

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Stavebná fakulta

Evidenčné číslo: SvF-5342-9876

Numerické riešenie problému oceňovania konvertibilných dlhopisov

Bakalárska práca

Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie

Číslo študijného odboru: 1114

Názov študijného odboru: 9.1.9 aplikovaná matematika

Školiace pracovisko: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

Vedúci záverečnej práce: Mgr. Pavol Kútik, PhD.

Bratislava 2014

Veronika Šulovská



ZADANIE BAKALÁRSKEJ PRÁCE

Študentka: **Veronika Šulovská**
ID študenta: 9876
Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie
Študijný odbor: 9.1.9 aplikovaná matematika
Vedúci práce: Mgr. Pavol Kútik, PhD.

Názov práce: **Numerické riešenie problému oceňovania konvertibilných dlhopisov**

Špecifikácia zadania:

Práca je zameraná na hľadanie optimálnej hodnoty konvertibilného dlhopisu pomocou numerických metód. V úvode je odvodená parciálna diferenciálna rovnica modelujúca vývoj ceny derivátu. Následne je prevedená do divergentného tvaru a diskretizovaná metódou konečných objemov. Tensorová difúzia je aproximovaná pomocou tzv. "diamond-cell" prístupu. Odvodená plne implicitná schéma je použitá na analýzu vlastností riešenia a vplyvu parametrov na polohu hranice uplatnenia.

Riešenie zadania práce od: 17. 02. 2014
Dátum odovzdania práce: 15. 05. 2014

L. S.

Veronika Šulovská
študentka

prof. RNDr. Radko Mesiar, DrSc.
vedúci pracoviska

prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.
garant študijného programu

POKYNY na vypracovanie bakalárskej práce

Úvodné ustanovenie

V zmysle zákona . 131/2002 Z. z. o vysokých školách a o zmene a doplnení niektorých zákonov v znení neskorších predpisov je súčasťou štúdia pod každého študijného programu aj záverečná práca. Jej obhajoba patrí medzi štátne skúšky. Záverečnou prácou pri štúdiu pod bakalárskeho študijného programu je bakalárska práca. Podkladom na vypracovanie bakalárskej práce je zadanie bakalárskej práce

Štruktúra záverečnej práce

- titulný list,
- zadanie záverečnej práce,
- pokyny na vypracovanie,
- vyhlásenie autora,
- názov a abstrakt v slovenskom a v anglickom jazyku (spolu v rozsahu jednej strany),
- obsah s oíslovaním kapitol,
- zoznam príloh,
- zoznam skratiek a značiek,
- text samotnej práce (odporúčanie lenenie),
 - úvod,
 - súčasný stav problematiky,
 - ciele záverečnej práce,
 - vlastné riešenie lenené na kapitoly podľa charakteru práce,
 - zhodnotenie dosiahnutých výsledkov resp. navrhnutých riešení,
 - záver,
- resumé (len pre práce vypracované v cudzom jazyku),
- zoznam použitej literatúry,
- prílohy (výkresy, tabuľky, mapy, náčrty) vrátane postera s rozmermi 1000x700 mm.

Rozsah a forma

1. Obsah a forma záverečnej práce musí byť spracovaná v zmysle vyhlášky MŠVVaŠ SR . 233/2011 Z. z., ktorou sa vykonávajú niektoré ustanovenia zákona . 131/2002 Z. z. a v zmysle Metodického usmernenia . 56/2011 o náležitostiach záverečných prác.
2. Vyžadovaný rozsah bakalárskej práce je 20 až 30 strán. Odovzdáva sa v dvoch vyhotoveniach. Jedno vyhotovenie musí byť viazané v pevnej väzbe (nie hrebeňovej) tak, aby sa jednotlivé listy nedali vyberať. Rozsiahle grafické prílohy možno v prípade súhlasu vedúceho práce odovzdať v jednom vyhotovení.
3. Autor práce je povinný vložiť prácu v elektronickej forme do akademického informačného systému. Autor zodpovedá za zhodu listinného aj elektronického vyhotovenia.

4. Po vložení závere nej práce do informa ného systému, predloží autor fakulte ním podpísaný návrh licen nej zmluvy. Návrh licen nej zmluvy je vytvorený akademickým informa ným systémom.
5. Odporú aný typ písma je Times New Roman, ve kos 12 a je jednotný v celej práci. Odporú ané nastavenie strany - riadkovanie 1,5, okraj vnútorný 3,5 cm, vonkajší 2 cm, zhora a zdola 2,5 cm, orientácia na výšku, formát A4.
6. Obrázky a vzorce sa íslujú v rámci jednotlivých kapitol (napr. obr. 3.1 je obrázok . 1 v kapitole 3). Vzorce sa íslujú na pravom okraji riadku v okrúhlych zátvorkách - napr. (3.1).
7. Všetky výpo ty musia by usporiadané tak, aby bolo možné preveri ich správnos .
8. Pri všetkých prevzatých vzorcoch, tabu kách, citovaných astiach textu musí by uvedený prame .
9. Citovanie literatúry vrátane elektronických materiálov sa uvádza pod a STN ISO 690 (01 0197): 2012. *Informácie a dokumentácia. Návod na tvorbu bibliografických odkazov na informa né pramene a ich citovanie.*
10. Príklad zoznamu bibliografických odkazov:
 ABELOVI , J. a kol.: *Meranie v geodetických sie ach*. Bratislava: Alfa 1990. 104 s. ISBN 0-1554-9173.
 MICHAL ÁK, O. – ADLER, E.: Výskum stability dunajských hrádzí. In: *Zborník vedeckých prác Stavebnej fakulty SVŠT*. Bratislava: Edi né stredisko SVŠT 1976, s. 17-28. ISBN 0-3552-5214.
 ŠÜTTI, J.: Ur ovanie priestorových posunov stavebných objektov. *Geodetický kartografický obzor*. 2000, ro . 2, . 3, s. 8-16. ISSN 0811-6900.
 Article 18. Technical Cooperation. <http://www.lac.uk/iso/tc456> (2013-09-28)
11. Za jazykovú a terminologickú správnos závere nej práce zodpovedá študent.
12. Formu postera (elektronická alebo aj tla ená) ur í garant študijného programu.
13. Vzor pre poster je uvedený na dokumentovom serveri v akademickom informa nom systéme univerzity.

.....
 podpis garanta študijného programu

Ustanovenia týchto pokynov som vzal na vedomie. Som si vedomý(á), že ak nebude moja bakalárska práca vypracovaná v súlade s týmito pokynmi, nebude prijatá na obhajobu.

V Bratislave

.....
 podpis študenta

Čestné prehlásenie

Prehlasujem, že som bakalársku prácu Numerické riešenie problému oceňovania konvertibilných dlhopisov vypracovala samostatne, na základe použitej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

Bratislava 15. mája 2014

.....
vlastnoručný podpis

Pod'akovanie

Touto cestou by som chcela pod'akovať Mgr. Pavlovi Kútikovi, PhD. za odborné vedenie, cenné rady a pripomienky pri vypracovaní bakalárskej práce.

Numerické riešenie problému oceňovania konvertibilných dlhopisov

Abstrakt:

Táto práca sa zaoberá konvertibilnými dlhopismi a problematikou ich oceňovania. V prvej časti odvodíme parciálnu diferenciálnu rovnicu oceňovania konvertibilných dlhopisov vhodným zostavením portfólia. V druhej časti zostavíme numerický model, v ktorom diskretizujeme odvodenú rovnicu metódou konečných objemov. Na diskretizáciu gradientu použijeme tzv. diamond-cell aproximáciu. V tretej časti rozoberieme problém voľnej hranice, ktorý priamo súvisí s oceňovaním konvertibilných dlhopisov ako derivátov s možnosťou predčasného uplatnenia. V závere práce využijeme odvodenú numerickú schému na uskutočnenie niekoľkých numerických experimentov, v ktorých zisťujeme, aký vplyv majú parametre modelu na polohu hranice predčasného uplatnenia.

Kľúčové slová: konvertibilné dlhopisy, metóda konečných objemov, hranica predčasného uplatnenia, analýza parametrov

Numerical solution for the problem of pricing convertible bonds

Abstract:

This work deals with convertible bonds and the problem of pricing them. In the first part of the work a partial differential equation is derived by creating a convenient portfolio. In the second part, a numerical model is derived using the finite volume method. For the discretization of gradient, a diamond-cell approximation is used. The third part focuses on a free boundary problem that is directly related to the pricing of convertible bonds as derivatives with the possibility of exercising them early. The numerical scheme derived is used for some numerical experiments to determine the influence of the input parameters on the position of the early exercise boundary.

Key words: convertible bonds, finite volume method, early exercise boundary, parameter analysis

Obsah

1	Úvod	1
2	Konvertibilné dlhopisy	3
2.1	Odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice	3
2.2	Okrajové podmienky a terminálová podmienka	6
2.3	Transformácia rovnice na divergentný tvar	8
3	Numerická schéma	9
3.1	Diskretizácia oblasti	9
3.2	Transformácia a implementácia okrajových podmienok	10
3.3	Diskretizácia rovnice	12
4	Problém voľnej hranice pri oceňovaní konvertibilných dlhopisov	16
4.1	Formulácia úlohy s voľnou hranicou	16
4.2	Hľadanie riešenia pomocou lineárnej komplementarity	17
4.3	PSOR algoritmus	17
5	Numerické experimenty	19
5.1	Rád konvergenzie numerickej schémy	19
5.2	Analýza parametrov	20
6	Záver	26

Základné pojmy

- **Akcia** – cenný papier, ktorý dokladá kapitálovú účasť v akciovej spoločnosti a právo na podiel na zisku (na dividendu)
- **Opcia** – kontrakt, pri ktorom má vlastník právo, nie však povinnosť kúpiť (call opcia), resp. predať (put opcia) dané aktívum za vopred dohodnutých podmienok
- **Portfólio** – súbor cenných papierov, investícií a kapitálu vo vlastníctve fyzickej alebo právnickej osoby s cieľom minimalizovať riziko finančnej straty
- **Arbitráž** – operácia spočívajúca v súčasnom nákupe a predaji toho istého tovaru na rozličných burzách s cieľom využiť kurzové rozdiely na dosiahnutie zisku, a to za absencie akýchkoľvek rizík
- **Dlhopis** – cenný papier, s ktorým je spojené právo majiteľa požadovať splácanie dlžnej sumy v menovitej hodnote a vyplácanie výnosov z nej k určitému dátumu a povinnosť emitenta tieto záväzky plniť
- **Emitent** – vypisovateľ dlhopisu
- **Menovitá hodnota** – peňažná suma, na ktorú dlhopis znie, t.j. suma, ktorú emitent vyplatí investorovi v čase splatnosti

Použité skratky

- **r** – spojitá úroková miera
- **D** – spojitý dividendový výnos
- **S** – cena akcie
- **P** – cena dlhopisu
- **V** – cena konvertibilného dlhopisu
- **Z** – menovitá hodnota
- **n** – konverzný pomer konvertibilného dlhopisu
- **T** – doba splatnosti dlhopisu

1 Úvod

Od sedemdesiatych rokov minulého storočia boli zaznamenané početné nestability na finančných trhoch. Spôsobené boli najmä fluktuáciami cien akcií, úrokových mier, výmenných kurzov a indexov. Investície sa stali rizikovejšími, čo vyústilo do potreby nájsť spôsob, ako sa pred takými výkyvmi chrániť. Táto situácia podnietila vznik finančných nástrojov – derivátov, ktorých cena sa odvíja od hodnoty príslušného aktíva. Jedným z takých nástrojov sú aj dlhopisy.

