SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
Stavebná fakulta

# Riešenie úloh teórie potenciálu s okrajovou podmienkou pre šikmú deriváciu

Bakalárska práca

Študijný program: Matematicko-počítačové modelovanie
Študijný odbor: Aplikovaná matematika

Vedúci bakalárskej práce:
Ing. Róbert Čunderlík, PhD.

Autor práce:
Róbert Špir

Bratislava 2009

**Čestné prehlásenie**

Vyhlasujem, že som bakalársku prácu vypracoval samostatne s použitím citovanej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

Bratislava, 22.5.2009 ..................................

*Vlastnoručný podpis*

**Poďakovanie**

Chcem sa poďakovať vedúcemu práce Ing. Róbertovi Čunderlíkovi, PhD., za cenné rady, odbornú pomoc a konzultácie, ktoré mi poskytol pri vypracovaní bakalárskej práce. Osobitné poďakovanie patrí mojej rodine a priateľom za podporu a pochopenie.

# Obsah

# 1 Úvod

Teória potenciálu vznikla v 19. storočí, keď si vedci mysleli, že fundamentálne sily v prírode môžu byť odvodené z potenciálov, ktoré vyhovujú Laplaceovej rovnici. A teda teória potenciálu sa zaoberala štúdiom funkcií, ktoré by mohli slúžiť ako potenciály. V súčasnosti vieme, že príroda je komplikovanejšia. Rovnice, ktoré popisujú sily sú zväčša systémy nelineárnych parciálnych diferenciálnych rovníc a Laplaceova rovnica je platná len v limitných prípadoch.

V geodézii sa pod teóriou potenciálu rozumie hlavne štúdium a riešenie úloh gravitačného potenciálu. Tieto úlohy najčastejšie vystupujú vo forme okrajových úloh, a pretože sa zväčša jedná o vonkajšie okrajové úlohy, kde oblasť je Zem a úloha sa rieši mimo oblasti, tak sa jedná o riešenie Laplaceovej úlohy, keďže potenciál je v nekonečne regulárnou funkciou.

Gravitačný potenciál má viacero aplikácií. Dá sa pomocou neho vypočítať hmotnosť Zeme, implicitne vyjadriť tvar Zeme integrálnou rovnicou, alebo určiť ekvipotenciálne plochy, na ktorých je tento potenciál konštantný, z ktorých najdôležitejšia je geoid. Geoid predstavuje fyzikálny model povrchu Zeme určený strednou hladinou oceánov.

Okrajová úloha je daná diferenciálnou rovnicou spolu s okrajovými podmienkami. Úlohou jej riešenia je nájsť takú funkciu, ktorá spĺňa danú diferenciálnu rovnicu, a zároveň vyhovuje zadaným okrajovým podmienkam.

V tejto práci sa budeme zaoberať práve vonkajšou geodetickou okrajovou úlohou s Neumannovou okrajovou podmienkou so šikmou deriváciou, v ktorej zohľadníme aj príspevok tangenciálnych zložiek šikmej derivácie, keďže tieto sa doteraz zanedbávali. Budeme ju riešiť metódou okrajových prvkov na zemskom povrchu a nakoniec spravíme numerické experimenty na reálnych vstupných geodetických dátach a porovnanie s doterajším spôsobom riešenia.

# 2 Geodetické okrajové úlohy

V súčasnosti sa najrôznejšie fyzikálne problémy riešia hlavne parciálnymi diferenciálnymi rovnicami. Aby boli tieto rovnice riešiteľné, musia mať definované určité podmienky, ktoré sa nazývajú okrajové. Parciálna diferenciálna rovnica spolu so zadanými okrajovými podmienkami tvorí okrajovú úlohu.

## *2.1 Okrajová úloha*

Podľa typu okrajovej podmienky rozlišujeme Newtonovu, Neumannovu, Dirichletovu a zmiešanú okrajovú úlohu. V prípade, že hľadáme ako riešenie funkciu $u: R^N - \Omega \to R$, kde $\Omega \subset R^N$ je ohraničená oblasť s Lipschitzovskou hranicou, hovoríme o vonkajšej okrajovej úlohe. Uvažujme ako diferenciálnu rovnicu Poissonovu diferenciálnu rovnicu $\Delta u = f$.

### 2.1.1 Newtonova vonkajšia okrajová úloha

Newtonova vonkajšia okrajová úloha pre Poissonovu rovnicu má tvar

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in R^N - \Omega\,, \tag{2.1}$$

$$\alpha(\boldsymbol{x})u(\boldsymbol{x}) + \beta(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega\,, \tag{2.2}$$

kde $\Omega \subset R^N$ je ohraničená oblasť s Lipschitzovskou hranicou $\partial\Omega$, *f*, $g$, $\alpha$, $\beta$ sú dané funkcie, $f$ definovaná v oblasti $R^N - \Omega$ a funkcie $g$, $\alpha$, $\beta$ na hranici $\partial\Omega$ pričom $\forall P \in \partial\Omega$ platí podmienka $|\alpha(P)| + |\beta(P)| \neq 0$ a $\vec{n}$ je vektor jednotkovej vonkajšej normály ku hranici oblasti $\partial(R^N - \Omega)$. Takúto podmienku nazývame aj podmienkou tretieho druhu. Newtonova vonkajšia úloha má najviac jedno klasické riešenie, jednoznačnosť riešenia vyžaduje, aby znamienka konštánt $\alpha$, $\beta$ boli opačné [7].

### 2.1.2 Neumannova vonkajšia okrajová úloha

Neumannova vonkajšia okrajová úloha pre Poissonovu rovnicu má tvar

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in R^N - \Omega\,, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega\,, \tag{2.4}$$

pričom takáto okrajová podmienka sa nazýva aj podmienka druhého druhu. Neumannova vonkajšia okrajová úloha má najviac jedno klasické riešenie. Je to spôsobené podmienkou regularity v nekonečne, ktorú musí spĺňať neznáma funkcia.

### 2.1.3 Dirichletova vonkajšia okrajová úloha

Dirichletova vonkajšia okrajová úloha pre Poissonovu rovnicu má tvar

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in R^N - \Omega\,, \tag{2.5}$$

$$u(\boldsymbol{x}) = g\,(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega\,, \tag{2.6}$$

a takáto okrajová podmienka sa nazýva okrajová podmienka prvého druhu. Dirichletova vonkajšia okrajová úloha má najviac jedno klasické riešenie.

### 2.1.4 Zmiešaná vonkajšia okrajová úloha

Môžu sa vyskytnúť prípady, kedy je na rôznych častiach hranice definovaná iná okrajová podmienka, napríklad

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \qquad \boldsymbol{x} \in R^N - \Omega\,, \tag{2.7}$$

$$u(\boldsymbol{x}) = g_1(\boldsymbol{x}) \ \text{ pre } \ \boldsymbol{x} \in S_1 \quad \text{a} \quad \frac{\partial u}{\partial n}(\boldsymbol{x}) = g_2(\boldsymbol{x}) \ \text{ pre } \boldsymbol{x} \in S_2\,, \tag{2.8}$$

kde $S_1 \cup S_2 = \partial\Omega$. Všeobecne môže byť na každej časti hranice definovaná iná okrajová podmienka. V takomto prípade hovoríme o zmiešanej vonkajšej okrajovej úlohe.

## *2.2 Neumannova vonkajšia okrajová úloha v geodézii*

Ak je rovnica homogénna tak ide o príslušnú okrajovú úlohu pre Laplaceovu rovnicu. V geodézii sa najčastejšie riešia práve Laplaceove vonkajšie okrajové úlohy a často sa v nich vyskytuje aj problém šikmej derivácie. Donedávna sa na riešenie úloh súvisiacich s geometrickým, alebo fyzikálnym tvarom Zeme takmer výlučne využívala Newtonova okrajová úloha [13]. Keďže v súčasnosti sú okrem anomálií tiažového zrýchlenia k dispozícii aj tiažové poruchy, je možné takéto úlohy riešiť aj pomocou Neumannovej vonkajšej okrajovej úlohy.

# 3 Úloha teórie potenciálu s okrajovou podmienkou pre šikmú deriváciu

Gravitačný potenciál má v geodézii viacero aplikácií. Tiažový potenciál $W$ má všetky vlastnosti objemového potenciálu [7]

1) Tiažový potenciál $W$ je spojitou funkciou v celom priestore $R^3$
2) Tiažový potenciál $W$ má všade spojité parciálne derivácie 1. rádu
3) Tiažový potenciál $W$ je harmonickou funkciou v $R^3 - \Omega$ okrem prípadu, kedy uvažujeme aj rotáciu mimo telesa
4) Tiažový potenciál $W$ *v* oblasti $\Omega$ spĺňa Poissonovu diferenciálnu rovnicu

$$\Delta W = -4\pi G\rho + 2\omega^2, \tag{3.1}$$

   kde *G* je Newtonova gravitačná konštanta a $\rho$ je hustota v danom bode oblasti $\Omega$ a $\omega$ je uhlová rýchlosť rotácie Zeme.

5) Tiažový potenciál $W$ je regulárnou funkciou v nekonečne.

## *3.1 Neumannova geodetická okrajová úloha pre poruchový potenciál*

Neumannovu geodetickú okrajovú úlohu môžeme definovať ako riešenie geodetickej okrajovej úlohy, ktorá je formulovaná v tvare Laplaceovej diferenciálnej rovnice pre poruchový potenciál vo vonkajšej oblasti. Súčasné koncepcie riešenia používajú okrajovú podmienku Newtonovho typu. Pomocou gravimetrických a družicových meraní v bodoch na zemskom povrchu môžeme priamo určiť hodnoty Neumannovej okrajovej podmienky v tvare povrchových tiažových porúch, ktoré predstavujú deriváciu neznámeho poruchového potenciálu.

