3**	1 0 3 2	**0 2 3 1**
O(O({P}))	**2 3 0 1**	**3 2 0 1**	**2 0 3 1**	**2 3 1 0**	2 1 0 3	**1 3 0 2**
O(O(O({P})))	**3 0 1 2**	**0 3 1 2**	**3 1 0 2**	**3 0 2 1**	**3 2 1 0**	**2 0 1 3**

Takto usporiadané výsledky sú pekné, z každej štvorice buď jeden graf nie je Polomerovo Moorov alebo práve jeden je. Preto sa zdá, že môžeme nájsť nejakú zákonitosť pomocou ktorej môžeme prehlásiť, kedy graf nie je Polomerovo Moorov a kedy je. Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že graf nie je Polomerovo Moorov ak jeho permutáciou je involúcia, čiže také zobrazenie ktorého dvojaké prevedenie dáva identitu. Na vyvrátenie tohto predpokladu uvádzam ďalšiu tabuľku, do ktorej ku príslušnej permutácií dopĺňam informáciu, najmenej koľkokrát treba toto zobrazenie aplikovať, aby sa zobrazilo samo na seba.

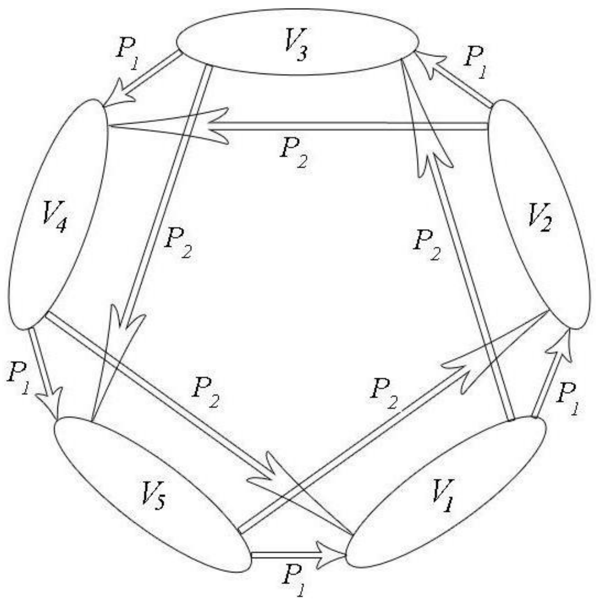
P	0 1 2 3	1	1 0 2 3	2	0 2 1 3	2	0 1 3 2	2	0 3 2 1	2	3 1 2 0	2
O({P})	**1 2 3 0**	4	**2 1 3 0**	3	**1 3 2 0**	3	**1 2 0 3**	3	1 0 3 2	2	**0 2 3 1**	3
O(O({P}))	**2 3 0 1**	2	**3 2 0 1**	4	**2 0 3 1**	4	**2 3 1 0**	4	2 1 0 3	2	**1 3 0 2**	4
O(O(O({P})))	**3 0 1 2**	4	**0 3 1 2**	3	**3 1 0 2**	3	**3 0 2 1**	3	**3 2 1 0**	2	**2 0 1 3**	3

4.2 GRAFY STUPŇOV VÄČŠÍCH AKO 3

Ďalej musíme rozlíšiť grafy párnych stupňov a nepárnych stupňov. Program v prílohe č.2 pracuje všeobecne pre oba typy. Pri stupni 3 som hľadal všetky možné grafy (pri zachovaní symetrie). Pre vyššie stupne mi však veľmi rýchlo narastá počet potencionálnych Polomerovo Moorových grafov ktoré treba testovať. Pri stupni 3 je to 24 grafov, pri stupni 4 aspoň 362 880 grafov, pre stupeň 5 je to 2 * 16! a pre vyššie stupne je to veľa grafov. Takže aj na veľmi rýchlom počítači by nájdenie všetkých P.M. grafov väčších stupňov bolo príliž zdĺhavé. Rozhodol som sa preto skúmať vždy iba menšiu skupinu grafov. Túto skupinu som zvolil tak, že si zvolím ľubovoľnú permutáciu $t(t\text{-}1)^{r\text{-}1}$ čísiel 0 až $t(t\text{-}1)^{r\text{-}1}$ -1. Na túto permutáciu potom $t(t\text{-}1)^{r\text{-}1}$ krát aplikujem operátor O, čím získam $t(t\text{-}1)^{r\text{-}1}$ rôznych permutácií, ktoré potom používam na zobrazovanie vrcholov z jednej vetvy do inej. Tým sa mi počet možných Polomerovo Moorových grafov výrazne zníži.

