SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

Stavebná fakulta

Evidenčné číslo: SvF-5342-7408

Metódy vysokého rádu presnosti pre riešenie rovnice advekcie

Bakalárska práca

Študijný program: matematicko-počítačové modelovanie
Číslo študijného odboru: 1114
Názov študijného odboru: 9.1.9 aplikovaná matematika
Školiace pracovisko: Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Vedúci záverečnej práce: RNDr. Peter Frolkovič, PhD.

Bratislava 2013 **Peter Škabla**

Slovenská technická univerzita v Bratislave
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

Stavebná fakulta
Akademický rok: 2012/2013
Evidenčné číslo: SvF-5342-7408

ZADANIE BAKALÁRSKEJ PRÁCE

Študent:	**Peter Škabla**
ID študenta:	7408
Študijný program:	matematicko-počítačové modelovanie
Študijný odbor:	9.1.9 aplikovaná matematika
Vedúci práce:	RNDr. Peter Frolkovič, PhD.

Názov práce: **Metódy vysokého rádu presnosti pre riešenie rovnice advekcie**

Špecifikácia zadania:

V práci sa bude študovať numerická metóda ADER (Arbitrary DERivatives) na riešenie jednoduchej lineárnej rovnice advekcie pomocou metódy s vysokým rádom presnosti. Budú sa používať metódy konečných diferencií a rozvoj funkcií pomocou Taylorovho rozvoju. Úlohou bude implementovať metódu ADER a skúmať jej vlastnosti na viacerých príkladoch, prípadne študovať možnosť jej rozšírenia pre rovnicu v nedivergentnom tvare.

Riešenie zadania práce od: 11. 04. 2013
Dátum odovzdania práce: 17. 05. 2013

L. S.

Peter Škabla
študent

prof. RNDr. Radko Mesiar, DrSc.
vedúci pracoviska

prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.
garant študijného programu

Čestne prehlásenie

Prehlasujem, že som bakalársku prácu vypracoval sám, len za pomoci citovanej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

Bratislava 16. mája 2013 ....

Vlastnoručný podpis

Pod'akovanie

Chcem sa pod'akovat' vedúcemu práce, RNDr. Petrovi Frolkovičovi, PhD., za inšpiratívne rady, odbornú pomoc a konzultácie, vd'aka ktorým som sa v mojej práci vždy mohol posunút' d'alej.

Abstrakt

V práci sú odvodené originálne metódy 2., 3. a 4. rádu presnosti pre rovnicu advekcie s variabilnou rýchlosťou. Pre netriviálny príklad s nájdeným presným riešením sú prezentované porovnania s metódami nižšieho rádu dokumentujúce výhody metódy vysokého rádu presnosti.

Abstract

In this work, some original second, third and fourth order accurate methods are derived for the solution of advection equation with variable velocity. For a nontrivial example with found an exact solution comparisons with the methods of lower order are provided showing advantages of the high order method.

Obsah

1 Úvod

Rovnica advekcie má veľký význam v prúdení kvapalín a plynov. Jedným z príkladov využitia rovnice advekcie môže byť akustika, kde sa riešia problémy ako charakterizovať pohyb zvukových vĺn v čase.

Pri riešení tohto typu úloh metódy nízkeho rádu presnosti vytvárajú neprípustnú chybu v pomerne krátkom časovom intervale. Pri riešení úloh väčšieho rozsahu a zložitosti tieto numerické metódy zaberajú veľké množstvo počítačovej pamäte a výpočtového času, ak chcú dosiahnuť dostačujúcu presnosť. Metódy vysokého rádu presnosti dosiahnu rovnakú presnosť pri omnoho hrubšej sieti a pri kratších výpočtových časoch.

Z literatúry sú známe numerické metódy vysokého rádu presnosti, ktoré sú odvodené pre rovnicu advekcie s konštantnou rýchlosťou [1]. Veľa úloh vedie na rovnicu s variabilnou rýchlosťou, kde uvedené numerické metódy môžu významne strácať na presnosti.

2 Ciele práce

Cieľom našej práce je využiť poznatky z riešenia rovnice advekcie s konštantnou rýchlosťou a odvodiť originálne metódy pre riešenie rovnice advekcie s nekonštantnou rýchlosťou.

Takto odvodené metódy prvého až štvrtého rádu následne testovať v softvéri Mathematica na konkrétnych netriviálnych príkladoch a detailne porovnávať ich vlastnosti.

Budeme znázorňovať graficky numerické riešenia jednotlivých metód spoločne s presným riešením, porovnávať výpočtovú chybu metód a ich časovú náročnosť.

3 Matematický model

Budeme riešiť počiatočnú úlohu pre lineárnu skalárnu hyperbolickú parciálnu diferenciálnu rovnicu v 1D (initial problem for one dimensional linear scalar hyperbolic partial diferenciatial equation) nazývanú aj rovnica advekcie [1]

$$\partial_t u(x,t) + v(x)\partial_x u(x,t) = 0 \tag{1}$$

$$-\infty < x < \infty, \quad t \geq 0$$

$$u(x,0) = u_0(x)$$

kde $u(x,t)$ je neznáma funkcia závislá od priestorovej premennej x a časovej premennej t. Funkcia $v(x)$ predstavuje nekonštantnú rýchlosť šírenia sa vlny a závisí od x. Pre jednoduchosť uvažujeme iba kladné hodnoty $v(x)$ resp. pohyb v jednom smere. Funkcia $u_0(x)$ predstavuje počiatočnú podmienku. Riešenie rovnice (1) sa dá nájsť pomocou metódy sledovania dráhy častíc (particle tracking).

Danú parciálnu diferenciálnu rovnicu chceme riešiť numericky. Numerické riešenie rovnice označme U_j^n, ktoré aproximuje presné riešenie $u(x_j, t_n)$ rovnice (1) v bode $x_j = j*\Delta x$, pričom Δx je zvolený priestorový krok, a v čase $t_n = n * \Delta t$.

Numerické riešenie budeme hľadať pomocou schémy

$$U_j^{n+1} = \sum_{\alpha=1}^{p} B_\alpha U_{j+\alpha}^n \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad j = 0, \ldots, xsteps \tag{2}$$

kde α určuje posun $j + \alpha$ polohy bodu $x_{j+\alpha}$ vzhľadom k bodu x_j, p je počet bodov pomocou ktorých hľadáme riešenie, pričom platí $p = m + 1$, kde m je rád presnosti použitej metódy. Premenná *xsteps* predstavuje nami zvolený počet priestorových krokov. Týmto dostávame úlohu na hľadanie koeficientov B_α. Postupujeme podľa práce [1], kde riešili úlohu (1) len pre konštantnú rýchlosť v.

4 Odvodenie koeficientov B_α

My si podrobne uvedieme iba odvodenie metódy tretieho rádu. Pre ostatné metódy uvedieme na záver len ich výsledný tvar.

4.1 Metóda tretieho rádu

Odvoď me si koeficienty B_α pre túto konkrétnu metódu 3. rádu.

$$U_j^{n+1} = B_0 U_j^n + B_{+1} U_{j+1}^n + B_{-1} U_{j-1}^n + B_{-2} U_{j-2}^n \tag{3}$$

Hodnoty funkcií $U_j^{n+1}, U_{j+1}^n, U_{j-1}^n, U_{j-2}^n$ dostaneme z Taylorovho polynómu tretieho stupňa.

$$\begin{aligned}
U_j^{n+1} &\approx U_j^n + \Delta t \partial_t U_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} \partial_{tt} U_j^n + \frac{\Delta t^3}{6} \partial_{ttt} U_j^n \\
U_{j+1}^n &\approx U_j^n + \Delta x \partial_x U_j^n + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} U_j^n + \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} U_j^n \\
U_{j-1}^n &\approx U_j^n - \Delta x \partial_x U_j^n + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} U_j^n - \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} U_j^n \\
U_{j-2}^n &\approx U_j^n - 2\Delta x \partial_x U_j^n + 4\frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} U_j^n - 8\frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} U_j^n
\end{aligned} \tag{4}$$

Teraz vyjadríme časové derivácie pomocou kombinácie x-ových derivácií. Kvôli prehľadnosti budeme používať už len skrátené zápisy parciálnych derivácií $\partial_t u(x,t) = u_t$ a rýchlosti $v = v(x_j)$. Upravme rovnicu (1) na tvar

$$u_t = -v u_x \tag{5}$$

Následne ju parciálne zderivujme podľa x aj t.

$$u_{tt} = -v u_{xt}$$

$$u_{tx} = -v u_{xx} - v' u_x \tag{6}$$

Budeme predpokladať, že môžeme zameniť poradie derivácií. Z toho vyplýva $u_{xt} = u_{tx}$.

$$u_{tt} = -v u_{xt} = -v u_{tx} \tag{7}$$

Teraz dosadíme (6) za u_{tx} v (7) a získame u_{tt} vyjadrené ako kombináciu x-ových derivácií.

$$u_{tt} = v^2 u_{xx} + v v' u_x$$

Poslednú rovnicu opäť parciálne zderivujeme podľa x aj t a zameníme poradie derivácií. Dostávame

$$u_{ttt} = v^2 u_{xxt} + v v' u_{xt}$$

$$u_{txx} = -v u_{xxx} - v' u_{xx} - v'' u_x - v' u_{xx}$$

Nahradíme u_{xt} za u_{tx} a u_{xxt} za u_{txx} a vznikne nám tvar

$$u_{ttt} = -v^3 u_{xxx} - 3v' v^2 u_{xx} - v^2 v'' u_x - v v' v' u_x \tag{8}$$

Vrátime sa spät' k Taylorovým rozvojom (4) a vo vzt'ahu pre aproximáciu riešenia U_j^{n+1} zameníme všetky časové derivácie u_t, u_{tt}, u_{ttt} za im rovné kombinácie x-ových derivácií, ktoré poznáme z rovníc (5), (7), (8).