Z definície poruchového potenciálu

$$T(\boldsymbol{x}) = W(\boldsymbol{x}) - U(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in R^3, \tag{3.2}$$

kde $W$ je tiažový potenciál a $U$ je normálny tiažový potenciál v ľubovoľnom bode $\boldsymbol{x}$ a za predpokladu, že $T$ je v nekonečne regulárnou funkciou, môžeme formulovať Neumannovu geodetickú vonkajšiu okrajovú úlohu so šikmou deriváciou

$$\Delta T(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in R^3 - \Omega\,, \tag{3.3}$$

$$\langle \nabla T(\boldsymbol{x}), \vec{n}_e(\boldsymbol{x}) \rangle = -\delta g(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega\,, \tag{3.4}$$

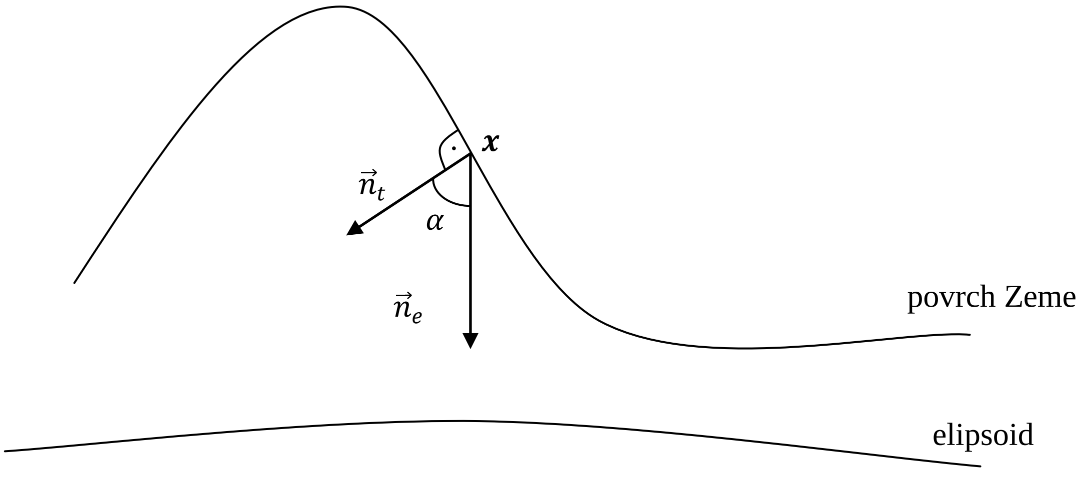
$$T = O(|\boldsymbol{x}|^{-1}) \text{ pre } \boldsymbol{x} \to \infty\,, \tag{3.5}$$

kde $\vec{n}_e$ je vektor vonkajšej normály k ekvipotenciálnemu elipsoidu, $\langle\ ,\ \rangle$ je skalárny súčin, $\Omega$ predstavuje teleso Zeme a $\partial\Omega$ je fyzický povrch Zeme ako hranica oblasti. Polohový vektor $\boldsymbol{x}$ označuje polohu v pravouhlých karteziánskych súradniciach, čiže trojicu $(x_1, x_2, x_3)$. Člen $\delta g$ predstavuje hodnoty povrchových tiažových porúch získané zo vzťahu

$$\delta g(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) - \gamma(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in R^3, \tag{3.6}$$

kde $g = |\nabla W|$ je veľkosť gravitačného zrýchlenia a $\gamma = |\nabla U|$ je veľkosť normálového gravitačného zrýchlenia. Rovnica (3.4) predstavuje Neumannovu geodetickú okrajovú podmienku so šikmou deriváciou, pričom $\nabla T$ je projektovaný do smeru normály k elipsoidu $\vec{n}_e$ , čím sa zanedbávajú povrchové zvislicové odchýlky.

Problém šikmej derivácie spočíva v skutočnosti, že normála k zemskému povrchu $\vec{n}_t$ nie je totožná s normálou k ekvipotenciálnemu elipsoidu $\vec{n}_e$ (Obr. 3.1).




Obr. 3.1: Normála k zemskému povrchu a ekvipotenciálnemu elipsoidu

Doteraz sa na riešenie problému šikmej derivácie používala projekcia tiažových porúch do smeru normály k zemskému povrchu $\vec{n}_t$ [6], t.j. ako vstupné hodnoty vystupovali $\delta g(\boldsymbol{x}) \cos \alpha(\boldsymbol{x})$, kde $\alpha(\boldsymbol{x})$ predstavuje uhol $\angle(\vec{n}_t, \vec{n}_e)$ v bode $\boldsymbol{x}$ (Obr. 3.1). V takomto riešení sa zanedbávali tangenciálne zložky šikmej derivácie. V tejto práci zohľadníme aj príspevok tangenciálnych zložiek šikmej derivácie. Takto definovanú vonkajšiu okrajovú úlohu budeme riešiť numericky metódou okrajových prvkov.

# 4 Riešenie Neumannovej okrajovej úlohy metódou okrajových prvkov

## 4.1 *Metóda okrajových prvkov*

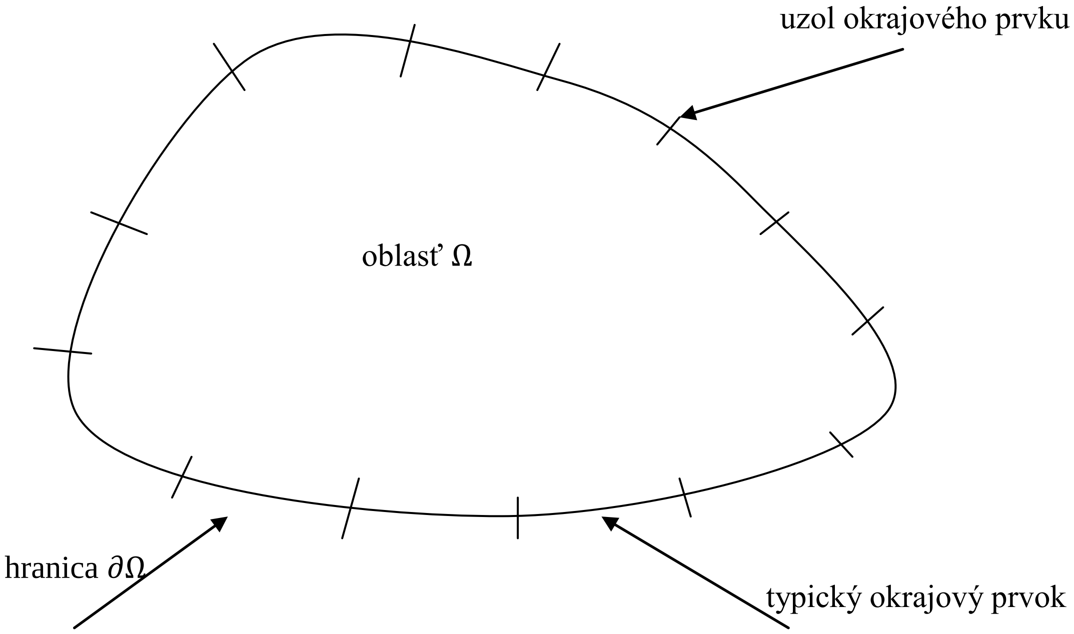
S rozvojom počítačovej techniky nastal aj rozvoj numerických metód na riešenie diferenciálnych rovníc. V súčasnosti sa väčšina inžinierskych problémov, ktoré predtým neboli riešiteľné, či už pre to, že neexistovalo analytické riešenie, alebo kvôli zložitej geometrii dajú riešiť numerickými metódami. Pri riešení parciálnych diferenciálnych rovníc je najrozšírenejšia metóda konečných prvkov, ďalšie známe metódy sú metóda konečných objemov a metóda okrajových prvkov.

Vzhľadom na charakter geodetickej okrajovej úlohy a neohraničenú oblasť, na ktorej hľadáme riešenie, nie je metóda konečných prvkov optimálna. Vhodnejšie je použiť práve metódu okrajových prvkov. Medzi jej najväčšie výhody patrí redukcia dimenzie úlohy, čím sa zníži počet rovníc potrebných na výpočet neznámych a úloha sa rieši iba na hranici oblasti. Nevýhoda metódy okrajových prvkov je, že pri riešení vznikne plná nesymetrická matica na rozdiel od pásovej, ktorá je pri metóde konečných prvkov [11].

Celý proces metódy okrajových prvkov sa dá rozdeliť na nasledovné kroky [8].

1) Diskretizácia hraníc skúmanej oblasti na sieť okrajových prvkov. Pri 2D probléme sa používajú 1D prvky (čiarové prvky) (Obr. 5.1), pri 3D probléme sa použijú 2D prvky (plošné prvky).
2) Fundamentálne riešenie danej parciálnej diferenciálnej rovnice bez uvažovania okrajových podmienok skutočného problému musí byť známe. Toto fundamentálne riešenie sa použije ako váhová funkcia pri formulácii metódy okrajových prvkov pre danú úlohu.
3) Zostavenie základných rovníc metódy okrajových prvkov pre uzly na hranici $\partial\Omega$ pre oblasť $\Omega$.

4) Výpočet neznámych hodnôt na hranici, neznáma hodnota vo vnútri oblasti Ω sa vyjadruje pomocou známych hodnôt na hranici $\partial\Omega$.




Obr. 4.1: Typický okrajový prvok a uzol okrajového prvku

## 4.2 *Priama formulácia metódy okrajových prvkov pre Neumannovu vonkajšiu okrajovú úlohu so šikmou deriváciou*

Úloha pri formulovaní riešenia metódou okrajových prvkov je nahradiť parciálnu diferenciálnu rovnicu definovanú na oblasti za rovnicu, ktorá je riešením iba na hranici oblasti [5].

