SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE

STAVEBNÁ FAKULTA

Registrácia 3D objektov

Bakalárska práca

SvF-5342-36716

Študijný program: Matematicko-počítačové modelovanie

Študijný odbor: Aplikovaná matematika

Vedúci záverečnej práce/školiteľ: Mgr. Mariana Remešíková, PhD.

Bratislava 2011 **Marek Kosař**

Čestné prehlásenie:

Prehlasujem, že som bakalársku prácu vypracoval sám, len za pomoci citovanej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

V Bratislave 20.5.2011

....

vlastnoručný podpis

Poďakovanie:

Ďakujem vedúcej práce, Mgr. Mariane Remešíkovej, PhD. , za jej pomoc, ochotu, odborné rady, venovaný čas počas konzultácií a v neposlednej rade trpezlivosť počas tvorenia tejto práce.

Abstrakt:

Práca sa zaoberá problémom registrácie 3D objektov reprezentovaných ich povrchovou reprezentáciou. Konkrétne hľadáme registráciu v podobe neizometrickej transformácie metódou nazývanou "geometriou obmedzená difúzia". V prvej časti práce metódu objasňujeme teoreticky krok po kroku a vysvetľujeme používané algoritmy, ich význam, možné spresnenie a urýchlenie. V druhej, praktickej časti, bolo cieľom implementovať algoritmus v jazyku C a následne pomocou programu Paraview sledovať priebeh a výsledky registrácie na jednoduchých geometrických objektoch.

Abstract:

This work deals with the problem of 3D surface registration, specifically by finding a non-rigid transformation by a method called geometry-constrained diffusion. In the first part we explain the method theoretically step by step and describe the algorithms that we use, their meaning and possibilities for obtaining higher accuracy and speed. In the second, practical part, our goal was to implement the algorithm in C language and then to monitor the process and results of the registration on simple geometric objects with the help of Paraview visualization software.

Obsah

Úvod

Úlohou registrácie vo všeobecnosti je hľadanie priestorovej korešpondencie medzi bodmi v dvoch rôznych obrazoch. Najčastejšie sa jedná o 2D alebo 3D obrazové dáta. Úloha registrovať dva obrazy, prípadne objekty v nich sa veľmi často vyskytuje napríklad v medicínskej praxi. Ako príklad si uveďme situáciu, keď treba porovnávať snímky jedného orgánu získané rôznymi prístrojmi. V takom prípade sa nikdy nedá zaručiť rovnaký uhol snímania a poloha snímaného objektu a orgán teda nikdy nebude v snímke rovnako umiestnený. Tak isto sa dajú porovnávať aj snímky určitého orgánu snímané v rôznom čase a odlišnosti medzi nimi. Užitočnosť takejto registrácie je teda hlavne pri hľadaní zmien, ako sú rast, deformácia alebo degenerácia rôznych orgánov. V takých prípadoch je dôležité vedieť, ktoré body v jednotlivých snímkach si navzájom zodpovedajú, aby sme čo najpresnejšie mohli posúdiť prípadné zmeny a získať čo najviac informácií. V našej práci sa špeciálne zaoberáme registráciou 3D povrchov, teda častí 3D obrazov, ktoré predstavujú povrchovú reprezentáciu objektov nachádzajúcich sa v tomto 3D obraze. Tieto povrchy sú obyčajne reprezentované ako izoplochy funkcie intenzity obrazu.

Vo veľmi jednoduchých prípadoch môžme registráciu spraviť aj manuálne. V prípade, že sa jedná o množstvo snímok, stáva sa to ale zdĺhavé a prakticky nemožné. Vo veľa prípadoch je priradenie bodov obtiažne a nepraktické vďaka rôznorodému tvarovaniu a členitosti povrchu. Našou úlohou je teda nájsť automatickú metódu, ktorá by zistila korešpondenciu medzi bodmi povrchov dvoch daných 3D objektov. Presnejšie, v ideálnom prípade chceme získať medzi danými povrchmi homeomorfizmus (teda zobrazenie, ktoré je bijektívne, spojité a jeho inverzné zobrazenie je taktiež spojité), ktorý by bol optimálny, resp. čo najjednoduchší. Túto úlohu riešime pomocou geometriou obmedzenej difúzie, ktorá má tú vlastnosť, že regularizuje počiatočné vektorové pole reprezentujúce nejaké zobrazenie medzi danými povrchmi. Pritom sa po celý čas zachováva vlastnosť, že obraz bodu prvého povrchu leží na druhom registrovanom povrchu. V našej práci sa zaoberáme registráciou trojdimenzionálnych objektov, no algoritmus sa dá aplikovať na geometrické objekty v akejkoľvek dimenzii.

1 Registrácia povrchov

V tejto kapitole stručne popíšeme problém registrácie povrchov [1]. Registráciou medzi povrchmi $A, B \in \mathbb{R}^3$ sa nazýva zobrazenie T medzi súradnicovými systémami Ref_A a Ref_B, v ktorých sú povrchy A a B vyjadrené vzťahom:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{T}(\mathbf{x}_A), \tag{1}$$

kde $\mathbf{x}_A = (x_A, y_A, z_A) \in A$ a $\mathbf{x}_B = (x_B, y_B, z_B) \in B$ sú body vyjadrené v súradnicových systémoch Ref_A a Ref_B, ktoré si navzájom zodpovedajú. Táto korešpondencia medzi bodmi závisí od aplikácie, v ktorej je registrácia potrebná. V medicínskej praxi môže ísť napríklad o presnú, anatomickú alebo homologickú korešpondenciu. Predstavme si, že máme snímku nejakého ľudského orgánu, napríklad srdca. Ak urobíme snímku toho istého orgánu iným prístrojom, uvidíme tie isté body, objekt však môže byť posunutý alebo pootočený. Iný prípad je, keď si zoberieme snímku srdca iného pacienta, kde si anatomicky môžu zodpovedať napr. body na okrajoch srdcových komôr. Vtedy hovoríme o anatomickej korešpondencii. Ak by sme urobili snímku toho istého pacienta po určitom období, orgán sa medzi časom mohol vyvinúť, narasť alebo zdeformovať. Potom bude každému bodu na pôvodnej snímke zodpovedať na aktuálnej snímke jeho tzv. homologický bod. Homologickým bodom nazývame novú polohu bodu po prebehnutej transformácii.

V praktických aplikáciách registráciou často rozumieme len odhad zobrazenia daného vzťahom (1). To znamená, že hľadáme T také, aby pre navzájom si zodpovedajúce body $\mathbf{x}_A$, $\mathbf{x}_B$ platilo:

$$\| \mathbf{x}_B - T(\mathbf{x}_A) \| \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Je to dané tým, že dáta sú vo väčšine prípadov mierne skreslené, obsahujú šum alebo artefakty, vďaka ktorým môže byť skutočná korešpondencia medzi bodmi porušená. Pri registrácii povrchov sa často postupuje tak, že sú vopred známe niektoré význačné dvojice zodpovedajúcich si bodov, prípadne celých kriviek. Tieto význačné dvojice zodpovedajúcich si bodov môžu byť vyznačené manuálne, ale existujú aj automatické algoritmy riešiace takéto úlohy. V tejto časti práce budeme predpokladať, že niektoré dvojice zodpovedajúcich si bodov sú vopred dané a na základe toho budeme popisovať jednotlivé postupy.

1.1 Voľba transformácie

V prvej fáze registrácie si upresňujeme predpoklad o type transformácie T, ktorý je vhodný pre mapovanie bodov $\mathbf{x}_A \in A$ do $\mathbf{x}_B \in B$. Rozhodovacím kritériom býva to, či je T transformácia medzi dvoma objektami reprezentujúcimi ten istý orgán, ale pochádzajúcimi z dvoch rôznych snímok, alebo transformácia medzi dvoma anatomicky analogickými, ale rôzne tvarovanými objektami, alebo registrované objekty reprezentujú ten istý objekt meniaci sa v čase. V tomto zmysle delíme zobrazenia na izometriu, afinné zobrazenie alebo všeobecné nelineárne zobrazenie (transformácia pomocou globálnej polynomiálnej funkcie alebo po častiach polynomiálnej funkcie).