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} \approx U_j^n - \Delta t v \partial_x U_j^n + \frac{\Delta t^2}{2}(v^2 \partial_{xx} U_j^n + v v' \partial_x U_j^n) \\ - \frac{\Delta t^3}{6}(v^3 \partial_{xxx} U_j^n + 3v'v^2 \partial_{xx} U_j^n + v^2 v'' \partial_x U_j^n + v v' v' \partial_x U_j^n) \end{aligned} \tag{9}$$

Teraz v rovnici metódy tretieho rádu (3) dosadíme do pravej strany rovnice aproximácie hodnôt U_{j+1}^n, U_{j-1}^n a U_{j-2}^n, ktoré sme dostali z Taylorových polynómov pre časový krok (4) a do l'avej strany rovnice U_j^{n+1}, ktoré máme z (9).

$$\begin{aligned} U_j^n - \Delta t v \partial_x U_j^n + \frac{\Delta t^2}{2}(v^2 \partial_{xx} U_j^n + v v' \partial_x U_j^n) \\ - \frac{\Delta t^3}{6}(v^3 \partial_{xxx} U_j^n + 3v'v^2 \partial_{xx} U_j^n + v^2 v'' \partial_x U_j^n + v v' v' \partial_x U_j^n) \\ = \\ B_0 U_j^n + B_{+1}(U_j^n + \Delta x \partial_x U_j^n + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} U_j^n + \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} U_j^n) \\ + B_{-1}(U_j^n - \Delta x \partial_x U_j^n + \frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} U_j^n - \frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} U_j^n) \\ + B_{-2}(U_j^n - 2\Delta x \partial_x U_j^n + 4\frac{\Delta x^2}{2} \partial_{xx} U_j^n - 8\frac{\Delta x^3}{6} \partial_{xxx} U_j^n) \end{aligned} \tag{10}$$

Rovnica (10) bude platit' práve vtedy, ked' bude platit' rovnost' medzi koeficientami pred neznámou U_j^n a jej deriváciami na l'avej a pravej strane, preto vytvoríme 4 rovnice samostatne pre U_j^n a všetky jej derivácie.

$$\begin{aligned} U_j^n : &\quad B_0 + B_1 + B_{-1} + B_{-2} = 1 \\ \partial_x U_j^n : &\quad \Delta x B_1 - \Delta x B_{-1} - 2\Delta x B_{-2} = -\Delta t v + \tfrac{\Delta t^2}{2} v v' - \tfrac{\Delta t^3}{6}(v^2 v'' + v v' v') \\ \partial_{xx} U_j^n : &\quad \tfrac{\Delta x^2}{2} B_1 + \tfrac{\Delta x^2}{2} B_{-1} + 4\tfrac{\Delta x^2}{2} B_{-2} = v^2 \tfrac{\Delta t^2}{2} - 3v^2 v' \tfrac{\Delta t^3}{6} \\ \partial_{xxx} U_j^n : &\quad \tfrac{\Delta x^3}{6} B_1 - \tfrac{\Delta x^3}{6} B_{-1} - 8\tfrac{\Delta x^3}{6} B_{-2} = -\tfrac{\Delta t^3}{6} v^3 \end{aligned}$$

Nakoniec si rovnice upravíme do jednoduchšieho tvaru s Courantovými číslami.

$$c = c(x_j) = \frac{v(x_j)\Delta t}{\Delta x}$$

$$U_j^n: \qquad B_0 + B_1 + B_{-1} + B_{-2} = 1$$

$$\partial_x U_j^n: \qquad B_1 - B_{-1} - 2B_{-2} = -c + cv'\tfrac{\Delta t}{2} - cvv''\tfrac{\Delta t^2}{6} + cv'v'\tfrac{\Delta t^2}{6}$$

$$\partial_{xx} U_j^n: \qquad B_1 + B_{-1} + 4B_{-2} = c^2 - c^2 v'\Delta t$$

$$\partial_{xxx} U_j^n: \qquad B_1 - B_{-1} - 8B_{-2} = -c^3$$

Získali sme 4 rovnice o 4 neznámych. Túto sústavu rovníc sme riešili v systéme Mathematica, pričom sme dostali nasledovné výsledky. Kvôli prehľadnosti riešenia zavádzame $\Delta t = dt$.

$$B_0: \qquad \tfrac{1}{12}\left(12 - 6c - 12c^2 + 6c^3 - cvv''dt^2 - cv'v'dt^2 + 12c^2v'dt + 3cv'dt\right)$$

$$B_1: \qquad \tfrac{1}{18}\left(-6c + 9c^2 - 3c^3 - 9c^2v'dt - cvv''dt^2 - cv'v'dt^2 + 3cv'dt\right)$$

$$B_{-1}: \qquad c + \tfrac{c^2}{2} - \tfrac{c^3}{2} - \tfrac{1}{2}cv' - \tfrac{1}{2}c^2v'dt + \tfrac{1}{6}cvv''dt^2 + \tfrac{1}{6}cv'v'dt^2$$

$$B_{-2}: \qquad -\tfrac{c}{6} + \tfrac{c^3}{6} - \tfrac{1}{36}cvv''dt^2 - \tfrac{1}{36}cv'v'dt^2 + \tfrac{1}{12}cv'dt$$

Nájdené koeficienty B_α vrátime späť do pôvodného tvaru metódy tretieho rádu (3) a dostávame finálny tvar

$$\begin{aligned} U_j^{n+1} = \frac{1}{12}&\left(12 - 6c - 12c^2 + 6c^3 - cvv''dt^2 - cv'v'dt^2 + 12c^2v'dt + 3cv'dt\right) U_j^n \\ &+\frac{1}{18}\left(-6c + 9c^2 - 3c^3 - 9c^2v'dt - cvv''dt^2 - cv'v'dt^2 + 3cv'dt\right) U_{j+1}^n \\ &+(c + \frac{c^2}{2} - \frac{c^3}{2} - \frac{1}{2}cv' - \frac{1}{2}c^2v'dt + \frac{1}{6}cvv''dt^2 + \frac{1}{6}cv'v'dt^2)U_{j-1}^n \\ &+(-\frac{c}{6} + \frac{c^3}{6} - \frac{1}{36}cvv''dt^2 - \frac{1}{36}cv'v'dt^2 + \frac{1}{12}cv'dt)U_{j-2}^n \end{aligned}$$

Tým istým spôsobom sme si odvodili aj metódu prvého rádu, dve metódy druhého rádu, centrálnu a upwind, a centrálnu metódu štvrtého rádu. Ich presné riešenia už nebudeme opakovať iba vypíšeme hodnoty koeficientov B_α a výsledné tvary metód.

Pre praktické účely môžeme v', v'' a v''' aproximovať metódou konečných diferencií.

4.2 Metóda prvého rádu

$$B_0: \quad 1-c$$

$$B_{-1}: \quad c$$

$$U_j^{n+1} = (1-c)U_j^n + cU_{j-1}^n$$

4.3 Centrálna metóda druhého rádu

$$B_0: \quad 1-c^2$$

$$B_1: \quad \tfrac{1}{4}\left(-2c+2c^2+cv'dt\right)$$

$$B_{-1}: \quad \tfrac{c}{2}+\tfrac{c^2}{2}-\tfrac{1}{4}cv'dt$$

$$U_j^{n+1} = (1-c^2)U_j^n + \frac{1}{4}\left(-2c+2c^2+cv'dt\right)U_{j+1}^n + (\frac{c}{2}+\frac{c^2}{2}-\frac{1}{4}cv'dt)U_{j-1}^n$$

4.4 Upwind metóda druhého rádu

$$B_0: \quad \tfrac{1}{4}\left(4-6c+2c^2+3cv'dt\right)$$

$$B_{-1}: \quad 2c-c^2-cv'dt$$

$$B_{-2}: \quad -\tfrac{c}{2}+\tfrac{c^2}{2}+\tfrac{1}{4}cv'dt$$

$$U_j^{n+1} = \frac{1}{4}\left(4-6c+2c^2+3cv'dt\right)U_j^n + (2c-c^2-cv'dt)U_{j-1}^n + (-\frac{c}{2}+\frac{c^2}{2}+\frac{1}{4}cv'dt)U_{j-2}^n$$

4.5 Centrálna metóda štvrtého rádu

B_0 : $\frac{1}{48}(-20dt^2vc^2v'' - 35dt^2c^2(v')^2 + 60dtc^2v' + 12c^4 - 60c^2 + 48)$

B_{+1} : $\frac{1}{90}(20dt^2vc^2v'' + 35dt^2c^2(v')^2 - 60dtc^2v' - 12c^4 + 60c^2 - 48)$
$+\frac{1}{180}(5dt^3v^2v^{(3)}c - 20dt^2vcv'' + 5dt^3c(v')^3 - 20dt^2c(v')^2 - 45dtc^3v'$
$+60dtcv' + 20dt^3cvv'v'' - 6c^4 + 30c^3 - 120c + 96)$

B_{+2} : $-\frac{1}{288}dt^3v^2v^{(3)}c - \frac{1}{72}dt^2vc^2v'' + \frac{1}{72}dt^2vcv'' - \frac{1}{288}dt^3c(v')^3 - \frac{7}{288}dt^2c^2(v')^2$
$+\frac{1}{72}dt^2c(v')^2 + \frac{1}{8}dtc^3v' + \frac{1}{24}dtc^2v' - \frac{1}{24}dtcv' - \frac{1}{72}dt^3vcv'$