Priama formulácia metódy okrajových prvkov pre Laplaceovu rovnicu je [5]

$$c(\boldsymbol{x})T(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} T(\boldsymbol{y})Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial T}{\partial \vec{n}_{\partial\Omega}}(\boldsymbol{y})G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \partial\Omega\,, \tag{4.1}$$

kde

$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi r}, \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in R^3 \tag{4.2}$$

je fundamentálne riešenie Laplaceovej rovnice a

$$Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\partial G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{\partial \vec{n}_{\partial\Omega}(\boldsymbol{y})} = \frac{\langle r, \vec{n}_{\partial\Omega}\rangle}{4\pi r^3}, \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in R^3 \tag{4.3}$$

je jeho derivácia, kde *r* je vzdialenosť bodov $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$.

Problém spočíva v skutočnosti, že v okrajovej integrálnej rovnici (boundary integral equation, BIE) (4.1) vystupuje normálová derivácia $\partial T/\partial \vec{n}_{\partial\Omega}$. Keďže naša okrajová podmienka (3.4) predstavuje šikmú deriváciu, potrebujeme si vyjadriť BIE s uvážením tejto šikmej derivácie pomocou normálovej zložky $\vec{n}$ a tangenciálnych zložiek $\vec{\tau}$ a $\vec{\rho}$ (Obr. 4.2)

Vyjadrime si vektor šikmej derivácie

$$\nabla T = \begin{bmatrix} \nabla T.\vec{n} \\ \nabla T.\vec{\rho} \\ \nabla T.\vec{\tau} \end{bmatrix} = (\nabla T.\vec{n})\vec{n} + (\nabla T.\vec{\rho})\vec{\rho} + (\nabla T.\vec{\tau})\vec{\tau}\,. \tag{4.4}$$

Uvážením vzťahu

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{v}} = \vec{v}.\nabla T, \tag{4.5}$$

kde $\vec{v}$ predstavuje smer šikmej derivácie dostaneme

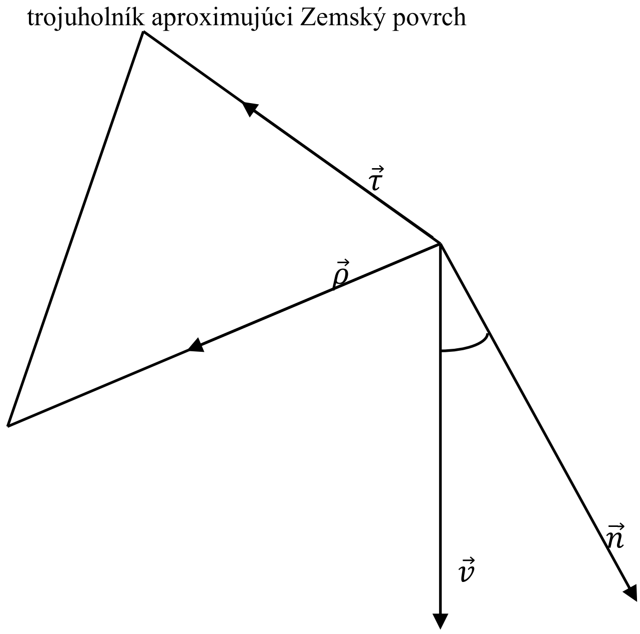
$$\vec{v}.\nabla T = (\nabla T.\vec{n})\vec{v}.\vec{n} + (\nabla T.\vec{\rho})\vec{v}.\vec{\rho} + (\nabla T.\vec{\tau})\vec{v}.\vec{\tau}\,. \tag{4.6}$$

Z rovnice (4.6) dostaneme

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}_{\partial\Omega}} = (\nabla T.\vec{n}) = \frac{1}{\vec{v}.\vec{n}}[\vec{v}.\nabla T - (\nabla T.\vec{\rho}).\vec{v}.\vec{\rho} - (\nabla T.\vec{\tau}).\vec{v}.\vec{\tau}]\,. \tag{4.7}$$

Dosadením (4.7) do (4.1) dostaneme priamu formuláciu metódy okrajových prvkov s uvážením tangenciálnych zložiek šikmej derivácie

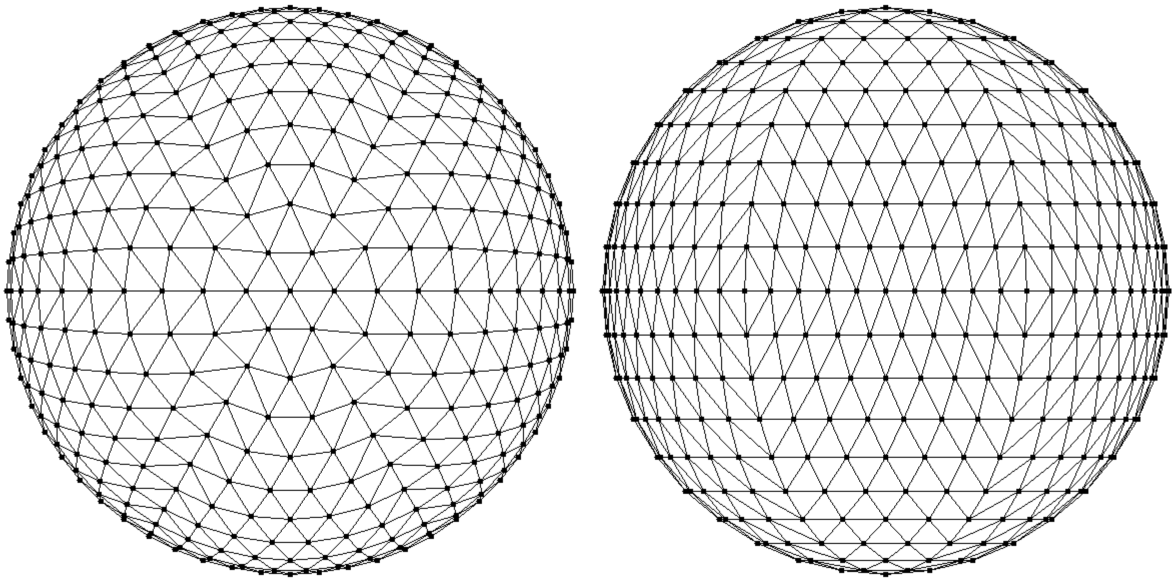
$$
\begin{aligned}
c(\boldsymbol{x})T(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega} T(\boldsymbol{y})Q(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} + \int_{\partial\Omega} (\nabla T.\vec{\rho}(\boldsymbol{y})).\frac{\vec{v}(\boldsymbol{y}).\vec{\rho}(\boldsymbol{y})}{\vec{v}(\boldsymbol{y}).\vec{n}(\boldsymbol{y})} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} \\
+ \int_{\partial\Omega} (\nabla T.\vec{\tau}(\boldsymbol{y})).\frac{\vec{v}(\boldsymbol{y}).\vec{\tau}(\boldsymbol{y})}{\vec{v}(\boldsymbol{y}).\vec{n}(\boldsymbol{y})} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})dy \\
= \int_{\partial\Omega} \frac{\vec{v}.\nabla T}{\vec{v}(\boldsymbol{y}).\vec{n}(\boldsymbol{y})} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \partial\Omega\,.
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$




Obr. 4.2: Jednotlivé zložky šikmej derivácie

## 4.3 *Odvodenie systému algebraických rovníc*

Na odvodenie systému algebraických rovníc použijeme metódu kolokácie s lineárnymi bázovými funkciami. Metóda kolokácie vyžaduje aproximáciu hranice oblasti $\partial\Omega$ na množinu trojuholníkových elementov $\Delta\Gamma_j$, pričom pri použití lineárnych bázových funkcií sú kolokačné body zhodné s vrcholmi trojuholníkových elementov (Obr. 4.3).



Obr. 4.3: Aproximácia hranice trojuholníkovými elementmi s kolokačnými bodmi

Aproximujme okrajové funkcie $T$ a $\delta g$ po čiastkach lineárnymi funkciami na príslušnom elemente $\Delta\Gamma_\mathrm{j}$, t.j.

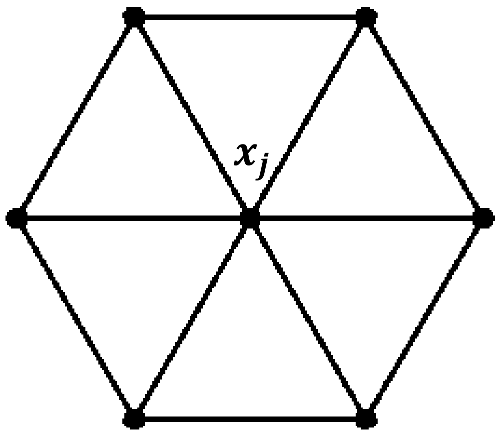
$$T(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{k=1}^{3} T_k \psi_k(\boldsymbol{x}) \ , \quad \boldsymbol{x} \in \Delta\Gamma_\mathrm{j} \ , \tag{4.9}$$

$$\delta g(\boldsymbol{x}) \approx \sum_{k=1}^{3} \delta g_k \psi_k(\boldsymbol{x}) \ , \quad \boldsymbol{x} \in \Delta\Gamma_\mathrm{j} \ , \tag{4.10}$$

kde $T_k$ a $\delta g_k$ predstavujú hodnoty okrajových funkcií v kolokačných bodoch príslušného elementu a funkcie $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$ predstavujú lineárne bázové funkcie na elemente definované ako

$$\psi_i(\boldsymbol{x}_j) = \begin{cases} 1, & \text{ak} \quad \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_j \\ 0, & \text{ak} \quad \boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{x}_j \end{cases}, \tag{4.11}$$

pričom $i, j = 1, \dots, N$ kde $N$ je celkový počet kolokačných bodov. Vo všetkých ostatných bodoch príslušného elementu nadobúdajú bázové funkcie hodnoty z intervalu (0,1). Jedna bázová funkcia bude tvorená všetkými trojuholníkovými elementmi, ktoré sa spájajú v príslušnom kolokačnom bode a vytvárajú nosič bázovej funkcie (Obr. 4.4).