1.1.1 Izometria

Izometrickú transformáciu, tj. transformáciu zachovávajúcu dĺžky volíme v prípade, že sú deformácie objektu zanedbateľné v porovnaní s požadovanou presnosťou registrácie. Sú to hlavne prípady, ak máme na registráciu k dispozícií dva snímky toho istého objektu. Vo všeobecnosti môžeme izometrickú transformáciu popísať ako kombináciu posunutia a rotácie:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{R}_{AB}\mathbf{x}_A + \mathbf{t}_{AB}, \tag{3}$$

kde $\mathbf{x}_A \in A$ je pôvodná poloha bodu, $\mathbf{x}_B \in B$ je výsledná poloha bodu, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ je matica rotácie a $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ je vektor posunutia. Problém izometrickej registrácie môžeme potom sformulovať tak, že hľadáme maticu $\mathbf{R}$ a vektor $\mathbf{t}$, ktoré minimalizujú výraz:

$$\underset{\mathbf{R},\mathbf{t}}{min}\sum_{i=1}^{N}\|\mathbf{x}_{B_i} - (\mathbf{R}\mathbf{x}_{A_i} + \mathbf{t})\|^2, \tag{4}$$

kde N je počet vybraných dvojíc bodov $\mathbf{x}_{A_i} \in A$, $\mathbf{x}_{B_i} \in B$ o ktorých vieme, že si navzájom zodpovedajú. Problém môže byť preformulovaný aj spôsobom, keď počítanie $\mathbf{t}$ a $\mathbf{R}$ od seba oddelíme využitím súradníc ťažísk danej množiny bodov na povrchu A a množiny zodpovedajúcich bodov na povrchu B. To vedie k minimalizácií výrazu:

$$\underset{\mathbf{R},\mathbf{t}}{min}\sum_{i=1}^{N}\|\mathbf{x'}_{B_i} - (\mathbf{R}\mathbf{x'}_{A_i})\|^2, \tag{5}$$

$$\mathbf{x}'_{A_i} = \mathbf{x}_{A_i} - \tfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{x}_{A_j},$$

$$\mathbf{x}'_{B_i} = \mathbf{x}_{B_i} - \tfrac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{x}_{B_j},$$

kde N je celkový počet dvojíc zodpovedajúcich si bodov. Posun je daný iba rozdielom ťažiska množiny bodov na povrchu B a ťažiska otočenej množiny bodov z povrchu A:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{x}_{B_i} - \mathbf{R}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{x}_{A_j}. \tag{6}$$

V praxi sa používa niekoľko základných typov reprezentácií rotácie a translácie, ktorých voľba ovplyvňuje výslednú efektivitu a numerickú stabilitu riešenia [2]. Hlbšie tieto reprezentácie popisovať nebudeme, keďže pre riešenie našich registračných problémov budeme neskôr používať transformáciu, ktorá dĺžky nezachováva.

1.1.2 Afinná transformácia

Zovšeobecnením izometrie je afinná transformácia, ktorá je zložením lineárnej transformácie a posunutia. Je charakterizovaná vzťahom:

$$\mathbf{x}_B = \mathbf{A}\mathbf{x}_A + \mathbf{b}, \tag{7}$$

kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3x3}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ a matica $\mathbf{A}$ nemusí byť ortogonálna, ako to bolo vo výraze (3). Afinné transformácie vo všeobecnosti nezachovávajú uhly a dĺžky, ale rovnobežné čiary zostávajú pri tejto transformácii rovnobežné [3]. Rovnako ostáva zachovaná kolinearita bodov a pomer vzdialeností na priamkach. Takúto transformáciu volíme napríklad v prípade, ak v dvoch rôznych snímkach toho istého objektu pozorujeme nielen posunutie a pootočenie, ale napríklad aj zmenu mierky, skosenie a pod. Hľadanie transformácie v takomto tvare sa dá formulovať ako minimalizačný problém:

$$\min_{\mathbf{A},\mathbf{b}} \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\|\mathbf{A}\mathbf{x}_{A_i} + \mathbf{b} - \mathbf{x}_{B_i}\|^2, \tag{8}$$

kde N je počet zodpovedajúcich si dvojíc bodov.

1.1.3 Všeobecná nelineárna transformácia

Tento typ transformácie používame v prípade, že deformácia je natoľko veľká, že nemôže byť zanedbaná. To býva vtedy, ak sledujeme vývoj objektu v čase, alebo napríklad hľadáme korešpondenciu medzi dvoma anatomicky analogickými objektami, napr. srdce u dvoch rôznych pacientov. Takúto transformáciu môžeme hľadať veľkým množstvom rôznych spôsobov. Tu uvedieme tri jednoduché prípady hľadania transformácie a to afinnú transformáciu, transformáciu v tvare polynomiálnej a po častiach polynomiálnej funkcie. Ďalší spôsob registrácie pomocou geometriou obmedzenej difúzie bude ťažiskom ďalších kapitol.

1.1.3.1 Globálne polynomiálne funkcie

V tomto prípade hľadáme polynomickú funkciu, v praxi obyčajne stupňa 2 až 5, ktorá mapuje povrch A do povrchu B [4]. Používame tu dvojice zodpovedajúcich si bodov na generovanie jednej optimálnej globálnej transformácie. Podľa stupňa polynómu je na určenie parametrov transformácie nutný určitý počet týchto dvojíc a pri určovaní môžeme postupovať buď aproximáciou alebo interpoláciou. Polynomické funkcie sú zvyčajne vyjadrené v karteziánskych alebo sférických súradniciach. Globálne polynomiálne funkcie sú však väčšinou použiteľné iba pri malých nízkofrekvenčných pokriveniach, kvôli ich nepredvídateľnému správaniu v prípade, že ide o polynóm vysokého stupňa.

Aproximáciou sa nazýva hľadanie transformácie, ktorá mapuje na seba dvojice zodpovedajúcich si bodov tak presne, ako je možné, ale nie nutne úplne presne. Takýto postup je vhodný v prípade, že je na snímkach prítomný nejaký šum alebo nežiaduce skreslenie, ktoré však má čo najmenej ovplyvniť výslednú transformáciu. Je tu potrebný väčší počet význačných bodov, pretože niektoré body môžu byť v dôsledku šumu spárované nepresne. V prípade, že ich máme väčší počet, dostaneme dostatočné štatistické údaje, aby sme transformáciu mohli považovať za spoľahlivú.

Interpoláciou hľadáme transformáciu, ktorá mapuje na seba dva 3D povrchy tak, že je presne splnená korešpondencia medzi kontrolnými bodmi. Je vhodnejšia pre menší počet kontrolných bodov a v prípade, že obraz nie je vo veľkej miere znehodnotený šumom. Pre kartézske súradnice môže byť všeobecná polynomiálna funkcia v troch dimenziách vyjadrená takto:

$$
\begin{aligned}
x_B &= \sum_{ijk} a_{ijk} x_A^i y_A^j z_A^k, \\
y_B &= \sum_{ijk} b_{ijk} x_A^i y_A^j z_A^k, \\
z_B &= \sum_{ijk} c_{ijk} x_A^i y_A^j z_A^k,
\end{aligned} \tag{9}
$$

kde a_{ijk}, b_{ijk} a c_{ijk} sú hľadané konštantné polynomiálne koeficienty.

Pri uzavretých povrchoch sa funkcie často vyjadrujú v sférických súradniciach [2]. Ľubovoľný, jednoducho súvislý uzavretý povrch môžeme parametricky vyjadriť nasledujúcim spôsobom:

$$
r(\theta,\phi) \approx \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=0}^{n} \left[A_{nm} U_{nm}(\theta,\phi) + B_{nm} V_{nm}(\theta,\phi)\right], \tag{10}
$$

teda ako spojité zobrazenie z dvojrozmernej jednotkovej sféry do $\mathbb{R}^3$, kde $A_{nm} \in \mathbb{R}$ a $B_{nm} \in \mathbb{R}$ sú bázové koeficienty dané bodmi 3D povrchu a N reprezentuje rád aproximácie. Bázové sférické harmonické funkcie majú tvar:

$$
\begin{aligned}
U_{nm}(\theta,\phi) &= \cos(m\phi)\, P_{n,m}(cos(\theta)) \\
V_{nm}(\theta,\phi) &= \sin(m\phi)\, P_{n,m}(cos(\theta))
\end{aligned}, \tag{11}
$$

kde:

$$
P_{n,m}(x) = \left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \tag{12}
$$

a P_n je Legendrov polynóm stupňa n.

1.1.3.2 Lokálna nelineárna transformácia: po častiach polynomiálna funkcia

Globálne polynomiálne funkcie nie sú ideálnym spôsobom, ako aproximovať daný povrch alebo zobrazenie z neho do iného povrchu. Deformácie bývajú často skôr lokálneho charakteru a vyskytujú sa na malých plochách. V takýchto prípadoch je vhodnejšie zvoliť na reprezentáciu transformácie po častiach polynomiálnu funkciu, ktorá sa vyznačuje lokalitou zmeny (pri zmene niektorého parametra sa priebeh funkcie zmení len lokálne).

Medzi najčastejšie používané po častiach polynomiálne aproximácie patria rôzne typy spline funkcií, pri ktorých vytvárame aproximačný polynóm ako lineárnu kombináciu bázových polynomiálnych funkcií [6]. Jednou z možností sú tzv. normalizované b-spline bázové funkcie, ktoré zostrojíme nasledujúcim spôsobom. Majme daný uzlový vektor $(t_0, t_1, ..., t_m)$ a definujme polynóm stupňa p rekurentným vzťahom:

$$N_{i,0}(t)=\begin{cases}1 & pre\, t_i < t < t_{i+1} \\ 0 & inde\end{cases} \qquad i=0\ldots m-1$$
$$N_{i,p}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+p}-t_i}N_{i,p}(t)+\frac{t_{i+p+1}-t}{t_{i+p+1}-t_{i+1}}N_{i+1,p-1}(t) \qquad i=0\ldots m-p-1 \tag{13}$$