4.2.1 GRAFY NEPÁRNYCH STUPŇOV VÄČŠÍCH AKO 3

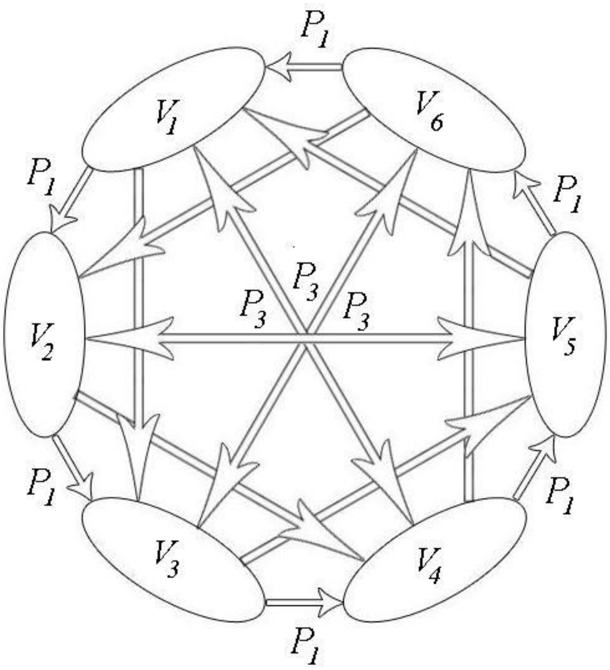
Keď chceme zostrojiť Polomerovo Moorove grafy stupňa väčšieho ako 3, musíme najprv zostrojiť strom na M_{rt} vrcholoch. Tento strom má $t(t\text{-}1)^{r\text{-}1}$ koncových vrcholov v t vetvách. V koncových vrcholoch je práve jedna hrana už použitá a teda do každého vrchola dopĺňam t-1 hrán pričom každá z týchto hrán končí v inej vetve. Aby sme získali rotačné symetrie ako pri stupni 3 musíme pre každú vetvu použiť rovnaké zobrazenia ako pre ostatné vetvy. Na obr.č.7 je zobrazené, ako treba aplikovať permutácie P_1 a P_2 na jednotlivé vetvy pri stupni 5 a pre jednoduchosť nie sú vyznačené vrcholy ani hrany ale iba samotné vetvy $V_1, \dots, V_5$. So zachovaním symetrie každý graf nepárneho stupňa t môžem reprezentovať (t-1) / 2 rôznymi permutáciami. Z toho (t-1) pretože jedna hrana už je použitá pri vytvorení stromu a /2 preto, lebo práve polovicu hrán zobrazujem na iné vetvy a druhá polovica pochádza zo zobrazení iných vetiev (pozri obr.č.7).



obr.č.7

4.2.2 GRAFY PÁRNYCH STUPŇOV VÄČŠÍCH AKO 3

Ak t je párne a zostrojíme strom na M_{rt} vrcholoch, tento strom má $t(t\text{-}1)^{r\text{-}1}$ koncových vrcholov v t vetvách. V koncových vrcholoch je práve jedna hrana už použitá a teda do každého dopĺňam t-1 hrán pričom každá z týchto hrán končí v inej vetve. Aby sme získali rotačné symetrie ako pri stupni 3 musíme pre každú vetvu použiť rovnaké zobrazenia ako pre ostatné vetvy. Pri párnom t to je problém. Vetvy máme označené $V_1, \dots, V_t$ a permutácie $P_1, \dots, P_{t/2}$. Z každej vetvy V_n idú hrany do V_{n+1} podľa P_1, V_{n+2} podľa P_2, ... Teda z V_n do $V_{n+(t/2)}$ by som mal priradiť hrany podľa $P_{t/2}$ a rovnako z $V_{n+(t/2)}$ do V_n by som mal priradiť hrany podľa $P_{t/2}$. Vznikol spor s podmienkou, ktorú sa snažím dodržať, aby každý vrchol z jednej vetvy bol spojený práve z jedným vrcholom inej vetvy. Táto podmienka bude dodržaná v prípade, ak permutácia $P_{t/2}$ bude involúciou. Množina hrán, ktorá vznikne priradením hrán z V_n do $V_{n+(t/2)}$ podľa involúcie $P_{t/2}$ bude totožná s množinou hrán, ktorá vznikne priradením hrán z $V_{n+(t/2)}$ V_n podľa involúcie $P_{t/2}$. Involúciu môžeme teda chápať ako také zobrazenie ktorého k+1 násobná aplikácia je inverzná ku k-tej aplikácií. Takže pri zostrojovaní Polomerovo Moorových grafov párnych stupňov treba dbať na to, aby permutácia $P_{t/2}$ bola involúcia. Na obr.č.8 ilustrujem pri stupni 6 rozloženie zobrazení P_1, . . . ,P_3 na vetvy V_1, . . . ,V_6.