Obr. 4.4: Nosič (support) bázovej funkcie pre kolokačný bod $x$

Na základe takejto diskretizácie môžeme prepísať rovnicu (4.8) do diskrétneho tvaru pre daný kolokačný bod $i$

$$c_i T_i + \sum_{j=1}^{N} T_j \left( \int_{supp\ \psi_j} Q_{ij}\, \psi_j \, d\Gamma_\mathrm{j} + \int_{supp\ \psi_j} \left(\nabla\psi_\mathrm{j} . \vec{\rho}_j\right) \frac{\vec{v}_j . \vec{\rho}_j}{\vec{v}_j . \vec{n}_j} G_{ij}\, d\Gamma_\mathrm{j} \right.$$

$$\left. + \int_{supp\ \psi_j} \left(\nabla\psi_\mathrm{j} . \vec{\tau}_j\right) \frac{\vec{v}_j . \vec{\tau}_j}{\vec{v}_j . \vec{n}_j} G_{ij}\, d\Gamma_\mathrm{j} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \delta g_j \int_{supp\ \psi_j} \frac{\psi_j}{\vec{v}_j . \vec{n}_j} G_{ij}\, d\Gamma_\mathrm{j}\,, \quad i = 1, \dots, N\,, \tag{4.11}$$

kde $supp\,\psi_j$ je nosič $j$-tej bázovej funkcie. Funkcia $c_i$ predstavuje priestorový segment vymedzený trojuholníkovými elementmi, ktoré sa spájajú v príslušnom kolokačnom bode [5]. Systém rovníc (4.11) môžeme prepísať do maticového tvaru

$$\boldsymbol{M}\vec{t} = \boldsymbol{L}\overrightarrow{\delta g} \tag{4.12}$$

kde $\vec{t} = (T_1, T_2, \dots, T_N)^T$ je vektor neznámych hľadaného poruchového potenciálu a $\overrightarrow{\delta g} = (\delta g_1, \delta g_2, \dots, \delta g_N)^T$ sú hodnoty povrchových tiažových porúch získané družicovými a gravimetrickými meraniami. Koeficienty matíc $\boldsymbol{M}$ a $\boldsymbol{L}$ sú jednotlivé integrály z rovníc (4.11), ktoré vyčíslime aproximáciou pomocou Gaussových kvadratúr definovaných na trojuholníku v tvare

$$\boldsymbol{M}_{ij} = \frac{1}{4\pi}\sum_{s=1}^{S}\left(A_{j_s}k_{ij_s}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{r_{ik_s}^3}\psi_{jk_s}w_k\right.$$

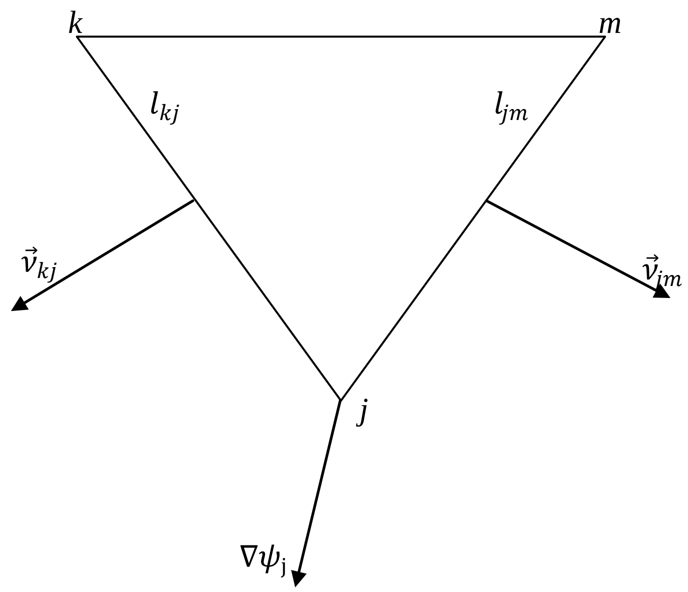
$$\left.+ A_{j_s}\left(\frac{\nabla\psi_{\mathrm{j_s}}.\vec{\rho}_{j_s}}{\cos\varphi_{\mathrm{j_s}}} + \frac{\nabla\psi_{\mathrm{j_s}}.\vec{\tau}_{j_s}}{\cos\varphi_{\mathrm{j_s}}}\right)\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{r_{ik_s}}w_k\right), \quad i \neq j\,, \tag{4.13}$$

$$\boldsymbol{L}_{ij} = \frac{1}{4\pi}\sum_{s=1}^{S}\left(\frac{A_{j_s}}{\cos\varphi_{\mathrm{j_s}}}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{r_{ik_s}}\psi_{jk_s}w_k\right), \quad i \neq j\,, \tag{4.14}$$

kde $A_{j_s}$ je plocha *s*-tého trojuholníka bázovej funkcie *j*-teho nosiča, $k_{ij_s}$ je kolmá vzdialenosť od *i*-teho kolokačného bodu po rovinu *s*-tého trojuholníka, $r_{ik_s}$ je vzdialenosť *i*-teho kolokačného bodu od *k*-teho bodu Gaussovej kvadratúry *s*-tého trojuholníka, $\psi_{jk_s}$ je hodnota lineárnej bázovej funkcie pre $k$-ty bod Gaussovej kvadratúry $s$-tého trojuholníka a $w_k$ je príslušná váha *k*-teho bodu Gaussovej kvadratúry. Hodnotu $\cos\varphi_{\mathrm{j_s}}$ predstavuje priemet jednotkovej normály ekvipotenciálneho elipsoidu do smeru normály *s*-tého trojuholníka,

$$\cos\varphi_{\mathrm{j_s}} = \vec{v}_j . \vec{n}_{j_s}\,, \tag{4.15}$$

$\nabla\psi_{\mathrm{j_s}}$ je gradient bázovej funkcie *s*-tého trojuholníka (Obr. 4.5) a $\vec{v}_{0j_s}$ je vektor reprezentujúci tangenciálnu zložku šikmej derivácie *s*-tého trojuholníka. *S* je počet trojuholníkov *j*-teho nosiča a *K* je počet bodov Gaussovej kvadratúry.




Obr. 4.5: Gradient bázovej funkcie

Keďže uvažujeme lineárne bázové funkcie, bude $\nabla\psi_{\mathrm{j_s}}$ na celom trojuholníku konštantný. Preto platí

$$\nabla\psi_{j_s} = \frac{1}{A_{j_s}} \int\limits_{\Delta_{j_s}} \nabla\psi d\Delta \,. \tag{4.16}$$

Aplikujme Greenovu vetu na rovnicu (4.16)

$$\frac{1}{A_{j_s}} \int\limits_{\Delta_{j_s}} \nabla\psi d\Delta = \frac{1}{A} \int\limits_{\partial\Delta_{j_s}} \psi\vec{v} d\partial\Delta \,, \tag{4.17}$$

kde $\partial\Delta$ je hranica trojuholníka a $\vec{v}$ je normála trojuholníka. Jednotlivé zložky gradientu pre $s$-tý trojuholník potom vypočítame

$$\nabla\psi_{j_s} = \frac{1}{A_{j_s}} \left[ \frac{\psi_{j_s}(j) + \psi_{j_s}(m)}{2} l_{jm} \vec{v}_{jm} + \frac{\psi_{j_s}(m) + \psi_{j_s}(k)}{2} l_{mk} \vec{v}_{mk} \right.$$
$$\left. + \frac{\psi_{j_s}(k) + \psi_{j_s}(j)}{2} l_{kj} \vec{v}_{kj} \right], \tag{4.18}$$

kde $\psi_{j_s}(x)$ sú hodnoty bázovej funkcie v príslušných bodoch. S uvážením priebehu lineárnych bázových funkcií na $\Delta_{j_s}$ dostaneme

$$\nabla\psi_{j_s} = \frac{1}{A_s}\left[\frac{l_{jm}}{2}\vec{\nu}_{jm} + \frac{l_{kj}}{2}\vec{\nu}_{kj}\right], \tag{4.19}$$

kde indexy $j$, $k$, $m$ predstavujú vrcholy trojuholníka, $\vec{\nu}_{jm}$ a $\vec{\nu}_{kj}$ sú normály strán trojuholníka, $l_{jm}$ a $l_{kj}$ sú dĺžky strán trojuholníka (Obr. 4.5).

Pre diagonálne prvky v prípade matice $\boldsymbol{L}$ platí [6]

$$\boldsymbol{L}_{ii} = \frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{S}\frac{A_{i_s}}{r_s}\ln\frac{\mathrm{tg}[(\beta_s+\alpha_s)/2]}{\mathrm{tg}(\beta_s/2)}. \tag{4.20}$$

Na základe skutočnosti, že konštantný potenciál aplikovaný na uzavretú oblasť neprodukuje žiadny tok, sa súčet všetkých prvkov v matici $\widetilde{\boldsymbol{M}}$, t.j. matici bez uváženia tangenciálnych zložiek šikmej derivácie rovná 1 [5]. Teda diagonálny prvok v prípade matice $\boldsymbol{M}$ sa dá vyjadriť týmto vzťahom

$$\boldsymbol{M}_{ii} = 1 - \sum_{\substack{i\neq j\\ j=1}}^{N}\left(\frac{1}{4\pi}\sum_{s=1}^{S}A_{j_s}k_{ij_s}\sum_{k=1}^{K}\frac{1}{r_{ik_s}^3}\psi_{jk_s}w_k\right) + \frac{1}{\pi}\sum_{s=1}^{S}\frac{A_{i_s}}{r_s}\ln\frac{\mathrm{tg}[(\beta_s+\alpha_s)/2]}{\mathrm{tg}(\beta_s/2)}. \tag{4.21}$$

Takýmto spôsobom dostaneme sústavu rovníc (4.12). Po dosadení okrajovej podmienky $\overrightarrow{\delta g}$ a vynásobení maticou $\boldsymbol{L}$ dostaneme na pravej strane rovnice (4.12) známy vektor, a matica $\boldsymbol{M}$ na ľavej strane predstavuje maticu tuhosti. Matica $\boldsymbol{M}$ je plná, nesymetrická matica.