Dlhopis predstavuje kontrakt medzi investorom a emitentom, ktorý vynáša vopred dohodnutú sumu v stanovenom čase, tzv. čase splatnosti. Zvyčajne sú vypisované firmami alebo štátom ako metóda zvýšenia kapitálu, pričom sumu, ktorú investor vyplatí emitentovi pri uzavretí kontraktu, možno chápať ako pôžičku. Dlhopisy možno v súčasnosti zaradiť do triedy najpredávanejších finančných derivátov. Aj napriek ich popularite poskytujú len minimálny výnos, ktorý je však kompenzovaný relatívnou bezpečnosťou investícií. V porovnaní s akciami, ktoré sú síce výnosnejšie, ale aj rizikovejšie, ich možno považovať za konzervatívnu zložku portfólií. Na finančnom trhu však existuje aj hybridný finančný nástroj, ktorý kombinuje to najlepšie z dlhopisov a akcií – konvertibilné dlhopisy.

Konvertibilné dlhopisy sa od bežných dlhopisov odlišujú tým, že majú navyše vlastnosť konvertibility – majiteľ má právo uplatniť opciu na výmenu dlhopisu za akcie spoločnosti v určitom, vopred danom, pomere. Z toho dôvodu konvertibilný dlhopis v čase splatnosti vracia stanovnú čiastku, iba ak ho majiteľ už nepremenil na akcie spoločnosti. Tento typ finančného derivátu je pre investorov veľmi príťažlivý, pretože poskytuje viac flexibility. Ak firma prosperuje, investor si konvertibilný dlhopis uplatní a získa tak akcie, ktorých hodnota je podstatne vyššia ako hodnota dlhopisu.

Na druhej strane, konvertibilné dlhopisy poskytujú určitú istotu v podobe istiny dlhopisu, ktorá chráni investora pred fluktuáciami na trhu. Vlastnosť konvertibility spôsobuje, že sú tieto cenné papiere pre investorov atraktívne, a preto ich spoločnosť môže emitovať aj s nižším výnosom. Spoločnosť tak získa pomerne lacný kapitál, pričom nemusí vydávať nové akcie, čím by negatívne ovplyvnila ich trhovú hodnotu.

V nasledujúcich kapitolách bude odvodená parciálna diferenciálna rovnica, ktorá modeluje cenu konvertibilného dlhopisu. Predstavíme si vlastnosti, ktoré cenu dlhopisu ovplyvňujú

a ako sú zakomponované do okrajových podmienok. Na riešenie tejto parciálnej diferenciálnej rovnice použijeme plne implicitnú numerickú schému, ktorá využíva metódu konečných objemov. Následne sa pozrieme na súvislosť oceňovania konvertibilných dlhopisov s problémom voľnej hranice. V závere uskutočníme analýzu parametrov, ktoré polohu voľnej hranice konvertibilného dlhopisu ovplyvňujú.

Cieľom tejto práce je nájsť dostatočne presné numerické riešenie rovnice oceňovania konvertibilných dlhopisov a následne ho použiť na identifikáciu polohy hranice predčasného uplatnenia. Zo získaných výsledkov je odvodených niekoľko pozorovaní, ktoré vysvetľujú ako sa mení poloha hranice predčasného uplatnenia v závislosti od vstupných parametrov.

2 Konvertibilné dlhopisy

2.1 Odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice

Ak uvažujeme stochastický charakter akcií aj úrokovej miery, cena konvertibilného dlhopisu

$$V = V(S, r, t)$$

je funkciou nezávislých premenných S , r a t (závislosť na čase splatnosti T zatiaľ ne-uvažujeme). Na jej popísanie použijeme dvojfaktorový model, v ktorom predpokladáme, že úroková miera vyhovuje stochastickej rovnici

$$dr = u(r, t)dt + w(r, t)dW_r, \quad (2.1)$$

kde u a w sú nejakými vhodnými funkciami r a t . Vývoj ceny akcie možno reprezentovať geometrickým Brownovým pohybom

$$dS = (\mu - D)Sdt + \sigma_S S dW_S, \quad (2.2)$$

kde μ a σ sú kladné parametre a D je dividendová miera.

Vo vzťahoch (2.1) a (2.2) sú dW_r a dW_S normálne rozdelené náhodné premenné s nulovou strednou hodnotou a rozptylom dt , ale nie sú nevyhnutne nezávislé. Ich vzájomná korelácia je vyjadrená parametrom ρ , kde $-1 \leq \rho \leq 1$.

Pre účely ďalšieho odvodzovania potrebujeme poznať, ako pomocou Itóovej lemy získať prvý diferenciál funkcie dvoch náhodných premenných (viď. [1]). Pre normálne rozdelenú náhodnú premennú $X \sim N(0, \sigma^2)$ platí

$$E[X^n] = \begin{cases} 0 & \text{ak } n \text{ je nepárne} \\ (n-1)\sigma^n & \text{ak } n \text{ je párne} \end{cases}.$$

Prírastky Brownovho pohybu teda môžeme zapísať

- $dW_S^2 = dt$;
- $dW_r^2 = dt$;

- $dW_S dW_r = \rho dt$.

Pre malé prírastky funkcie $V(S + ds, r + dr, t + dt)$ možno sformulovať Taylorov rozvoj v tvare

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dS^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} dS dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} dr^2 + \dots,$$

v ktorom

- $dS^2 \approx \sigma_S^2 S^2 dW_S^2 = \sigma_S^2 S^2 dt$
- $dr^2 \approx w^2 dW_r^2 = w^2 dt$
- $dS dr \approx \sigma_S S w dW_S dW_r = \rho \sigma_S S w dt$.

Itóova lema pre dve náhodné premenné, ktoré sledujú stochastické procesy (2.1) a (2.2) tak nadobudne nasledovný tvar

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} dt + \rho \sigma_S S w \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} dt + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} dt. \quad (2.3)$$

Teraz môžeme pristúpiť k samotnému oceňovaniu konvertibilného dlhopisu. Najprv si zostavíme portfólio, ktoré bude pozostávať z jedného konvertibilného dlhopisu s dobou splatnosti T_1 , $-\Delta_2$ konvertibilných dlhopisov s dobou splatnosti T_2 a $-\Delta$ podkladových aktív

$$\Pi = V_1 - \Delta_2 V_2 - \Delta S \quad (2.4)$$

$$d\Pi = dV_1 - \Delta_2 dV_2 - \Delta dS - D\Delta S. \quad (2.5)$$

Zmena v hodnote portfólia je

$$\begin{aligned} d\Pi = & \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} - \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial t} \right) dt + \left(\frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial S} - \Delta \right) dS + \left(\frac{\partial V_1}{\partial r} - \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} \right) dr + \frac{1}{2} \sigma_S^2 S^2 \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} - \right. \\ & \left. - \Delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} \right) dt + \rho \sigma_S S w \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial r} - \Delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial r} \right) dt + \frac{1}{2} w^2 \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \Delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} \right) dt - D\Delta S. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Keďže dS aj dr obsahujú náhodné členy, Δ a Δ_2 zvolíme tak, aby boli koeficienty pri dS a dr nulové

$$\frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial S} - \Delta = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial r} - \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial r} = 0. \quad (2.8)$$

Voľbou

$$\Delta_2 = \frac{\partial V_1 / \partial r}{\partial V_2 / \partial r} \quad (2.9)$$

a

$$\Delta = \frac{\partial V_1}{\partial S} - \frac{\partial V_1/\partial r}{\partial V_2/\partial r} \frac{\partial V_2}{\partial S} \quad (2.10)$$

tak eliminujeme riziko z portfólia.

Aby sme vylúčili možnosť arbitráže, výnos z nášho portfólia sa musí rovnať okamžitej bezrizikovej úrokovej miere $d\Pi = r\Pi dt$ (viď. [2] a [3])

$$\begin{aligned} d\Pi &= r(V_1 - \Delta_2 V_2 - \Delta S)dt = (rV_1 - rS \frac{\partial V_1}{\partial S})dt - \Delta_2(rV_2 - rS \frac{\partial V_2}{\partial S})dt \\ &= (\frac{\partial V_1}{\partial t} - \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial t})dt + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 (\frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} - \Delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2})dt \\ &\quad + \rho\sigma_S Sw (\frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial r} - \Delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial r})dt + \frac{1}{2}w^2 (\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \Delta_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2})dt \\ &\quad - D(\frac{\partial V_1}{\partial S} - \Delta_2 \frac{\partial V_2}{\partial S})Sdt. \end{aligned}$$

Ak všetky členy obsahujúce V_1 presunieme na ľavú stranu a všetky členy obsahujúce V_2 presunieme na pravú stranu rovnice získame

$$\begin{aligned} &(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\sigma_S Sw \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} + (r - D)S \frac{\partial V_1}{\partial S} - rV_1) = \\ &\Delta_2 (\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} + \rho\sigma_S Sw \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} + (r - D)S \frac{\partial V_2}{\partial S} - rV_2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Teraz si zavedieme nasledovné označenie

$$I_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} + \rho\sigma_S Sw \frac{\partial^2 V_1}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} + (r - D)S \frac{\partial V_1}{\partial S} - rV_1 \quad (2.12)$$

$$I_2 = \frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} + \rho\sigma_S Sw \frac{\partial^2 V_2}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} + (r - D)S \frac{\partial V_2}{\partial S} - rV_2. \quad (2.13)$$

Platí, že

$$I_1 = \frac{\partial V_1/\partial r}{\partial V_2/\partial r} I_2 \quad (2.14)$$

$$\frac{I_1}{\partial V_1/\partial r} = \frac{I_2}{\partial V_2/\partial r}. \quad (2.15)$$

Touto úpravou se získali jednu rovnicu o dvoch neznámych. Avšak vzhľadom na to, že ľavá strana je funkciou T_1 a pravá strana rovnice je funkciou T_2 , prípad rovnosti môže nastať, iba ak sú obidve strany rovnice nezávislé od doby splatnosti T (viď. [3]). Odstránením indexov tak získame

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma_S Sw \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = \frac{\partial V}{\partial r} a(S, r, t), \quad (2.16)$$

kde funkciu $a(S, r, t)$ môžeme zapísať nasledovne

$$a(S, r, t) = w(r, t)\lambda(S, r, t) - u(r, t). \quad (2.17)$$

Funkciu λ nazývame trhovou cenou rizika (viď. [1]) a v prípade nášho modelu ju budeme považovať za konštantnú.