obr.č.8

4.2.3 POPIS PROGRAMU

Program v prílohe č.2 hľadá všetky Polomerovo Moorove grafy, ktoré sa dajú zapísať v tvare n permutácií čísiel 0 až $t(t\text{-}1)^{r\text{-}1}$. Program podľa prvej permutácie spojí hranami vrcholy z vrcholmi vedľajšej vetvy podľa druhej permutácie spája s vrcholmi s druhej nasledujúcej vetvy, . . . Pri párnych stupňoch mi protiľahlé vrcholy program spája podľa involúcií. Všetky permutácie a involúcie pritom patria množine permutácií, ktorá vznikne opakovaným aplikovaním operátora O na vopred zvolenú permutáciu.

Program sa dá rozčleniť podľa týchto bodov:

1. Vytvorenie stromu (ktorý je pre všetky grafy rovnaký)
2. Vygenerujem si permutáciu pre daný stupeň a tá sa bude posúvať pomocou zadefinovaného operátora O.
3. Ak je stupeň párny, nájdem všetky involúcie z množiny použiteľných permutácií.
4. Generujem všetky možné grafy a pre každý:

   - Pomocou algoritmu prehľadávania do šírky zistím excentricitu koncových vrcholov jednej vetvy.

   - Ak graf spĺňa podmienky Polomerovo Moorovho Grafu zapíšem do súboru permutáciu, ktorá ho určuje.

Výstup programu:

Do súboru *vysledky.txt* program na koniec súboru pripojí výsledky v tvare:

STUPEN = *t*
Prvá permutácia určujúca prvý Polomerovo Moorov graf
…
N - tá permutácia určujúca prvý Polomerovo Moorov graf

____

Prvá permutácia určujúca druhý Polomerovo Moorov graf
…

Výstup na terminály má vzhľadom na množstvo prehľadávaných grafov len informatívny charakter z hľadiska progresu v celkovej dĺžke trvania programu.

Výsledky:

Výsledky sú vzhľadom na množstvo uvedené v prílohe č.3 ako aj na priloženom cd. Program som spustil pre stupne 1 až 7 a základnú permutáciu som generoval podľa nasledujúceho pravidla.

Označím si vetvy koreniace v CV stromu V^1 a najmenšie vetvy v tomto strome V^2. Pod pojmom najmenšie vetvy myslím také vetvy, ktorým patrí vždy len stupeň -1 koncových vrcholov grafu ležiacich vedľa seba a ďalší vrchol s ktorým sú spojené hranami. V grafe máme teda stupeň vetiev V^1 z ktorých každá obsahuje stupeň - 1 vetiev V^2. Hrany dopĺňam do koncových vrcholov tak, že žiadne dva vrcholy patriace nejakej V^2 nemôžu byť spojené s takými dvoma vrcholmi, ktoré patria inej V^2. Takže ak chcem spojiť hranami V^1_1 a V^1_2, tak prvý vrchol z prvej $V^2 \in V^1_1$ spojím s prvým vrcholom prvej $V^2 \in V^1_2$. Druhý vrchol z prvej $V^2 \in V^1_1$ spojím s prvým vrcholom druhej$V^2 \in V^1_2$ a n – tý vrchol z m – tej $V^2 \in V^1_1$ spojím s m - tým vrcholom n – tej $V^2 \in V^1_2$.