Ak by sme mali dané tri uzlové vektory $(t_0, t_1, ..., t_{m1})$, $(r_0, r_1, ..., r_{m2})$ a $(s_0, s_1, ..., s_{m3})$ zodpovedajúce trom súradnicovým smerom, môžeme zostrojiť polynomiálnu funkciu troch premenných:

$$u(x,y,z)=\sum_{i=0}^{m1-p1-1}\sum_{j=0}^{m2-p2-1}\sum_{k=0}^{m3-p3-1}u_{ijk}N_{i,p1}(x)N_{j,p2}(y)N_{k,p3}(z), \tag{14}$$

kde $x \in < t_0, t_{m1} >$, $y \in < r_0, r_{m2} >$, $z \in < s_0, s_{m3} >$. Ak naša funkcia $u(x,y,z)$ predstavuje bod, ktorý sa pri registrácii spáruje s bodom $(x,y,z) \in A$, a ak máme dané hodnoty u_l v bodoch (x_l, y_l, z_l), $l = 0 \ldots N$, tak koeficienty u_{ijk} nájdeme tak, že minimalizujeme výraz:

$$\sum_{l=0}^{N}\|u_l - u(x_l, y_l, z_l)\|^2 \ . \tag{15}$$

2 Difúzia obmedzená geometriou

Difúzia obmedzená geometriou je jeden zo spôsobov, ako získať nelineárnu transformáciu medzi dvoma registrovanými povrchmi [7]. Metóda je využiteľná zvlášť pri sledovaní rastu, resp. inej časovej zmeny orgánov. Z myšlienky takejto úlohy vyplýva, že riešením by malo byť homeomorfné zobrazenie, ktoré na seba namapuje dvojice homologických bodov. Majme dané dva povrchy S_1, S_2 a priraďme každému bodu na zdrojovom povrchu S_1 bod na cieľovom povrchu S_2. Po tomto priradení dostaneme medzi každou dvojicou spárovaných bodov vektor, smerujúci zo zdrojového do cieľového objektu. Toto počiatočné priradenie by malo byť bijektívne a vo všeobecnosti môže byť dopredu označených niekoľko dvojíc zodpovedajúcich si bodov. Inak však nie sú dané ďalšie obmedzenia a pole môže byť úplne náhodné. Takto vytvorené pole však ešte pravdepodobne nebude reprezentovať homeomorfizmus a zdrojový povrch by mohol byť zodpovedajúcou transformáciou nevhodne zdeformovaný – mohol by byť potrhaný alebo by mohol pretínať sám seba. Aplikovaním difúzie na toto počiatočné pole dostaneme postupne zjednodušené vektorové pole, čo vo výsledku vedie k najjednoduchšej možnej registrácii medzi dvoma pozorovanými objektami, resp. k spojitému vektorovému poľu. Použitý matematický model obsahuje aj projekciu difundovaných vektorov na cieľový povrch, čím zabezpečuje, že vektorové pole bude stále reprezentovať zobrazenie z S_1 do S_2.

2.1 Rovnica difúzie pre vektorové pole a numerické schémy na jej riešenie

Majme dva obrazy $I_1 : \Omega_1 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a $I_2 : \Omega_2 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a definujme vektorové pole $D : \Omega_1 \subset \mathbb{R}^3 \to \Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$. Toto pole môžme zhladiť pomocou difúznej rovnice:

$$\partial_t D = \triangle D, \tag{16}$$

kde operátor $\triangle$ je aplikovaný zvlášť na každú zložku vektora $D(\mathbf{x}) = (D_x(\mathbf{x}), D_y(\mathbf{x}), D_z(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} = (x, y, z)$:

$$\begin{aligned} \triangle D_x(\mathbf{x}) &= \frac{\partial^2 D_x(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_x(\mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D_x(\mathbf{x})}{\partial z^2} \\ \triangle D_y(\mathbf{x}) &= \frac{\partial^2 D_y(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_y(\mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D_y(\mathbf{x})}{\partial z^2} \\ \triangle D_z(\mathbf{x}) &= \frac{\partial^2 D_z(\mathbf{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D_z(\mathbf{x})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 D_z(\mathbf{x})}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{17}$$

Takto dostaneme tri nezávislé rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_x(x,y,z,t)}{\partial t} &= \frac{\partial D_x(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial D_x(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial D_x(x,y,z,t)}{\partial z^2} \\ \frac{\partial D_y(x,y,z,t)}{\partial t} &= \frac{\partial D_y(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial D_y(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial D_y(x,y,z,t)}{\partial z^2} \\ \frac{\partial D_z(x,y,z,t)}{\partial t} &= \frac{\partial D_z(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial D_z(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial D_z(x,y,z,t)}{\partial z^2} \end{aligned} \tag{18}$$

Okrajové a počiatočné podmienky sú dané:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D(\mathbf{x})}{\partial n} = \nabla D(\mathbf{x}) \,.\, \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \forall x \in \partial\Omega \\ D(x, 0) = D_0(x). \end{aligned} \tag{19}$$

Rovnicu môžeme numericky riešiť dvoma jednoduchými spôsobmi a to explicitnou alebo implicitnou metódou konečných diferencií. Implicitná metóda je síce náročnejšia na výpočet, ale na druhej strane tolerantnejšia pri voľbe časového kroku a nemusíme pri nej zabezpečovať stabilitu riešenia. Pre úplnosť si popíšeme obe metódy.

2.1.1 Explicitná metóda

Explicitnú metódu konečných diferencií riešiacu rovnicu lineárnej difúzie (17) môžme popísať nasledovne. Časová derivácia aproximovaná doprednou diferenciou má tvar:

$$\frac{\partial D_x(x,y,z,t_{n+1})}{\partial t} \approx \frac{D_x(x,y,z,t_{n+1}) - D_x(x,y,z,t_n)}{\tau} \tag{20}$$

a druhú deriváciu v priestorovej premennej x aproximujeme v tvare:

$$\frac{\partial^2 D_x(x_i,y_j,z_k,t_n)}{\partial x^2} \approx \frac{D_x(x_{i+1},y_j,z_k,t_n) - 2\,D_x(x_i,y_j,z_k,t_n) + D_x(x_{i-1},y_j,z_k,t_{n+1})}{h^2} \tag{21}$$

Výsledná explicitná schéma následne vyjde v tvare:

$$\begin{gathered} D_x(x_i,y_j,z_k,t_{n+1}) = D_x(x_i,y_j,z_k,t_n) + \tfrac{\tau}{h^2}(D_x(x_{i+1},y_j,z_k,t_n) + \\ D_x(x_{i-1},y_j,z_k,t_n) + D_x(x_i,y_{j+1},z_k,t_n) + D_x(x_i,y_{j-1},z_k,t_n) + \\ D_x(x_i,y_j,z_{k+1},t_n) + D_x(x_i,y_j,z_{k-1},t_n) - 6\,D_x(x_i,y_j,z_k,t_n)) \end{gathered} \tag{22}$$

Analogicky postupujeme aj pri zložkách vektora y a z. Stabilitu takejto explicitnej metódy zabezpečíme správnym zvolením parametrov τ a h tak, aby platilo:

$$\tau \leq \frac{h^2}{2}. \tag{23}$$

2.1.2 Implicitná metóda

Na rozdiel od explicitnej metódy, priestorovú diskretizáciu robíme v aktuálnom časovom kroku, používame teda hodnoty numerického riešenia, ktoré ešte nepoznáme. Schému si uvedieme pre zložku x vektora $D(\mathbf{x})$. Časová diskretizácia je rovnaká ako (19), priestorová však nadobúda tvar:

$$\frac{\partial^2 D_{x_i,y_j,z_k,t_n}}{\partial x^2} \approx \frac{D_{x_{i+1},y_j,z_k,t_{n+1}} - 2\,D_{x_i,y_j,z_k,t_{n+1}} + D_{x_{i-1},y_j,z_k,t_{n+1}}}{h^2}, \tag{24}$$

Implicitná schéma má potom tvar:

$$\frac{D_x(x,y,z,t_{n+1})-D_x(x,y,z,t_n)}{\tau}-(\frac{D_x(x_{i+1},y_j,z_k,t_{n+1})-2\,D_x(x_i,y_j,z_k,t_{n+1})+D_x(x_{i-1},y_j,z_k,t_{n+1})}{h^2})-$$
$$(\frac{D_x(x_i,y_{j+1},z_k,t_{n+1})-2\,D_x(x_i,y_j,z_k,t_{n+1})+D_x(x_i,y_{j-1},z_k,t_{n+1})}{h^2})-$$
$$(\frac{D_x(x_i,y_j,z_{k+1},t_{n+1})-2\,D_x(x_i,y_j,z_k,t_{n+1})+D_x(x_i,y_j,z_{k-1},t_{n+1})}{h^2})=0, \tag{25}$$

ktorý po úprave vyzerá nasledovne:

$$\begin{gathered}(1+6\sigma)\,D_x(x_i,y_j,z_k,t_{n+1})-\sigma(D_x(x_{i+1},y_j,z_k,t_{n+1})+D_x(x_{i-1},y_j,z_k,t_{n+1})+\\ D_x(x_i,y_{j+1},z_k,t_{n+1})+D_x(x_i,y_{j-1},z_k,t_{n+1})+D_x(x_i,y_j,z_{k+1},t_{n+1})+\\ D_x(x_i,y_j,z_{k-1},t_{n+1}))=D_x(x_i,y_j,z_k,t_n)\end{gathered} \tag{26}$$

$$\sigma=\frac{\tau}{h^2}\,. \tag{27}$$

Rovnaký postup opakujeme aj pri zložkách vektora y a z. Dostaneme sústavu rovníc, ktorú môžeme zapísať v maticovom tvare ako:

$$\begin{pmatrix} 1+6\sigma & -\sigma & 0 & ... & ... \\ -\sigma & 1+6\sigma & -\sigma & ... & ... \\ 0 & -\sigma & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & -\sigma \\ ... & ... & ... & -\sigma & 1+6\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{x_1,y_1,z_{1,}t_{1+1}} \\ D_{x_2,y_1,z_{1,}t_{n+1}} \\ ... \\ ... \\ D_{x_N,y_N,z_{N,}t_{n+1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{x_1,y_1,z_{1,}t_n} \\ D_{x_2,y_1,z_{1,}t_n} \\ ... \\ ... \\ D_{x_N,y_N,z_{N,}t_n} \end{pmatrix} \tag{28}$$

Na riešenie sústavy lineárnych rovníc sme použili numerickú iteračnú metódu SOR, ktorá najrýchlejšie konvergovala k hľadanému výsledku, tj. k hodnotám D v časovej vrstve t_{n+1}. Implicitná metóda je bezpodmienečne stabilná.