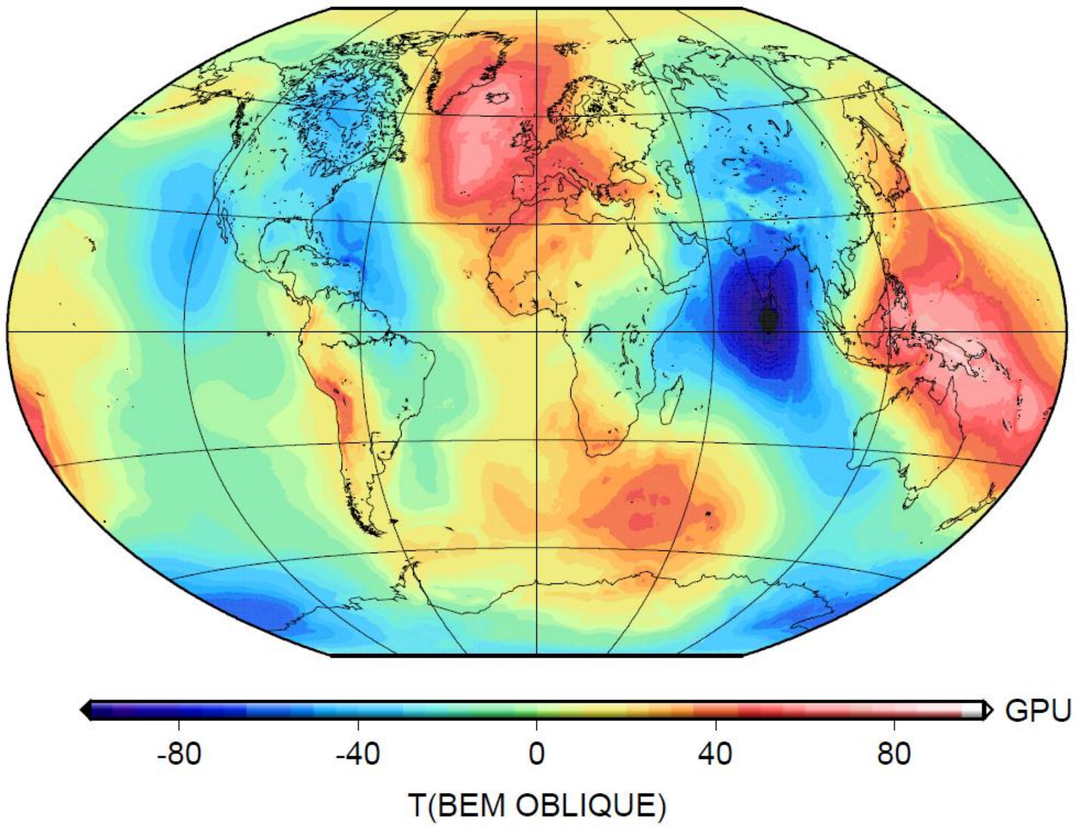
# 5 Numerický experiment

Pre numerický experiment bol vytvorený program v jazyku C, ktorý bol aplikovaný na zemský povrch diskretizovaný modifikovanou hierarchickou trianguláciou postupným delením 12-stena (Obr. 4.3) až po požadovanú presnosť 0.2° [6]. Týmto vzniklo 1215002 kolokačných bodov. Pre zníženie pamäťových nárokov programu bola použitá metóda eliminácie vzdialených zón [6], kde sa koeficienty matice pre body vo vzdialenosti väčšej ako 912 km od práve počítaného bodu prenásobili hodnotou poruchového potenciálu zo satelitného geopotenciálneho modelu ITG-GRACE03S [9] a prešli do pravej strany rovnice (4.12). Tým vznikla redšia matica tuhosti na rozdiel od plnej matice $\boldsymbol{M}$ vo vzťahu (4.12). Ako vstupné hodnoty boli vygenerované horizontálne súradnice kolokačných bodov, výška zemského povrchu v týchto bodoch z digitálneho modelu terénu SRTM30_PLUS V5.0 [4], hodnoty tiažových porúch z modelu DNSC08 [1] a hodnoty poruchového potenciálu zo satelitného geopotenciálneho modelu ITG-GRACE03S. Vypočítané hodnoty boli následne porovnané s riešením bez uvažovania tangenciálnych zložiek šikmej derivácie ako aj s modelom EGM2008, ktorý vydala National Geospatial-Intelligence Agency v USA [10].

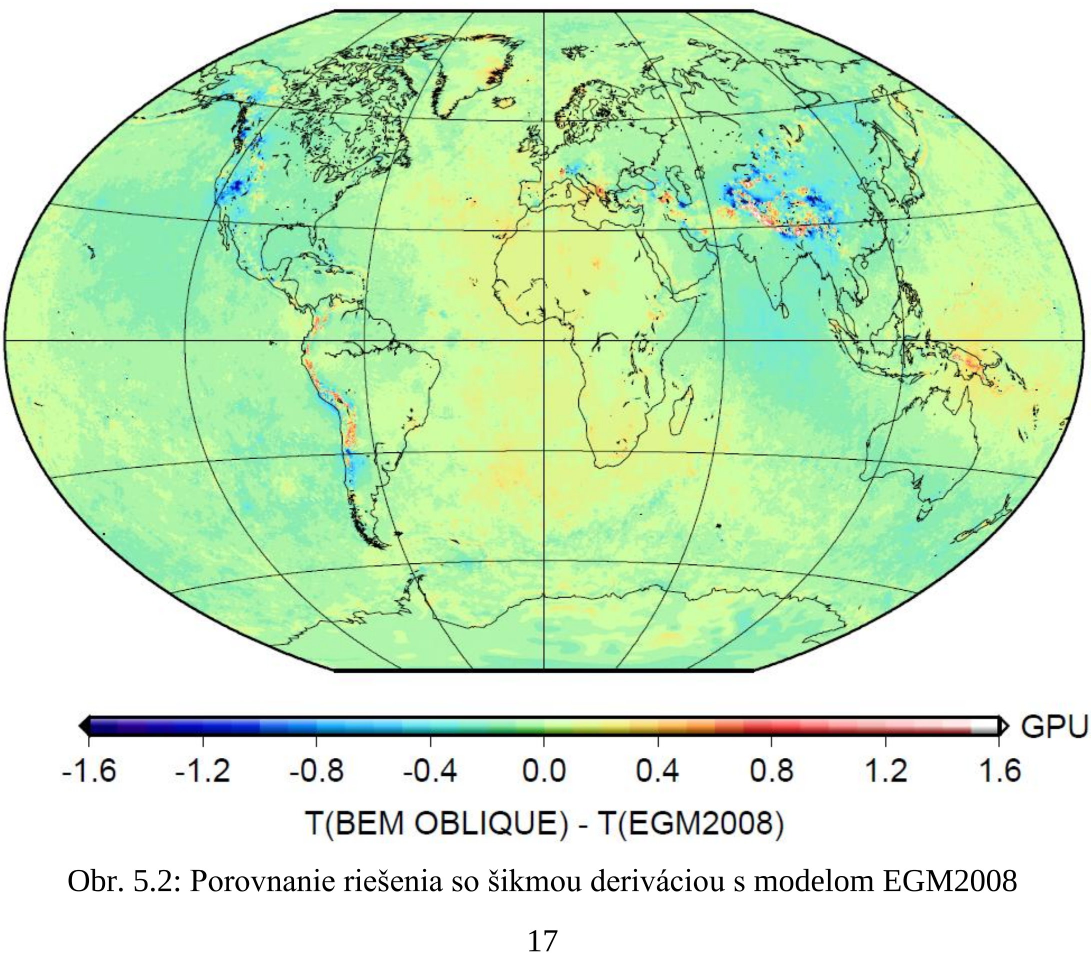
Výpočty boli realizované na paralelnom počítači na katedre matematiky Slovenskej Technickej Univerzity v Bratislave. Paralelizácia programu bola spravená pomocou rozhrania Message Passing Interface (MPI) [2]. Výpočty boli vykonané na výpočtovom klasteri so 16 procesormi a 128GB distribuovanej operačnej pamäte.

Výpočet napĺňania matíc sústavy trval 5 hodín a 43 minút a riešenie sústavy použitím nestacionárnej iteračnej metódy stabilizovaných bikonjugovaných gradientov Bi-CGSTAB [3] trvalo 158 sekúnd pri 12 iteračných krokoch pre toleranciu $1.10^{-11}\ m^2.s^{-2}$. Celkový výpočet trval 5 hodín a 46 minút.