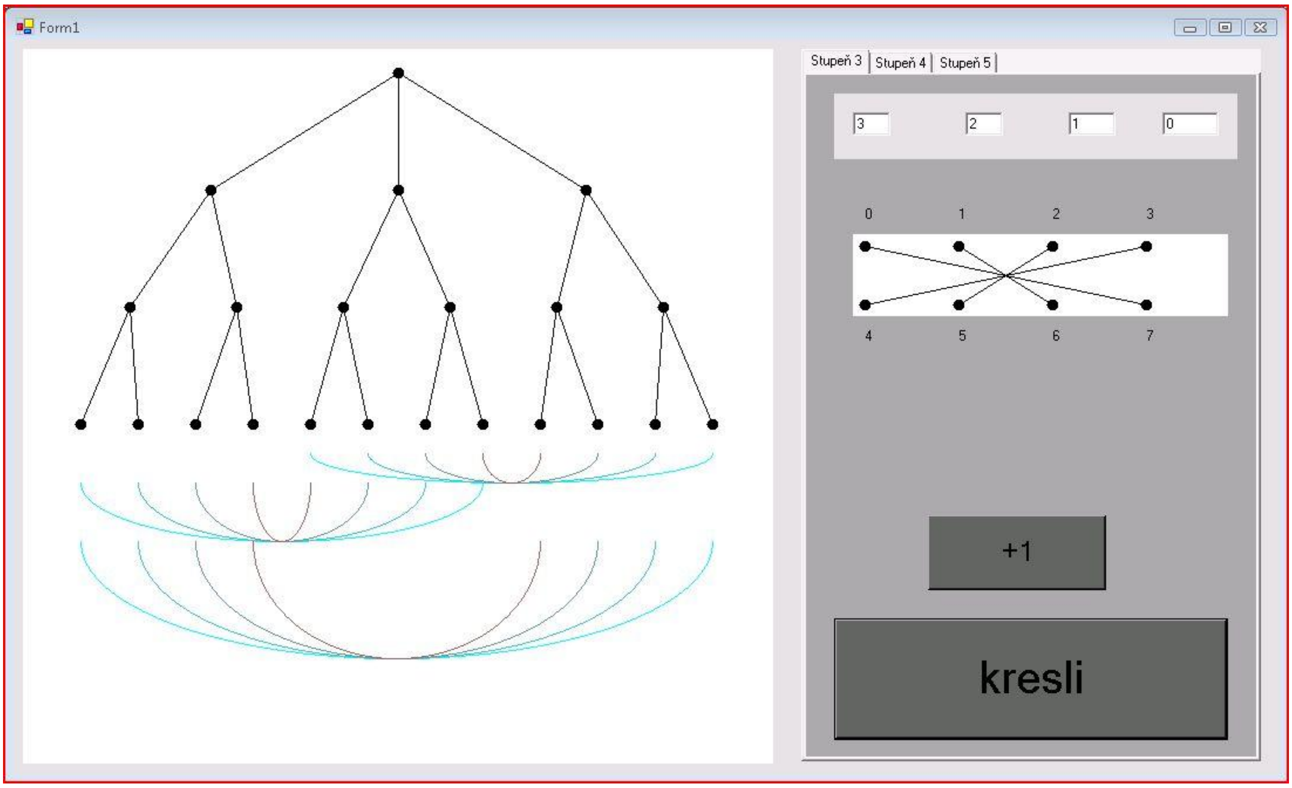
Pre takto zvolené zobrazenia som získal nasledujúce počty Polomerovo Moorových grafov:

Stupeň = 3	Stupeň = 4	Stupeň = 5	Stupeň = 6	Stupeň = 7
3 riešenia	0 riešení	22 riešení	4 riešenia	16 riešení

Za predpokladu, že program môžeme nechať spustený ľubovoľne dlho, je možné len malou zmenou v programe a to zmenou hodnoty stupňa v programe nájsť výsledky pre ľubovoľný stupeň grafu.

