

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
STAVEBNÁ FAKULTA

SvF-5342-67743

MOŽNOSTI MODELOVANIA GEODYNAMICKÝCH
PROCESOV ZEME V PROSTREDÍ ANSYS

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	matematicko-počítačové modelovanie
Číslo študijného odboru:	1114
Názov študijného odboru:	9.1.9 aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Vedúci záverečnej práce/školiťel':	Ing. Zuzana Minarechová, PhD.

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som prácu vypracoval samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

V Bratislave, 18.5.2012

.....

Pod'akovanie

Chcel by som pod'akovať Ing. Zuzane Minarechovej, PhD. za cenné rady, vecné pripomienky a odborné konzultácie počas vypracovania tejto práce.

Súhrn

Práca sa zaoberá možnosťami modelovania geodynamických procesov v prostredí ANSYS. Teoretická časť pojednáva o platňovej tektonike, príčinách pohybu litosferických platní a ich dôsledkoch, a tiež spôsoboch merania ich pohybu. Ďalej popisuje základy teórie pružnosti, odvádza Lamého rovnice elasticity, ktoré teoreticky rieši pomocou metódy konečných prvkov. Praktická časť je venovaná štyrom experimentom: (A) globálny experiment - výpočet zložiek tenzora napätí na celom povrchu Zeme pri diskretizácii zemského povrchu $1^\circ \times 1^\circ$, (B) lokálne experimenty - výpočet zložiek tenzora napätí vo vybraných oblastiach s výraznou tektonickou činnosťou pri diskretizácii $0.125^\circ \times 0.125^\circ$, (C) regionálny experiment - výpočet zložiek tenzora napätí v oblasti Himalájí s využitím reálnej topografie a rozdielnych materiálov, diskretizácia $0.05^\circ \times 0.05^\circ$, (D) simulácia pohybu litosferických platní a kontinentov na najbližších niekoľko rokov. Výpočtová oblasť je priestor zhora ohraničený sférou s polomerom 6371 km (Exp. A, B, D), resp. množinou trojuholníkov aproximujúcich zemský povrch (Exp. C) a zdola ohraničený sférou s polomerom 6300 km (Exp. A, B, D), resp. množinou trojuholníkov aproximujúcich reálny priebeh MOHO plochy (Exp. C). Na hornej hranici sú aplikované Dirichletove okrajové podmienky vo forme 3D posunov získaných z modelu globálnych rýchlostí HS3-NUVEL1A. V práci je tiež uvedený spôsob získania a spracovania vstupných údajov pre všetky experimenty a ich implementácia do konečno-prvkového softvéru ANSYS. Táto oblasť je následne diskretizovaná pomocou 3D lineárnych elementov SOLID185. Výstupom sú jednotlivé zložky tenzora napätí, ktoré sú vizualizované v programe Surfer a ANSYS.

Kľúčové slová

Metóda konečných prvkov, ANSYS, Lamého rovnice 3D elasticity, pohyb litosferických platní.

Abstract

The thesis deals with the possibilities of geodynamical modeling in ANSYS software. The theoretical part discusses the plate motions, their causes and consequences, and the methods of their detection. Furthermore, it presents the basics of elasticity theory with the derivation of Lamé's equations of 3D elasticity and their theoretical solution by the finite element method. The practical part is dedicated to four experiments: (A) global numerical experiment – computation of components of the stress tensor with the discretization of the Earth's surface $1^\circ \times 1^\circ$, (B) local numerical experiments in different parts of the world with high plate tectonic movements, discretization of the Earth's surface $0.125^\circ \times 0.125^\circ$, (C) regional numerical experiments – computation of components of the stress tensor in the area of Himalaya with taking into account the real Earth's surface as well as the different depth of Earth's crust, discretization $0.05^\circ \times 0.05^\circ$, (D) plate motion simulation for the following years. The computational domain is a space bounded by the upper sphere with radius 6371 km (Exp. A, B, D) or by series of triangles approximating the Earth's surface (Exp. C), and by lower sphere with radius 6300 km (Exp. A, B, D) or by series of triangles approximating the MOHO surface (Exp. C). On the upper boundary the Dirichlet boundary condition in the form of 3D displacements generated from tectonic model HS3-NUVEL1A is applied. Then the preprocessing of input data for all experiments and its implementation into finite-element software ANSYS are described. The computational domain is meshed by 3D linear solid elements SOLID185. Results in the form of components of stress tensor are visualized in Surfer and ANSYS software.

Keywords

Finite element method, ANSYS, Lamé's equations of 3D elasticity, plate motion.

Obsah

Úvod.....	1
1. Platňová tektonika	1
2. Príčiny tektonických pohybov	2
2.1. Druhy tektonických pohybov	2
2.2. Druhy tektonických deformácií	2
2.3. Tektonické poruchy hornín	3
3. Metódy merania pohybu tektonických platní.....	4
3.1. NAVSTAR GPS	4
3.2. SLR	5
3.3. VLBI	5
4. Základy teórie pružnosti.....	6
5. Metóda konečných prvkov	10
5.1. Diskretizácia výpočtovej oblasti na elementy Ω^e	10
5.2. Zostrojenie slabej formulácie diferenciálnej rovnice na jednom elemente.....	11
5.3. Zostrojenie aproximačných funkcií na elemente.....	11
5.4. Vytvorenie rovníc na elemente.....	11
5.5. Spojenie elementových rovníc do globálneho systému a jeho riešenie.....	12
6. Numerické experimenty v prostredí ANSYS.....	13
6.1. HS3-NUVEL1	13
6.2. Získanie a spracovanie vstupných údajov a ich implementácia do prostredia ANSYS .	13
6.3. Globálny numerický experiment	14
6.3.1. Zobrazenie tektoniky globálneho experimentu a zhodnotenie výsledkov.....	15
6.4. Lokálne numerické experimenty	21
6.4.1. Filipínska platňa a okolie, zobrazenie tektoniky a zhodnotenie výsledkov	21
6.4.2. Indonézia a okolie, zobrazenie tektoniky a zhodnotenie výsledkov.....	25
6.4.3. USA, Stredná Amerika a západné pobrežie Južnej Ameriky, zobrazenie tektoniky a zhodnotenie výsledkov.	28
6.5. Regionálny numerický experiment v oblasti Himalájí	32
6.5.1. Zobrazenie tektoniky regionálneho experimentu a zhodnotenie výsledkov	34
6.6. Simulácia pohybu litosférických dosiek	37
Zoznam použitej literatúry	40
Zoznam príloh	41

Úvod

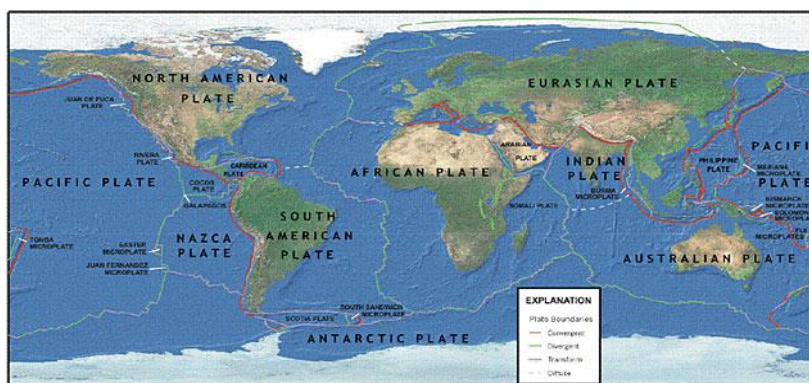
Aj napriek tomu, že sa nám Zem zdá pevná a nemenná, prebieha v nej množstvo dynamických procesov. Geodynamika ako odbor geofyziky sa zaoberá skúmaním a modelovaním týchto procesov. Na modelovanie dôsledkov týchto procesov sa využívajú poznatky z geológie, geodézie, seizmológie. Ako vstupné údaje sa pri spracovaní využívajú geodetické dáta z meracích staníc a pri riešení geodynamických modelov sa aplikujú aj numerické metódy. V práci sa zaoberám modelovaním tektonických procesov v zemskej kôre. Teoretickým základom pre riešenie tejto problematiky sú poznatky z teórie pružnosti a metódy konečných prvkov. Taktiež sa zaoberám platňovou tektonikou a metódami merania tektonických pohybov a spracovaním týchto meraní. Ako vstupné údaje pre okrajové podmienky používam veľkosti vektorov posunutí vygenerované z modelu globálnych rýchlostí HS3-NUVEL 1A. Na riešenie využívam inžiniersky simulačný softvér ANSYS a výsledky zobrazujem v softvéri Surfer. Výsledky tejto práce čerpajú a nadväzujú na výsledky bakalárskej práce Martina Gašparoviča [14] a Kataríny Boudovej [15].

1. Platňová tektonika

Model vnútorného zloženia Zeme bol zostrojený najmä na základe štúdia seizmických vln. Výskumom sa dospelo k trojdielnemu modelu stavby. Zem je zložená zo zemskej kôry, zemského plášťa a zemského jadra.

Kontinenty a morské dno sa nachádzajú na najvrchnejšej vrstve Zeme, na zemskej kôre. Tá je v porovnaní s celkovým polomerom Zeme veľmi tenká, dosahuje hrúbku 30 až 100 km. Podľa hrúbky a zloženia rozdeľujeme zemskú kôru na kontinentálnu, oceánsku a prechodovú. Kontinentálna kôra je tá časť zemskej kôry, na ktorej sa nachádzajú kontinenty, šelfy a upätia kontinentálnych svahoch v oceánoch. Táto vrstva dosahuje hrúbku od 25 do 70 km. Oceánska kôra, je časť zemskej kôry, ktorá sa nachádza pod oceánmi. Jej hrúbka je v porovnaní s kontinentálnou kôrou menšia, dosahuje hrúbku od 5 do 10 km. Prechodová kôra sa nachádza zväčša na okrajoch kontinentov a označuje sa aj ako andezitová kôra. V spodnej časti je zemská kôra od zemského plášťa oddelená Mohorovičičovou plochou diskontinua.