2.2 Matematický model difúzie obmedzenej geometriou

Matematický model difúzie môžme popísať nasledovne [7].Majme vektorové pole D : $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^3 \to \Omega_2 \subset \mathbb{R}^3$ a dva povrchy $S_1 \subset \Omega_1$, $S_2 \subset \Omega_2$. Ak $x \in S_1$, tak nech $x + D(x) \in S_2$. Geometriou obmedzenú difúziu poľa D mapujúceho povrch S_1do povrchu S_2 môžeme matematicky zapísať:

$$\partial_t D = \begin{cases} \triangle D - n_{S_2} \frac{n_{S_2} . \triangle D}{\|n_{S_2}\|^2} & ak\ x \in S_1 \\ \triangle D & ak\ x \notin S_1 \end{cases} \tag{29}$$

kde n_{S_2} je normála k povrchu S_2 v bode $D(x)+x$. Tento model dovolí bodom $x+D(x)$, $x \in S_1$, cestovať po povrchu S_2. Nevieme, kam sa v skutočnosti namapuje bod $x \in S_1$, tak normálu n_{S_2} explicitne nepoznáme. Ale vieme, že povrch S_2 je vlastne transformovaný povrch S_1, takže môžeme túto normálu vyjadriť ako $n_{S_1} + Jn_{S_1}$, kde J je Jakobián vektorovej funkcie D. Okrajová podmienka je opäť homogénna Neumannova. Čo sa týka počiatočnej podmienky, postupujeme nasledujúcim spôsobom. Pre $x \in S_1$ bude $D(x,0)$ dané tak, že $x + D(x,0) \in S_2$. Presný spôsob konštrukcie popíšeme pri jednotlivých numerických experimentoch. Ak už máme zostrojené $D(x,0)$, $x \in S_1$, tak v zvyšnej časti oblasti Ω_1 zvolíme:

$$D(x,0) = \frac{1}{m(S_1)} \int_{S_1} D(x,0) dx, \tag{30}$$

kde $m(S_1)$ je plošný obsah povrchu S_1. V diskrétnom prípade, t.j. ak je povrch reprezentovaný množinou voxelov, nastavíme:

$$D(\mathbf{x},0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} D(\mathbf{x}_i, 0), \qquad \forall \mathbf{x} \notin S_1 \tag{31}$$

kde $\mathbf{x}_i$ sú body povrchu S_1. Môžme tomu rozumieť tak, že do každého bodu na diskretizovanej oblasti, ktorý nepatrí povrchu S_1 dáme vektor zodpovedajúci aritmetickému priemeru vektorov $D(x)$ prislúchajúcich bodom $x \in S_1$.

3 Implementácia

Algoritmus, ktorý sme popísali teoreticky, implementujeme v 4 krokoch:

3.1 Inicializácia vektorového poľa

V prvom kroku každému bodu na povrchu S_1 priradíme ľubovoľne bod na povrchu S_2. Takýmto priradením dostaneme vektor medzi každou dvojicou spárovaných bodov. V prípade zložitejších, viac zdeformovaných povrchov je vhodné dopredu určiť zodpovedajúce si dvojice bodov, ktoré budú dané napevno a nebudú podliehať difúzii. Predstavme si situáciu, keď máme 2 snímky orgánu, no na druhej snímke už je orgán natoľko zdeformovaný, že metóda nedokáže výslednú transformáciu určiť. Vtedy je nutné niektoré dvojice bodov, nám známe vďaka znalosti anatómie, priradiť manuálne.

3.2 Aplikovanie difúzie

V ďalšom kroku aplikujeme difúziu na vektorové pole, resp. na každú zložku vektorového poľa samostatne podľa vyššie popísanej schémy. Časový a priestorový krok si dopredu zvolíme. Od určenia týchto parametrov závisí rýchlosť konvergencie metódy SOR a presnosť riešenia.

3.3 Projektovanie vektorov na cieľový povrch

V našom programe tento problém riešime jednoduchým hľadaním najbližšieho bodu na cieľovom povrchu prechádzaním predom zvoleného okolia zdifundovaného vektora. Tento algoritmus nie je najoptimálnejší, ale pre správne riešenie postačujúci.

3.4 Testovanie konvergencie

Kroky 2 a 3 opakujeme dovtedy, kým nie je splnená podmienka:

$$\sum_{i=1}^{N} \| D_n(\mathbf{x}_i) - D_{n-1}(\mathbf{x}_\mathrm{i}) \|^2 < \varepsilon, \tag{32}$$

kde $\mathbf{x}_i$ sú body na zdrojovom povrchu, D_n je vektorové pole v n-tej iterácii a ε je nami zvolený parameter – konštanta rozhodujúca o konvergencii, zvyčajne sa volí veľmi malá. Alternatívne môže byť zvolený aj pevný počet iterácií, vtedy ale nie je zabezpečená konvergencia a môže sa ľahko stať, že nami zvolený počet k presnému riešeniu stačiť nebude. V prípade, že podmienka (33) nie je splnená, algoritmus sa vracia k prvému kroku a opakuje sa odznova.

Metódu sme implementovali podľa práce Andresena a Nielsena [7], v ktorej je vyslovená domnienka, že model (29) vedie k transformácii $S_1 \to S_2$, ktorá je homeomorfizmom. Z praktických experimentov však vyplýva, že pre popísanú implementáciu je toto tvrdenie príliš silné. Povaha riešenia silne závisí od konkrétnych povrchov, ktoré registrujeme, a od počiatočnej podmienky, ktorú zvolíme. V skutočnosti dostaneme nejaké zobrazenie $D_1 : S_1 \to S_2$. Zároveň získame aj priamočiaru homotópiu medzi identitou Id_{S_1} na S_1 a zobrazením D_1, konkrétne zobrazenie $H(x, \lambda) = x + \lambda D_1(x)$, $\lambda \in < 0, 1 >$. Pomocou nej môžeme potom zrekonštruovať celý priebeh deformácie povrchu S_1 na povrch S_2. Na základe experimentov môžeme povedať, že ak nezvolíme nevhodnú počiatočnú podmienku (nespárujeme niektoré dvojice bodov fixne nerealistickým spôsobom), dostaneme deformáciu povrchu S_1, pri ktorej sa S_1 spojite deformuje na S_2 alebo jeho časť, a pri ktorej sa trajektórie jednotlivých bodov nepretnú tak, že by sa dva body ocitli naraz na tom istom mieste.

4 Experimenty

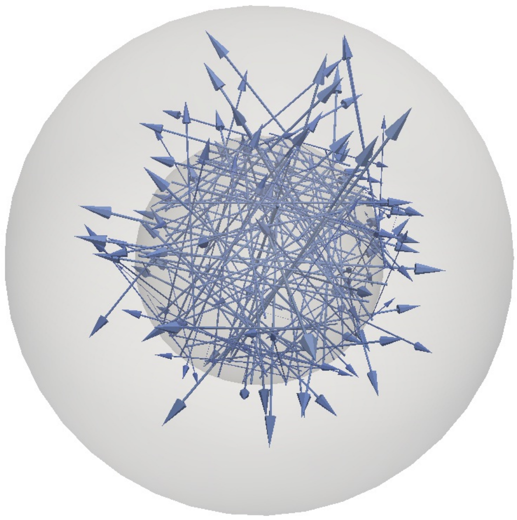
Metódu geometriou obmedzenej difúzie sme naprogramovali v jazyku C. Program nemá žiadne užívateľské prostredie a bol vytvorený výlučne pre naše testovacie účely. Program načítava dva súbory formátu *vtk* [8], v ktorých sú obrazové dáta reprezentované typom *unsigned char*. Tieto dáta vyjadrujú intenzitu šedej v jednotlivých voxeloch v rozsahu 0 až 255, čo nám umožňuje z týchto 3D obrazov vybrať nami požadované povrchy – izoplochy. V súbore sa okrem týchto dát nachádza hlavička, v ktorej sú udané rozmery načítaného 3D obrazu. Následne podľa týchto rozmerov vytvoríme dve 3D polia, do ktorých uložíme informáciu, cez ktoré body priestoru izoplochy prechádzajú. Od tejto chvíle už postupujeme podľa algoritmu popísaného v kapitole 4. Úlohu vo všetkých prípadoch riešime na oblasti $< 0, 1 > \times < 0, 1 > \times < 0, 1 >$, ktorú rovnomerne diskretizujeme s priestorovým krokom $h = 0.01$ a časový krok τ=10^{-4}. Konštanta rozhodujúca o konvergencii je $\varepsilon = 0.001$. Na vizualizáciu výsledkov sme používali voľne distribuovaný vizualizačný program Paraview.