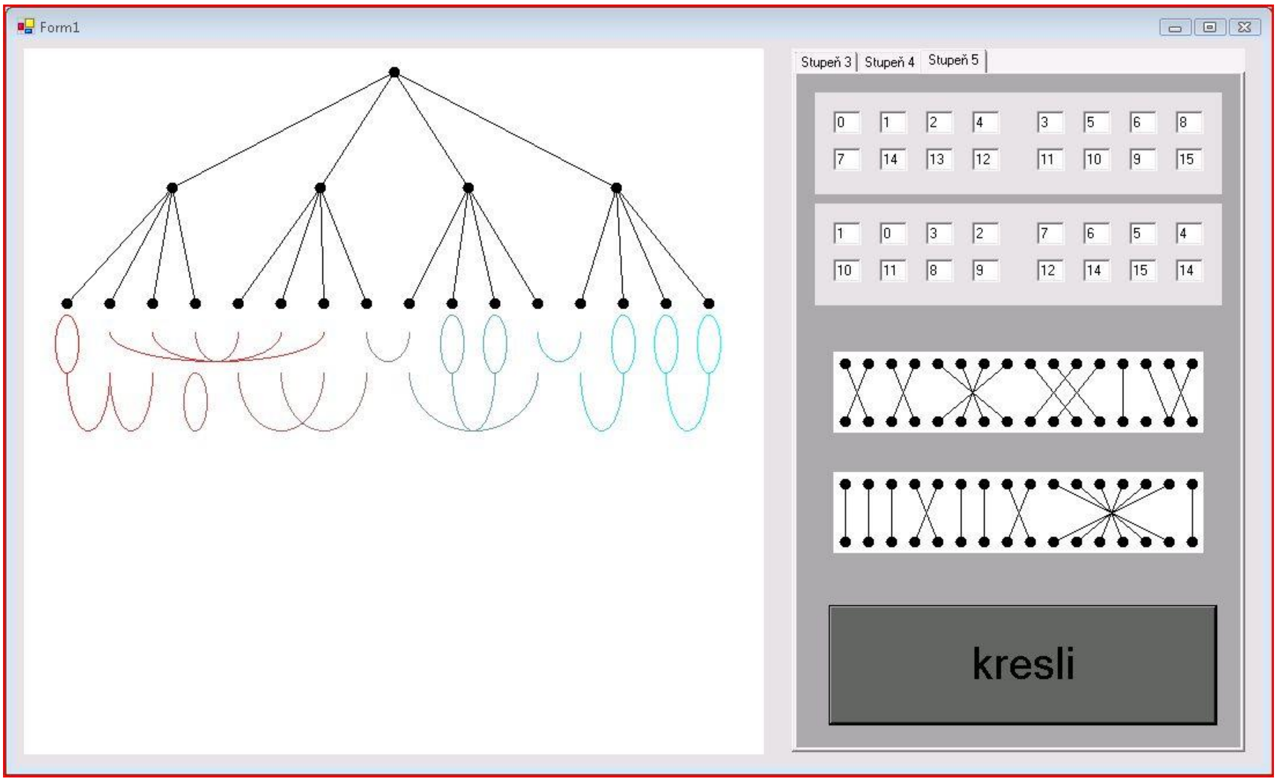
5.VIZUALIZÁCIA VÝSLEDKOV

Pretože pod n – ticou permutácií sa len veľmi ťažko dá predstaviť graf a pretože je často krát dobré vidieť konkrétny graf pri skúmaní rôznych zákonitostí napísal som program pomocou Microsoft Visual Studio, ktorý mi pre zadané zobrazenie v tvare permutácie alebo permutácií vykreslí príslušný graf. Žiaľ vďaka vývojovému prostrediu v ktorom som program napísal sa dá spustiť iba pod operačnými systémami Windows. Program má na ľavej strane plochu na ktorú sa graf vykesľuje a na pravej strane sú tri karty – pre stupne 3, 4 a 5. Na karte pre stupeň 3 (obr.č.8) sú 4 textové polia. Po vpísaní požadovanej permutácie do týchto polí a stlačení tlačidla „kresli“ sa vľavo zobrazí požadovaný graf. Po stlačení druhého tlačidla „+1“ sa na permutáciu aplikuje operátor O definovaný v 4.1.2. Hrany v grafe sú nakreslené kvôli prehľadnosti v troch úrovniach pod sebou a majú rôzne farby.



obr.č.8

Pre definovanie grafov stupňa 4 už sú potrebné dve zobrazenia. Na ďalšej karte pre stupeň 4 sú preto dva rady textových polí, každé určené pre jednu permutáciu. Hrany sú vykreslené v troch úrovniach pod vrcholmi a v jednej úrovni nad vrcholmi. Už tieto grafy majú množstvo vrcholov a začínajú byť neprehľadné. Preto grafy stupňa 5 vykresľujem takým spôsobom (obr.č.9), že zobrazím iba jednu vetvu a tá sa potom zobrazí sama na seba, pričom ak sa niektorý vrchol má zobraziť sám na seba tak hranu kreslím ako slučku pri danom vrchole. Program a zdrojový súbor je na priloženom cd ako príloha č. 4.