Stochastický proces charakterizujúci priebeh úrokovej miery sme mali dosiaľ zadefinované funkciami u a w , ktoré sme si bližšie nešpecifikovali. V našom finančnom modeli budeme uvažovať

$$u(r, t) = \kappa(\theta - r) \quad (2.18)$$

$$w(r, t) = \sigma_r r^c, \quad (2.19)$$

kde κ , θ , σ_r a c sú kladnými parametrami. Význam trendu v tvare $u(r, t) = \kappa(\theta - r)$ spočíva v tom, že stredná hodnota úrokovej miery je priťahovaná k rovnovážnej hodnote θ , pričom mierou tohto priťahovania je reverzná rýchlosť κ (viď. [2]).

Dosadením vzťahov (2.17), (2.18) a (2.19) do vzťahu (2.16) získame rovnicu

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma_S S\sigma_r r^c \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r^{2c} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \\ + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + [\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma_r r^c] \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

ktorá popisuje cenu konvertibilného dlhopisu. Zaujímavým pozorovaním je, že (2.20) je kombináciou problému oceňovania opcií a dlhopisov. Ak všetky parametre, ktoré vstupujú do procesu modelujúceho vývoj úrokovej miery položíme rovné nule, získame Black-Scholesovu rovnicu oceňovania opcií a pre $\partial V/\partial S = 0$ rovnica predstavuje riešenie klasického problému oceňovania dlhopisov.

2.2 Okrajové podmienky a terminálová podmienka

Z hľadiska analýzy parciálnych diferenciálnych rovníc je potrebné pre rovnicu (2.20) zadefinovať terminálovú podmienku a okrajové podmienky pre hranice oblasti.

Najprv odvodíme vzťah pre terminálovú podmienku. Cena dlhopisu v čase splatnosti T je Z , preto terminálová podmienka nadobudne tvar

$$V(S, r, T) = Z. \quad (2.21)$$

Avšak vzhľadom na to, že majiteľ konvertibilného dlhopisu má v ľubovoľnom čase, teda aj tesne pred splatnosťou dlhopisu, nárok uplatniť si ho, je praktickejšie uvažovať o terminálovej podmienke

$$V(S, r, T) = \max(Z, nS). \quad (2.22)$$

Podmienka (2.22) v podstate hovorí, že majiteľ konvertibilného dlhopisu si v čase T zvolí buď menovitú hodnotu dlhopisu alebo ho vymení za n akcií podľa toho, čo bude mať väčšiu hodnotu (viď. [4]).

Niektoré konvertibilné dlhopisy však majú aj tzv. call feature, ktorá dáva emitentovi možnosť spätného odkúpenia dlhopisu v ľubovoľnom čase za vopred stanovenú čiastku C_p . Keďže toto právo zvyhodňuje emitenta, cena konvertibilného dlhopisu s touto vlastnosťou je podstatne nižšia ako bez nej. “Call feature” a možnosť okamžitého uplatnenia nám na riešenie rovnice pridávajú ďalšie obmedzenia.

Po prvé, majiteľ dlhopisu ho môže kedykoľvek zameniť za n akcií a preto by cena konvertibilného dlhopisu nikdy nemala byť nižšia ako nS , inak by došlo k výskytu arbitrážnej príležitosti. Stačilo by tento dlhopis kúpiť a okamžite uplatniť, čím by sme získali akcie, ktorých predajom by sme benefitovali z ich vyššej trhovej ceny. Preto musí platiť podmienka

$$V(S, r, t) \geq nS. \quad (2.23)$$

Po druhé, “call feature” zabraňuje neobmedzenému rastu hodnoty konvertibilného dlhopisu, pretože pre emitenta je optimálne, aby dlhopis odkúpil, akonáhle jeho hodnota presiahne C_p (viď. [4]). Vznikne nám tak horné ohraničenie pre cenu konvertibilného dlhopisu

$$V(S, r, t) \leq C_p. \quad (2.24)$$

Teraz určíme okrajové podmienky. Vzhľadom na to, že cena aktíva S a ani úroková miera r nemôžu nadobúdať záporné hodnoty, výpočty sa uskutočňujú na oblasti $\tilde{\Omega} = [0, \infty[\times [0, \infty[$. Pre podmienky na hraniciach platí

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r^{2c} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + [\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma_r r^c] \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0 \text{ pre } S \rightarrow 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - DS \frac{\partial V}{\partial S} + \kappa\theta \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \text{ pre } r \rightarrow 0 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \text{ pre } r \rightarrow \infty \quad (2.27)$$

$$V(S, r, t) = nS \text{ resp. } C_p \text{ pre } S \rightarrow \infty. \quad (2.28)$$

Rovnice (2.25) a (2.26) sú len limitnými formami (2.20) pre $S \rightarrow 0$ a $r \rightarrow 0$. Podmienka (2.27) vyplýva z faktu, že pre vysoké hodnoty úrokovej miery cena konvertibilného dlhopisu už nezávisí od r , a teda $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$. Jeho cena je rovná opčnej prémii závisiacej len od hodnoty S . Ak sú ceny akcií vysoké, teda $S \rightarrow \infty$, tak sa nám oplatí dlhopis uplatniť a získať tak hodnotu nS , ktorá je v prípade existencie tzv. call feature obmedzená hodnotou C_p (viď. [4]).

2.3 Transformácia rovnice na divergentný tvar

V predchádzajúcej časti sme získali rovnicu na oceňovanie konvertibilných dlhopisov a stanovili sme niekoľko obmedzení, ktoré musí riešenie danej rovnice spĺňať. S využitím operátora $\nabla = (\frac{\partial}{\partial S}, \frac{\partial}{\partial r})^T$ možno rovnicu prepísať na nasledovný tvar

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + \vec{\alpha} \cdot \nabla V = (\mathbf{D}\nabla) \cdot \nabla V - rV \quad (2.29)$$

kde

$$\vec{\alpha} = - \begin{pmatrix} (r - D)S \\ \kappa(\theta - r) - \lambda\sigma_r r^c \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

a

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_S^2 S^2 & \rho\sigma_S\sigma_r S r^c \\ \rho\sigma_S\sigma_r S r^c & \sigma_r^2 r^{2c} \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Pre účely aplikácie metódy konečných objemov a Greenovej vety je však vhodné difúzny člen rovnice transformovať do divergentného tvaru. Zo vzťahu pre deriváciu súčinu platí

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla V) = (\mathbf{D}\nabla) \cdot \nabla V + (\nabla^T \mathbf{D})^T \cdot \nabla V \quad (2.32)$$

a rovnica nadobudne tvar

$$-\frac{\partial V}{\partial t} + (\vec{\alpha} + (\nabla^T \mathbf{D})^T) \cdot \nabla V = \nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla V) - rV. \quad (2.33)$$

Aby sme obmedzili výskyt premenných v koeficientoch, transformujeme si rovnicu logaritmovaním premennej $x = \ln(S)$. Ďalšími transformáciami je $y = r$ a reverzia času $\tau = T - t$, pričom riešenie takto transformovanej rovnice si označíme $u = u(x, y, \tau)$. V súlade s vyššie uvedenými transformáciami získa naša rovnica konečný tvar

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \vec{A} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\mathbf{B}\nabla u) - yu, \quad (2.34)$$

kde

$$\vec{A} = - \begin{pmatrix} y - D - \frac{1}{2}\sigma_S^2 - \frac{1}{2}\rho\sigma_S\sigma_r c y^{c-1} \\ \kappa(\theta - y) - \lambda\sigma_r y^c - c\sigma_r^2 y^{2c-1} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

a

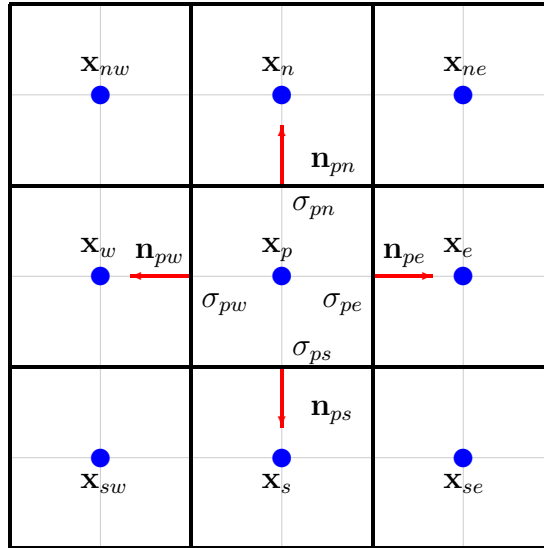
$$\mathbf{B} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_S^2 & \rho\sigma_S\sigma_r y^c \\ \rho\sigma_S\sigma_r y^c & \sigma_r^2 y^{2c} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

3 Numerická schéma

3.1 Diskretizácia oblasti

Transformáciou rovnice sa nám zmenila aj oblasť výpočtu – pôvodná oblasť $\tilde{\Omega} = [0, \infty[\times [0, \infty[$ sa zmenila na oblasť $\hat{\Omega} =]-\infty, \infty[\times [0, \infty[$. Skôr ako vybudujeme numerickú schému pre (2.34), musíme našu oblasť $\hat{\Omega}$ obmedziť na nejakú konečnú podoblasť $\Omega = [X_l, X_r] \times [0, Y]$, kde X_r, X_l a Y sú konečné čísla.

Nech p je konečný objem a σ_{pq} je hranica medzi p a q , pričom $q \in N(p)$, kde $N(p)$ je množina všetkých susediacich konečných objemov, ktoré majú s p spoločnú jednorozmernú hranicu. Teraz definujeme také delenie \mathcal{T}_h oblasti Ω , aby v každom konečnom objeme p existoval reprezentatívny bod x_p taký, že čiara spájajúca body x_p a x_q , $q \in N(p)$ bude kolmá na hranicu σ_{pq} . Pre diskretizáciu Ω podľa \mathcal{T}_h platí $\bar{\Omega} = \bigcup_{p \in \mathcal{T}_h} p$.



Obr. 3.1: Množina susedných objemov $N'(p)$ konečného objemu p so stredom v x_p a normálové vektory \mathbf{n}_{pe} , \mathbf{n}_{ps} , \mathbf{n}_{pw} a \mathbf{n}_{pn} .

Keďže naša oblasť Ω je obdĺžniková, tak aj delenie \mathcal{T}_h bude pozostávať s obdĺžnikovými

konečných objemov. Ak definujeme $N_x, N_y \in \mathbb{N}$ a $h_x, h_y \in \mathbb{R}$ také, že $h_x = (X_r - X_l)/N_x$ a $h_y = Y/N_y$, potom h_x a h_y predstavujú dĺžky strán konečných objemov v smere x a v smere y . V tom prípade sa veľkosť každého objemu p rovná $m(p) = h_x h_y$.