V hornej časti zemského plášťa sa nachádza astenosféra. Najvyššiu časť zemského plášťa, ktorá sa nachádza nad astenosférou spolu so zemskou kôrou nazývame litosféra. Jej hrúbka je na kontinentoch od 100 do 150 km a pod oceánmi do 100 km. Je rozdelená do litosferických dosiek (Obr. 1). Litosferické dosky tvorí buď samotná oceánska kôra, alebo oceánska spolu s kontinentálnou a prechodovou [3].

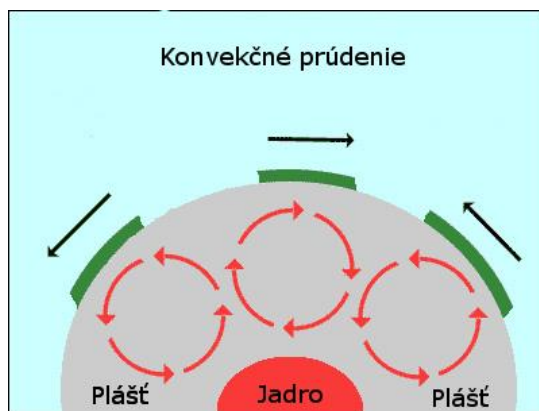


Obr. 1: Litosferické platne

2. Príčiny tektonických pohybov

Prejavy vnútorných síl Zeme vnímame v podobe tektonických pohybov. Teória globálnej tektoniky vychádza zo skutočnosti, že litosféra je tvorená niekoľkými litosferickými platňami, ktoré sa pomalým pohybom presúvajú. Pohyb platní je umožnený existenciou zóny zníženej viskozity, astenosféry, na ktorej sa litosferické platne nachádzajú. Plastický stav hmoty astenosféry umožňuje vznik konvekčných prúdov, ktoré vznikajú v dôsledku teplotných rozdielov. Tieto prúdy spôsobujú pohyb litosferických dosiek.

Termálne konvekčné prúdenie je proces, pri ktorom zo zemského plášťa vystupuje horúci (ľahší) materiál, ktorý pri postupnom výstupe do astenosféry chladne a klesá naspäť. Dôsledku trenia medzi astenosférou a zemskou kôrou je spolu s pohybom hmôt unášaná aj litosferická doska (Obr. 2). Súčasne rozmiestnenie platní je výsledkom mnohonásobného rozdelenia a opätovného spájania rôznych platní v minulosti [3].



Obr. 2: Konvekčné prúdenie

2.1. Druhy tektonických pohybov

Tektonické pohyby, ku ktorým na povrchu Zeme dochádza, vieme rozdeliť na epeirogenetické (pevninotvorné) a orogenické (horotvorné) pohyby.

Epeirogenetické pohyby sú dlhotrvajúce vertikálne pohyby litosferických dosiek. Pri týchto pohyboch nevznikajú tektonické zlomy. Najjednoduchšími typmi týchto vertikálnych pohybov sú stúpania a klesania. Pozorovateľné sú hlavne v prímorských oblastiach, kde vyvolávajú opakovane transgresiu (zvyšovanie hladiny morí) a následne sedimentáciu a regresiu (ústup mora, znižovanie hladiny) plytkých morí.

Orogenické pohyby predstavujú horizontálne pohyby litosferických dosiek. Na rozdiel od epeirogenetických pohybov spôsobujú výrazné deformácie prejavujúce sa napríklad vo forme zlomov a vrásou. Tieto pohyby sú predovšetkým spojené so subdukciou a kolíziou [3].

2.2. Druhy tektonických deformácií

Deformácie globálneho charakteru vieme podľa charakteru hraníc tektonických platní rozdeliť na riftové zóny, subdukčné zóny, kolízne zóny a transformné zlomy (Obr. 3).

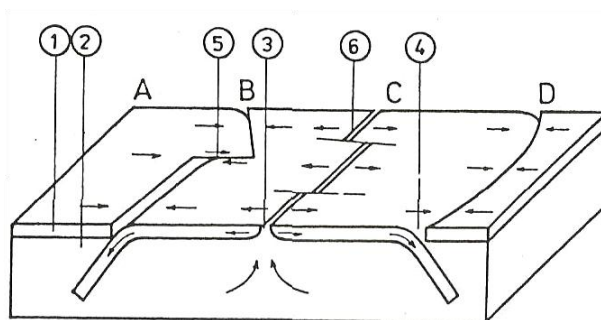
Riftové zóny sú prejavom ťahovej tektoniky. Sú charakterizované rozsiahlymi trhlinami, ktoré vznikajú v dôsledku pôsobenia konvekčných prúdov. V osi ťahu vzniká ťahové napätie, stený divergujú (oddľahujú sa) a to umožňuje vniknutie lávy z vyšších častí zemského plášťa. Tá

následne chladne a formuje rozsiahle podmorské chrbty. Najznámejší je Atlantický oceánsky chrbát s priemernou výškou 3km.

Subdukčné zóny predstavujú styk tektonických platní, pri ktorom konvekčné prúdy spôsobujú pohyb týchto platní proti sebe, pričom jedna platňa sa podsúva pod druhú a vniká do zemského plášťa. Tam dochádza k taveniu hmoty platne v dôsledku teploty, ktorá vznikla trením. Vznikajú tak magmatické krby, ktoré sú zdrojom vulkanickej činnosti v subdukčnej zóne.

Kolízne zóny vznikajú pri konvergencii (zrážke) dvoch litosferických dosiek pri ich pohybe. Pri dlhšie pôsobiacom a pomalšom náraze sú okraje platní deformované do formy horských pásiem. Veľká časť vrásových pásmových pohorí ako sú Himaláje alebo Alpy sa nachádzajú práve v týchto zónach.

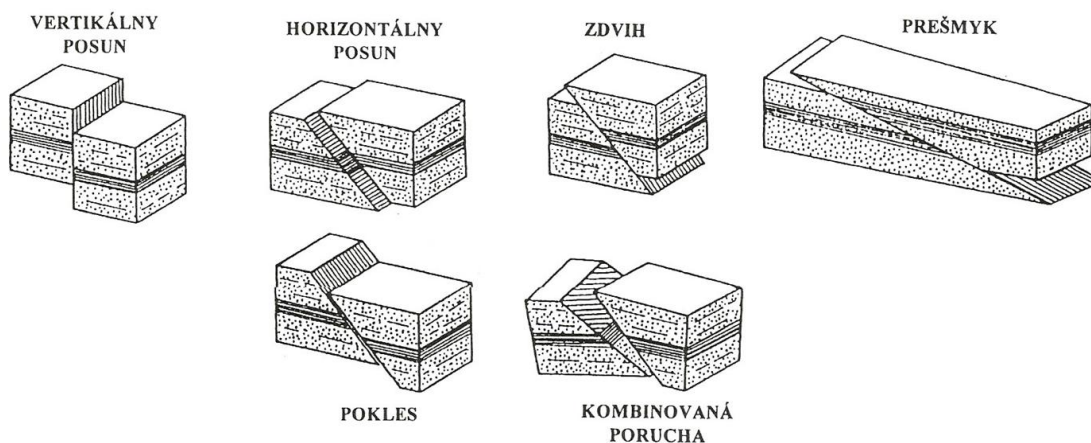
Transformné zlomy sú výsledkom horizontálnych posunov platní, ktoré sa popri sebe kľžu v rôznych smeroch. Väčšinou sú kolmo orientované na oceánske chrbty. Najznámejší transformačný zlom je San Andreas, ktorý vykazuje pohyb až 5 cm za rok.



Obr. 3: Základné typy deformácií globálneho charakteru: 1 – litosferické platne (A,B,C,D), 2 – astenosféra, 3 – riftová zóna, 4 – subdukčná zóna, 5,6 – transformné zlomy

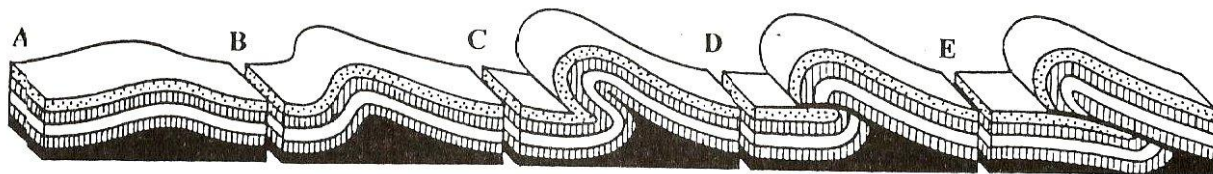
2.3. Tektonické poruchy hornín

Ak pri tektonických pohyboch nastávajú zmeny pôvodného uloženia hornín, nazývame tieto zmeny tektonickými poruchami. Podľa mechanického vývoja ich delíme na poruchy so zlomom, pri ktorých nastáva prerušenie súvislosti vrstvy a poruchy bez zlomov, pri ktorých horniny reagovali na tlak plasticky [3].



Obr. 4: Poruchy so zlomom

Poruchy so zlomom sú zmeny v horninách, pri ktorých nastáva narušenie kontinua v horninovom prostredí. Ťahovými, tlakovými a šmykovými silami nastáva porušenie celistvosti hornín. Najzákladnejším typom zlomových porúch sú vertikálne a horizontálne posuny, prešmyky, zdvihy, poklesy alebo kombinácie predchádzajúcich (Obr. 4).



Obr. 5: Poruchy bez zlomu – Jednoduchá vrása, (A) flexúra (ohyb horniny) sa mení na asymetrickú antiklinálu (B), znej sa môže vyvinúť ležatá vrása (C). Ak naďalej pôsobí tlak, vrstvy sa stenšia, až sa pretrhnú a vzniká vrásový priešmyk (D) a vrásový príkrov (E).