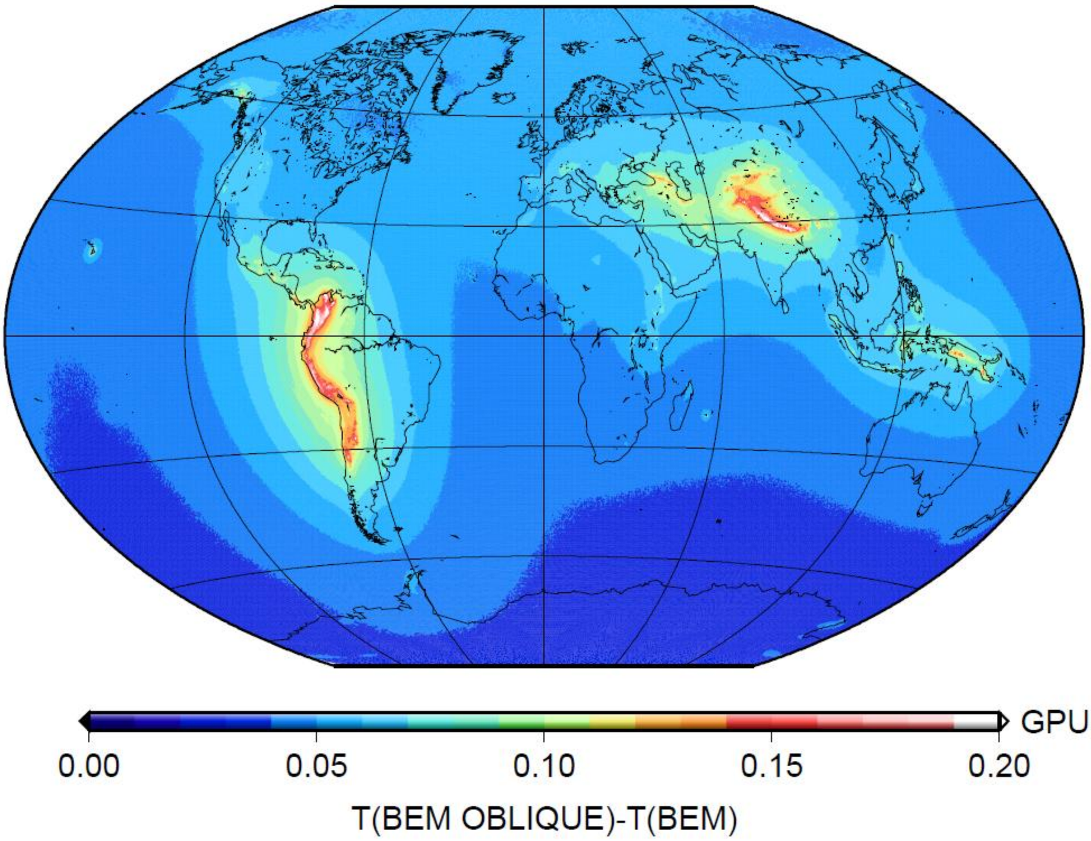
Pre výstupy grafického porovnania výsledkov bol zvolený softvér GMT [14]. Najprv sme zobrazili globálny priebeh riešenia s príspevkom šikmej derivácie, t.j. poruchový potenciál T(BEM OBLIQUE) (Obr. 5.1), potom sme toto riešenie porovnali s modelom T(EGM2008) (Obr. 5.2) a nakoniec sme toto riešenie porovnali s riešením, v ktorom sa šikmá derivácia zanedbala T(BEM) (Obr. 5.3). V tabuľkách 5.1, 5.2 a 5.3 sú uvedené štatistické charakteristiky rozdielov medzi týmito modelmi.




Obr. 5.1: Globálny priebeh riešenia (1 $GPU$ = 10 $m^{2}.s^{-2}$)




Obr. 5.2: Porovnanie riešenia so šikmou deriváciou s modelom EGM2008




Obr. 5.3: Porovnanie modelov s a bez šikmej derivácie

Tab.5.1: Štatistika porovnania modelov T(BEM) a T(EGM2008)

| [GPU] (1 $GPU$ = 10 $m^2.s^{-2}$) | Spolu | Oceány | Kontinenty |
|---|---|---|---|
| Počet uzlov | 1215002 | 870264 | 344738 |
| Priemerný rozdiel | -0,077 | -0,069 | -0,098 |
| Maximálny rozdiel | 4,008 | 0,697 | 4,008 |
| Minimálny rozdiel | -3,496 | -1,018 | -3,496 |
| Smerodajná odchýlka | 0,142 | 0,107 | 0,203 |

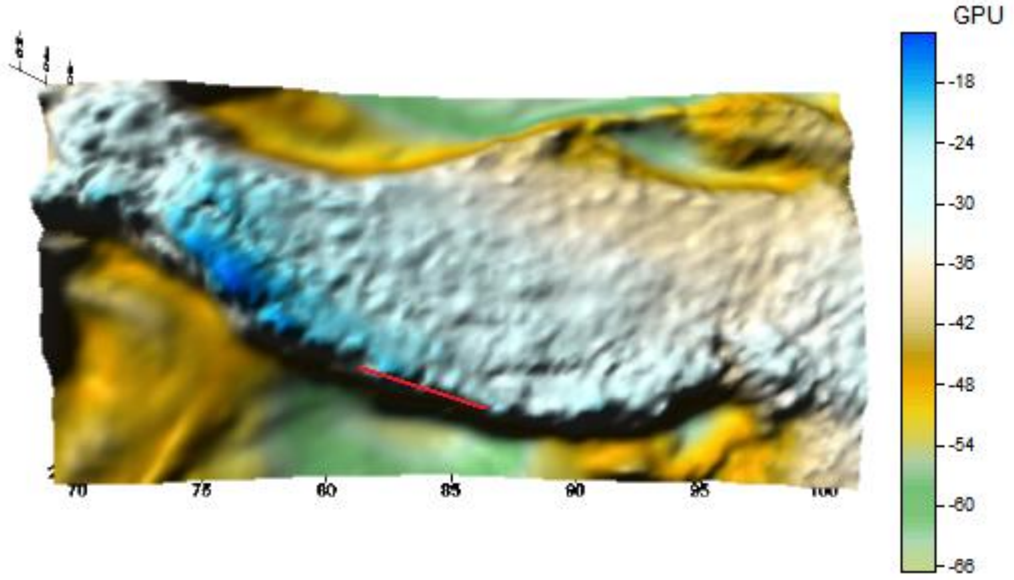
Tab.5.2: Štatistika porovnania modelov T(BEM OBLIQUE) a T(EGM2008)

| [GPU] | Spolu | Oceány | Kontinenty |
|---|---|---|---|
| Počet uzlov | 1215002 | 870264 | 344738 |
| Priemerný rozdiel | -0,023 | -0,019 | -0,034 |
| Maximálny rozdiel | 4,163 | 0,747 | 4,163 |
| Minimálny rozdiel | -3,364 | -0,960 | -3,364 |
| Smerodajná odchýlka | 0,140 | 0,106 | 0,201 |

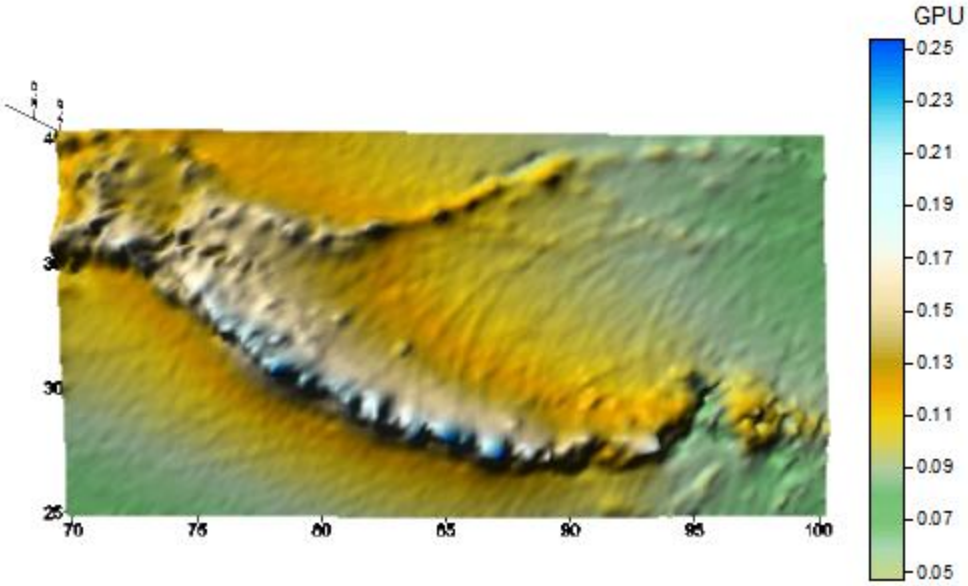
Tab.5.3: Štatistika porovnania modelov T(BEM OBLIQUE) a T(BEM)

| [GPU] | Spolu | Oceány | Kontinenty |
|---|---|---|---|
| Počet uzlov | 1215002 | 870264 | 344738 |
| Priemerný rozdiel | 0,054 | 0,050 | 0,064 |
| Maximálny rozdiel | 0,380 | 0,162 | 0,380 |
| Minimálny rozdiel | 0,028 | 0,028 | 0,028 |
| Smerodajná odchýlka | 0,017 | 0,011 | 0,022 |

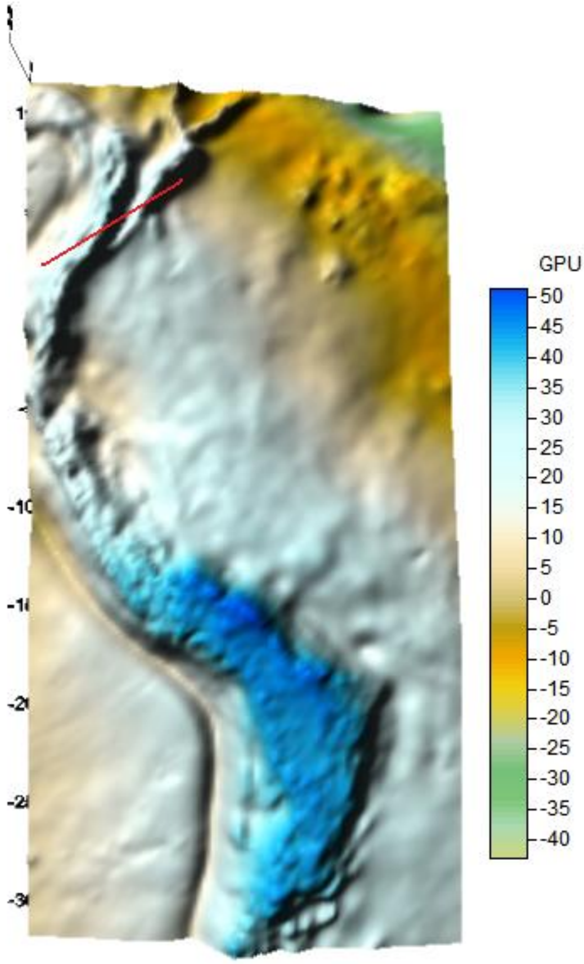
Na zobrazenie príspevku šikmej derivácie v oblastiach, kde je tento príspevok najväčší, teda Andy a Himaláje (Obr. 5.3), sme použili program Surfer [12] (Obr. 5.4 a Obr. 5.5). Priebeh hodnôt potenciálov jednotlivých modelov zobrazené v rezoch sú na Obr. 5.6 a 5.7. Samotné rezy sú zobrazené na Obr. 5.4a a 5.5a. Na Obr. 5.8 je znázornený meridiánový rez cez 86.925° východnej dĺžky, cez vrchol Mount Everest.