4.1 Registrácia dvoch gúľ

4.1.1 Gule s rovnakým stredom a rôznym polomerom

V prvom experimente sme použili ako skúmané objekty dve gule s rovnakým stredom v bode $(0.50, 0.50, 0.50)$, polomer menšej gule je 0.15 a polomer väčšej 0.30. Každému bodu na menšej guli náhodne priradíme jeden bod na väčšej a následne vytvoríme z týchto bodov príslušné vektorové pole. Vizualizáciu tohto poľa vidíme na obr. 4.1.1.1. Po aplikovaní difúzie sa vektory viditeľne skrátia, ako môžeme vidieť na obr. 4.1.1.2. Následne sme využili hlavnú myšlienku geometriou obmedzenej difúzie a to algoritmus, ktorý nám projektuje vektory späť na povrch B tak, že nájde najbližší bod $y \in S_B$ od bodu $x + D(x)$. (Obr. 4.1.1.3)

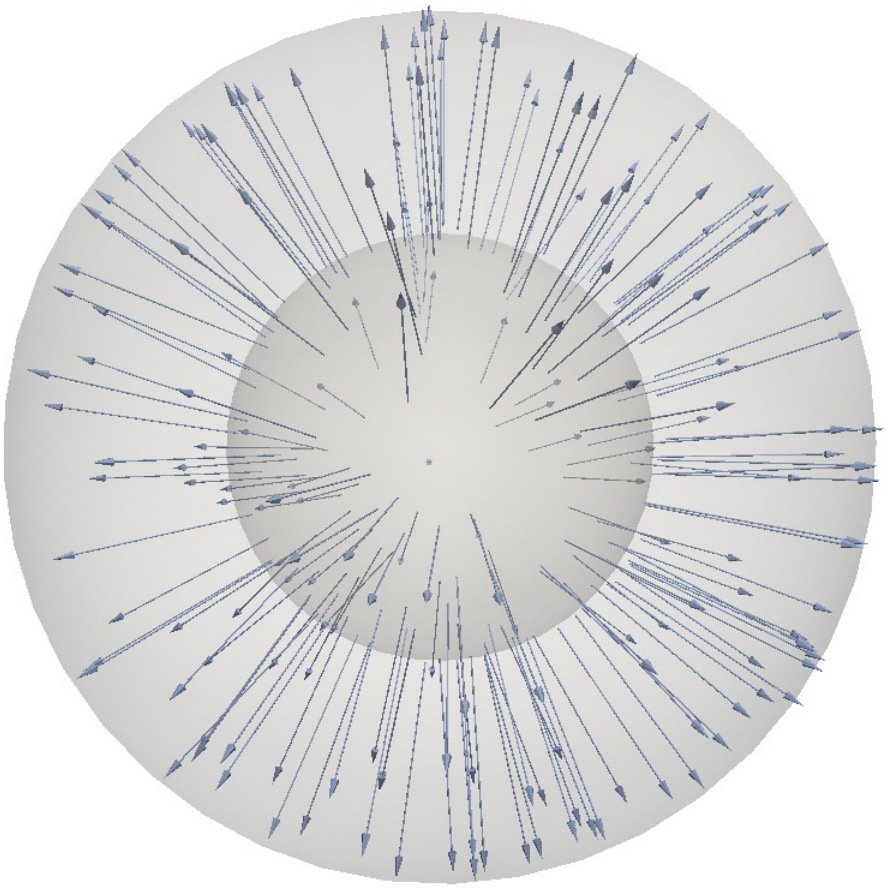
Obr. 4.1.1.1: Inicializácia vektorov



Obr. 4.1.1.2: Pole po prvom kroku difúzie

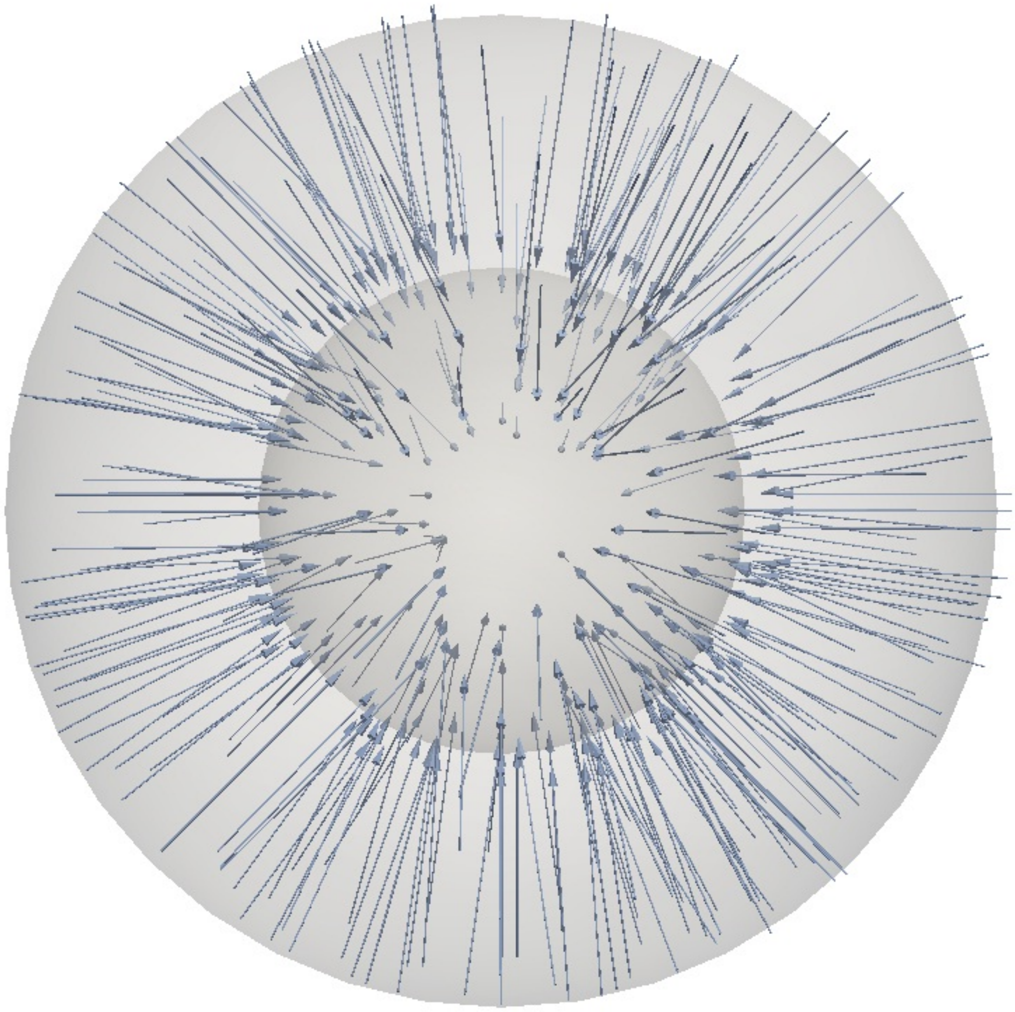
Obr. 4.1.1.3: Vektorové pole po projekcii

Tento postup opakujeme, až kým nie je splnená podmienka konvergencie (32). Pre jej splnenie program potreboval 37 iterácií. Výsledná podoba vektorového poľa je znázornená na obr. 4.1.1.4.



Obr. 4.1.1.4: Vektorové pole po konvergencii

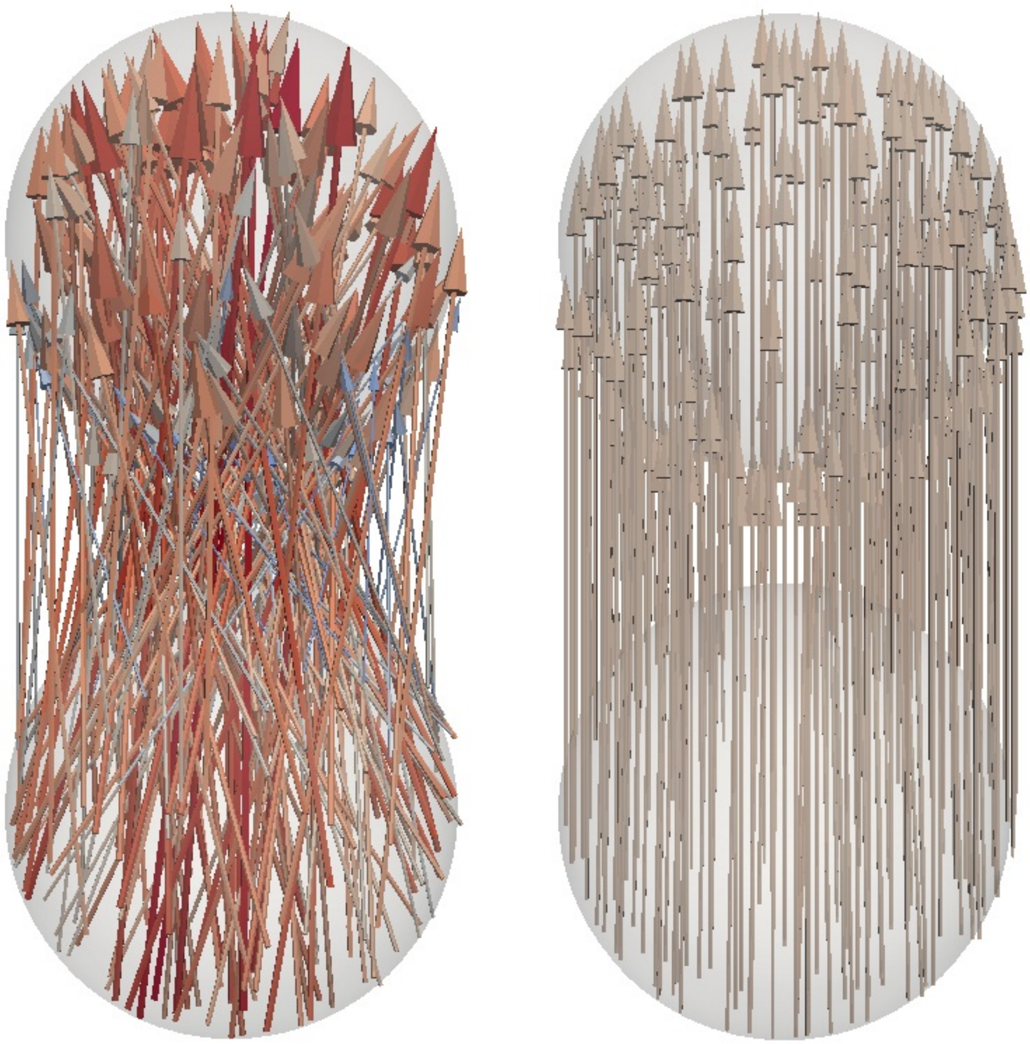
Rovnaký postup sme skúsili aj na opačne orientovanej registrácii a to z väčšej gule do menšej. V tomto diskrétnom prípade nemôžeme zabezpečiť homeomorfizmus medzi guľami, keďže povrch menšej gule obsahuje na našej diskretizovanej oblasti menej bodov. Tým pádom musí do niektorých bodov smerovať viac ako jeden vektor. Na obr. 4.1.1.5 vidíme, že metóda si bez problémov poradí aj v tomto prípade, pritom ku konvergencii stačilo iba 6 iterácií.