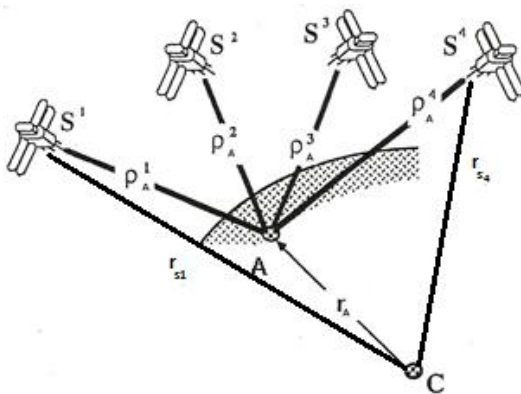
Poruchy bez zlomu sú zmeny, pri ktorých nenastáva narušenie kontinua, ale iba jeho deformácia. Základným tvarom porúch bez zlomu sú flexúry a vrásky. Pôsobením intenzívneho tlaku na flexúry vznikajú vrásky a z nich môžu vznikať vrásové prešmyky a príkrovy (Obr. 5).

3. Metódy merania pohybu tektonických platní

Na meranie pohybu tektonických platní sa z metód družicovej a kozmickej geodézie najčastejšie používajú metódy merania pomocou NAVSTAR GPS, SLR, VLBI a DORIS.

3.1. NAVSTAR GPS

NAVSTAR GPS (NAVigation System with Time and Ranging Global Positioning System) je navigačný systém na báze umelých družíc Zeme, ktorý poskytuje určovanie polohy na zemskom povrchu. Princíp metódy merania pomocou NAVSTAR GPS spočíva v spojitom prijímaní signálu z minimálne štyroch družíc, ktorých poloha je známa (Obr. 6). Takto sme schopní vo všeobecnosti určiť priestorovú polohu bodu t.j. x, y, z v čase t v systéme WGS84 (World Geodetic System 1984). Ak je tento príjem signálu dostatočne silný a spojitý (pri epochových meraniach napríklad opakovane niekoľko týždňov za rok resp. pri permanentných meraniach nepretržite), výsledky týchto meraní môžu byť použité aj na sledovanie globálnych pohybov platní [6].



Obr. 6: Určovanie absolútnej polohy pomocou GPS satelitov.

3.2. SLR

Ďalšou meracou technikou, ktorá svojou presnosťou spĺňa požiadavky na určovanie geodynamických pohybov je SLR (Satellite Laser Ranging, resp. Laserová lokácia družice). Princíp metódy merania pomocou SLR spočíva vo využívaní špeciálnych družíc s laserovými odrážачmi - LAGEOS (LAsEr GEODynamic Satellite, Obr. 7), ktorých poloha je v priestore známa. Z povrchu Zeme sa vyšle laserový lúč, ktorý sa odrazí od družice a následne prijme. Dĺžka zmeraného časového intervalu sa potom prepočíta na vzdialenosť.



Obr. 7: Družica LAGEOS, ktorá sa využíva pri meraní pomocou SLR

3.3. VLBI

Princíp VLBI (Very Long Baseline Interferometry, resp. Interferometria z veľmi dlhej základnice) spočíva v odmeraní časového rozdielu medzi príjmom identického pozorovaného signálu zo silných rádiových extragalaktických zdrojov (napr. kvazarov a pulzarov) v dvoch pozorovacích miestach vzdialených od seba. Táto metóda využíva špeciálne prijímače, na Obr.8 je znázornený 26 metrov vysoký VLBI prijímač observatória na Mount Pleasant v Austrálii.

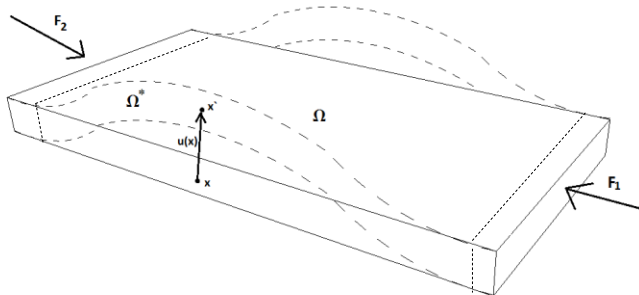


Obr. 8: VLBI prijímač na Mount Pleasant v Austrálii.

4. Základy teórie pružnosti

Teleso je ohraničená súvislá oblasť Ω ($\Omega \in \mathbb{R}^3$), ktorej objem je spojito vyplnený nekonečným počtom elementárnych objemov V ($V \subset \Omega$). Ak je toto teleso vplyvom zaťažujúcich síl schopné deformácie, nazývame ho poddajným telesom [9].

Teória pružnosti sa zaoberá rovnováhou poddajného telesa a skúma vplyv zaťažujúcich síl na dané poddajné teleso. Sily, ktoré spôsobia deformáciu, majú za dôsledok zmenu polohy bodov telesa (Obr. 9).



Obr. 9: Účinok pôsobiacich síl na teleso Ω a jeho následná deformácia

Teleso Ω sa deformáciou zmení na Ω^* , pričom ľubovoľný bod $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ prejde do bodu $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) \in \Omega^*$. Túto zmenu polohy vieme vyjadriť pomocou vektora posunutia $\vec{u}(x) = (u_1, u_2, u_3)$, pričom platí

$$\vec{x}^* = \vec{x} + \vec{u}(x). \quad (1)$$

Túto zmenu polohy bodov vieme vyjadriť aj v tvare

$$F = \frac{S \cdot E}{l} \cdot \Delta l, \quad (2)$$

kde F je sila deformujúca teleso, S je obsah jeho prierezu, l pôvodná dĺžka telesa, Δl predĺženie telesa a E Youngov modul pružnosti. Tento vzťah nazývame Hookov zákon [4].

Vyberieme ľubovoľný elementárny objem $V \subset \Omega$. Sily pôsobiace na daný objem vieme rozdeliť na objemové $F(x)$ a povrchové sily $f(x, \vec{n})$. Nech

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x), F_3(x)), \quad (3)$$

predstavuje intenzitu objemovej sily pôsobiacej na teleso. Potom celková objemová sila pôsobiaca na objem V je daná vzťahom

$$\int_V F(x) d\Omega = \left(\int_V F_1(x) dx, \int_V F_2(x) dx, \int_V F_3(x) dx \right). \quad (4)$$

Povrchovými silami nazývame tie sily, ktorými pôsobí zvyšok telesa $(\Omega - V)$ na vybraný elementárny objem V . Ak intenzitu povrchových síl označíme

$$f(x, \vec{n}) = (f_1(x, \vec{n}), f_2(x, \vec{n}), f_3(x, \vec{n})), \quad (5)$$

potom pre celkovú povrchovú silu pôsobiacu na V platí

$$\int_{\partial V} f(x, \vec{n}) dS, \quad (6)$$

kde $f(x, \vec{n})$ nám vyjadruje aj všeobecný vektor napätí v bode x a $\vec{n}$ je jednotkový vektor vonkajšej normály k povrchu elementárneho objemu ∂V .

V každom telese musí platiť podmienka rovnováhy síl, takže súčet celkovej objemovej a celkovej povrchovej sily musí byť nulový, teda

$$\int_V F(x) dx + \int_{\partial V} f(x, \vec{n}) dS = 0. \quad (7)$$

Intenzitu povrchovej sily t.j. všeobecný vektor napätí vieme vyjadriť ako lineárnu kombináciou zložiek tenzora napätia T_1, T_2, T_3 , takých, že

$$T_i = \begin{pmatrix} \tau_{1i} \\ \tau_{2i} \\ \tau_{3i} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (8)$$

ktoré sú v bode x uvažované vzhľadom na roviny kolmé na súradnicové osi, takže zložky intenzity povrchovej sily vieme zapísať ako

$$f_i(x, \vec{n}) = \tau_{1i}n_1 + \tau_{2i}n_2 + \tau_{3i}n_3, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9)$$

alebo v tvare

$$f(x, \vec{n}) = T \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

kde T , tenzor napätia, je matica

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Zložky na diagonále τ_{ij} , kde $i = j$, predstavujú normálové napätia, ktoré spôsobujú ťah a tlak, zložky τ_{ij} , kde $i \neq j$, predstavujú tangenciálne zložky, taktiež ich nazývame aj šmykové napätia, pretože spôsobujú šmyk [9].

Dosadením (8) do rovnice rovnováhy síl (6) zapísanej po zložkách, dostávame

$$\int_V F_i(x) dx + \int_{\partial V} \tau_{1i} n_1 + \tau_{2i} n_2 + \tau_{3i} n_3 dS = 0, \quad i = 1,2,3, \quad (12)$$

čo vieme vyjadriť ako

$$\int_V F_i(x) dx + \int_{\partial V} T^i \vec{n} dS = 0, \quad i = 1,2,3. \quad (13)$$

Použijeme Greenovu vetu a dostávame rovnice v tvare

$$\int_V F_i(x) dx + \int_V \operatorname{div} T^i dx = 0, \quad i = 1,2,3, \quad (14)$$

čo vieme upraviť do tvaru

$$\int_V F_i(x) + \operatorname{div} T^i dx = 0, \quad i = 1,2,3. \quad (15)$$

Keďže je tento integrál nulový musí platiť, že

$$F_i(x) + \frac{\partial \tau_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{3i}}{\partial x_3} = 0, \quad i = 1,2,3. \quad (16)$$

Tým sme získali princíp rovnováhy v diferenciálnom tvare. Aby rovnica bola rovnicou pre posunutia $\vec{u}(x)$, musíme mať vzťah medzi tenzorom napätí a posunutím. Tento vzťah sa nazýva všeobecný tvar Hookovho zákona, ktorý je daný

$$\tau_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j = 1,2,3, \quad (17)$$

kde ε_{kl} sú zložky tenzora pomerných deformácií

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}, \text{ pričom } \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right), \quad k, l = 1,2,3, \quad (18)$$

a koeficienty a_{ijkl} vyjadrujú tenzor pružnosti.