Teraz definujeme

$$x_{\frac{1}{2}} = X_l, \quad x_{i+\frac{1}{2}} = x_{i-\frac{1}{2}} + h_x \text{ pre } i = 1, \dots, N_x, \quad (3.1)$$

$$y_{\frac{1}{2}} = 0, \quad y_{j+\frac{1}{2}} = y_{j-\frac{1}{2}} + h_y \text{ pre } j = 1, \dots, N_y. \quad (3.2)$$

Z týchto definícií je zrejmé, že horné hranice intervalov pre x a y sú určené $x_{N_x+\frac{1}{2}} = X_r$ a $y_{N_y+\frac{1}{2}} = Y$ a celá oblasť Ω je zjednotením $N_x \times N_y$ disjunktných konečných objemov

$$p_{ij} = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}) \times (y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}) \text{ pre } i = 1, \dots, N_x \text{ a } j = 1, \dots, N_y. \quad (3.3)$$

Každý objem p_{ij} môžeme charakterizovať pomocou jeho stredy $\mathbf{x}_p = (x_i, y_j)$, kde

$$x_i = x_{i-\frac{1}{2}} + \frac{h_x}{2}, \text{ pre } i = 1, \dots, N_x,$$

$$y_j = y_{j-\frac{1}{2}} + \frac{h_y}{2}, \text{ pre } j = 1, \dots, N_y.$$

Ak rozšírime množinu $N(p)$ o všetky konečné objemy, ktoré majú s objemom p spoločný vrchol, získame množinu $N'(p)$, ktorá má v dvojrozmernom prípade tvar $N'(p) = \{e, ne, n, nw, w, sw, s, se\}$ a obsahuje všetky konečné objemy, ktoré sa nachádzajú na východe, severovýchode, severe, severozápade, západe, juhozápade, juhu a juhovýchode od objemu p .

Nech \mathbf{x}_{pq} je priesečníkom hrany σ_{pq} a čiary spájajúcej stredy \mathbf{x}_p a \mathbf{x}_q . V tomto bode možno definovať vektor \vec{n}_{pq} , ktorý je vonkajším normálovým vektorom hrany σ_{pq} vzhľadom na konečný objem p .

Pri časovej diskretizácii zvolíme ekvidištančné delenie s konštantným časovým krokom k , ktorý nám časový interval $[0, T]$ rozdelí na N_{ts} časových vrstiev $\tau^n = nk$, $n = 0, \dots, N_{ts}$, kde $k = T/N_{ts}$. Vzhľadom na to, že v konečnom objeme p uvažujeme konštantné numerické riešenie v časovej vrstve n , toto riešenie budeme ďalej označovať ako $u_p^n \approx u(\mathbf{x}_p, \tau^n)$ (viď. [5]).

3.2 Transformácia a implementácia okrajových podmienok

Pre účely numerického riešenia je nevyhnutné transformovať okrajové podmienky a terminálovú podmienku tak, aby boli konzistentné s hranicami výpočtovej oblasti $\partial\Omega$.

Použijúc rovnaké transformácie $x = \ln(S)$, $y = r$, $\tau = T - t$ a $u(x, y, \tau) = V(S, r, t)$, terminálová podmienka (2.22) prejde do tvaru

$$u(x, y, 0) = \max(ne^x, Z). \quad (3.4)$$

Pri okrajových podmienkach je vhodné uvažovať tzv. Ficherovu podmienku, aby sme posúdili, či je nevyhnutné, aby na danej hranici bola zadefinovaná okrajová podmienka.

Ficherovu podmienku možno aplikovať na tých hraniciach oblasti, ktoré majú nulový difúzny tok v smere vonkajšej normály, t.j. $B^T \vec{n} = 0$. V prípade oblasti $[X_l, X_r] \times [0, Y]$ môže taká situácia nastať len na hranici $y = 0$. Ficherove podmienky majú pre rovnicu (2.34) tvar

$$\lim_{y \rightarrow 0} \vec{A} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{cases} \geq 0 & \text{v } y = 0 \text{ nie je potrebná okrajová podmienka} \\ < 0 & \text{v } y = 0 \text{ je potrebná okrajová podmienka.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Ak predpokladáme $\kappa\theta > 0$ (čo v našich numerických experimentoch vždy dodržíme), na hranici $y = 0$ sa naša rovnica zredukuje na parciálnu diferenciálnu rovnicu bez difúznej časti. Dôsledkom toho sa akákoľvek informácia prenáša cez túto hranicu len prostredníctvom advekcie. Vzhľadom na to, že projekcia vektora rýchlosti advekcie na \vec{n} je kladná, do oblasti sa cez hranicu $y = 0$ nemôže dostať žiadna informácia (viď. [5]).

Pre numerickú implementáciu tejto podmienky rozšírime výpočtovú oblasť o niekoľko dodatočných objemov, tzv. “ghost cells” $p_{i0} = (x_i, y_0)$, $i = 1, \dots, N_x$, kde $y_0 = -h_y/2$. Ich hodnoty najjednoduchšie určíme extrapoláciou nultého rádu, teda extrapoláciou konštantnou funkciou

$$u_{p_{i,0}}^n = u_{p_{i,1}}^n, i = 1, \dots, N_x. \quad (3.6)$$

Na hranici $y \rightarrow \infty$ je okrajová podmienka zadaná vo forme Black-Scholesovej rovnice, čo znamená, že pre vysoké hodnoty úrokovej miery sa konvertibilný dlhopis správa ako call opcia. Pre hodnoty konvertibilného dlhopisu v čase T môžeme formulovať nasledovný vzťah

$$\begin{aligned} V(S, r, T) &= \max(nS, Z) \\ &= \max(nS - Z, 0) + Z \\ &= \underbrace{n \max\left(S - \frac{Z}{n}, 0\right)}_{\text{terminálová podmienka pre európsku call opciu}} + Z. \end{aligned} \quad (3.7)$$

V ľubovoľnom čase t možno vzťah (3.7) prepísať ako

$$V(S, r, t) = nV_{EC}(S, t) + Ze^{-r(T-t)}, \quad (3.8)$$

kde V_{EC} predstavuje hodnotu európskej call opcie, ktorej limita

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V_{EC}(S, t) = Se^{-D(T-t)}. \quad (3.9)$$

Po transformácii (3.8) a aplikovaním limity dostaneme

$$u(x, y \rightarrow \infty, \tau) = ne^{x-D\tau}. \quad (3.10)$$

Hoci táto podmienka platí v nekonečne, voľbou dostatočne veľkého Y sa nedopustíme príliš veľkej chyby v oblasti, kde nám záleží na presnosti riešenia, t.j. napr. $y \in [0, 0.5]$. Z podmienky (3.10) plynie, že $\partial u / \partial y = 0$, a teda okrajovú podmienku na hranici $y = Y$ môžeme do numerického modelu implementovať opäť pomocou extrapolácie

$$u_{p_{i, N_y+1}}^n = u_{p_{i, N_y}}^n, i = 1, \dots, N_x. \quad (3.11)$$

Keďže po transformácii rovnice a zúžení oblasti Ω nemožno Ficherovu podmienku aplikovať pre $x = X_l$, musíme tam zdefinovať nejakú “umelú” okrajovú podmienku. Pre nízke hodnoty akcií sa konvertibilné dlhopisy svojimi vlastnosťami čoraz viac približujú bežným dlhopisom, a preto vhodnou voľbou pre okrajovú podmienku v $x = X_l$ je nejaké explicitné riešenie rovnice pre oceňovanie dlhopisov, napr. pomocou CIR modelu s hodnotou parametra $c = \frac{1}{2}$ (vid'. [6]).

V prípade okrajovej podmienky pre $S \rightarrow \infty$ resp. $x \rightarrow \infty$ môžeme predpokladať, že vhodnou voľbou X_r budú ceny akcií dostatočne vysoké na to, aby sa nám oplatilo konvertibilný dlhopis predčasne uplatniť. Na pravom okraji oblasti teda stanovíme podmienku

$$u(X_r, y, \tau) = ne^{X_r}. \quad (3.12)$$

Vzhľadom na to, že v našom modeli uvažujeme aj tzv. call feature, výsledné riešenie musíme upraviť, aby vyhovovalo podmienke $u(x, y, \tau) \leq C_p$. Uskutočnime to tak, že naše riešenie “urežeme”, čiže vo výslednom riešení nahradíme všetky hodnoty presahujúce C_p práve touto hodnotou.

3.3 Diskretizácia rovnice

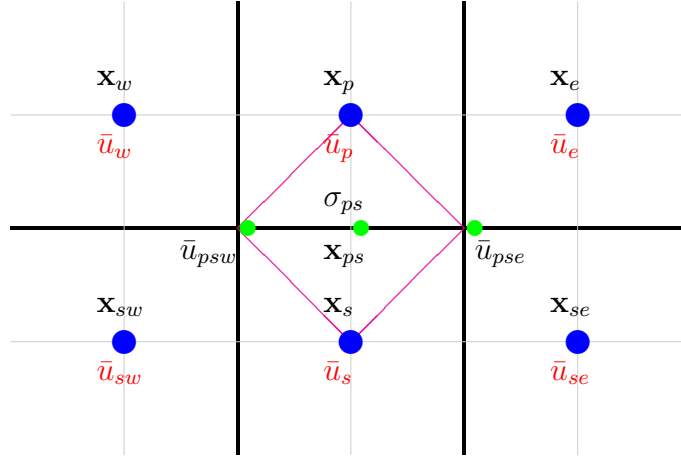
V tejto časti budeme pokračovať diskretizáciou rovnice (2.34), využijúc “diamond-cell” aproximáciu gradientu. Keďže difúzny člen už máme v divergentnom tvare, podobným spôsobom si prepíšeme aj advektívny člen

$$\vec{A} \cdot \nabla u = \nabla \cdot (\vec{A}u) - (\nabla \cdot \vec{A})u. \quad (3.13)$$

Vložením identity (3.13) do (2.34), preintegrovaním cez celý konečný objem p a použitím Greenovej vety na členy $\nabla \cdot (\vec{A}u)$ a $\nabla \cdot (\mathbf{B}\nabla u)$ získame nasledovný integrálny vzťah:

$$\int_p \frac{\partial u}{\partial \tau} dx + \sum_{q \in N(p)} \int_{\sigma_{pq}} \vec{A}u \cdot \vec{n}_{pq} d\gamma - \int_p (\nabla \cdot \vec{A}) u dx = \sum_{q \in N(p)} \int_{\sigma_{pq}} \mathbf{B}\nabla u \cdot \vec{n}_{pq} d\gamma - \int_p y_p u dx. \quad (3.14)$$