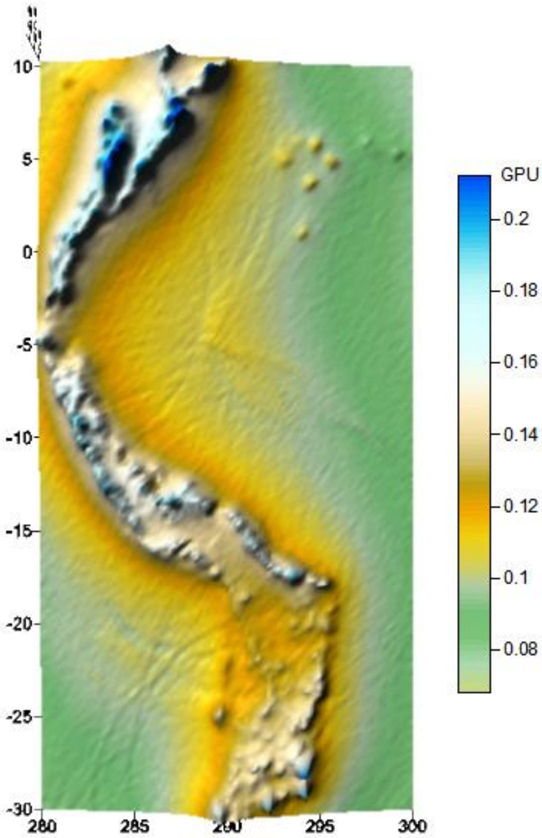

Obr. 5.4a: Priebeh potenciálu v Himalájach



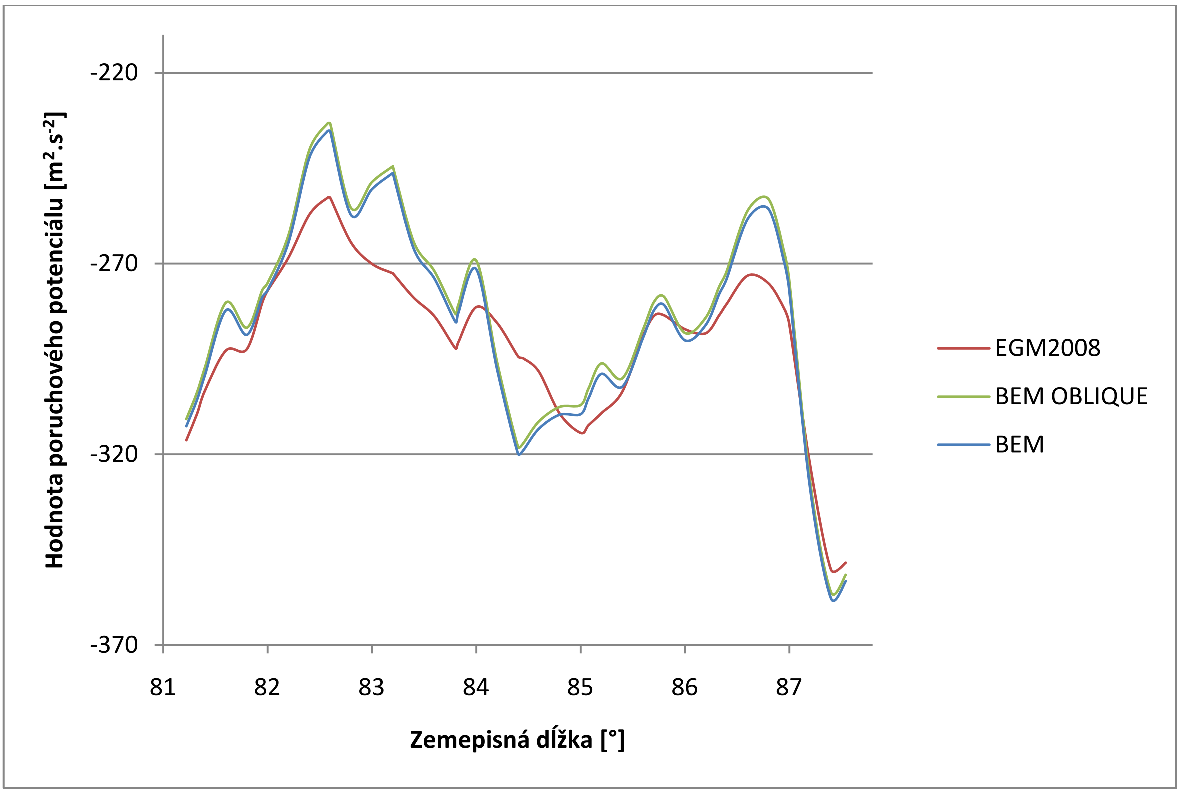

Obr. 5.4b: Príspevok šikmej derivácie v Himalájach



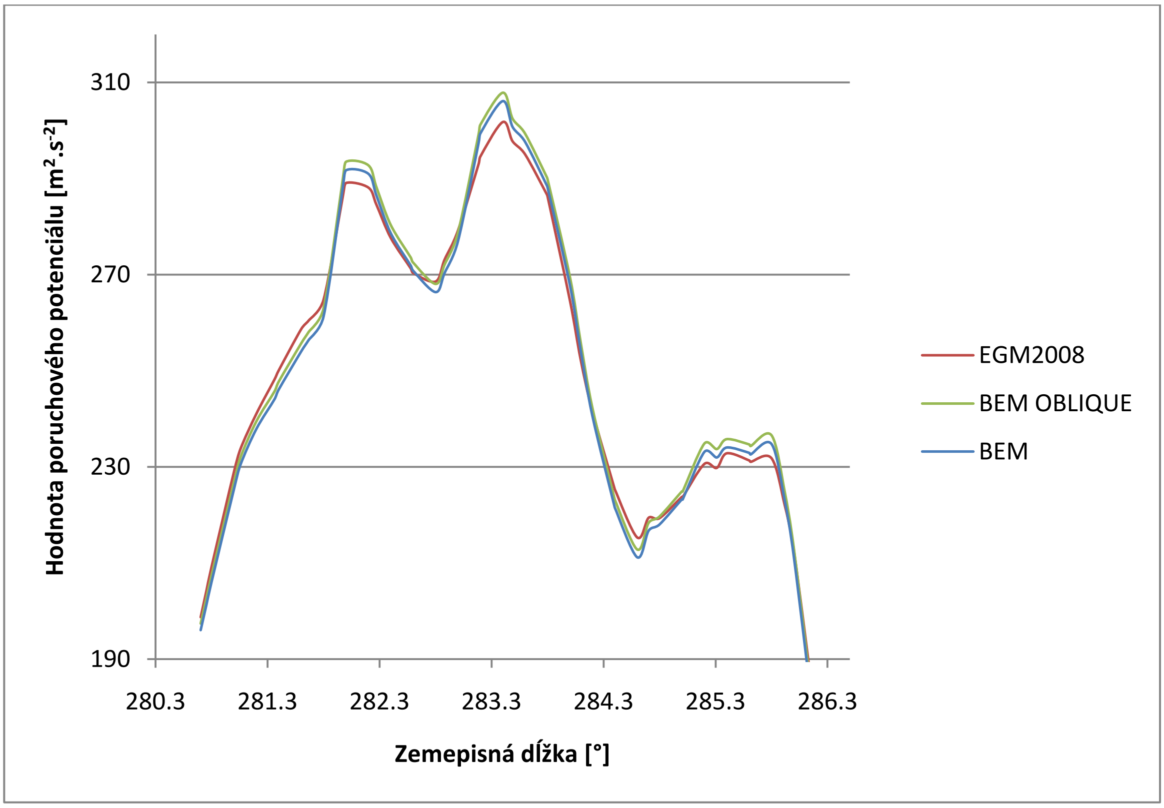

Obr. 5.5a: Priebeh potenciálu v Andách



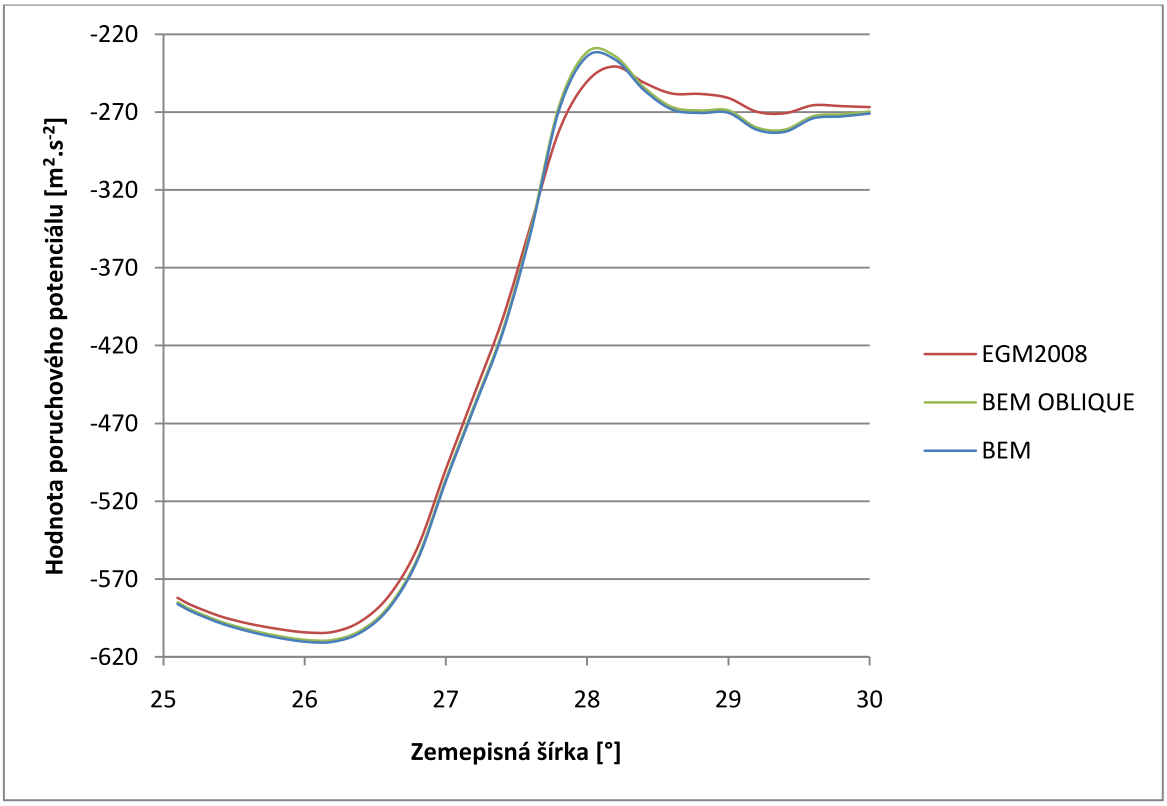

Obr. 5.5b: Príspevok šikmej derivácie v Andách




Obr. 5.6: Priebeh hodnôt potenciálov jednotlivých modelov v Himalájach v reze




Obr. 5.7: Priebeh hodnôt potenciálov jednotlivých modelov v Andách v reze




Obr. 5.8: Priebeh hodnôt potenciálov cez meridiánový rez cez Mount Everest

# 6 Zhodnotenie výsledkov

Z výsledkov zistených numerickým experimentom sme dospeli k nasledujúcim záverom. Príspevok šikmej derivácie je najväčší v oblastiach najvyšších pohorí, teda v Himalájach, Andách, Havajských ostrovoch a v oblasti Indonézie (Obr. 5.3). V týchto oblastiach sú dosahované maximálne príspevky viac ako 0,3 GPU čo pri určovaní priebehu geoidu s centimetrovou presnosťou predstavuje nárast o približne 30 centimetrov. Z Obr. 5.4b a 5.5b, ako aj z grafov (Obr. 5.6 a 5.7) ďalej vyplýva, že príspevky dosahujú najvyššie hodnoty práve vo vrcholoch týchto pohorí a v údoliach, zatiaľ čo na svahoch sú zmeny minimálne.

Navyše vplyv tangenciálnych zložiek šikmej derivácie, ktorý je maximálny vo vyššie uvedených pohoriach, má pomerne výrazný vplyv na geoid až do vzdialenosti približne 1000 km (Obr. 5.2). Následkom tohto vplyvu sa zlepšili stredné hodnoty rezíduí v porovnaní s modelom EGM2008 na oceánoch zo 7 cm na 2 cm a na kontinentoch z 10 cm na 3 cm (Tabuľky 5.1 a 5.2). Ďalšie zaujímavé zistenie je, že príspevok šikmej derivácie je na celom povrchu Zeme kladný.

# 7 Záver

Cieľom tejto bakalárskej práce bolo riešenie geodetickej okrajovej úlohy metódou okrajových prvkov s uvážením príspevku tangenciálnych zložiek šikmej derivácie. Najprv sme si definovali Neumannovu okrajovú geodetickú úlohu pre poruchový potenciál s okrajovou podmienkou pre šikmú deriváciu. Na riešenie takejto úlohy sme si odvodili priamu formuláciu metódy okrajových prvkov, ktorá je vhodnejšia na riešenie vonkajších okrajových úloh, keďže riešenie sa hľadá len na hranici oblasti. Následne sme si odvodili systém algebraických rovníc pre numerické riešenie. Riešenie sme zrealizovali vytvorením programu v jazyku C, pomocou ktorého sme vykonali výpočty so vstupnými geodetickými veličinami v numerickom experimente. Vypočítané výsledky sme nakoniec porovnali s výsledkami vypočítanými bez príspevkov šikmej derivácie ako aj s modelom EGM2008.

Z výsledkov a ich porovnania sme zistili, že príspevky tangenciálnych zložiek šikmej derivácie sú najvýraznejšie v extrémne členitých terénoch oblastí Ánd a Himalájí. Príspevky tangenciálnych zložiek šikmej derivácie v týchto oblastiach výraznejšie ovplyvňujú globálny priebeh hodnôt potenciálu až do vzdialenosti 1000 kilometrov. Pre určovanie priebehu geoidu s centimetrovou presnosťou tento príspevok predstavuje hodnoty až 30 centimetrov čo je pomerne významné.

Z numerického experimentu vyplýva, že príspevok tangenciálnych zložiek šikmej derivácie by sa mal uvažovať najmä pri presnom určovaní lokálneho priebehu geoidu v horných oblastiach.