Pre homogénne a izotropné teleso platí Hookov zákon v tvare

$$\tau_{ii} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{ii}, \quad i = 1,2,3, \quad (19)$$

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1,2,3, \quad (20)$$

po úprave

$$\tau_{ii} = \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (21)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (22)$$

kde λ a μ sú nezávislé Lamého konštanty elasticity. Vieme ich vyjadriť vzt'ahmi

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}, \quad \lambda = \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}. \quad (23)$$

Konštantu E nazývame Youngov modul pružnosti a $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ Poissonovo číslo [4,9].

Vyjadrenia pre zložky tenzora napätí (20) a (21) dosadíme do rovnice rovnováhy v diferenciálnom tvare a vyjadríme si rovnicu pre jeden smer

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right] + \frac{\partial}{\partial x_2} \left[\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\mu \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \right] + F_1(x) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Upravením dostaneme

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + F_1(x) = 0, \quad (25)$$

analogicky pre ostatne smery dostávame rovnice

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) + F_2(x) = 0, \quad (26)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + F_3(x) = 0. \quad (27)$$

Z rovníc dostávame Lamého rovnice elasticity, ktoré vieme zapísať ako

$$-(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{u}) - \mu \Delta u_i = F_i(x) \quad i = 1, 2, 3, \quad (28)$$

a vo vektorovom tvare ako

$$-(\lambda + \mu) \nabla (\operatorname{div} \vec{u}) - \mu \Delta \vec{u} = F(x). \quad (29)$$

5. Metóda konečných prvkov

Metóda konečných prvkov (MKP) je jednou z najrozšírenejších numerických metód matematiky, ktorá sa využíva na riešenie úloh pružnosti a pevnosti, dynamiky poddajných telies, prenosu tepla, prúdenia tekutín, elektromagnetizmu a mnohých ďalších inžinierskych problémov. Moderné programové systémy využívajúce stále väčšie možnosti výpočtovej techniky dovoľujú riešenie aj veľmi zložitých úloh pomocou MKP.

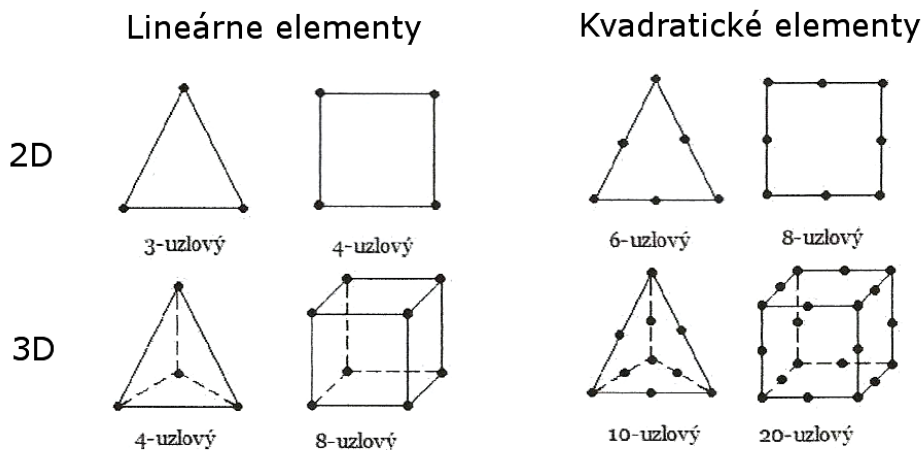
Základná myšlienka MKP je jednoduchá. Oblasť rozdelíme na podoblasti nazývané konečné prvky. V rámci každého konečného prvku hľadanú funkciu aproximujeme vhodne zvolenou funkciou jednoznačne definovanou hodnotami funkcie v pevne zvolených bodoch tzv. uzloch. Namiesto hľadania funkcie, čo je u zložitých úloh prakticky nemožné, hľadáme už len jej hodnoty v uzloch.

Algoritmus MKP vieme zapísať v týchto bodoch [10]:

1. Diskretizácia výpočtovej oblasti na elementy
2. Zostrojenie elementovej sústavy rovníc
 - a. zostrojenie slabej formulácie diferenciálnej rovnice na jednom elemente
 - b. zostrojenie aproximačných funkcií na elemente
 - c. vytvorenie rovníc na elemente
3. Spojenie elementových rovníc do globálneho systému a jeho riešenie

5.1. Diskretizácia výpočtovej oblasti na elementy Ω^e

Na vyriešenie úlohy pomocou MKP je potrebné rozdeliť našu výpočtovú oblasť na menšie oblasti, tzv. elementy. Element sa vyberá podľa typu úlohy a geometrie modelu. Líšia sa navzájom tvarom, počtom uzlových bodov a stupňoch voľnosti v nich, a veľkou škálou iných vlastností. Na diskretizáciu 2D úlohy využívame 3- resp. 4-uzlové lineárne elementy a 6- a 8-uzlové kvadratické elementy. Pri 3D úlohách používame 8-uzlové resp. 4-uzlové lineárne elementy, a 20-uzlové a 10-uzlové kvadratické elementy (Obr. 10).



Obr. 10: Typy elementov pre 2D a 3D úlohy

5.2. Zostrojenie slabej formulácie diferenciálnej rovnice na jednom elemente

Slabú formuláciu diferenciálnej rovnice dostaneme po vynásobení odvodennej rovnice váhovou funkciou w a zintegrovaním na jednom vybratom elemente Ω^e

$$\int_{\Omega^e} F_i(x) w \, dx = \int_{\Omega^e} -\operatorname{div} T^i w \, dx, \quad i = 1, 2, 3. \quad (30)$$

Použijeme Greenovu vetu [7] a upravíme na tvar

$$\int_{\Omega^e} \left(\tau_{1i} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \tau_{2i} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \tau_{3i} \frac{\partial w}{\partial x_3} \right) dx = \int_{\Omega^e} F_i(x) w \, dx + \int_{\partial\Omega^e} T^i \vec{n} w \, dS, \quad i = 1, 2, 3. \quad (31)$$

Rovnicu si upravíme podľa vzorcov (21),(22),(9) a dostávame

$$\int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^3 \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial w}{\partial x_j} + \lambda \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \frac{\partial w}{\partial x_i} dS = \int_{\Omega^e} F_i(x) w \, dx + \int_{\partial\Omega^e} f_i(x, \vec{n}) w \, dS \quad i = 1, 2, 3, \quad (32)$$

po úprave

$$\int_{\Omega^e} F_i(x) w \, dx + \int_{\partial\Omega^e} f_i(x) w \, dS = \int_{\Omega^e} \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \frac{\partial w}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_3} \frac{\partial w}{\partial x_3} + \mu \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_3} dS, \quad i = 1, 2, 3. \quad (33)$$

5.3. Zostrojenie aproximačných funkcií na elemente

Na získanie približného riešenia U^e na elemente Ω^e použijeme Galerkinov rozklad, t.j. hľadáme riešenie v tvare lineárnej kombinácie uzlových hodnôt $u_1^e, u_2^e, u_3^e \dots u_n^e$ a báзовých funkcií $\psi_1^e, \psi_2^e, \psi_3^e \dots \psi_n^e$ kde n je počet uzlov na elemente

$$U^e(x, y) = u_1^e \psi_1^e(x, y) + u_2^e \psi_2^e(x, y) + u_3^e \psi_3^e(x, y) + \dots + u_n^e \psi_n^e(x, y) = \sum_{i=1}^n u_i^e \psi_i^e(x, y). \quad (34)$$

5.4. Vytvorenie rovníc na elemente

Do slabej formulácie dosadíme vyjadrenú lineárnu kombináciu, pričom za u dáme približné riešenie U^e a za w postupne dosadíme aproximačné funkcie $\psi_1^e, \psi_2^e, \psi_3^e, \dots, \psi_n^e$.

Po úpravách dostávame elementovú sústavu rovníc v tvare

$$\begin{pmatrix} K_{11}^e & \dots & \dots & \dots & K_{1n}^e \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ K_{i1}^e & & \ddots & & K_{in}^e \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ K_{n1}^e & \dots & \dots & \dots & K_{nn}^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^e \\ \vdots \\ u_i^e \\ \vdots \\ u_n^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^e \\ \vdots \\ f_i^e \\ \vdots \\ f_n^e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1^e \\ \vdots \\ Q_i^e \\ \vdots \\ Q_n^e \end{pmatrix}, \text{ alebo}$$

$$K u = f + Q \quad (35)$$

kde K nám reprezentuje maticu tuhosti, u vektor neznámych posunutí, f vektor intenzity síl a Q vektor tokov medzi elementami [10].

5.5. Spojenie elementových rovníc do globálneho systému a jeho riešenie

Spájanie elementových rovníc odvodíme pre 3D úlohu (Obr. 11). Na spájanie elementových rovníc sa vo všeobecnosti používajú dva princípy [10]:

1. Spojitosť riešenia na hranici elementov.

Tento princíp, ktorý vychádza z toho, že na hraniciach elementov sa hodnoty u dvoch susediacich uzlových bodov budú rovnat', nám dovoľuje zaviesť globálne číslovanie premenných

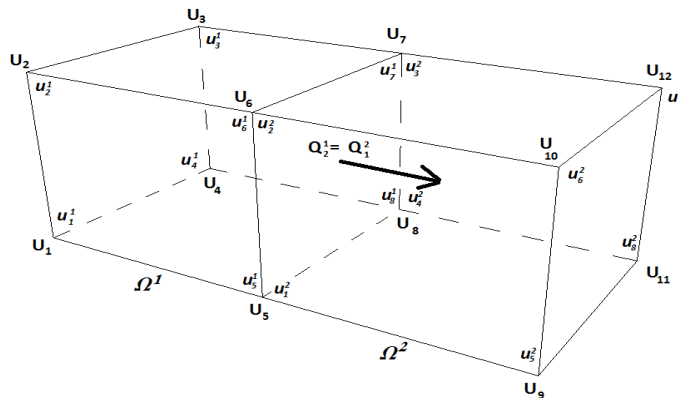
$$U_1 = u_1^1, U_2 = u_2^1, U_3 = u_3^1, U_4 = u_4^1, U_5 = u_5^1 = u_1^2, U_6 = u_6^1 = u_2^2, U_7 = u_7^1 = u_3^2,$$

$$U_8 = u_8^1 = u_4^2, U_9 = u_5^2, U_{10} = u_6^2, U_{11} = u_7^2, U_{12} = u_8^2 \quad (36)$$

2. Bilancia tokov medzi elementami.

Platí, že súčet tokov tečúcich cez spoločnú hranu dvoch elementov, musí byť nulový, teda platí, že

$$-Q_2^1 = Q_1^2$$



Obr. 11: Znáznornenie susediacich elementov zo zavedeným globálnym číslovaním a znázornením bilancie tokov.