B_{-1} : $-\frac{1}{36}dt^3v^2v^{(3)}c + \frac{2}{9}dt^2vc^2v'' + \frac{1}{9}dt^2vcv'' - \frac{1}{36}dt^3c(v')^3 + \frac{7}{18}dt^2c^2(v')^2 + \frac{1}{9}dt^2c(v')^2$
$+\frac{1}{4}dtc^3v' - \frac{2}{3}dtc(x)^2v' - \frac{1}{3}dtcv' - \frac{1}{9}dt^3cvv'v'' - \frac{1}{6}c^4 - \frac{c^3}{6} + \frac{2c^2}{3} + \frac{2c}{3}$

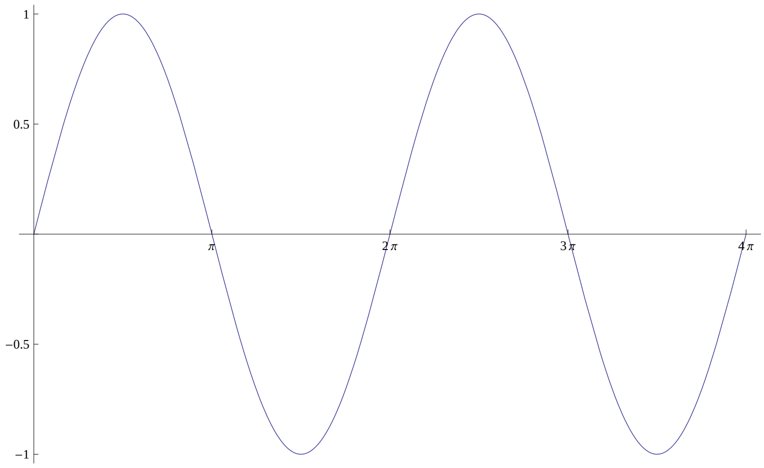
B_{-2} : $\frac{1}{288}dt^3v^2v^{(3)}c - \frac{1}{72}dt^2vc^2v'' - \frac{1}{72}dt^2vcv'' + \frac{1}{288}dt^3c(v')^3 - \frac{7}{288}dt^2c^2(v')^2$
$-\frac{1}{72}dt^2c(v')^2 - \frac{1}{8}dtc^3v' + \frac{1}{24}dtc^2v' + \frac{1}{24}dtcv' + \frac{1}{72}dt^3cvv'v'' + \frac{c^4}{24}$
$+\frac{c^3}{12} - \frac{c^2}{24} - \frac{c}{12}$

$$\begin{aligned}
U_j^{n+1} &= \frac{1}{48}(-20dt^2vc^2v'' - 35dt^2c^2(v')^2 + 60dtc^2v' + 12c^4 - 60c^2 + 48)U_j^n \\
&+(\frac{1}{90}(20dt^2vc^2v'' + 35dt^2c^2(v')^2 - 60dtc^2v' - 12c^4 + 60c^2 - 48) + \frac{1}{180}(5dt^3v^2v^{(3)}c \\
&-20dt^2vcv'' + 5dt^3c(v')^3 - 20dt^2c(v')^2 - 45dtc^3v' + 60dtcv' + 20dt^3cvv'v'' \\
&-6c^4 + 30c^3 - 120c + 96))U_{j+1}^n + (-\frac{1}{288}dt^3v^2v^{(3)}c - \frac{1}{72}dt^2vc^2v'' + \frac{1}{72}dt^2vcv'' \\
&-\frac{1}{288}dt^3c(v')^3 - \frac{7}{288}dt^2c^2(v')^2 + \frac{1}{72}dt^2c(v')^2 + \frac{1}{8}dtc^3v' + \frac{1}{24}dtc^2v' - \frac{1}{24}dtcv' \\
&-\frac{1}{72}dt^3vcv')U_{j+2}^n + (-\frac{1}{36}dt^3v^2v^{(3)}c + \frac{2}{9}dt^2vc^2v'' + \frac{1}{9}dt^2vcv'' - \frac{1}{36}dt^3c(v')^3 \\
&+\frac{7}{18}dt^2c^2(v')^2 + \frac{1}{9}dt^2c(v')^2 + \frac{1}{4}dtc^3v' - \frac{2}{3}dtc(x)^2v' - \frac{1}{3}dtcv' - \frac{1}{9}dt^3cvv'v'' \\
&-\frac{1}{6}c^4 - \frac{c^3}{6} + \frac{2c^2}{3} + \frac{2c}{3})U_{j-1}^n + (\frac{1}{288}dt^3v^2v^{(3)}c - \frac{1}{72}dt^2vc^2v'' - \frac{1}{72}dt^2vcv'' \\
&+\frac{1}{288}dt^3c(v')^3 - \frac{7}{288}dt^2c^2(v')^2 - \frac{1}{72}dt^2c(v')^2 - \frac{1}{8}dtc^3v' + \frac{1}{24}dtc^2v' \\
&+\frac{1}{24}dtcv' + \frac{1}{72}dt^3cvv'v'' + \frac{c^4}{24} + \frac{c^3}{12} - \frac{c^2}{24} - \frac{c}{12})U_{j-2}^n
\end{aligned}$$

5 Numerické experimenty

Všetky odvodené numerické metódy 1., 2., 3. a 4. rádu sme spracovali a ich funkčnosť overovali v softvéri Mathematica.

Riešené metódy sme testovali na príklade s počiatočnou podmienkou $u_0(x) = sin(x)$ na intervale 4π a rýchlosťou $v(x) = sin(x) + 2$.



Obr. 1: Počiatočná podmienka

Numerické riešenie sme porovnávali s presným riešením, ktoré sme zistili pomocou softvéru Mathematica.

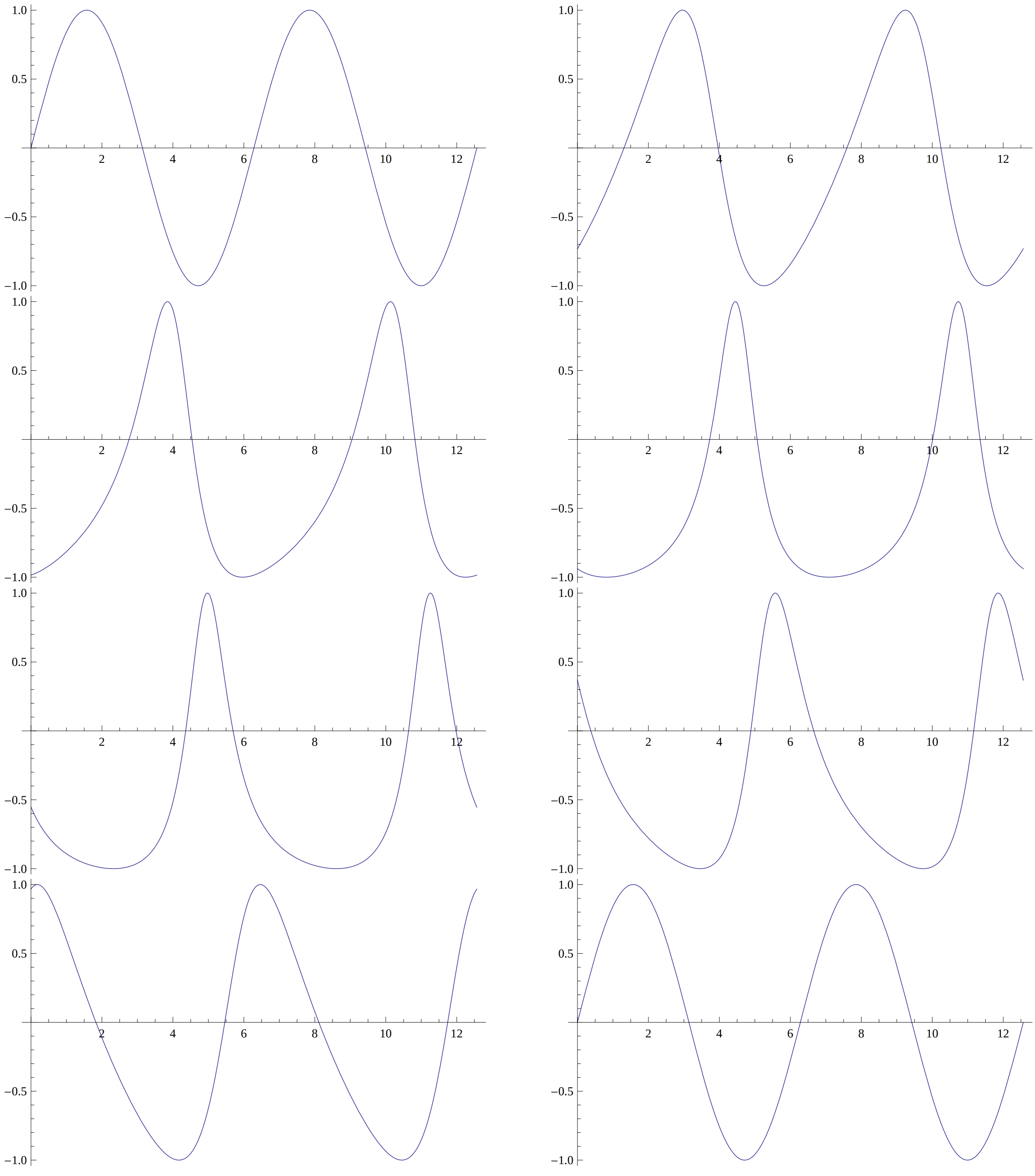
$$u(x,t) = \sin\left(2\tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\tan\left(\frac{3t - 2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}{\sqrt{3}}\right)}{2\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{2}\right)\right)$$

Okrem toho sme zistili, že presné riešenie je periodické s periódou pre x rovnou 2π, čo sme využili pre periodické okrajové podmienky a s periódou rovnou $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ pre t. Numerické riešenie sme hľadali pre kroky $\Delta x = \frac{4\pi}{xsteps}$ a $\Delta t = \frac{4\pi}{steps\sqrt{3}}$.