# 8 Súhrn

Bakalárska práca je zameraná na riešenie úlohy teórie potenciálu s okrajovou podmienkou pre šikmú deriváciu a vplyv príspevkov tangenciálnych zložiek šikmej derivácie na výsledok úlohy. Numerické riešenie tejto úlohy sme odvodili metódou okrajových prvkov. Nakoniec sme realizovali numerický výpočet tejto geodetickej okrajovej úlohy počítačovým programom a výsledky sme porovnali s výpočtom so zanedbaním tangenciálnych zložiek šikmej derivácie ako aj s modelom EGM2008. Porovnaním sa zistilo, že má zmysel uvažovať aj tieto príspevky tangenciálnych zložiek šikmej derivácie. Príspevok nadobúdal v extrémne členitom teréne (Andy, Himaláje) hodnoty až 0,3 GPU, čo pri určovaní priebehu geoidu s centimetrovou presnosťou predstavuje pomerne výrazný príspevok 30 centimetrov.

# 9 Summary

This bachelor work is focused on the solution of the oblique derivative boundary value problem in the potential theory and on a contribution of tangential components of the oblique derivative on this solution. In order to obtain a numerical solution of this problem we used boundary element method. We have realized numerical experiments where we developed computer program for solving this geodetic boundary value problem. We have compared our numerical results with the solution that omitted tangential components of oblique derivative as well as with the EGM2008 geopotential model. We have found that there is a reason to consider the tangential components especially in extremely mountainous regions (Andes, Himalayas). Their contribution is up to 0.3 GPU (approximately 30 cm) that is significant for “cm-level” accurate global geoid modeling.

# Zoznam použitej literatúry

[1] Andersen O.B., Knudsen P., Berry P.: The DNSC08 ocean wide altimetry derived gravity field. Prezentované na EGU-2008, Vienna, Austria, Apríl 2008

[2] Aoyama Y., Nakano J.: RS/6000 SP: Practical MPI Programming. IBM, Poughkeepsie, New York, 1999

[3] Barrett R., Berry M., Chan T.F., Demmel J., Donato J., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C., Van der Vorst H.: Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, SIAM Philadelphia, 1994

[4] Becker J.J., Sandwell D.T., Smith W.H.F., Braud J., Binder B., Depner J., Fabre D., Factor J., Ingalls S., Kim S.-H., Ladner R., Marks K., Nelson S., Pharaoh A., Sharman G., Trimmer R., vonRosenburg J., Wallace G., Weatherall P.: Global Bathymetry and Elevation Data at 30 Arc Seconds Resolution: SRTM30_PLUS, revised for Marine Geodesy, 2009

[5] Brebia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C.: Boundary Element Techniques – Theory and Applications in Engineering, Springer, New York, 1984

[6] Čunderlík R., Mikula K., Mojzeš M.: Numerical solution of the linearized fixed gravimetric boundary-value problem. J Geod 82: 15-29, Springer Berlin Heidelberg, 2008

[7] Janák J., Mikula K., Čunderlík R.: Fyzikálna geodézia II. 1. vydanie, Bratislava, Vydavateľstvo STU 2006

[8] Kutiš V.: Základy modelovania a simulácii, Katedra mechaniky, FEI STU Bratislava, 2006

[9] Mayer-Gürr, T.: ITG-Grace03s: The latest GRACE gravity field solution computed in Bonn, prezentované na GSTM+SPP, Potsdam 15-17 Okt. 2007

[10] Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K.: An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008, prezentované na 2008 General Assembly of EGU, Vienna, Austria, 13-18 Apríl, 2008

[11] Reddy, J.N.: An introduction to the finite element method, McGraw-Hill, New York, 1993

[12] Surfer, Surface Mapping System, Golden Software, www.goldensoftware.com

[13] Vaníček, P., Krakiwsky, E.: Geodesy: The Concepts. The North-Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1982

[14] Wessel, P., Smith, W.H.F.: The Generic Mapping Tools, Version 4.4.0, 2009, http://gmt.soest.hawaii.edu/