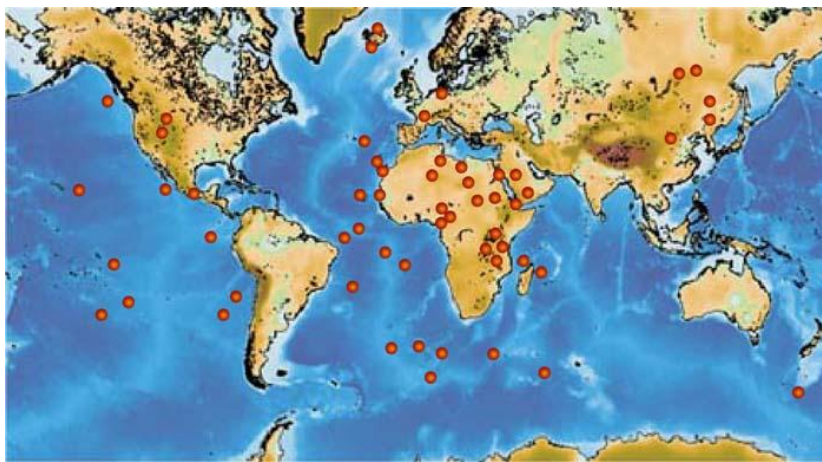
Riešiteľnosť sústavy zabezpečíme zadáním potrebného množstva okrajových podmienok.

6. Numerické experimenty v prostředí ANSYS

Všetky numerické experimenty boli vykonané v konečno-prvkovom softvéri ANSYS [1] s použitím lineárneho 3D elementu SOLID185. Experimenty boli realizované na oblasti tvorenej guľovým pásom s vonkajším polomerom 6371 km a vnútorným 6300 km. Na vrchnom plášti boli ako Dirichletove okrajové podmienky použité 3D posuny získane z modelu globálnych rýchlostí HS3-NUVEL1 [12]. Na ostatných hraniciach bola uvažovaná podmienka symetrie.

6.1. HS3-NUVEL1

HS3-NUVEL1 je model absolútnych globálnych rýchlostí pohybov litosferických dosiek. Absolútnosť rýchlosti zabezpečuje stacionárny referenčný systém bodov (tvz. hotspots frame) na povrchu zeme (Obr. 12). Tieto referenčné body sú na miestach s vysokou vulkanickou činnosťou a vysokým prúdením tepla. Sledovanie a meranie relatívnych pohybov jednotlivých referenčných bodov vzhľadom na referenčný systém poskytlo referenčnú sústavu pre stanovenie absolútnych pohybov ľubovoľných bodov na litosferických doskách.

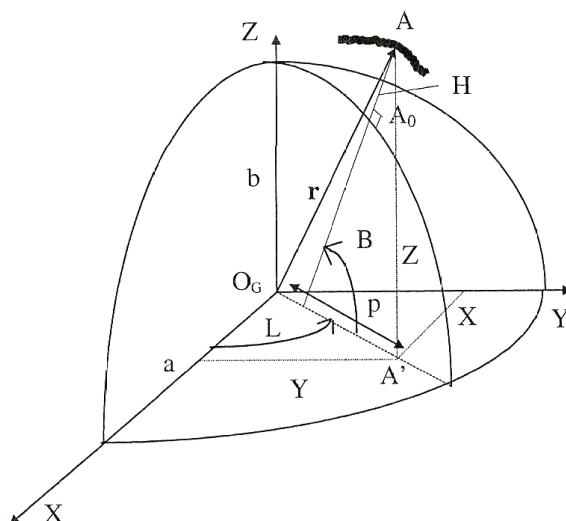


Obr. 12: Mapa lokácií jednotlivých referenčných bodov

6.2. Získanie a spracovanie vstupných údajov a ich implementácia do prostredia ANSYS

Na získanie vstupných údajov pre Dirichletove okrajové podmienky bol využitý formulár [12] na stránkach spoločnosti UNAVCO (neziskové univerzitné konzorcium, ktoré sa zaoberá geologickým výskumom a vzdelávaním). Formulár funguje tak, že po zadaní sférických súradníc skúmaného bodu, vybratí rýchlostného modelu, formy výstupu a odoslani, získame globálne rýchlosti daného bodu v príslušnej nami vybranej forme výstupu.

Diskretizáciou výpočtovej oblasti v prostredí ANSYS vznikli uzlové body elementov. Následne boli z modelu vybraté iba uzly nachádzajúce sa na vrchnom plášti. Súradnice týchto vybraných uzlov boli v priestorových pravouhlých súradniciach X, Y, Z preto bola potrebná transformácia na sférické súradnice L, B, H kde L predstavuje sférickú dĺžku, B sférickú šírku a H výšku bodu nad sférou (Obr. 13) [6].



Obr. 13: Karteziánske súradnice X, Y, Z a sférické súradnice B, L, H

V softvéri Mathematica [8] bol vytvorený program na získanie hodnôt L a B (H nie je potrebné získavať, pretože výpočet prebieha na povrchu sféry) využitím vzťahov

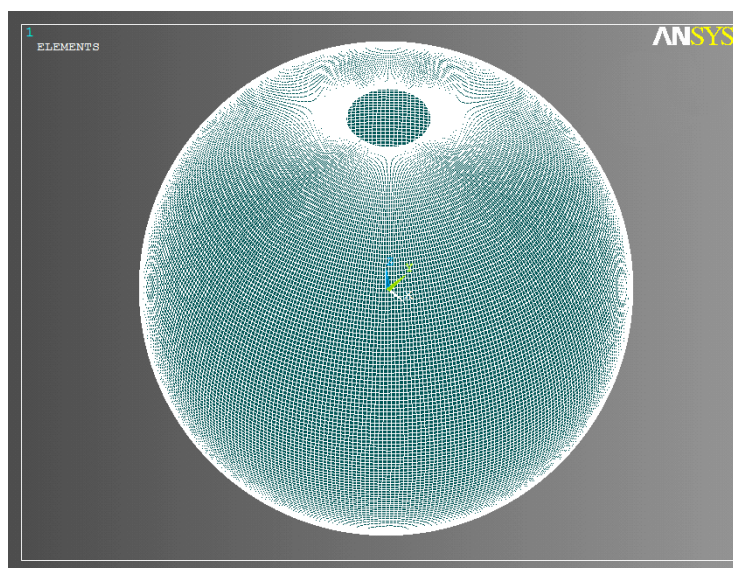
$$L = \text{ArcTg} \left(\frac{Y}{X} \right),$$

$$B = \text{ArcTg} \left(\frac{Z}{p} \right), p = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Ako forma výstupu formuláru bol vybratý formát "ASCII table WGS84 XYZ plate velocities". Formát WGS84 XYZ udáva posuny v smere pravouhlých geocentrických súradníc X, Y, Z v súradnicovom systéme WGS84. Keďže formulár dovoľuje vypísať posuny iba pre jeden bod, bol vytvorený PHP skript (Príloha č.1), ktorý na vstup dostal zoznam všetkých transformovaných súradníc uzlových bodov. Tie boli následne skriptom po jednom použité ako vstupné parametre formulára a z výsledku po odoslaní boli vybraté nami potrebné hodnoty posunov a uložené vo forme príkazov na zadanie Dirichletových podmienok v prostredí ANSYS. Výstupom je súbor obsahujúci posuny pre všetky uzly v smeroch XYZ.

6.3. Globálny numerický experiment

Globálny experiment sa zaoberá výpočtom výsledného posunutia a zložiek tenzora napätí v uzlových bodov na povrchu Zeme. Výpočtová oblasť je guľový pás s vonkajším polomerom 6371 km, vnútorným polomerom 6300 km a ohraničený rovnobežkami $B: (-80^\circ, 80^\circ)$. Pred diskretizáciou bol nastavený počet delení v smere sférickej dĺžky 360, v smere sférickej šírky 160 a v radiálnom smere 3. Diskretizáciou vznikla mriežka $1^\circ \times 1^\circ$ (Obr. 14). V Tab. 1 sa nachádza štatistika daného modelu.



Obr. 14: Diskretizovaná výpočtová oblasť globálneho experimentu.