5.1 Grafické porovnávanie

V tejto kapitole budeme graficky znázorňovať numerické riešenia spoločne s presným riešením a sledovať presnosť a problémy riešených metód po 2 a 10 periódach. Pre xsteps=100 sme zvolili steps=247, pre xsteps=200 dvojnásobok steps.

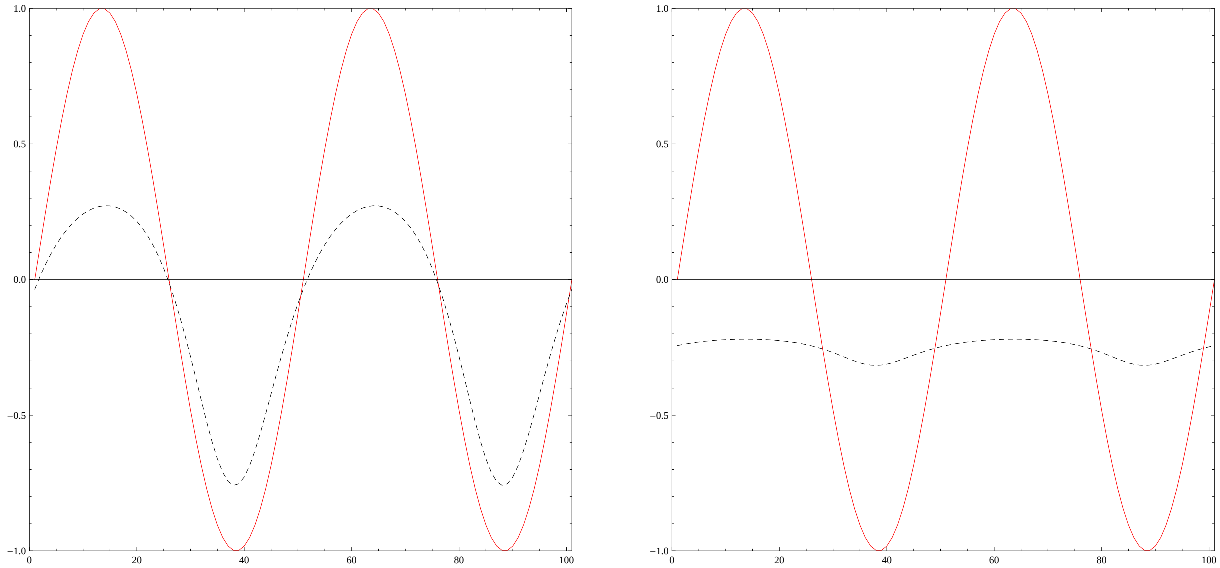
Nekonštantný priebeh funkcie ukážeme na nasledujúcich obrázkoch.



Obr. 2: Priebeh 1 periódy presného riešenia pohybujúceho sa nekonštantnou rýchlosťou v kladnom smere po x-ovej osi.

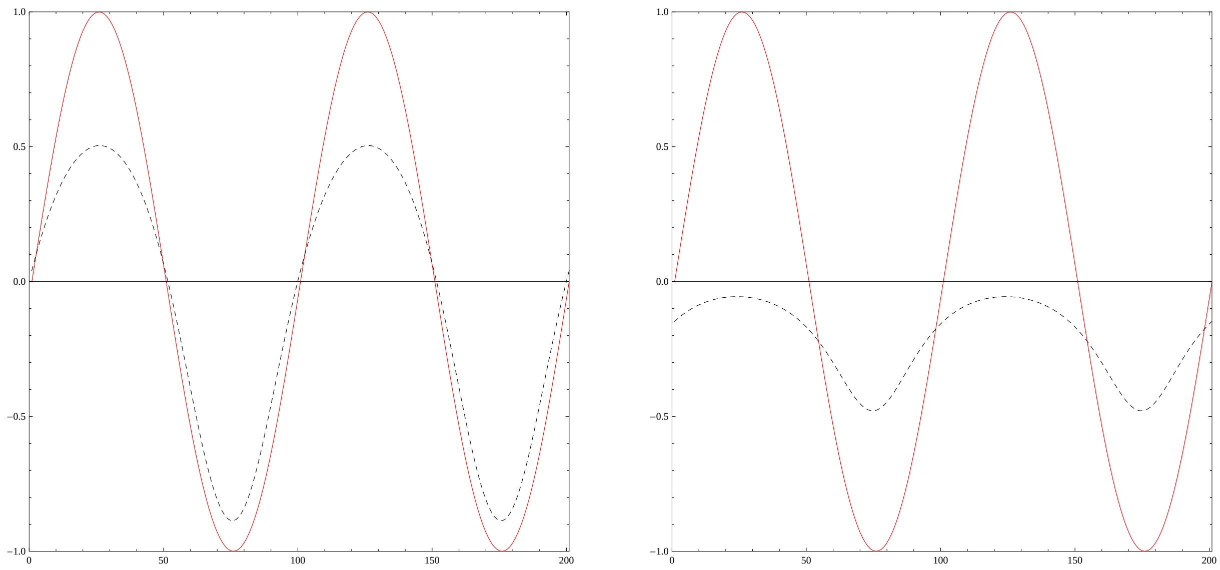
5.1.1 Metóda prvého rádu

Z obrázkov vidíme, že metóda pre xsteps=100 už po 2 periódach drasticky klesá oproti presnému riešeniu a po 10 periódach už vôbec nepripomína presné riešenie. Aplikácia metódy 1. rádu je pre tento typ úlohy neakceptovateľná.



Obr. 3: Tvar riešenia 1. rádu po 2 a 10 periódach pre xsteps=100

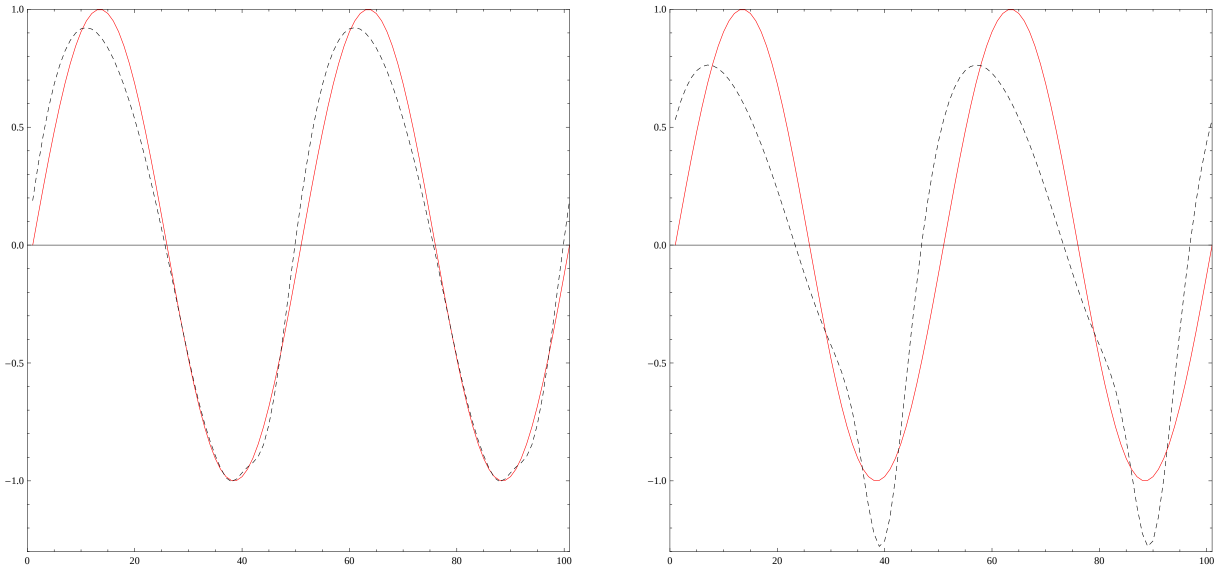
Pre xsteps=200 vidíme zlepšenie ale stále je to veľmi zlá aproximácia.