Obr. 4.1.1.5: Registrácia veľkej gule na menšiu

4.1.2 Gule s rôznym stredom a rovnakým polomerom

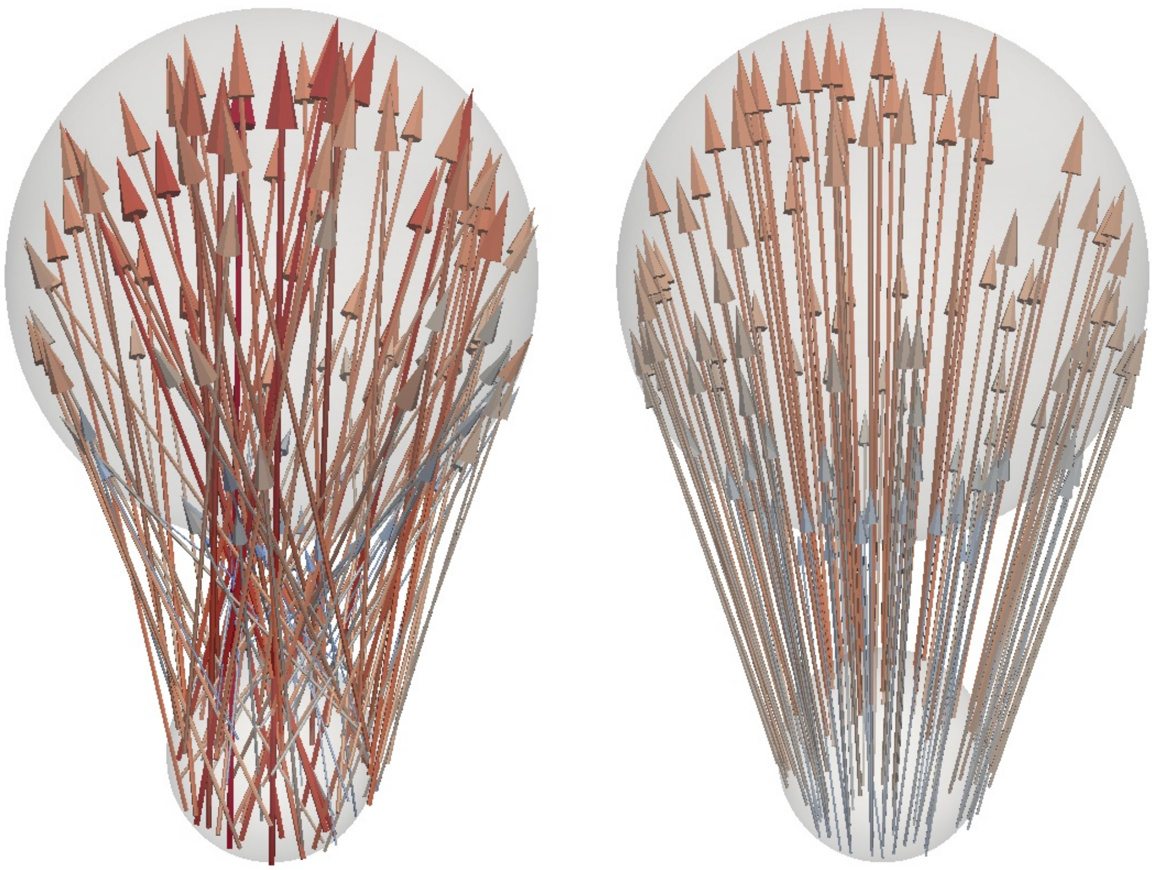
V našom druhom experimente sme použili ako objekty dve gule s rôznym stredom v bode $(0.50, 0.50, 0.25)$ pre guľu A a stredom $(0.50, 0.50, 0.75)$ pre guľu B. Polomer oboch gúľ je 0.2. Počiatočnou podmienkou je dané, že vo všetkých bodoch mimo registrovanej gule sú všade vektory o veľkosti $(0.5, 0, 0)$, tj. aritmetický priemer všetkých vektorov náhodne vygenerovaného vektorového poľa medzi registrovanými guľami. Na obr. 4.1.2.1 môžme vidieť registráciu týchto dvoch gúľ po 30 iteráciách.



Obr. 4.1.2.1: Registrácia 2 rovnakých gúľ s rôznym stredom

4.1.3 Gule s rôznym stredom a rôznym polomerom - nepretínajúce sa

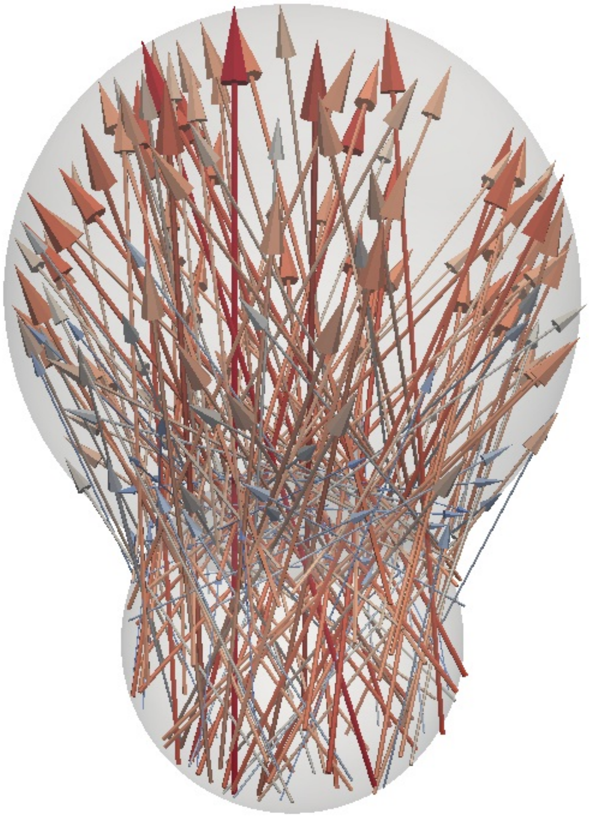
V ďalšom experimente sme si zvolili dve gule. Menšiu s polomerom 0.1 a stredom v bode (0.50, 0.50, 0.20) a väčšiu s polomerom 0.25 a stredom v bode (0.50, 0.50, 0.65). Počiatočné podmienky boli znova zvolené klasicky, tj. v okolitých bodoch sa nachádzali vektory, ktoré boli veľkosti aritmetického priemeru náhodne generovaného poľa medzi dvoma objektami. Ku konvergencii algoritmus potreboval 35 iterácií. (Obr. 4.1.3.1)



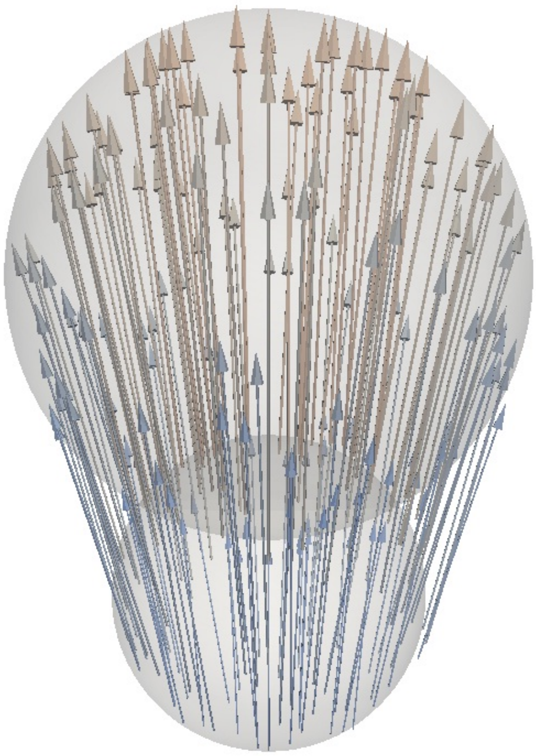
Obr. 4.1.3.1: Počiatočná inicializácia vektorového poľa a výsledné skonvergované pole

4.1.4 Gule s rôznym stredom a rôznym polomerom - pretínajúce sa

V poslednom pokuse, v ktorom sme použili ako testovací povrch guľu sme zvolili ich polohu tak, aby sa časťami povrchov pretínali. Registrovali sme menšiu so stredom v bode $(0.50, 0.50, 0.35)$ a polomerom 0.15 do väčšej so stredom v bode $(0.50, 0.50, 0.65)$ a polomerom 0.25. Ako môžeme vidieť na obrázkoch 4.1.4.1 a 4.1.4.2, pole znázorňuje transformáciu veľmi presne.