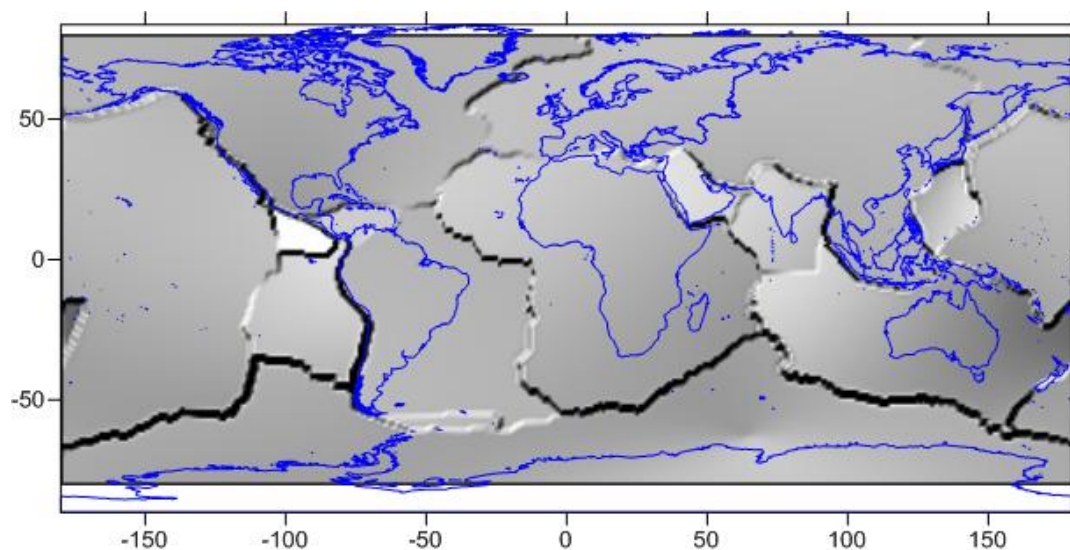
Celkový počet uzlov	235 872	Celkový počet neznámych	707 616
Celkový počet elementov	172 800	Celkový počet rovníc	530 712
Počet uzlov na povrchu Zeme	58 968		

Tab. 1: Štatistika globálneho experimentu.

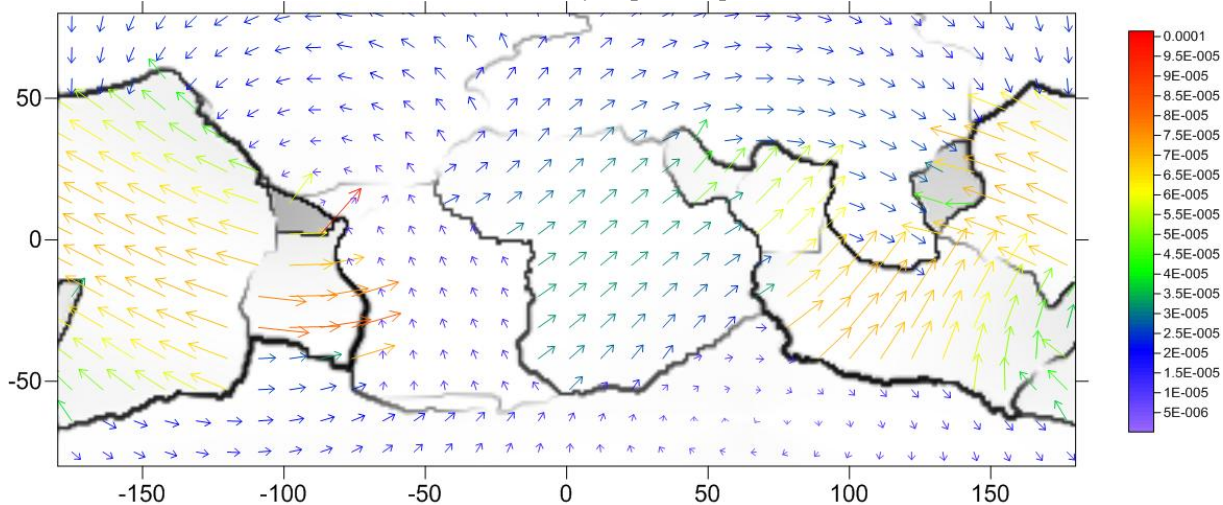
Vyriešením modelu sme získali zložky tenzora napätí ($SX, SY, SZ, SXY, SYZ, SXZ$) v jednotlivých uzlových bodoch a tiež výsledné celkové posunutia $Usum$. Výsledky sa vzťahujú na pravouhlý karteziánsky systém. Pre lepšiu a globálnejšiu vizualizáciu boli výsledky pretransformované do sférického súradnicového systému. Túto transformáciu vykonáva samotný ANSYS, preto výstupom budú výsledky, kde os X predstavuje radiálny smer, os Y sférickú dĺžku a os Z sférickú šírku. Z týchto dát sa na vizualizáciu použijú iba zložky napätí a výsledné posunutia tých uzlov, ktoré sa nachádzajú na povrchu guľového pásu.

6.3.1. Zobrazenie tektoniky globálneho experimentu a zhodnotenie výsledkov

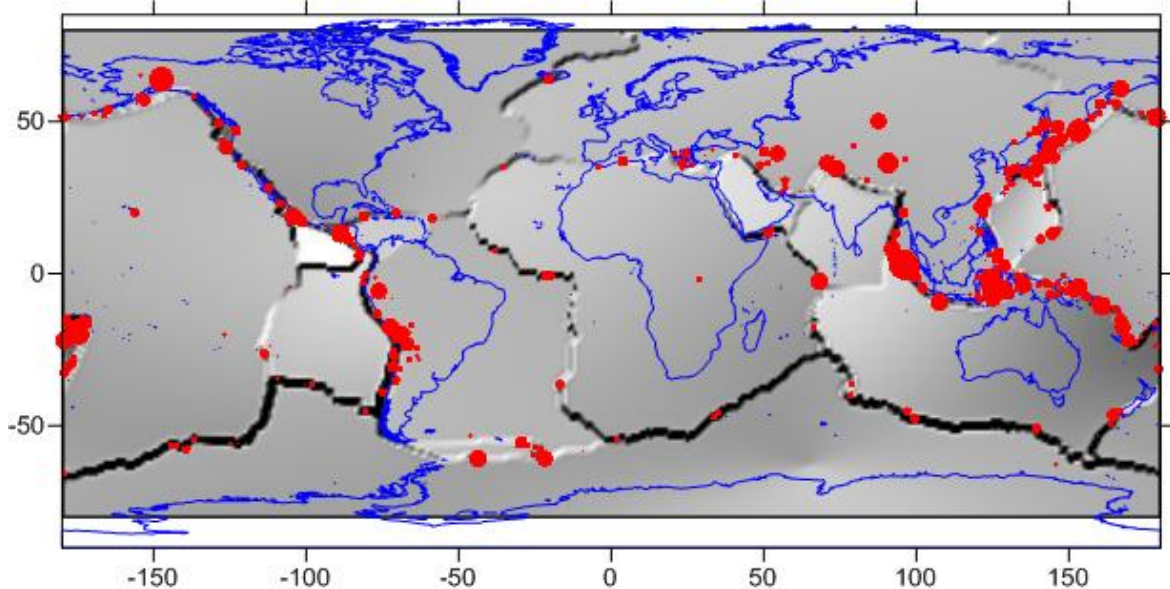
Všetky výsledky globálneho experimentu sa vizualizovali v softvéri Surfer [5]. Na Obr. 15 sú znázornené hranice hlavných tektonických platní vytvorené vizualizáciou reliéfu z dát obsahujúcich výsledné posunutia $Usum$. Vizualizácia jasne zobrazuje hranice Pacifickej, Severoamerickej, Juan de Fuca, Karibskej, Nazca, Kokosovej, Antarktickej, Scotia, Africkej, Euroázijskej, Indickej, Arabskej, Filipínskej a Austrálskej platne. Obr. 16 vektorovo znázorňuje pohyby litosferických dosiek. Tu si môžeme všimnúť, že najväčšie posuny sú na Pacifickej, Kokosovej, Nasca a Austrálskej platni, kde dochádza k najvýraznejším procesom konvergencie a divergencie hraníc. Na Obr. 17 sú znázornené zemetrasenia s veľkosťou väčšou ako 6.0 (Richterovou stupnicou označené ako silné až masívne) v rokoch 2000 až 2006 [13]. Vizualizácie na Obr. 16 a Obr. 17 poskytli informácie o oblastiach s najväčšou tektonikou, ktoré boli podrobnejšie skúmané v lokálnych experimentoch.



Obr. 15 Zobrazenie hraníc tektonických platní spolu s hranicami kontinentov.

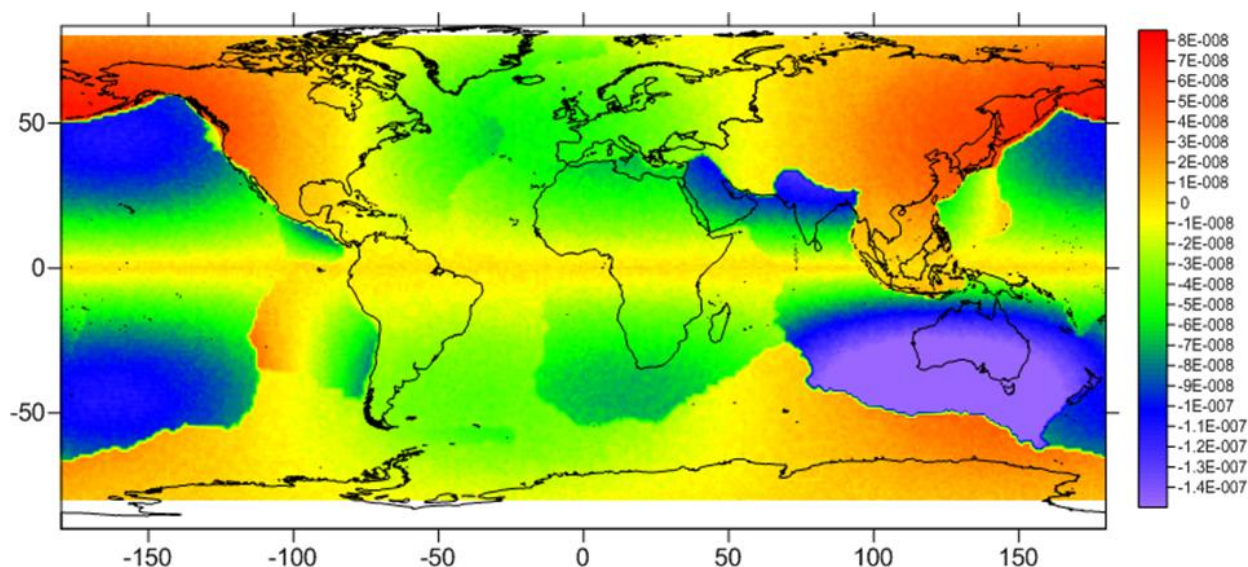


Obr. 16 Vektorová vizualizácia pohybov litosferických dosiek [km/rok].