Skôr než sformulujeme diskretizovanú verziu (3.14), pustíme sa do aproximácie vektora $\mathbf{B}\nabla u$. Označme si konštantnú hodnotu, ktorá reprezentuje riešenie v objeme p ako \bar{u}_p . Hodnoty v severozápadnom, severovýchodnom, juhovýchodnom a juhozápadnom vrchole objemu p si označíme ako \bar{u}_{pnw} , \bar{u}_{pne} , \bar{u}_{pse} a \bar{u}_{psw} a analogicky \bar{u}_{pn} , \bar{u}_{pw} , \bar{u}_{ps} a \bar{u}_{pe} budú reprezentovať hodnoty na severnej, západnej, južnej a východnej hrane konečného objemu p . Na každej hrane σ_{pq} budeme diskretizovať gradient ∇u pomocou “diamond-cell” aproximácie. Meno tejto aproximácie pochádza z diamantového tvaru oblasti, na ktorej budeme považovať gradient za konštantný. Tieto objemy budeme označovať χ_σ . Každý objem χ_σ vieme skonštruovať pospájaním koncových bodov hrany σ_{pq} a stredových bodov \mathbf{x}_p a \mathbf{x}_q konečných objemov, ktoré majú túto hranu spoločnú. Ďalej si označíme koncové



Obr. 3.2: “Diamond-cell” aproximácia gradientu na hrane σ_{ps} , vyznačená je oblasť $\chi_{\sigma_{ps}}$, kde gradient považujeme za konštantný.

body hrany $\bar{\sigma} \subset \partial\chi_\sigma$ ako $N_1(\bar{\sigma})$ a $N_2(\bar{\sigma})$ a vonkajší normálový vektor k χ_σ ako $\vec{n}_{\chi_\sigma, \bar{\sigma}}$. Pomocou týchto označení vieme aproximovať gradient v χ_σ ako

$$\frac{1}{m(\chi_\sigma)} \int_{\chi_\sigma} \nabla u dx \approx \frac{1}{m(\chi_\sigma)} \sum_{\bar{\sigma} \subset \partial\chi_\sigma} \frac{\bar{u}_{N_1(\bar{\sigma})} + \bar{u}_{N_2(\bar{\sigma})}}{2} m(\bar{\sigma}) \vec{n}_{\chi_\sigma, \bar{\sigma}}. \quad (3.15)$$

Keďže naša mriežka je obdĺžniková, môžeme využiť nasledovné vzťahy: $m(\chi_\sigma) = \frac{h_x h_y}{2}$ a $m(\bar{\sigma}) = \frac{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}{2}$. Kvôli kratšiemu zápisu budeme používať symbol $\nabla_{pq}^{DC} = (\nabla_{pq,x}^{DC}, \nabla_{pq,y}^{DC})$

ako označenie gradientu na hrane σ_{pq} . Napríklad pre výpočet gradientu na hrane σ_{ps} dostaneme

$$\nabla_{ps}^{DC} u = \frac{1}{m(\chi_{\sigma_{ps}})} \sum_{\bar{\sigma} \subset \partial \chi_{\sigma_{ps}}} \frac{\bar{u}_{N_1(\bar{\sigma})} + \bar{u}_{N_2(\bar{\sigma})}}{2} m(\bar{\sigma}) \vec{n}_{\chi_{\sigma_{ps}}, \bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \frac{\bar{u}_{pse} - \bar{u}_{psw}}{h_x} \\ \frac{\bar{u}_p - \bar{u}_s}{h_y} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

a pre zvyšné hrany σ_{pw} , σ_{pn} a σ_{pe} analogicky

$$\nabla_{pw}^{DC} u = \begin{pmatrix} \frac{\bar{u}_p - \bar{u}_w}{h_x} \\ \frac{\bar{u}_{pnw} - \bar{u}_{psw}}{h_y} \end{pmatrix} \quad \nabla_{pn}^{DC} u = \begin{pmatrix} \frac{\bar{u}_{pne} - \bar{u}_{pnw}}{h_x} \\ \frac{\bar{u}_n - \bar{u}_p}{h_y} \end{pmatrix} \quad \nabla_{pe}^{DC} u = \begin{pmatrix} \frac{\bar{u}_e - \bar{u}_p}{h_x} \\ \frac{\bar{u}_{pne} - \bar{u}_{pse}}{h_y} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Ak nahradíme presný gradient jeho “diamond-cell” aproximáciou, potom vieme aj difúzny tok na hrane σ_{pq} aproximovať pomocou

$$\frac{1}{m(\sigma_{pq})} \int_{\sigma_{pq}} \mathbf{B} \nabla u \cdot \vec{n}_{pq} d\gamma \approx \mathbf{B}_{pq} \nabla_{pq}^{DC} u \cdot \vec{n}_{pq}, \quad (3.18)$$

kde \mathbf{B}_{pq} je difúzny tenzor spriemerovaný na hrane σ_{pq} .

Uvažujúc konštantné riešenie v každom z konečných objemov, advektívne členy možno aproximovať nasledovne

$$\int_{\sigma_{pq}} \vec{A} u \cdot \vec{n}_{pq} d\gamma \approx m(\sigma_{pq}) \bar{u}_{pq} (\vec{A}_{pq} \cdot \vec{n}_{pq}), \quad \int_p (\nabla \cdot \vec{A}) u dx \approx \sum_{q \in N(p)} m(\sigma_{pq}) \bar{u}_p (\vec{A}_{pq} \cdot \vec{n}_{pq}), \quad (3.19)$$

kde $\bar{u}_{pq} = \frac{\bar{u}_p + \bar{u}_q}{2}$ a \vec{A}_{pq} označuje spriemerovaný vektor rýchlosti advekcie na hrane σ_{pq} .

Dosadením aproximácií (3.19) spolu s numerickým difúznym tokom (3.18) do rovnice (3.14) získame

$$\begin{aligned} \int_p \frac{\partial u}{\partial \tau} dx + \sum_{q \in N(p)} (-\vec{A}_{pq} \cdot \vec{n}_{pq}) (\bar{u}_p - \bar{u}_{pq}) m(\sigma_{pq}) &= \\ &= \sum_{q \in N(p)} \mathbf{B}_{pq} \nabla_{pq}^{DC} u \cdot \vec{n}_{pq} m(\sigma_{pq}) - r \bar{u}_p m(p). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Po rozpísaní advektívnych a difúzných členov získame

$$\begin{aligned} \int_p \frac{\partial u}{\partial \tau} dx + r \bar{u}_p m(p) - m(\sigma_{pe}) a_{pe}^1 (\bar{u}_p - \bar{u}_{pe}) - m(\sigma_{pe}) [b_{pe}^{11} \frac{\bar{u}_e - \bar{u}_p}{h_x} + b_{pe}^{12} \frac{\bar{u}_{pne} - \bar{u}_{pse}}{h_y}] \\ - m(\sigma_{pn}) a_{pn}^2 (\bar{u}_p - \bar{u}_{pn}) - m(\sigma_{pn}) [b_{pn}^{21} \frac{\bar{u}_{pne} - \bar{u}_{pnw}}{h_x} + b_{pn}^{22} \frac{\bar{u}_n - \bar{u}_p}{h_y}] \\ + m(\sigma_{pw}) a_{pw}^1 (\bar{u}_p - \bar{u}_{pw}) + m(\sigma_{pw}) [-b_{pw}^{11} \frac{\bar{u}_w - \bar{u}_p}{h_x} - b_{pw}^{12} \frac{\bar{u}_{psw} - \bar{u}_{pw}}{h_y}] \\ + m(\sigma_{ps}) a_{ps}^2 (\bar{u}_p - \bar{u}_{ps}) + m(\sigma_{ps}) [-b_{ps}^{11} \frac{\bar{u}_{psw} - \bar{u}_{pse}}{h_x} - b_{ps}^{22} \frac{\bar{u}_s - \bar{u}_p}{h_y}] = 0. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aby sme sformulovali našu numerickú schému, potrebujeme nahradiť reprezentatívne hodnoty riešenia \bar{u}_p^m a \bar{u}_{pq}^m pre $m = n - 1, n$ kombináciou numerického riešenia v stredoch

okolitých objemov

$$\begin{aligned}
\bar{u}_p^m &= u_p^m, & \bar{u}_{pq}^m &= \frac{u_p^m + u_q^m}{2}, \text{ ak } q \in N(p), \\
\bar{u}_{pne}^m &= \frac{u_p^m + u_e^m + u_{ne}^m + u_n^m}{4}, & \bar{u}_{pnw}^m &= \frac{u_p^m + u_n^m + u_{nw}^m + u_w^m}{4}, \\
\bar{u}_{psw}^m &= \frac{u_p^m + u_w^m + u_{sw}^m + u_s^m}{4}, & \bar{u}_{pse}^m &= \frac{u_p^m + u_s^m + u_{se}^m + u_e^m}{4}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Keď vložíme (3.22) do (3.21) s $m = n$ a nahradíme časovú deriváciu $\frac{\partial u}{\partial \tau}$ spätnou diferenciou $\frac{u^n - u^{n-1}}{k}$, získame plne implicitnú schému (vid'. [5]) v tvare

$$(1 + ky_p)u_p^n + \frac{k}{m(p)} \sum_{q \in N'(p)} \mathbf{c}_{pq}(u_p^n - u_q^n) = u_p^{n-1}, \tag{3.23}$$

kde v snahe zjednodušiť označenie boli zavedené nové koeficienty

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_{pq} &= \mathbf{a}_{pq} + \mathbf{b}_{pq}, & q \in N(p), \\
\mathbf{c}_{pq} &= \mathbf{b}_{pq}, & q \in N'(p) \setminus N(p).
\end{aligned} \tag{3.24}$$

s \mathbf{a}_{pq} , $q \in N(p)$ a \mathbf{b}_{pq} , $q \in N'(p)$ definovanými nasledovne

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{pe} &= -\frac{1}{2}h_y a_{pe}^1, & \mathbf{a}_{pw} &= \frac{1}{2}h_y a_{pw}^1, & \mathbf{a}_{pn} &= -\frac{1}{2}h_x a_{pn}^2, & \mathbf{a}_{ps} &= \frac{1}{2}h_x a_{ps}^2, \\
\mathbf{b}_{pe} &= \frac{h_y}{h_x} b_{pe}^{11} + \frac{b_{pn}^{21}}{4} - \frac{b_{ps}^{21}}{4}, & \mathbf{b}_{pw} &= \frac{h_y}{h_x} b_{pw}^{11} - \frac{b_{pn}^{21}}{4} + \frac{b_{ps}^{21}}{4}, \\
\mathbf{b}_{pn} &= \frac{h_x}{h_y} b_{pn}^{22} + \frac{b_{pe}^{12}}{4} - \frac{b_{pw}^{12}}{4}, & \mathbf{b}_{ps} &= \frac{h_x}{h_y} b_{ps}^{22} - \frac{b_{pe}^{12}}{4} + \frac{b_{pw}^{12}}{4}, \\
\mathbf{b}_{pne} &= \frac{b_{pe}^{12}}{4} + \frac{b_{pn}^{21}}{4}, & \mathbf{b}_{psw} &= \frac{b_{pw}^{12}}{4} + \frac{b_{ps}^{21}}{4}, & \mathbf{b}_{pnw} &= -\frac{b_{pw}^{12}}{4} - \frac{b_{pn}^{21}}{4}, & \mathbf{b}_{pse} &= -\frac{b_{pe}^{12}}{4} - \frac{b_{ps}^{21}}{4}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

4 Problém voľnej hranice pri oceňovaní konvertibilných dlhopisov

4.1 Formulácia úlohy s voľnou hranicou

Ako už bolo v predchádzajúcich kapitolách spomenuté, konvertibilné dlhopisy sú finančnými derivátmi s možnosťou predčasného uplatnenia, čo môže viesť k voľným hraniciam. Voľné hranice sú tie časti hraníc, na ktorých síce vieme sformulovať okrajovú podmienku, ich polohu však nevieme identifikovať. V prípade konvertibilných dlhopisov toto voľné ohraničenie vzniká podmienkou

$$V(S, r, t) \geq nS, \quad (4.1)$$

pričom nevieme určiť, v ktorej hodnote S riešenie parciálnej diferenciálnej rovnice klesne natoľko, aby sme túto podmienku uplatnili.