Form1
Stupeň 3
Stupeň 4
Stupeň 5
0
1
2
4
3
5
6
8
7
14
13
12
11
10
9
15
1
0
3
2
7
6
5
4
10
11
8
9
12
14
15
14
kresli

obr.č.9

6. ZÁVER

Práca oboznamuje čitateľa s problematikou Moorových grafov a následne definuje pojem Polomerovo Moorových grafov a uvádza možný postup ktorým je možné tieto grafy nájsť.

Cieľom práce bolo zostrojiť funkčný počítačový program ktorý by tieto grafy generoval. Takýto program som napísal a pre stupeň tri som našiel všetky Polomerovo Moorove grafy, o ktoré sa zaujímam. Pre vyššie stupne žiaľ pre vysokú náročnosť výpočtov som skúmal len menšie skupiny grafov a získal som uspokojivé výsledky. Nakoniec som zostrojil program, ktorý mi dokáže podať výstup v tvare grafickej reprezentácie nájdených grafov. To však bolo možné len pre stupne 3, 4 a 5 pretože grafy vyšších stupňov majú príliš veľa vrcholov a hrán na to, aby bol vykreslený graf prehľadný. Programy sú písané všeobecne, aby po zmene jedinej premennej pracovali pre rozličné stupne.

Práca je štruktúrované v siedmych častiach. Prvou časťou práce je úvod, v ktorej oboznamujem s cieľom práce. V ďalešej časti definujem pojmy, ktoré v neskoršom texte používam a s ktorými sa je potrebné obznámiť pre porozumenie tejto práce. V tretej kapitole definujem a popisujem Moorove a Polomerovo Moorove grafy. Uvádzam, čím sa tieto skupiny grafov vzájomne líšia. Nasledujúca kapitola rieši a analyzuje možné spôsoby spôsobu hľadania týchto grafov. Tu popisujem a stručne charakterizujem programy, ktoré som pre tieto účely zostrojil. Uvádzam dva programy a špecifikujem pozitíva každého pri hľadaní Moorových grafov. Výhoda prvého programu spočíva v tom, že dokáže nájsť veľkú množinu grafov. Naproti tomu je možné druhým programom násť podstatne menej grafov ale v ďaleko prijateľnejšom čase. V piatej kapitole vizualizujem výsledky nájdených grafov. Vizualizácia je len pre grafy malých stupňov, nakoľko zobrazenie grafov veľkých stupňov by bolo neprehladné.

Predmetom ďalšieho skúmania by mohla byť optimalizácia výpočtového času alebo hľadanie takých zákonitostí v Polomerovo Moorových grafoch, s pomocou ktorých by bolo možné nájsť grafy vyšších stupňov alebo priemerov.

7. ZOZNAM POUŽITEJ LITERATÚRY

[1] E. Bannai and T. Ito, Paper On finite Moore graphs, *J.Fac.Sci.Tokyo Univ.***20** (1973) 191-208

[2] E. Bannai and T. Ito, Regular graphs with excess one, *Discrete Mathematics* **37** (1981) 147-158.

[3]R.M. Damerell, Paper On Moore graphs, Proc.Cambridge Philos. Soc.**74** (1973) 227-236

[4] P. Erdos, S. Fajtlowicz and A.J. Ho_man, Maximum degree in graphs of diameter 2, *Networks* **10** (1980) 87-90.

[5] A.J. Hoffman and R.R. Singleton, On Moore graphs with diameter 2 and 3, *IBM J. Res. Develop.* **4** (1960) 497-504.

[6] M. Knor, *Small radially Moore graphs*, Mathematics, Geometry and their Applications, Kocovce, 2007, 59-62.

[7] M. Knor, *Teoria grafov*, Slovenska Technicka Univerzita, Bratislava, (2008)

[8] N.Lopez, On radially Moore graphs, an overview, IWONT 2007, Plzeň, invited talk (2007)