Obr. 4: Tvar riešenia 1. rádu po 2 a 10 periódach pre xsteps=200

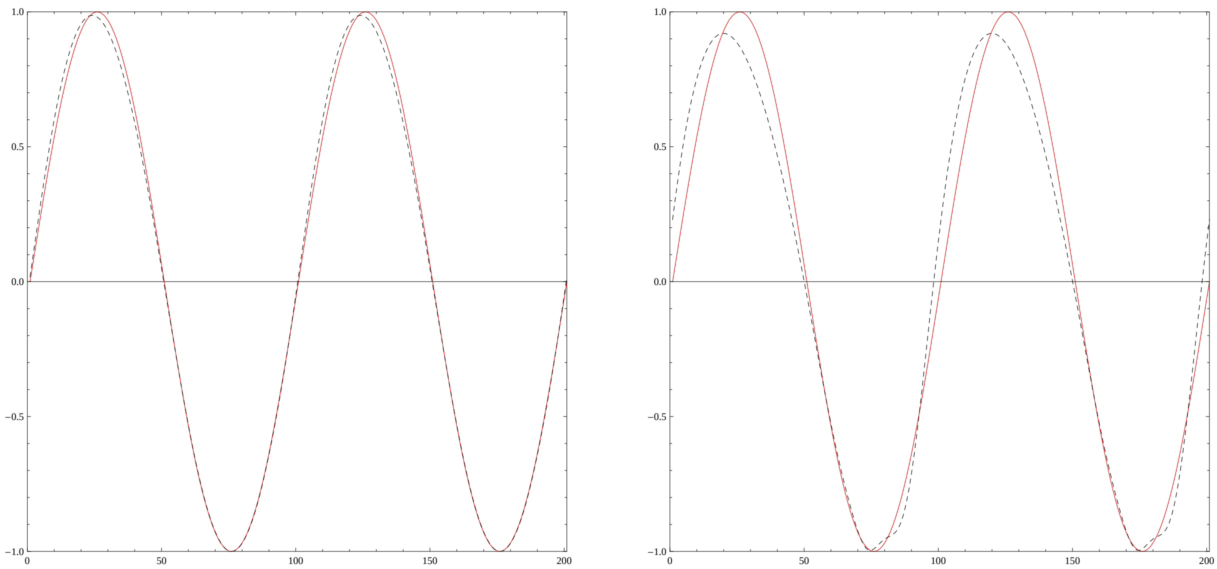
5.1.2 Centrálna metóda druhého rádu

Pri tejto metóde pozorujeme omeškanie za presným riešením, znižovanie maxima a neprirodzený pokles v minimálnych hodnotách.



Obr. 5: Tvar riešenia 2. rádu po 2 a 10 periódach pre xsteps=100

Pre xsteps=200 vidíme, že pokles v záporných hodnotách zmizol a metóda pomerne dobre aproximuje presné riešenie.

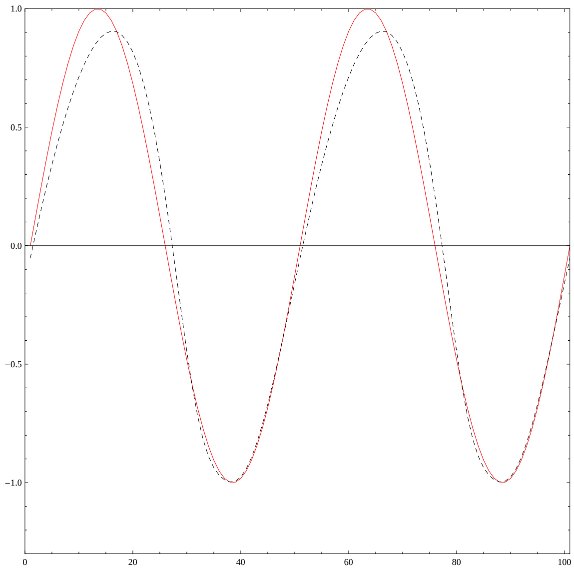


Obr. 6: Tvar riešenia 2. rádu po 2 a 10 periódach pre xsteps=200

Vidíme, že oproti metóde 1. rádu presnosti je chyba rádovo menšia, ale pre dlhé časy ešte stále výrazná.

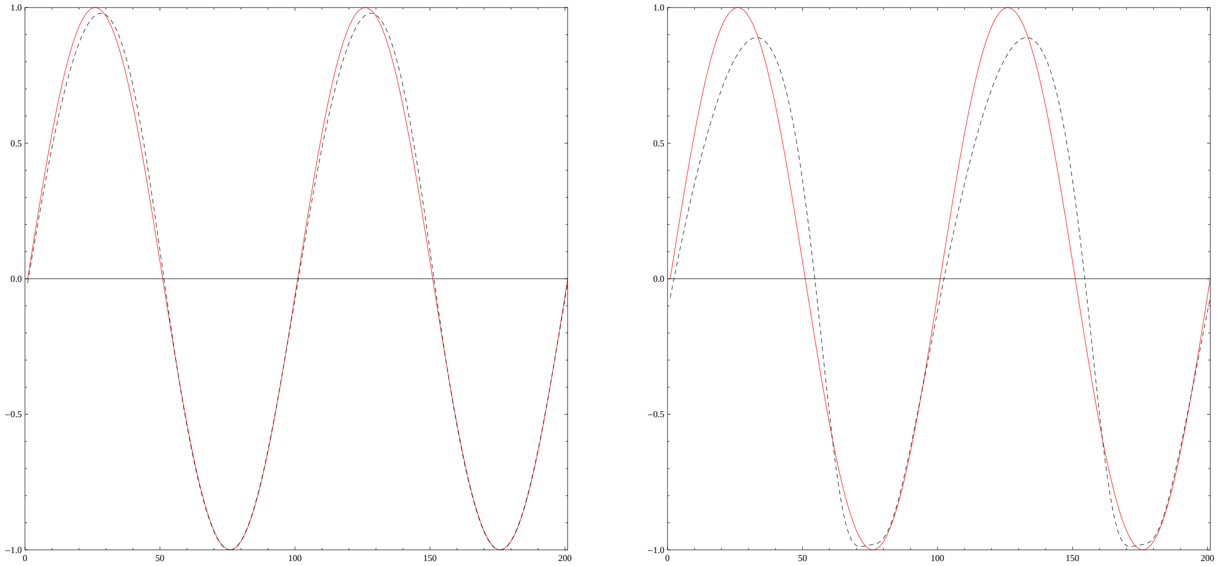
5.1.3 Upwind metóda druhého rádu

Táto metóda okrem klesania, znižovania maxima a neprirodzeného poklesu v minimálnych hodnotách, aj predbieha presné riešenie.



Obr. 7: Tvar riešenia 2. rádu po 2 a 10 periódach pre xsteps=100

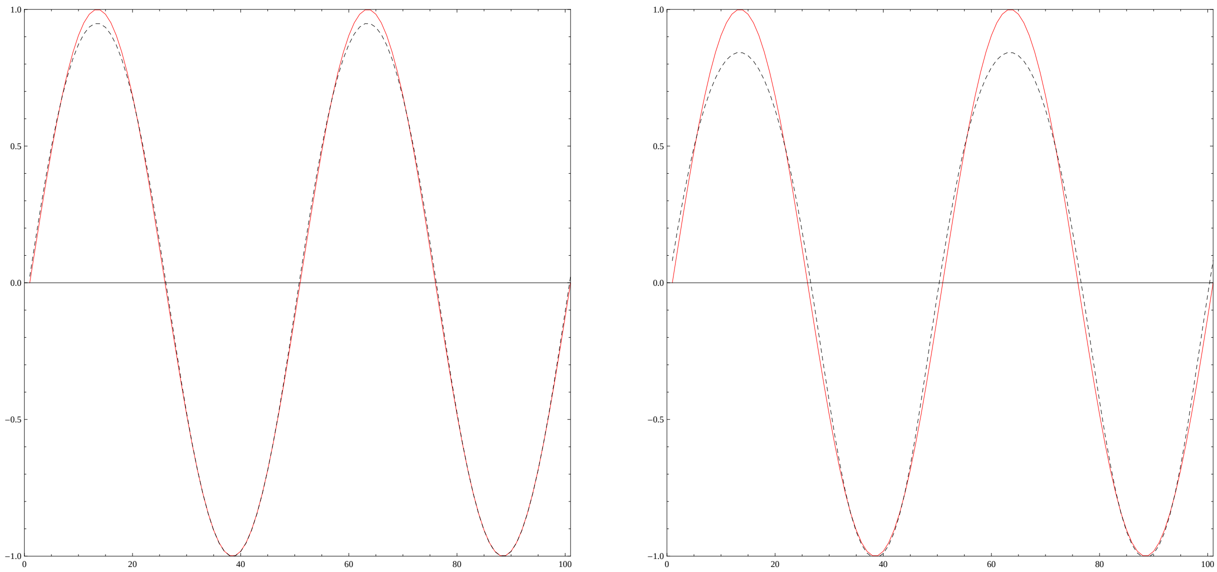
Pri zväčšení xsteps na 200 opäť pozorujeme slušnú aproximáciu presného riešenia, pričom nežiadúci pokles sa začne prejavovať až po približne 3500 časových krokoch, čo predstavuje viac ako 14 periód.