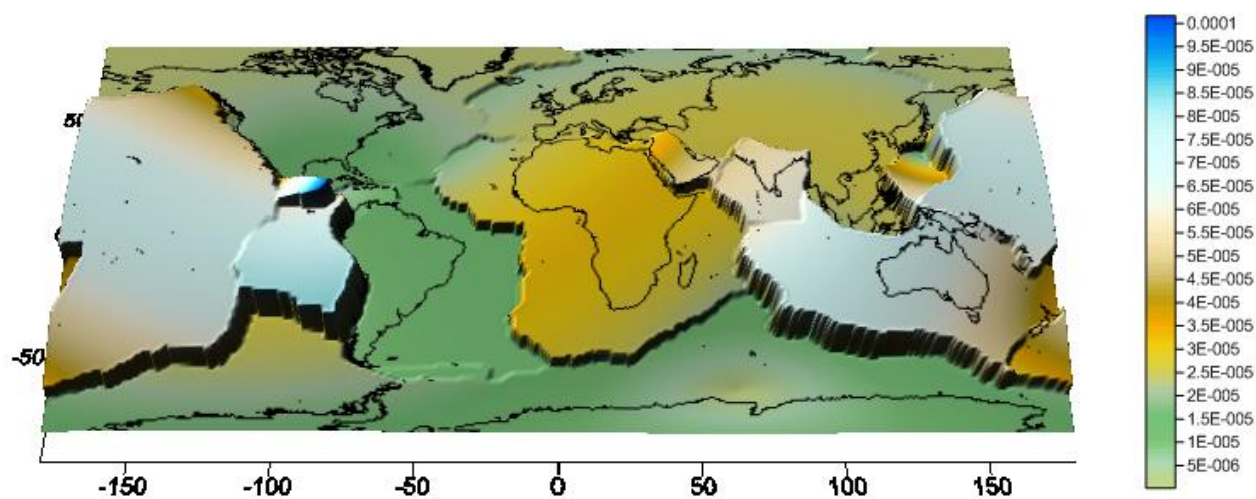


Obr. 17 Proporčná vizualizácia zemetrasení počas rokov 2000-2006 s magnitúdou väčšou ako 6.0.

Na Obr. 18 sú znázornené posunutia v radiálnom smere UX a na Obr. 19 veľkosti výsledných posunutí $Usum$. Z Obr. 18 je zrejmé, že úseky označené zelenou až fialovou klesajú (západná časť Eurázijskej platne, východná časť Nazca platne, severná a južná časť Pacifickej platne, Arabská, Indická a Austrálska platňa). Sú to úseky litosferických dosiek, ktoré sa na hraniciach dôsledkom subdukcie podsúvajú pod hraničné tektonické platne, či v dôsledku kolízie a divergencie vertikálne deformujú smerom nadol. Naopak úseky označené žltou až červenou stúpajú. Sú to úseky, na ktorých vznikajú oceánske chrbty, ostrovy, pohoria a vyvýšeniny. Na Obr. 19 sú pomerovo zobrazené výsledné posuny. Pohyby úsekov, ktoré sa nachádzajú najvyššie v grafe, sú najväčšie.



Obr.18 Posunutia v radiálnom smere UX [km/rok].

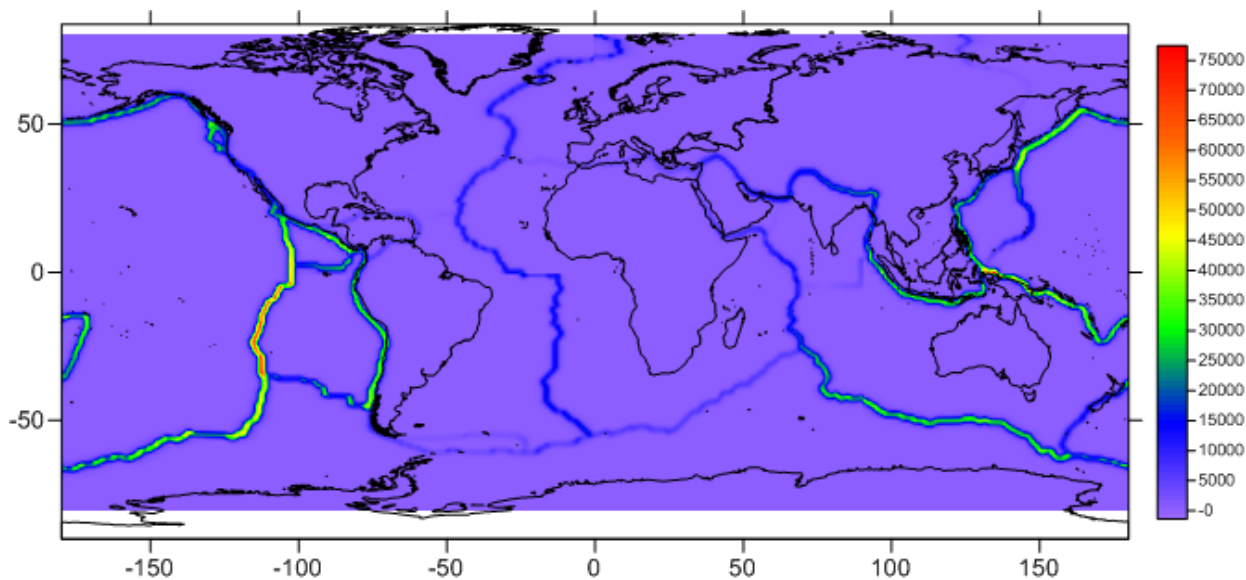


Obr.19 Výsledné posunutia $Usum$ [km/rok].

Na Obr. 20 sú zobrazené Von Mises napätia τ_v dané vzťahom

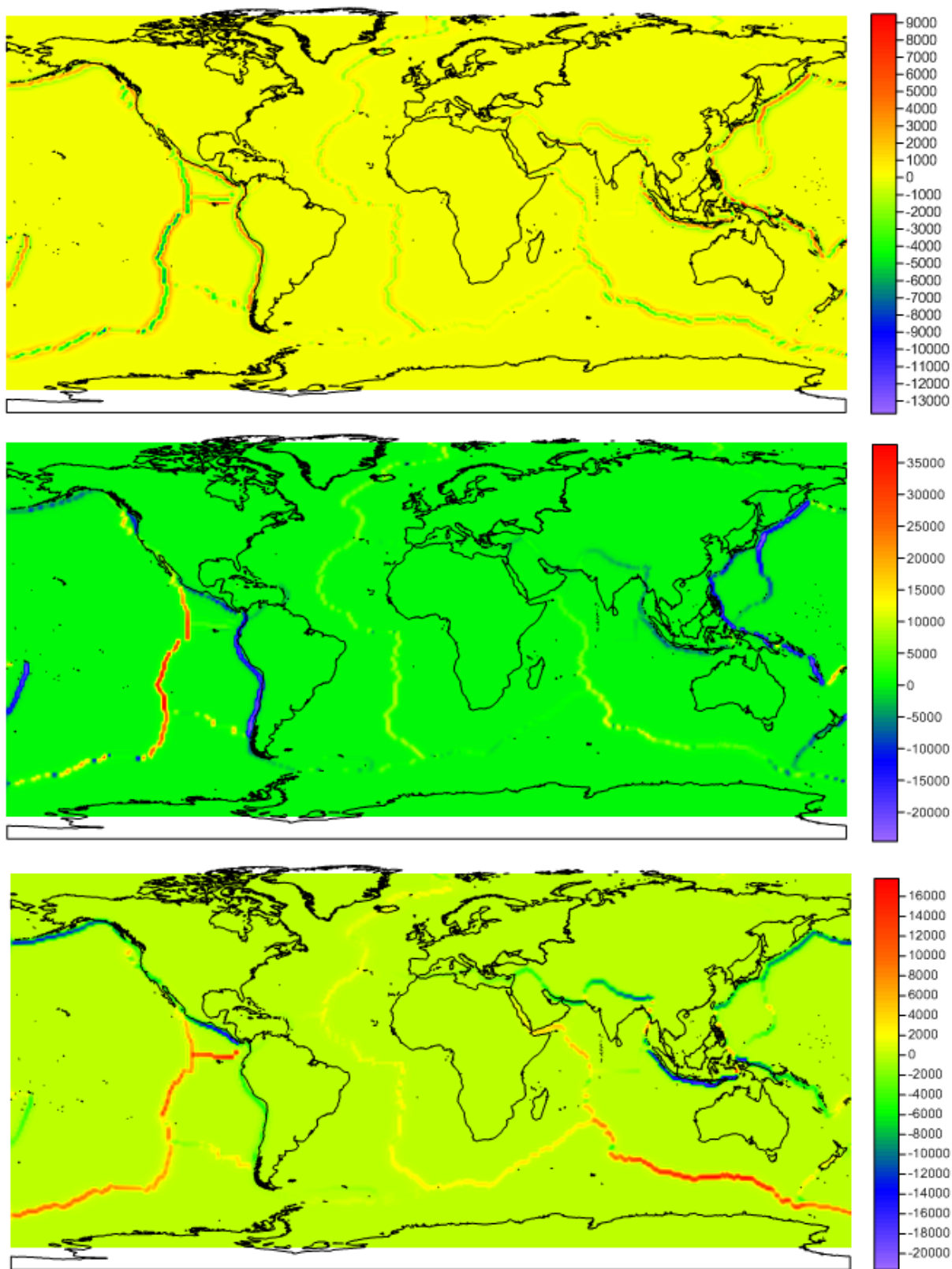
$$\tau_v = \sqrt{\frac{1}{2}[(\tau_{11} - \tau_{22})^2 + (\tau_{22} - \tau_{33})^2 + (\tau_{33} - \tau_{11})^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)]}.$$

Najvyššie hodnoty Von Mises napätí predstavujú najväčšie napätia na hraniciach platní, čo bolo ďalším dôležitým faktorom pri výbere oblastí pre lokálne experimenty.