Pri oceňovaní konvertibilných dlhopisov nám teda nestačí vyriešiť parciálnu diferenciálnu rovnicu, treba nájsť funkciu $S_f(r, t)$ tak, aby boli splnené nasledovné podmienky

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma_S S\sigma_r r^c \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r^{2c} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \\ & + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + [\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma_r r^c] \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0, \quad \text{pre } 0 < S < S_f(r, t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$V(S, r, T) = \max(nS, Z) \quad (4.3)$$

$$V(S_f(r, t), r, t) = nS \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial S} V(S_f(r, t), r, t) = n \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r^{2c} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + [\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma_r r^c] \frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0 \quad \text{pre } S \rightarrow 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - DS \frac{\partial V}{\partial S} + \kappa\theta \frac{\partial V}{\partial r} = 0 \quad \text{pre } r \rightarrow 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad \text{pre } r \rightarrow \infty, \quad (4.8)$$

kde (4.4) a (4.5) nám zaručujú hladkosť funkcie V v bode $S_f(r, t)$. Vzťahy (4.2)-(4.8) zároveň predstavujú formuláciu úlohy s voľnou hranicou.

4.2 Hľadanie riešenia pomocou lineárnej komplementarity

Jednou z metód riešenia problému voľnej hranice je lineárna komplementarita. Hlavnou výhodou tohto prístupu je, že nepotrebujeme poznať polohu voľnej hranice, aby sme získali riešenie.

Na základe predchádzajúcich úvah už vieme, že na intervale $0 < S < S_f(r, t)$ platí rovnica (4.2). Zároveň pre hodnoty konvertibilného dlhopisu platí $V(S, r, t) > nS$. Na druhej strane, ak pre S platí $S_f(r, t) \leq S$, konvertibilný dlhopis nadobúda hodnoty $V(S, r, t) = nS$. Dosadením tohto vzťahu do rovnice (4.2) získame

$$(r - D)Sn - rnS = -DSn \leq 0. \quad (4.9)$$

V našej úlohe teda platia dve nerovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma_S S\sigma_r r^c \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r^{2c} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \\ + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + [\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma_r r^c] \frac{\partial V}{\partial r} - rV \leq 0 \end{aligned} \quad (4.10)$$

a súčasne

$$V(S, r, t) - nS \geq 0, \quad (4.11)$$

pričom rovnosť môže nastať pre obidva prípady súčasne jedine v $S = S_f(r, t)$. Dôsledkom toho musí mať riešenie nasledovnú vlastnosť

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_S^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma_S S\sigma_r r^c \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 r^{2c} \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \right. \\ \left. + (r - D)S \frac{\partial V}{\partial S} + [\kappa(\theta - r) - \lambda\sigma_r r^c] \frac{\partial V}{\partial r} - rV \right) (V(S, r, t) - nS) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Úloha lineárnej komplementarity teda spočíva v nájdení funkcie $V(S, r, t)$, ktorá by bola spojite diferencovateľná, vyhovovala by rovnici (4.12) a zároveň spĺňala terminálovú podmienku (4.3) a okrajové podmienky (4.6), (4.7), (4.8) a $V(S \rightarrow \infty, r, t) = nS$ (vid'. [2]).

4.3 PSOR algoritmus

Na numerické zvládnutie úlohy o lineárnej komplementarite sa využíva modifikácia SOR algoritmu. Zmena oproti pôvodnému algoritmu spočíva v tom, že v každom iteračnom kroku overujeme, či nové aproximatívne riešenie u_i^{k+1} vyhovuje nerovnici $u_i^{k+1} \geq ne^{x_i}$.

Majme diskretizovanú rovnicu oceňovania konvertibilných dlhopisov v nasledovnom tvare

$$(1 + ky_p)u_p^n + \frac{k}{m(p)} \sum_{q \in N'(p)} \mathbf{c}_{pq}(u_p^n - u_q^n) = u_p^{n-1}. \quad (4.13)$$

Ak \mathbf{A} označuje maticu vzniknutej sústavy lineárnych rovníc a b je vektorom pravej strany, potom riešenie (4.13) možno vyriešiť iteračne pomocou

$$u_i^{k+1} = \frac{\omega}{A_{ii}}(b_i - \sum_{j < i} A_{ij}u_j^{k+1} - \sum_{j > i} A_{ij}u_j^k) + (1 - \omega)u_i^k, \quad (4.14)$$

pre každé $i = 1, \dots, N_x N_y$. Parameter ω je tzv. relaxačný parameter a jeho vhodnou voľbou je možné urýchliť konvergenciu riešenia (viď. [7]). Vzhľadom na to, že musí platiť $u_i^k \geq ne^{x_i}$, riešenie v každom novom iteračnom kroku získame ako

$$u_i^{k+1} = \max \left(\frac{\omega}{A_{ii}}(b_i - \sum_{j < i} A_{ij}u_j^{k+1} - \sum_{j > i} A_{ij}u_j^k) + (1 - \omega)u_i^k, ne^{x_i} \right). \quad (4.15)$$

Za predpokladu, že máme zaručenú konvergenciu postupnosti vektorov u^k k vektoru u , pre $k \rightarrow \infty$ (viď. [2] a [7]), platí nerovnosť

$$u_i \geq \frac{\omega}{A_{ii}}(b_i - \sum_{j < i} A_{ij}u_j - \sum_{j > i} A_{ij}u_j) + (1 - \omega)u_i. \quad (4.16)$$

Ak $A_{ii} > 0$ (v našom prípade vždy splnené), potom možno nerovnicu upraviť nasledovne

$$\begin{aligned} A_{ii}u_i &\geq \omega(b_i - \sum_{j < i} A_{ij}u_j - \sum_{j > i} A_{ij}u_j) + A_{ii}(1 - \omega)u_i \\ 0 &\geq \omega b_i - \omega(\mathbf{A}u)_i \\ \omega(\mathbf{A}u)_i &\geq \omega b_i. \end{aligned}$$

Keďže $\omega \in (0, 2)$, môžeme uskutočniť nasledovnú úpravu

$$(\mathbf{A}u)_i \geq b_i,$$

pre každé $i = 1, \dots, N_x N_y$. Z uvedených vzťahov vyplýva, že ak pre riešenie u_i platí $u_i > ne^{x_i}$, tak pre dostatočný počet iterácií k je $u_i^k > ne^{x_i}$. Vektor u_i^k je teda riešením (4.14), a tým aj sústavy rovníc $(\mathbf{A}u)_i = b_i$. To znamená, že vektor u je riešením úlohy o lineárnej komplementarite v tvare

$$\left(\frac{u_p^n - u_p^{n-1}}{k} + y_p u_p^n + \frac{1}{h_x h_y} \sum_{q \in N'(p)} \mathbf{c}_{pq}(u_p^n - u_q^n) \right) (u_p^n - ne^{x_p}) = 0. \quad (4.17)$$

5 Numerické experimenty

5.1 Rád konvergencej numerickej schémy

Uvažujme, že máme numerickú aproximáciu presného riešenia u . Aproximačná hodnota závisí od parametra h , ktorý predstavuje veľkosť diskretizačného kroku, a preto si ju označíme \hat{u}_h . Ak je naša skúmaná numerická metóda rádu p , znamená to, že existuje číslo C , ktoré nezávisí od h a platí

$$\|\hat{u}_h - u\| \leq Ch^p \quad (5.1)$$

pre dostatočne malé h . Číslo p nazývame rád konvergencej a $\|\cdot\|$ je norma v priestore $L_2(\Omega, [0, T])$ (viď. [8]). Chybu aproximácie možno zapísať

$$\|\hat{u}_h - u\| = Ch^p + O(h^{p+1}). \quad (5.2)$$

V našom prípade však nepoznáme presné riešenie, a preto máme pri meraní konvergencej metódy dve možnosti. Prvou je vypočítať numerické riešenie pre veľmi malé delenie a použiť ho ako presné riešenie. Tento prístup však môže byť náročný na výpočtový čas, obzvlášť pri zložitejších algoritmoch. Druhým prístupom je pozrieť sa na pomer chýb \hat{u}_h vypočítaných pre rôzne h (bez ujmy na všeobecnosti môžeme v našom prípade uvažovať $h = \max(h_x, h_y)$). Tak dostaneme

$$\frac{\|\hat{u}_h - \hat{u}_{h/2}\|}{\|\hat{u}_{h/2} - \hat{u}_{h/4}\|} = \frac{Ch^p - C(h/2)^p + O(h^{p+1})}{C(h/2)^p - C(h/4)^p + O(h^{p+1})} = \frac{1 - 2^{-p} + O(h)}{2^{-p} - 2^{-2p} + O(h)} = 2^p + O(h). \quad (5.3)$$

Experimentálny rád konvergencej teda možno definovať ako

$$p = \log_2 \frac{\|\hat{u}_h - \hat{u}_{h/2}\|}{\|\hat{u}_{h/2} - \hat{u}_{h/4}\|}. \quad (5.4)$$

Uvedený prístup sme použili aj pre naše numerické riešenie a pre väzbu $k = h_x h_y$ získali nasledovné hodnoty:

N_x	N_y	N_{ts}	$\ \hat{u}_h - \hat{u}_{h/2}\ $	$\log_2 \frac{\ \hat{u}_h - \hat{u}_{h/2}\ }{\ \hat{u}_{h/2} - \hat{u}_{h/4}\ }$
20	10	1	—	—
40	20	4	1.98864×10^{-2}	—
80	40	16	5.07081×10^{-3}	1.97149
160	80	64	1.21405×10^{-3}	1.99279

Tabuľka 5.1: Údaje získané programom v jazyku C, pri voľbe relaxačného parametra $\omega = 1.0$ v projektovanom SOR algoritme.

Z uvedených výsledkov vyplýva, že numerická metóda je druhého rádu presnosti pre väzbu $k = h_x h_y$.