Obr. 8: Tvar riešenia 2. rádu po 2 a 10 periódach pre xsteps=200

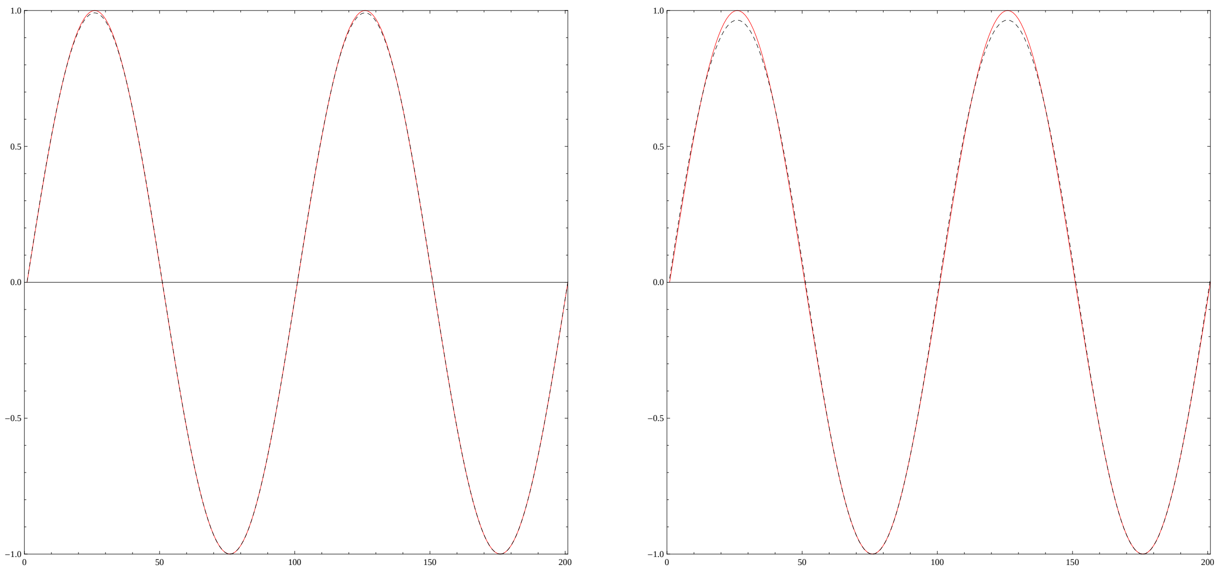
5.1.4 Metóda tretieho rádu

Pri tejto metóde zaznamenávame iba mierny pokles. Metóda dobre aproximuje presné riešenie.



Obr. 9: Tvar riešenia 3. rádu po 2 a 10 periódach pre xsteps=100

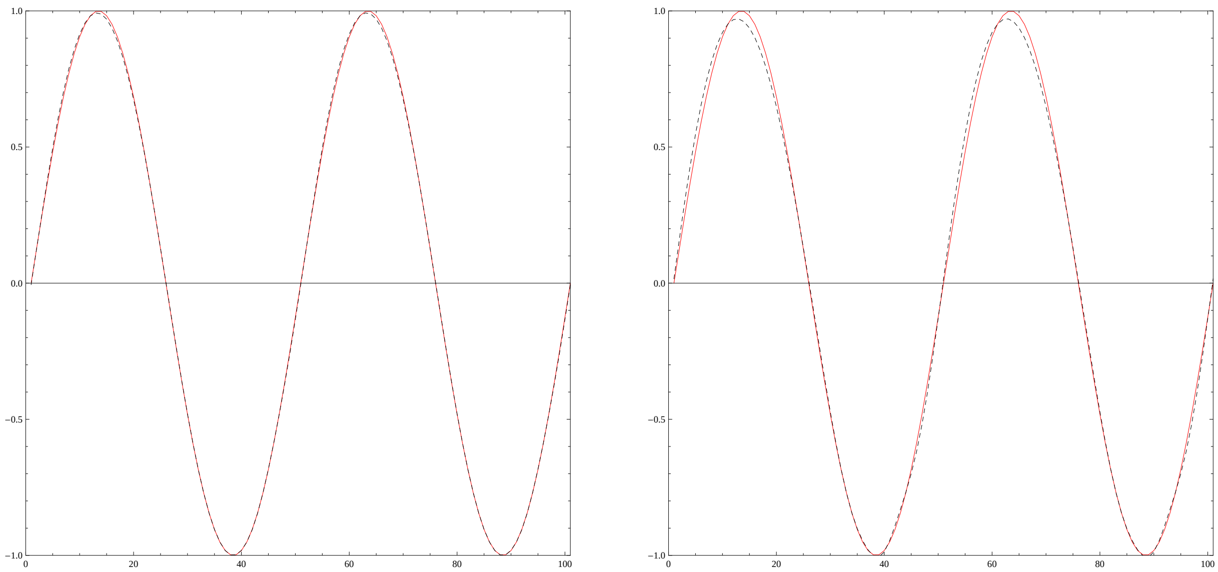
Pre 200 x-ových krokov metóda po 2 periódach takmer splýva s presným riešením a aj po 10 periódach je pokles minimálny. Pre takýto počet x-ových krokov metóda tretieho rádu veľmi dobre aproximuje presné riešenie.



Obr. 10: Tvar riešenia 3. rádu po 2 a 10 periódach pre xsteps=200

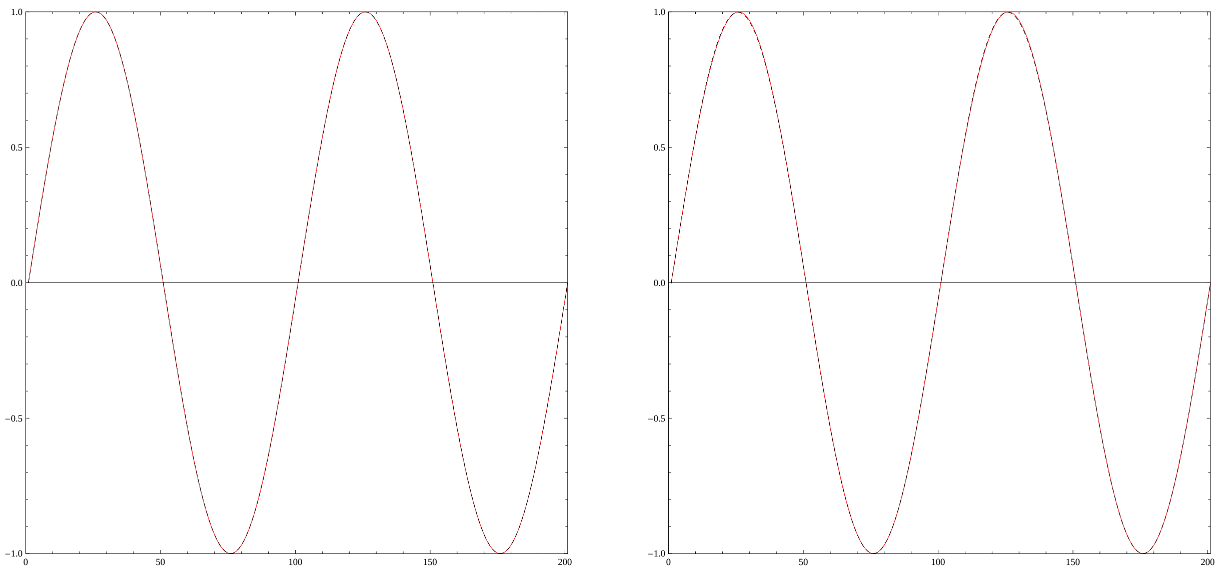
5.1.5 Centrálna metóda štvrtého rádu

Metóda štvrtého rádu opäť mierne zaostáva za presným riešením aj keď to zaznamenávame až po dlhšom čase.



Obr. 11: Tvar riešenia 3. rádu po 2 a 10 periódach pre xsteps=100

Pre 200 x-ových krokov metóda aj po 10 periódach splýva s presným riešením.



Obr. 12: Tvar riešenia 4. rádu po 2 a 10 periódach pre xsteps=200

5.2 Chyby metód

V tejto časti budeme porovnávať chyby metód získané výpočtom. Numerickú chybu metód sme získali takýmto spôsobom

$$chyba = \Delta x \Delta t \sum_{n=1}^{steps} \sum_{j=0}^{xsteps} \left| U_j^n - u(x_j, t_n) \right|$$

Okrem chyby sme výpočtom zisťoval aj rád metód. Konkrétnu chybu metódy sme vydelili chybou prislúchajúcou metóde s dvojnásobným počtom *xsteps* a *steps* (priestorový a časový krok). S výsledkom tohto pomeru sme riešili rovnicu $2^r = pomer$. Hľadané r je rád presnosti metódy.

Tabuľka 1: Tabuľka chýb metódy 1. rádu a Upwind metódy 2. rádu

		1.rád		2.rád	
steps	xsteps	Chyba	Rád	Chyba	Rád
50	50	$44,7 * 10^{-1}$		$17,1 * 10^{-1}$	
100	100	$26,5 * 10^{-1}$	0,85	$4,88 * 10^{-1}$	1,81
200	200	$14,4 * 10^{-1}$	0,88	$1,25 * 10^{-1}$	1,96
400	400	$7,54 * 10^{-1}$	0,93	$3,11 * 10^{-2}$	2
800	800	$3,87 * 10^{-1}$	0,96	$7,77 * 10^{-3}$	2

Tabuľka 2: Tabuľka chýb centrálnej metódy 2. rádu a metód 3. a 4. rádu

		2.rád		3.rád		4.rád	
steps	xsteps	Chyba	Rád	Chyba	Rád	Chyba	Rád
50	50	$14,5 * 10^{-1}$		$4,65 * 10^{-1}$		$2,77 * 10^{-1}$	
100	100	$3,88 * 10^{-1}$	1,9	$7,35 * 10^{-2}$	2,66	$2,20 * 10^{-2}$	3,65
200	200	$9,75 * 10^{-2}$	1,99	$9,75 * 10^{-3}$	2,91	$1,42 * 10^{-3}$	3,95
400	400	$2,44 * 10^{-2}$	2	$1,23 * 10^{-3}$	2,99	$9,02 * 10^{-5}$	3,98
800	800	$6,10 * 10^{-3}$	2	$1,53 * 10^{-4}$	3	$5,65 * 10^{-6}$	4

5.3 Časová náročnosť

V tejto sekcii si ukážeme výpočtové časy algoritmov jednotlivých metód. Pre prípad funkcie rýchlosti $v(x)$ nezávislej od času je možné koeficienty B_α predpočítať a metóda tretieho rádu má porovnateľnú časovú náročnosť ako metódy druhého a štvrtého rádu presnosti, preto pre tento prípad neuvádzame časovú náročnosť.