Obr. 4.1.4.1: Inicializácia vektorového poľa



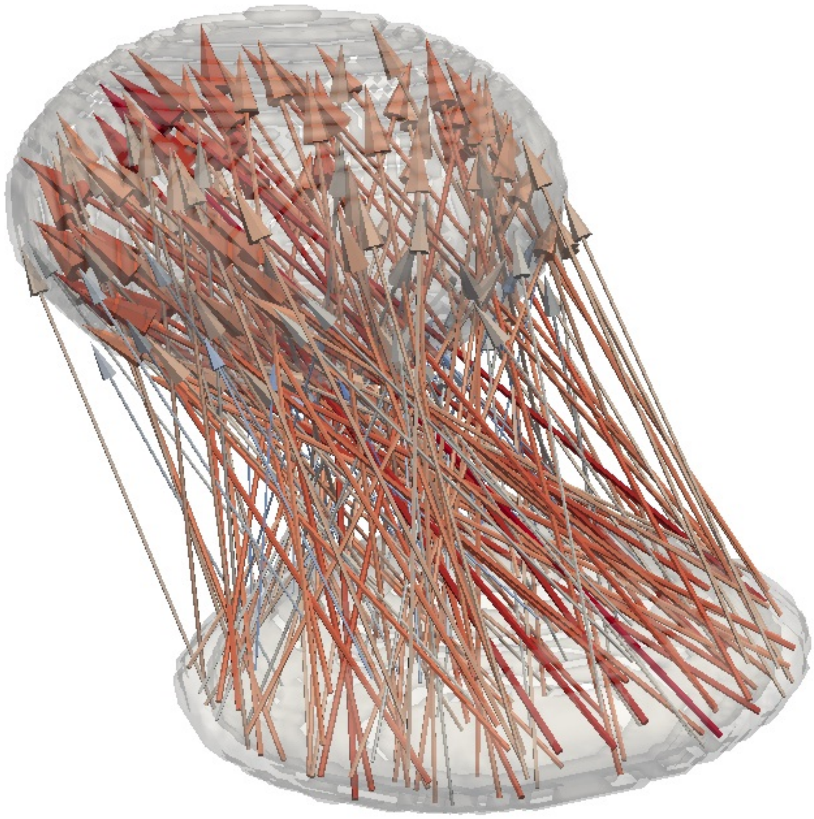
Obr. 4.1.4.2: Vysledné pole dvoch pretínajúcich sa gúľ

4.2 Registrácia dvoch elipsoidov

Ako ďalší príklad sme si zobrali dva odlišné elipsoidy v rôznych polohách. Pri registrácii dvoch elipsoidov ale zisťujeme, že pri takto nejednoznačných tvaroch metóda nefunguje úplne presne. Preto je dôležité v niektorých prípadoch niektoré z bodov, o ktorých s istotu vieme, že sú výsledným zobrazením zo zdrojového povrchu do cieľového, priradiť polohu napevno hneď od začiatku algoritmu.

4.2.1 Elipsoidy - nepretínajúce sa

Máme dva elipsoidy, povrch elipsoidu A vyjadrený rovnicou $(\frac{x-0.7}{2})^2+(\frac{x-0.5}{2})^2+(\frac{x-0.3}{0.75})^2=0.1^2$ a povrch B vyjadrený rovnicou $(\frac{x-0.5}{1.5})^2+(\frac{x-0.4}{1.5})^2+(\frac{x-0.65}{1})^2=0.15^2$. Registráciu robíme z povrchu A do povrchu B. Algoritmus na vykonanie registrácie potrebuje 56 iterecií.

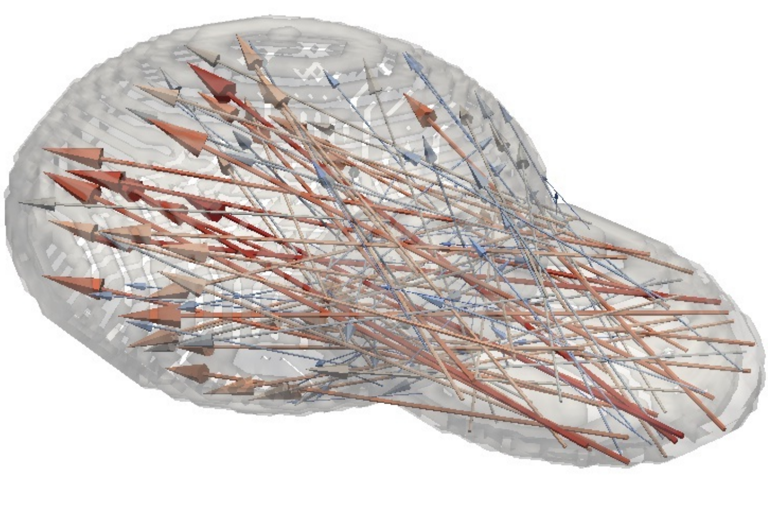


Obr. 4.2.1.1 Inicializácia vektorov dvoch elipsoidov

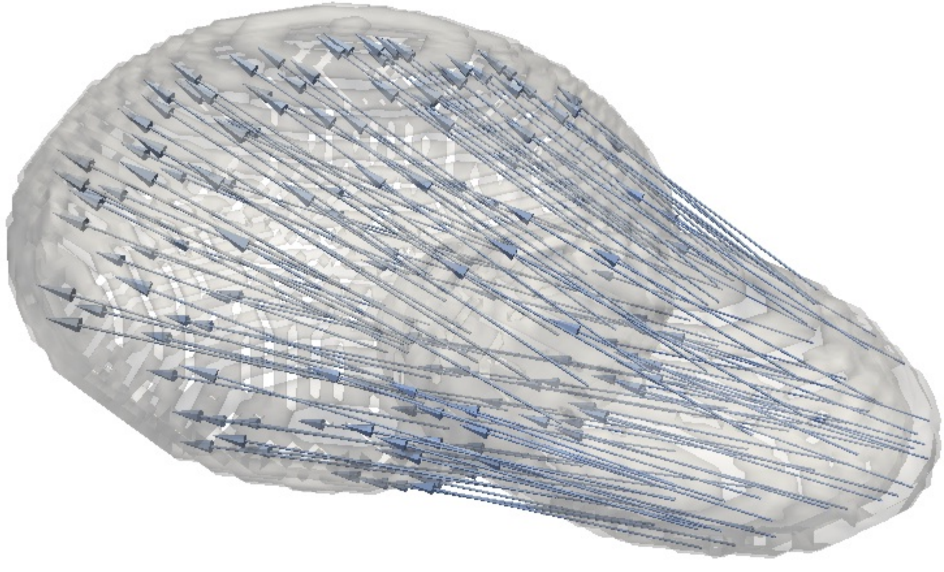
Obr. 4.2.1.2 Výsledné vektorové pole dvoch nepretínajúcich sa elipsoidov

4.2.2 Elipsoidy - pretínajúce sa

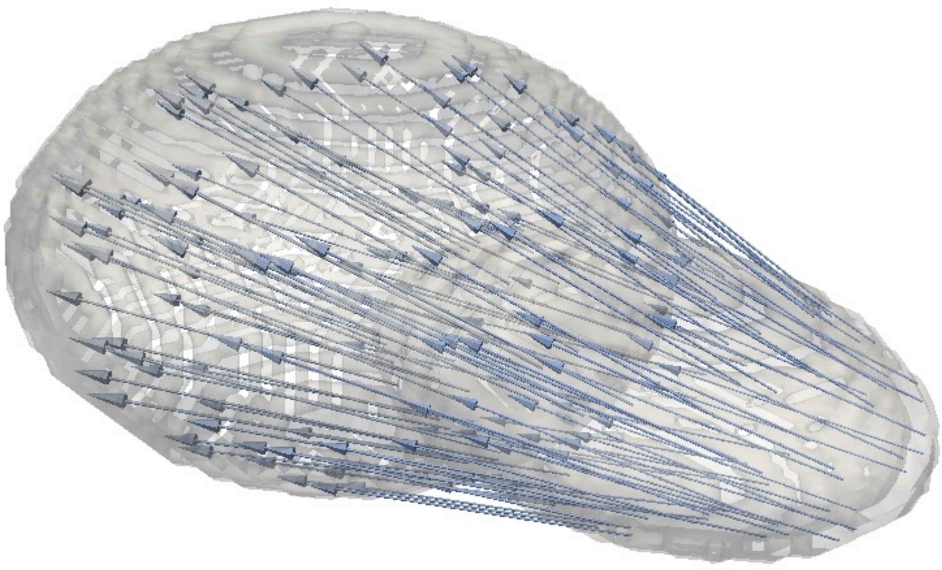
V druhom experimente s elipsami sme si zvolili povrchy nasledovne: povrch A vyjadrený rovnicou $(\frac{x-0.7}{2})^2 + (\frac{x-0.5}{1.5})^2 + (\frac{x-0.5}{0.75})^2 = 0.1^2$ a povrch B vyjadrený rovnicou $(\frac{x-0.5}{1.5})^2 + (\frac{x-0.4}{1.5})^2 + (\frac{x-0.55}{1})^2 = 0.15^2$. Na obr. 5.2.2.1 vidíme pole po inicializácií. Pre úplnosť si ukážeme aj pole po 12. iteráciach. Ako môžme vidieť na obr. 5.2.2.2, pole v tomto štádiu už veľmi pekne popisuje transformáciu. V ďalších iteráciách sa už iba dorovnávajú nepresnosti. Na splnenie konvergenčnej pomienky (32) je ale pre $\varepsilon = 0.001$ potrebných až 91 iterácií.