5.2 Analýza parametrov

Konvertibilný dlhopis má hybridný charakter, pretože jeho cena pozostáva nielen z hodnoty samotného dlhopisu, ale aj ceny call opcie na akcie danej spoločnosti. Parametre, ktoré vstupujú do procesu oceňovania konvertibilného dlhopisu majú rôzny vplyv na tieto zložky, teda aj na celkovú hodnotu konvertibilného dlhopisu. V nasledujúcej časti zistíme, ako hodnoty vybraných parametrov ovplyvňujú hodnotu konvertibilného dlhopisu a polohu jeho voľnej hranice. Sledovanými parametrami budú: výška dividendy, doba splatnosti konvertibilného dlhopisu, volatilita akcií a konverzný pomer.

x	$[-5, 5]$	N_x	400	h_x	0.025
y	$[0, 1]$	N_y	50	h_y	0.02
t	$[0, 5]$	N_{ts}	10000	k	0.0005

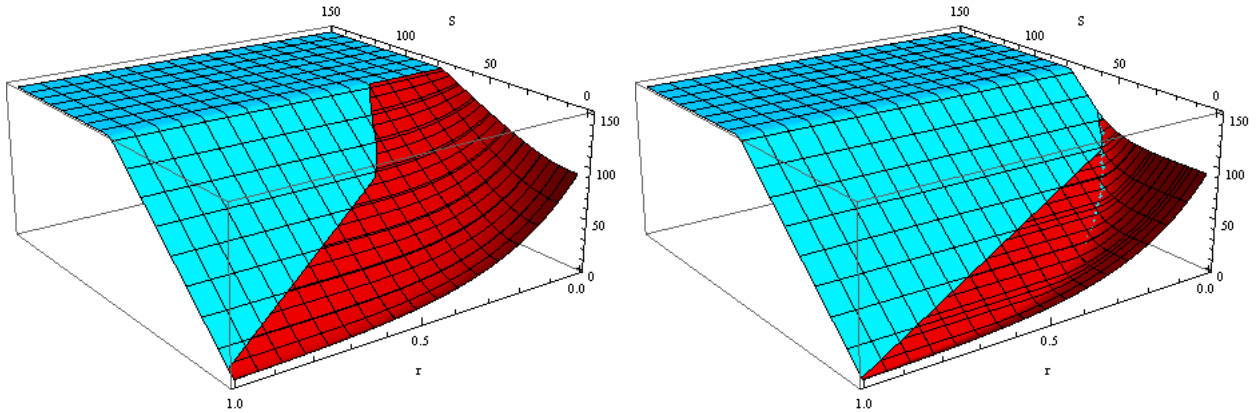
Tabuľka 5.2: Tabuľka použitých diskretizačných parametrov

ρ	0.5	κ	0.05	Z	100	C_p	150
σ_S	0.5	θ	0.025	n	2.0	c	1/2
σ_r	0.05	λ	0.0	D	0.02	ω	1.0

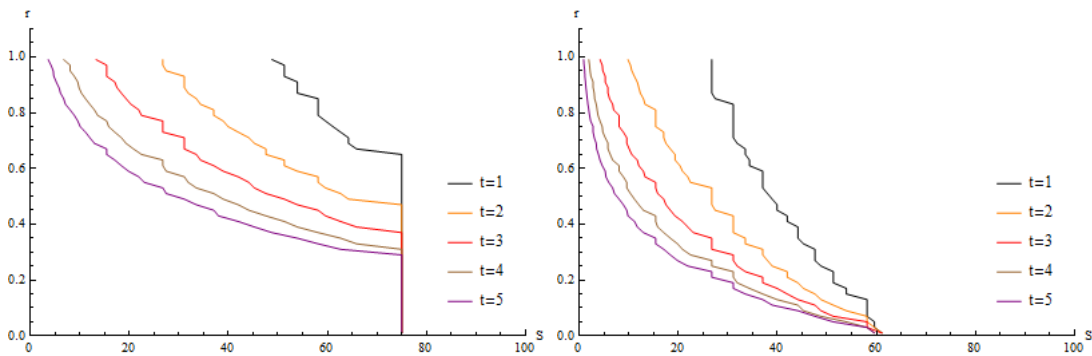
Tabuľka 5.3: Tabuľka parametrov, ktoré boli použité pri výpočtoch a analýze parametrov finančného modelu (pokiaľ nie je uvedené inak).

Dividendy

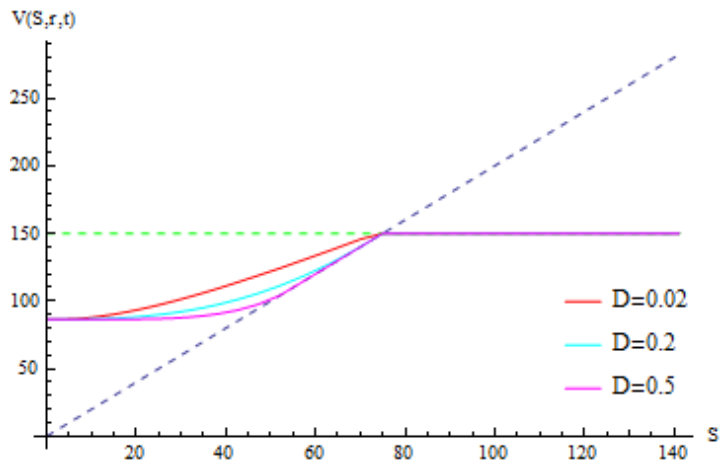
Ak akcie vyplácajú dividendy, ich hodnota klesá a spolu s nimi klesá aj hodnota call opcie. Následne je aj cena konvertibilného dlhopisu nižšia a predčasné uplatnenie môže nastať už pri nižších hodnotách akcií. Z investičného hľadiska je výhodnejšie konvertibilný dlhopis uplatniť a získať tak akcie, ktoré prinesú výnos v podobe dividend.



Obr. 5.1: Cena konvertibilného dlhopisu pre $D = 0.02$ (vľavo) a $D = 0.5$ (vpravo) v čase $t = 5$ (čas zostávajúci do splatnosti konvertibilného dlhopisu). Modrá farba reprezentuje oblasť, kde sa oplatí konvertibilný dlhopis predčasne uplatniť.



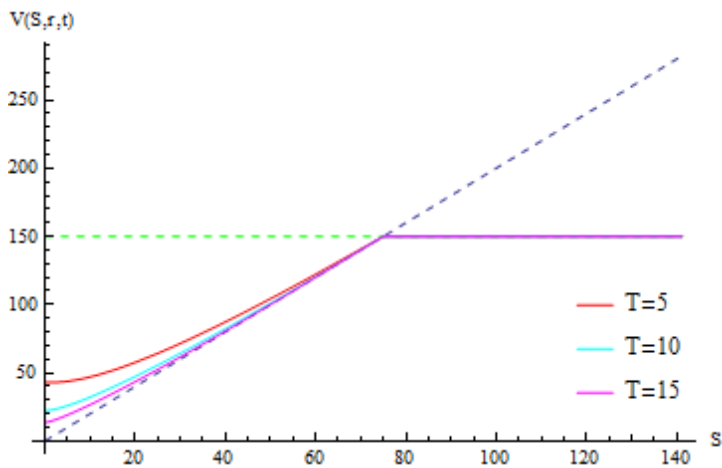
Obr. 5.2: Časový priebeh hranice predčasného uplatnenia pre $D = 0.02$ (vľavo) a $D = 0.5$ (vpravo). Čas t predstavuje čas do splatnosti konvertibilného dlhopisu. Nepresnosť tohto znázornenia je dôsledkom exponenciálneho delenia a tolerance, ktorú sme zaviedli pri identifikácii polohy hranice predčasného uplatnenia.



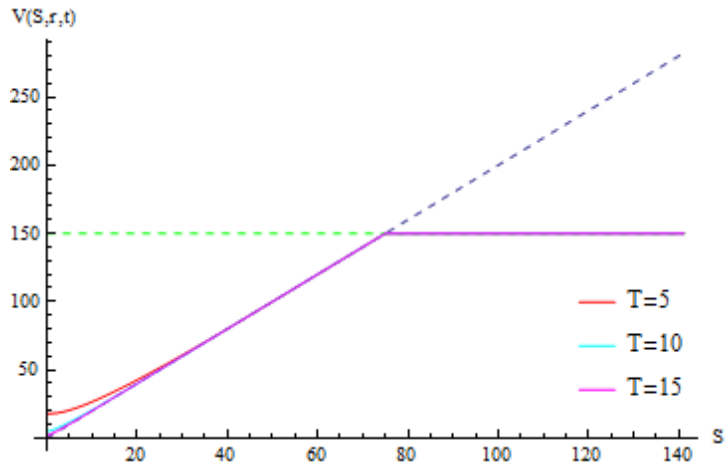
Obr. 5.3: Cena konvertibilného dlhopisu s rôznymi hodnotami dividendy v $r = 0.03$ a v čase $t = 5$ (čas zostávajúci do splatnosti konvertibilného dlhopisu).

Doba splatnosti

Čas splatnosti hraje dôležitú úlohu v cene konvertibilného dlhopisu. Čím je dlhší čas splatnosti, tým nižšia je hodnota konvertibilného dlhopisu a predčasné uplatnenie nastáva už v nižších hodnotách akcií. Pri vysokých hodnotách úrokovej miery nemá čas splatnosti veľký vplyv na hodnotu konvertibilného dlhopisu, pretože cena dlhopisu je vo všeobecnosti nízka a konvertibilný dlhopis sa správa viac ako call opcia.



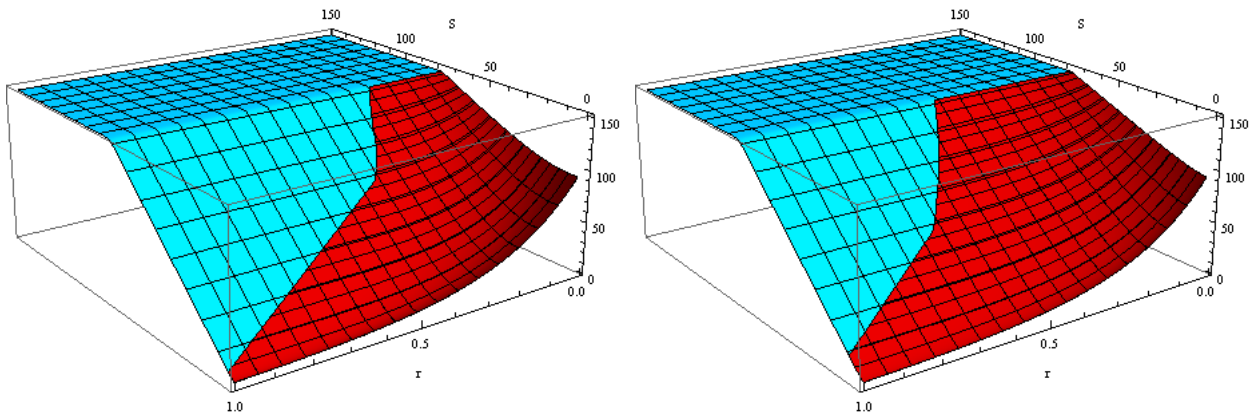
Obr. 5.4: Cena konvertibilného dlhopisu s rôznou dobou splatnosti T v $r = 0.19$.