Pre prípad časovo závislej rýchlosti by bolo nutné počítať koeficienty B_α v každom časovom kroku. Keď sme počítali týmto spôsobom, potvrdilo sa nám, že metóda tretieho rádu presnosti je najrýchlejšia, čo sme zdokumentovali v tabuľke.

Tabuľka 3: Tabuľka časovej náročnosti algortimov pre rôzne veľké chyby

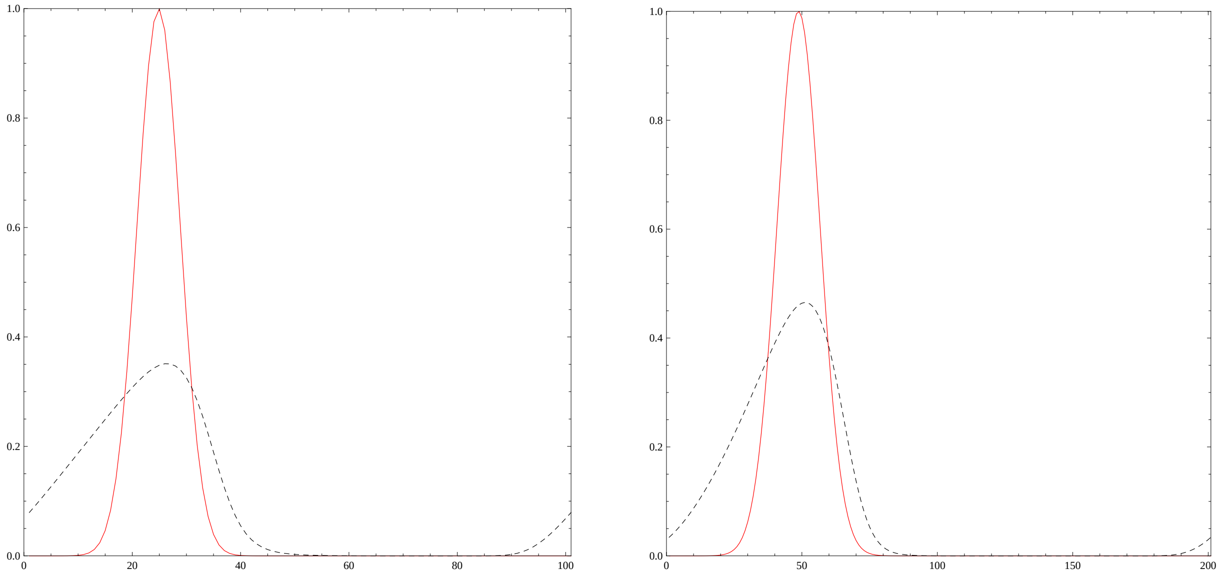
	1.rád	2.rád	3. rád
chyba		čas (sec)	
1.5	3	4	4
0.5	30	13	11
0.2	160	34	22
0.08	500	83	42

Pri metóde metóde štvrtého rádu už zaznamenávame nárast výpočtového času pre konkrétnu chybu v porovnaní s metódou tretieho rádu. Tento nárast bol spôsobený tým, že naše metódy nie sú optimalizované a v metóde 4. rádu musíme oproti metódam nižšieho rádu volať oveľa viac funkcií softvéru Mathematica.

6 Test metód na inom príklade

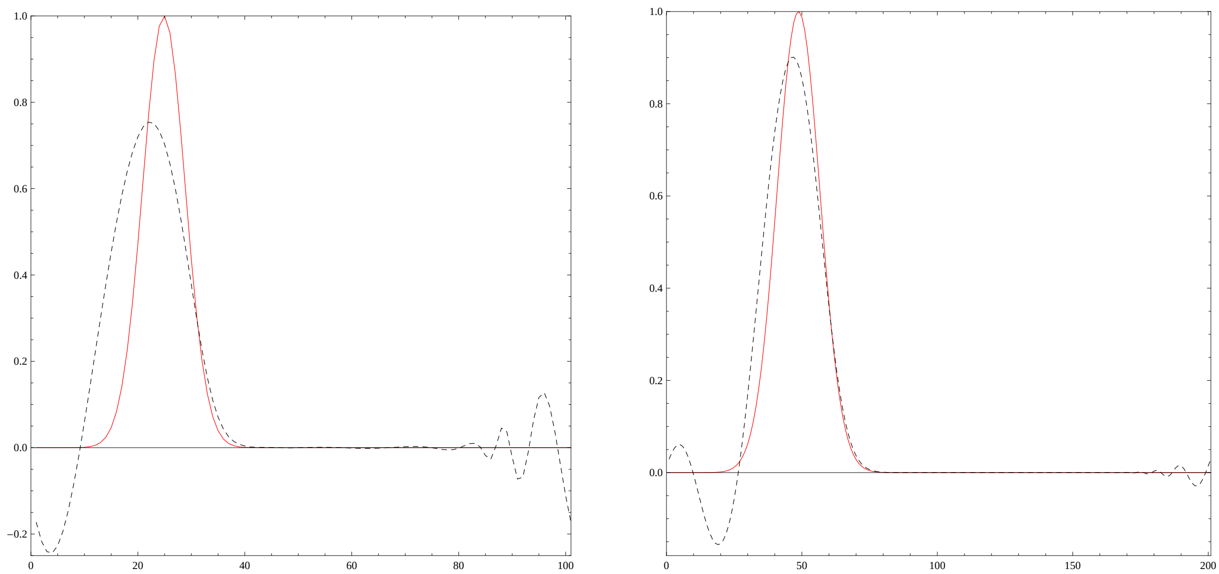
Naše metódy sme testovali aj na úlohe s počiatočnou podmienkou $u_0(x) = e^{-2(x-3)^2}$ pre rovnakú nekonštantnú rýchlost'. Metódy sme porovnávali po 2 periódach pre 100 a 200 $xsteps$.

Metóda 1. rádu



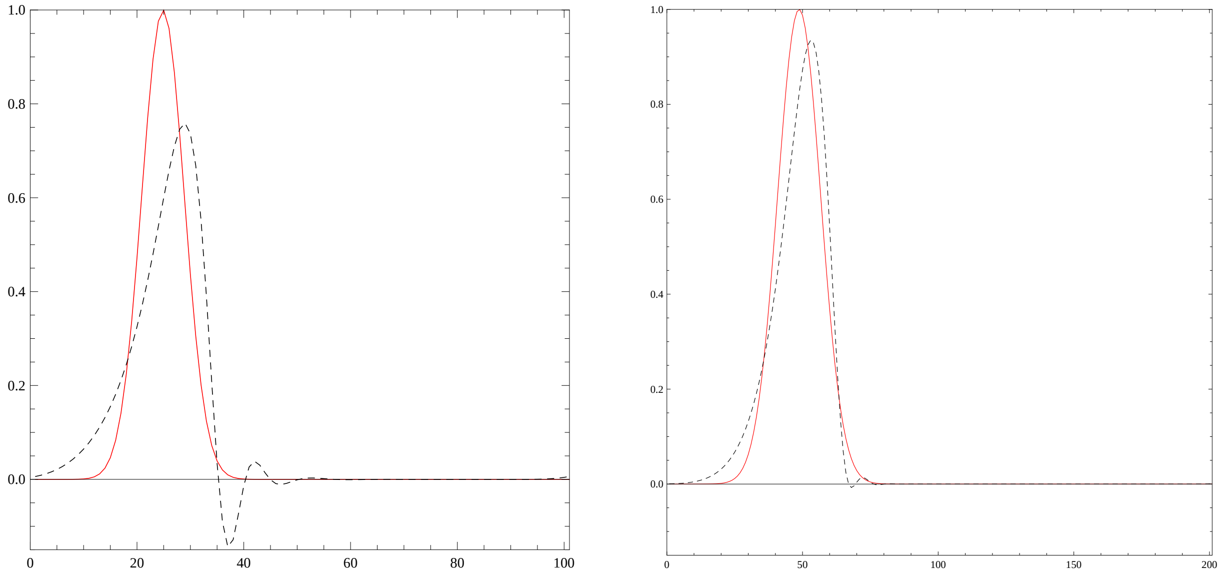
Obr. 13: Tvar riešenia 1. rádu po 2 periódach pre xsteps 100 a 200

Centrálna metóda 2. rádu



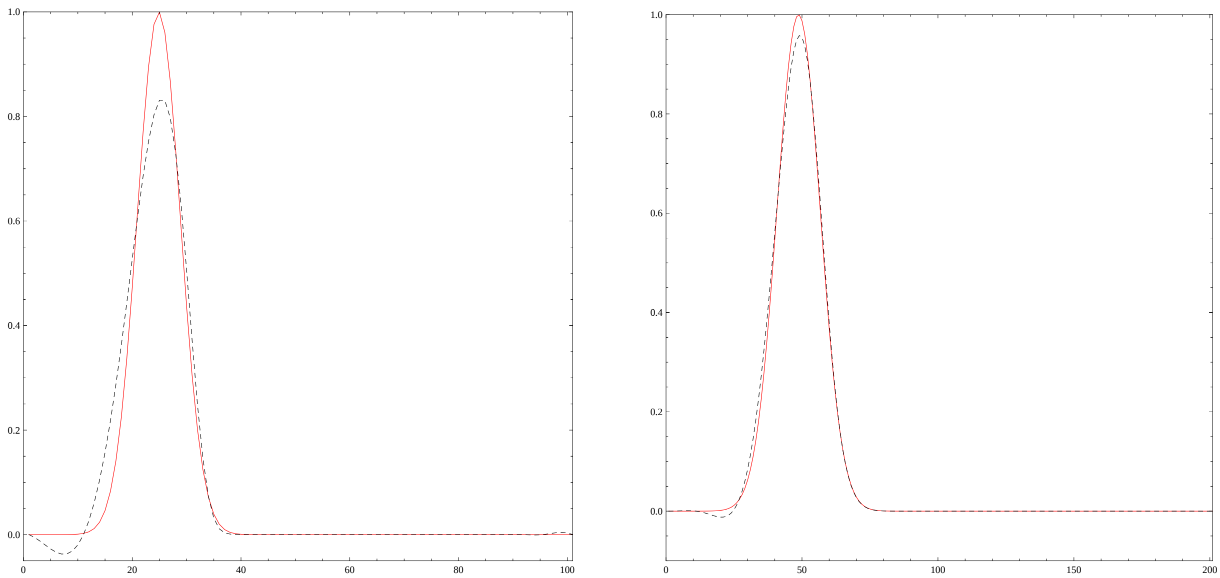
Obr. 14: Tvar riešenia 2. rádu po 2 periódach pre xsteps 100 a 200