Obr. 4.2.2.1 Inicializácia vektorového poľa



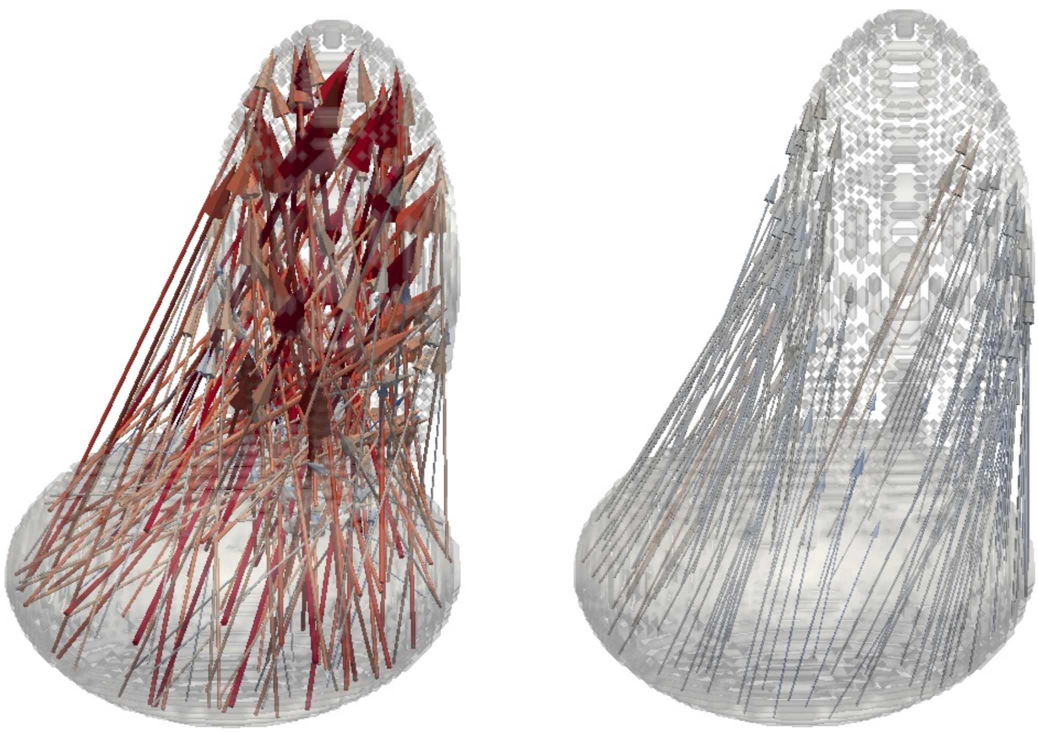
Obr. 4.2.2.2 Vektorové pole po 12. iterácii



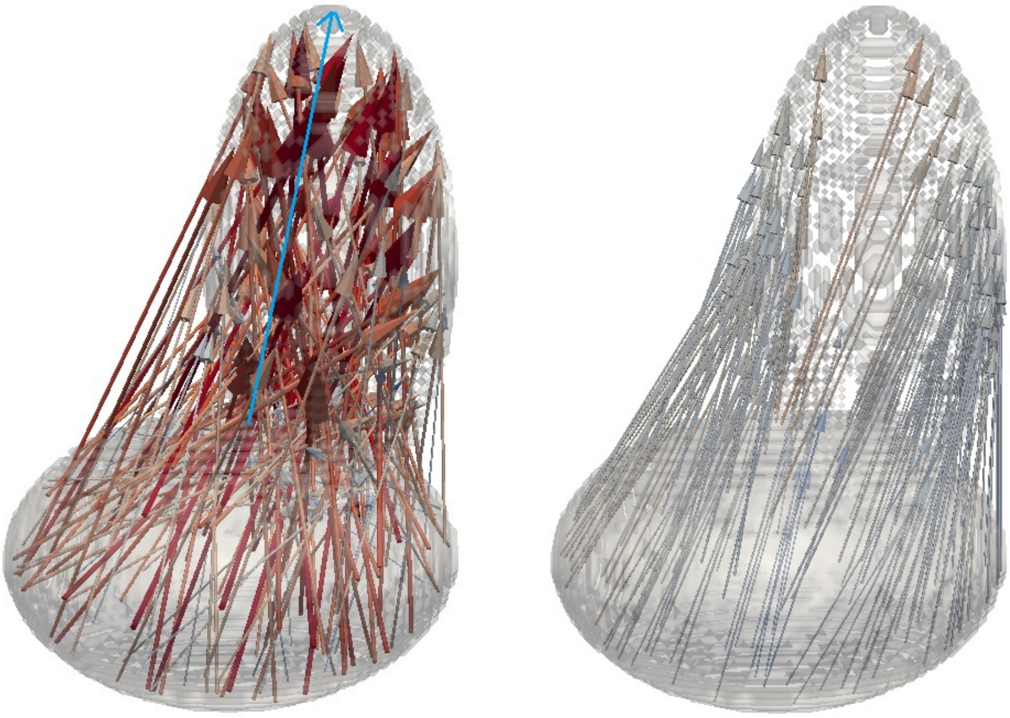
Obr. 4.2.2.3 Vektorové pole po 91. iterácii

4.2.3 Elipsoidy - výraznejšia deformácia

Ako posledný pokus sme si zvolili polohu elipsoidov, v ktorom je transformácia viac nejednoznačná. Plochy týchto dvoch elipsoidov sa pretínajú a čo sa týka ich tvaru a otočenia, sú značne odlišné. V prvom experimente s tymito plochami som algoritmus nechal prebehnút len s klasickými počiatočnými podmienkami bez ďalšieho fixného mapovania bodov. Vzniktnuté výsledné pole, ktoré vidíme na obrázku 4.2.3.2 zjavne nereprezentuje registráciu presne. Ako už bolo spomenuté v kapitole 3.1, niekedy treba namapovať význačné body pre dané plochy manuálne. Na obr. 4.2.3.2 je znázornené, ktorá dvojica bodov bola spárovaná manuálne a výsledná registrácia s takto určenými počiatočnými podmienkami. Z obrázku vidíme, že vhodne zvolená počiatočná podmienka nám výsledné pole reprezentujúce registráciu upresní.



Obr. 4.2.3.1 Inicializácia vektorového poľa a registrácia bez manuálneho fixovania bodov



Obr. 4.2.3.2 Počiatočné vektorové pole s upravenou počiatočnou podminkou (fixne spárovaná dvojica bodov) a výsledná registrácia s takto zvolenou počiatočnou podmienkou

5 Záver

V prvej časti práce sme sa do hĺbky oboznámili s problematikou registrácie 3D povrchov. Opísali sme si rôzne typy transformácií a prípady ich využitia. Vysvetlili sme si metódu difúzie obmedzenej geometriou, jej hlavnú myšlienku a matematickú formuláciu. Následne sme si popísali algoritmus a spôsob jeho implementácie sme zhrnuli do štyroch bodov. V praktickej časti sme následne v jazyku C úspešne implementovali metódu geometriou obmedzenej difúzie a na jednoduchých príkladoch sme skúšali funkčnosť metódy, predviedli jej použitie, klady, ale aj jej nedostatky. Zistili sme, že metóda je presná pri malých deformáciách, resp. posunutiach, no pri dôkladnejšom testovaní sme narazili na problém, keď v prípade väčšej neprirodzenejšej deformácií k úplne presnému riešeniu nepomohlo ani fixné spárovanie niektorých predom známych bodov. Práve prípady takýchto neprirodzených deformácií môže byť objektom ďalšieho skúmania v budúcnosti.

Zoznam použitej literatúry:

[1] Arun, K.S., Huang, T.S. & Blostein, S.D.(1987), Least-squares Fitting of Two 3-D Point Sets, IEEE Trans. PAMI, Vol. 9, No. 5, s. 698-700

[2] Coppini, G. et al. (1987), Tensor Description of 3D Time Varying Surfaces Using Scattered Landmarks: an Application to Heart Motion, in Time-Varying Image Processing and Moving Object Recognition, ed. Cappellini, V., North-Holland, s. 158-163.

[3] Foley, J.D. et al. (1990), Computer Graphics- Principles and Practice, Addison-Wesley.

[4] Lavallée S. (1996), Registration for Computer-Integrated Surgery: Methodology, State of the Art, Computer-Integrated Surgery - Technology and Clinical Applications, ed. Taylor, R.H., Lavallee, S., Burdea, G.C., & Mosges, R., MIT Press, s. 77-97.

[5] Michel A. Audette, Frank P. Ferrie, Terry M. Peters: An algorithmic overview of surface registration techniques for medical imaging, Medical Image Analysis Volume 4, Issue 3, September 2000, s. 201-217

[6] M. Remešíková: Krivky a plochy, Prednášky z počítačovej grafiky, s. 22-23

[7] Per Rønsholt Andresen, Mads Nielsen: Non-rigid Registration by Geometry-Constrained Diffusion, Medical Image Analysis 5 (2001), s. 81-88

[8] http://www.vtk.org/VTK/img/file-formats.pdf