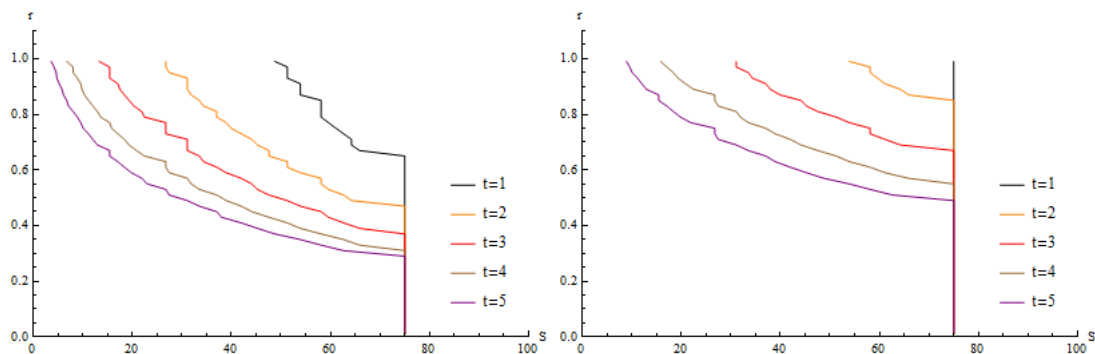
Obr. 5.5: Cena konvertibilného dlhopisu s rôznou dobou splatnosti T v $r = 0.39$.

Volatilita akcií

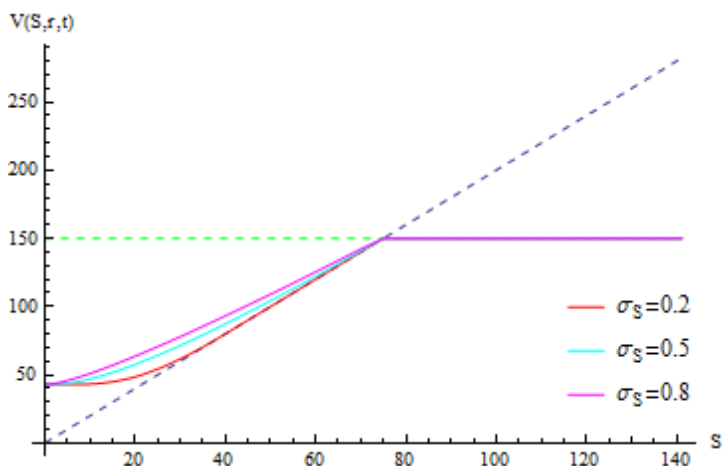
Volatilita akcií nám charakterizuje veľkosť náhodných fluktuácií cien v okolí trendu. Keďže akcie s vysokou volatilitou môžu aj na poslednú chvíľu prudko stúpnuť, zvyšuje to pravdepodobnosť väčšieho výnosu pri ich neskoršom uplatnení. Vysoká volatilita akcií teda zvyšuje hodnotu konvertibilného dlhopisu a k predčasnému uplatneniu dochádza neskôr.



Obr. 5.6: Cena konvertibilného dlhopisu pre $\sigma_S = 0.5$ (vľavo) a $\sigma_S = 0.8$ (vpravo), v čase $t = 5$ (čas zostávajúci do splatnosti konvertibilného dlhopisu). Modrá farba reprezentuje oblasť, kde sa oplatí konvertibilný dlhopis predčasne uplatniť.



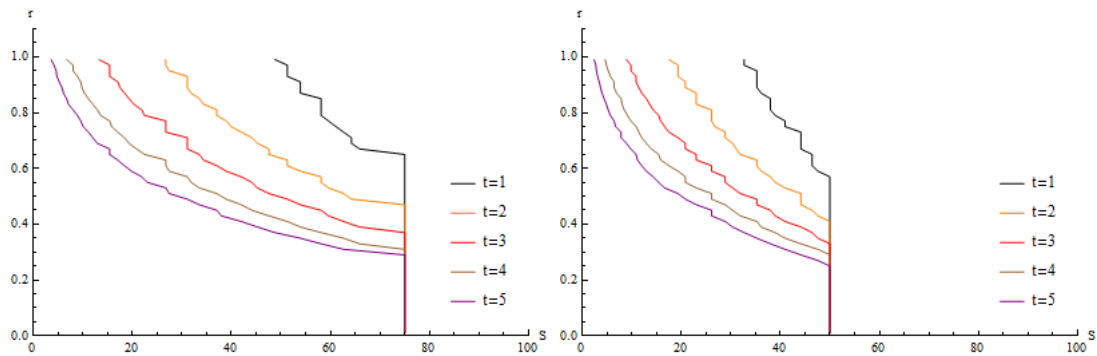
Obr. 5.7: Časový priebeh hranice predčasného uplatnenia pre $\sigma_S = 0.5$ (vľavo) a $\sigma_S = 0.8$ (vpravo). Čas t predstavuje čas do splatnosti konvertibilného dlhopisu. Nepresnosť tohto znázornenia je dôsledkom exponenciálneho delenia a tolerance, ktorú sme zaviedli pri identifikácii polohy hranice predčasného uplatnenia.



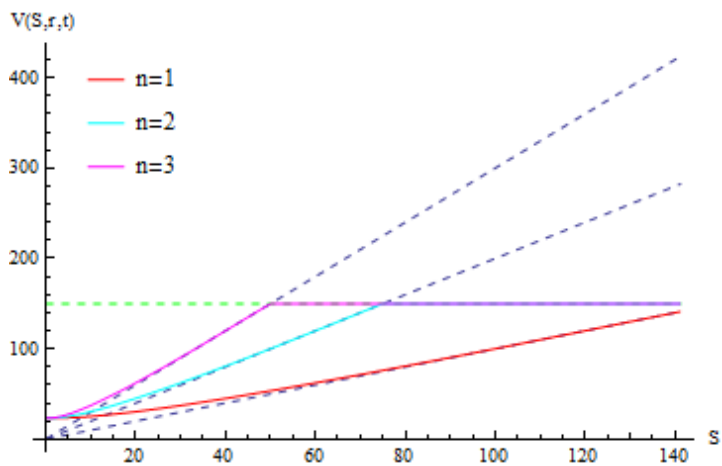
Obr. 5.8: Cena konvertibilného dlhopisu pre rôzne volatility akcií v $r = 0.19$ a v čase $t = 5$ (čas zostávajúci do splatnosti konvertibilného dlhopisu).

Konverzný pomer

Nízky konverzný pomer spôsobuje, že sa konvertibilný dlhopis správa viac ako klasický dlhopis, teda vôbec nemusí dôjsť k jeho predčasnému uplatneniu. Právo na predčasné uplatnenie v tomto prípade nemá vysokú hodnotu, čo spôsobuje, že konvertibilný dlhopis je pre investora menej atraktívna investícia.



Obr. 5.9: Časový priebeh hranice predčasného uplatnenia pre $n = 2$ (vľavo) a $n = 3$ (vpravo). Čas t predstavuje čas do splatnosti konvertibilného dlhopisu. Nepresnosť tohto znázornenia je dôsledkom exponenciálneho delenia a tolerance, ktorú sme zaviedli pri identifikácii polohy hranice predčasného uplatnenia.



Obr. 5.10: Cena konvertibilného dlhopisu pri rôznych konverzných pomeroch v $r = 0.33$ a v čase $t = 5$ (čas zostávajúci do splatnosti konvertibilného dlhopisu).

6 Záver

V prvej časti práce sme sa zamerali na odvodenie parciálnej diferenciálnej rovnice oceňovania konvertibilných dlhopisov. Aby sme obmedzili výskyt premenných v koeficientoch, zaviedli sme niekoľko transformácií. Pre účely diskretizácie sme následne rovnicu previedli do divergentného tvaru, čo nám v numerickej schéme umožnilo využiť Greenovu formulu. Vzhľadom na to, že transformácie nám zmenili oblasť výpočtu a diskretizácia nám ju zúžila na konečnú podoblasť, museli sme prispôsobiť okrajové podmienky, aby boli konzistentné s hranicami oblasti. Keďže konvertibilné dlhopisy poskytujú možnosti predčasného uplatnenia, bolo potrebné vyriešiť problém voľnej hranice, ktorý s touto vlastnosťou súvisí. Z tohto dôvodu sme preformulovali úlohu do tvaru lineárnej komplementarity, ktorú sme vyriešili projektovaným SOR algoritmom. V experimentálnej časti sme sa zamerali na meranie presnosti našej numerickej schémy a analýzu parametrov modelu, pričom sme využili program v jazyku C, v ktorom sme numerickú schému implementovali. Vzhľadom na to, že sme nemali k dispozícii presné riešenie, experimentálny rád konvergenzie sme merali spôsobom, ktorý je uvedený v publikácií [8]. Postupným zjemňovaním delenia sme dospeli k záveru, že uvedená numerická schéma je pre zvolenú väzbu druhého rádu presnosti. Následne sme implementovanú numerickú schému použili na identifikáciu polohy hranice predčasného uplatnenia. Vypočítali sme numerické riešenie pre rôzne hodnoty vybraných parametrov a výsledky sme zhrnuli do pozorovaní, v ktorých odôvodňujeme vplyv parametrov na polohu hranice predčasného uplatnenia.

Literatúra

- [1] WILMOTT, P. – DEWYNNE, J. – HOWISON, S.: Option Pricing: Mathematical Models and Computation. Oxford Financial Press, 1994. 468 s. ISBN 978-0-95220-820-4.
- [2] ŠEVČOVIČ, D. – STEHLÍKOVÁ, B. – MIKULA, K.: Analytické a numerické metódy oceňovania finančných derivátov. Bratislava: Nakladateľstvo STU, 2009. 200 s. ISBN 978-80-227-3014-3.
- [3] KIM, J.H.: Pricing convertible bonds with known interest rate. In: Kangweon-Kyungki Mathematical Journal, vol. 14, 2006, no. 2, pp. 185-202.
- [4] ZVAN, R. – FORSYTH, P.A. – VETZAL, K.R.: A finite volume approach for contingent claims valuation. In: IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 21, 2001, no. 3, pp. 703-731.
- [5] KÚTIK, P.: Numerical solution of partial differential equations in financial mathematics. Bratislava: SvF STU, 2013. Dizertačná práca.
- [6] ŠEVČOVIČ, D. – STEHLÍKOVÁ, B. – MIKULA, K. 2011: Analytical and numerical methods for pricing financial derivatives. Hauppauge: Nova Science Publishers, Inc., 2011. 309 s. ISBN 978-1-61728-780-0.
- [7] BARRET, R. et al.: Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods. <http://www.netlib.org/templates/templates.pdf>
- [8] RUNBORG, O.: Verifying Numerical Convergence Rates. <http://www.csc.kth.se/utbildning/kth/kurser/DN2255/ndiff13/ConvRate.pdf>
- [9] LEVEQUE, R.J.: Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press, 2002. 580 s. ISBN 978-0-52100-924-9.

- [10] EYMARD, R. – GALLOUET, T. – Herbin, R.: Finite Volume Methods. In: Handbook of Numerical Analysis, vol. 7, 2000, pp.713-1020.