Upwind metóda 2. rádu



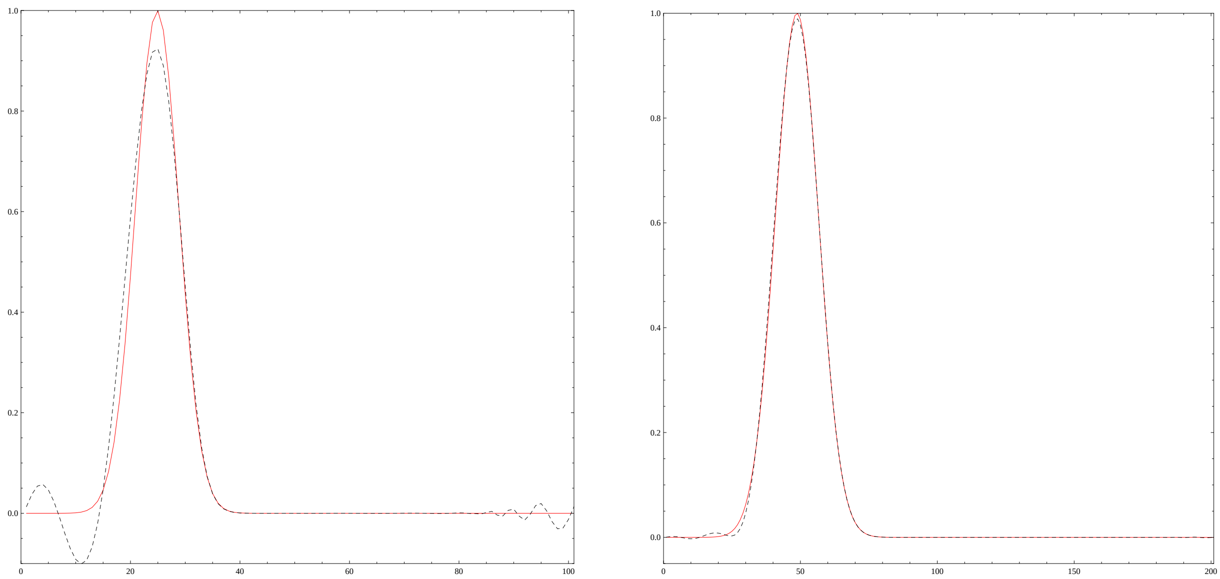
Obr. 15: Tvar riešenia 2. rádu po 2 periódach pre xsteps 100 a 200

Metóda 3. rádu



Obr. 16: Tvar riešenia 3. rádu po 2 periódach pre xsteps 100 a 200

Metóda 4. rádu



Obr. 17: Tvar riešenia 4. rádu po 2 periódach pre xsteps 100 a 200

7 Implementácia metódy 3. rádu

V tejto kapitole uvedieme kód metódy tretieho rádu zo softvéru Mathematica aj s príslušným komentármi.

Presné riešenie našej úlohy.

```
ries = DSolve[{D[u[x, t], t] + (1*Sin[x] + 2)*D[u[x, t], x] == 0,
   u[x, 0] == Sin[x]}, u, {x, t}];
v[x_, t_] = u[x, t] /. ries[[1]];
Manipulate[Plot[v[x, t], {x, 0, 4.*Pi}], {t, 0, 50., 0.1}];
```

Výpočet koeficientov metódy. V mojich programoch označujeme rýchlosť ako a[x].

```
Clear[j, n, U, c0, c1, ci1, ci2, b0c, b1c, bi1c, bi2c, U0, c, a,
  steps, xsteps, h, dt, xgrid];
solver = Solve[{b1 - bi1 - 2*bi2 == -c[x] + c[x]*D[a[x], x]*dt/2 -
      c[x]*a[x]*D[a[x], {x, 2}]*dt^2/6 - c[x]*D[a[x], x]^2*dt^2/6,
   b1 + bi1 + 4*bi2 == c[x]^2 - c[x]^2*D[a[x], x]*dt,
   b1 - bi1 - 8*bi2 == -c[x]^3,
   b0 + b1 + bi1 + bi2 == 1}, {b0, b1, bi1, bi2}];


b0/.solver[[1]]
b1c/.solver[[1]]
bi1c/.solver[[1]]
bi2c/.solver[[1]]
```

Nastavenie koeficientov ako funkcie s gridovými bodmi na vstupe.

```
b0c[j_] := b0 /. solver[[1]] /. x -> xgrid[j]
b1c[j_] := b1 /. solver[[1]] /. x -> xgrid[j]
bi1c[j_] := bi1 /. solver[[1]] /. x -> xgrid[j]
bi2c[j_] := bi2 /. solver[[1]] /. x -> xgrid[j]
```

Nastavenie vstupov úlohy a zadefinovanie potrebných funkcií.

```
U0[x_] := 1.*Sin[x];
steps = 400;
xsteps = 100;
h = 4*Pi/xsteps;
c[x_] := (a[x]*dt)/h;
a[x_] := (1.*Sin[x] + 2.)
dt = 4*Pi/Sqrt[3]/steps;
```

Vytvorenie gridových bodov, počiatočnej podmienky a uloženie koeficientov do polí.

```
For[j = 0, j <= xsteps, j++,
 xgrid[j] = j*h;
 U[j, 0] = U0[j*h];
 c0[j] = b0c[j];
 c1[j] = b1c[j];
 ci1[j] = bi1c[j];
 ci2[j] = bi2c[j];
 ]
```

Metóda tretieho rádu.

```
For[n = 0, n < steps, n++,
 U[-1, n] = U[xsteps - 1, n];
 U[-2, n] = U[xsteps - 2, n];
 U[xsteps + 1, n] = U[1, n];
 For[j = 0, j <= xsteps, j++,
  U[j, n + 1] =
    U[j, n]*c0[j] + U[j + 1, n]*c1[j] + U[j - 1, n]*ci1[j] +
     U[j - 2, n]*ci2[j];
  ];
 ]
```

Vykreslenie výsledkov.

```
Manipulate[
 ListLinePlot[Table[U[j, n], {j, 0, xsteps, 1}], AspectRatio -> 1,
  PlotRange -> {{0, xsteps + 1}, {-1.01, 1.01}}], {n, 0, steps, 1}]
```

Výpočet chyby metódy.

```
h*dt*Sum[Sum[
   Abs[U[j, n] -
     If[NumberQ[v[xgrid[j], n*dt]] == False, U[j, n],
      v[xgrid[j], n*dt]]], {j, 0, xsteps, 1}], {n, 1, steps, 1}]
```

8 Záver

V tejto práci sme odvodili nové metódy 2., 3. a 4. rádu presnosti pre riešenie rovnice advekcie s variabilnou rýchlosťou. Našli sme presné riešenie pre jeden konkrétny príklad a detailne sme ukázali správanie numerických metód na tomto prípade.

Podarilo sa nám ukázať, že pre zvolený netriviálny príklad sú nami odvodené metódy určeného rádu presnosti. Metóda štvrtého rádu presnosti dáva numerické riešenie s najmenšou chybou.

Pre prípad časovo závislej rýchlosti by bolo nutné počítať koeficienty B_α v každom časovom kroku. Z toho dôvodu sme počítali uvedený príklad aj týmto spôsobom. Ukázalo sa, že metóda tretieho rádu presnosti je najrýchlejšia pre vopred zvolenú veľkosť chyby, čo sme zdokumentovali v tabuľke.

Dokázali sme, že aj pre rovnicu advekcie s nekonštantnou rýchlostou je možné nájsť metódy vysokého rádu presnosti, čo môže mať význam napríklad pre aplikácie v úlohách akustiky.

V našej práci sme sa zaoberali lineárnou rovnicou advekcie v jednorozmernom prípade, dosiahnuté výsledky je však možné použiť čiastočne aj v širšom kontexte. Navrhnuté numerické schémy je napríklad možné pomocou takzvaných metód štiepenia aplikovať aj na viacrozmerné úlohy na regulárnych sieťach. Zároveň sa tieto metódy v mnohých prípadoch dajú čiastočne aplikovať aj na systémy parciálnych diferenciálnych rovníc zahrňujúcich nelineárnu rovnicu advekcie [2].

Literatúra

[1] J. Shi and E. F. Toro. *Fully discrete arbitrary-order schemes for a model hyperbolic conservation law*. Cranfield Institute of technology Cranfield, 1993.

[2] R. J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problem*. Cambridge University Press, 2002.