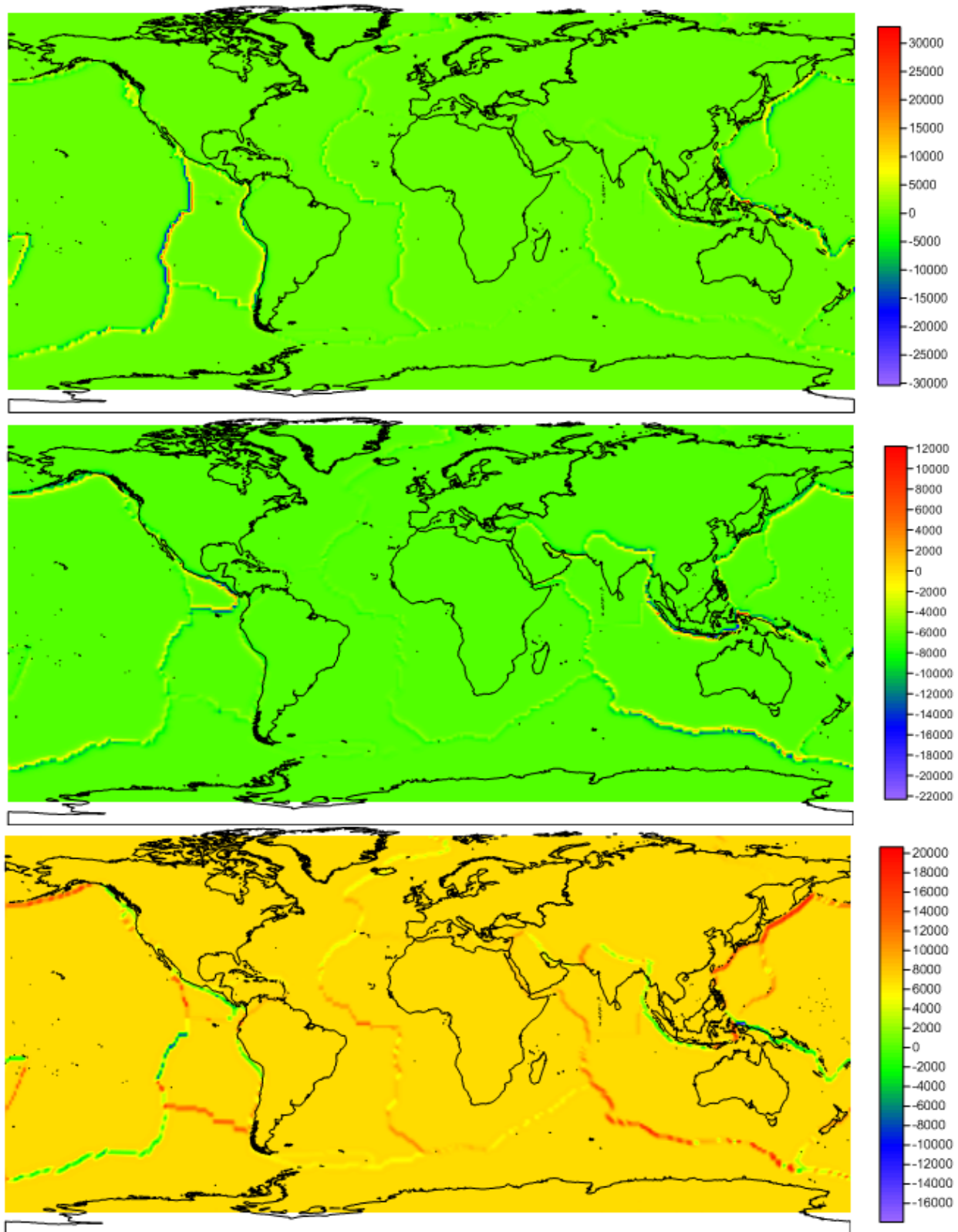


Obr.20 Priebeh von-Mises-ových napätí.

Na nasledovných obrázkoch môžeme vidieť vizualizácie zložiek tenzora napätí v jednotlivých uzloch. Na Obr. 21 sú znázornené normálové napätia SX, SY, SZ a na Obr. 22 tangenciálne napätia SXY, SYZ, SXZ.



Obr.21 Normálové napätia S_X, S_Y, S_Z

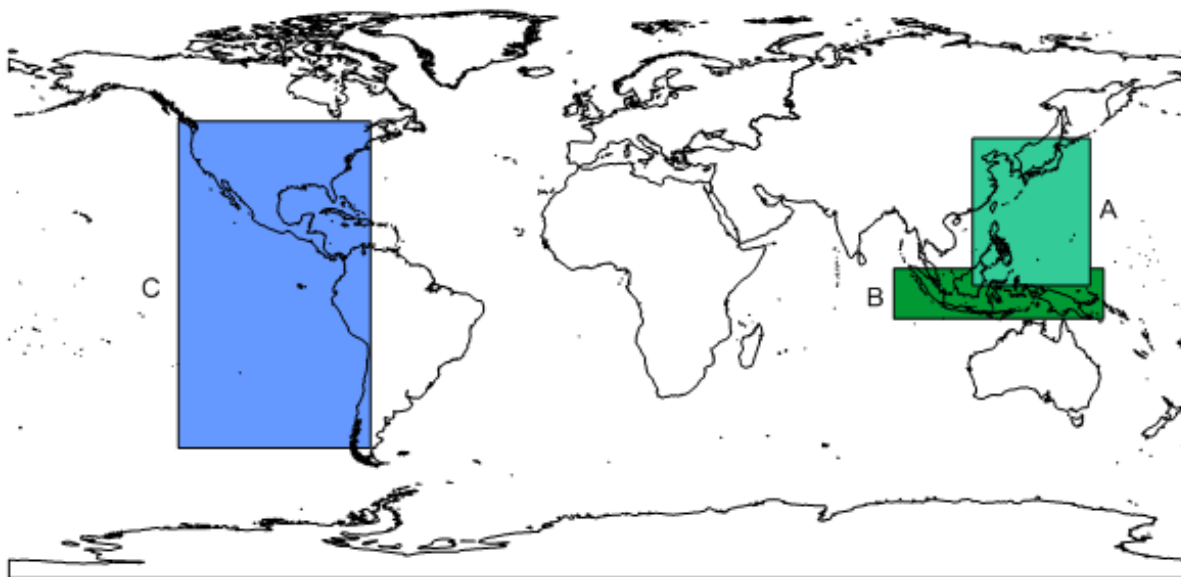


Obr.22 Tangenciálne napätia S_{XY}, S_{XZ}, S_{YZ}

Na Obr. 21 na vizualizácii zložky tenzora napätia S_X je vidieť, že na hraniciach kde dochádza k divergencii tektonických dosiek vznikne pás záporných napätí ohraničený pásmi kladných napätí v radiálnom smere. Tlak vyvierajúcej lávy zo zemského plášťa spôsobuje záporné radiálne napätie, teda napätie orientované proti smeru výstupu lávy. Na okrajoch divergujúcich dosiek vzniká kladné radiálne napätie dôsledkom tuhnutia a usádzania vychladnutej lávy. Naopak pri konvergentných hraniciach vidíme pás kladných radiálnych napätí ohraničený zápornými napätiami. Sú to oblasti subdukčných zón a zón s prebiehajúcou orogenézou (vrásnením). V prípade vizualizácie pre zložky S_Y a S_Z vidíme, že kladné napätia v týchto smeroch vznikajú na hraniciach litosferických dosiek medzi ktorými v týchto smeroch nastáva konvergencia a záporné na divergujúcich hraniciach platní.

6.4. Lokálne numerické experimenty

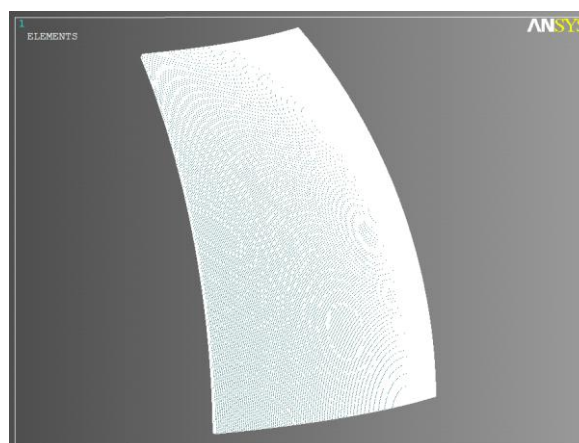
Na základe výsledkov globálneho experimentu boli vybraté tri oblasti s najväčšou tektonickou aktivitou (Obr. 23), ktoré boli použité pre jednotlivé lokálne experimenty.



Obr. 23: Vybraté oblasti pre lokálne experimenty, A – Filipínska platňa a okolie, B- Indonézia a okolie, C- USA, Stredná Amerika a západné pobrežie Južnej Ameriky.

6.4.1. Filipínska platňa a okolie, zobrazenie tektoniky a zhodnotenie výsledkov

Model prvého lokálneho experimentu je taktiež tvorený guľovým pásom s vonkajším polomerom 6371 km a vnútorným polomerom 6300 km. Pás je ohraničený rovnobežkami B : ($0^\circ, 45^\circ$) a poludníkmi L : ($115^\circ, 150^\circ$). Počet delení v smere sférickej dĺžky bol nastavený na 280, v smere sférickej šírky na 360 a v radiálnom smere na 4. Toto delenie zodpovedalo diskretizácii zemského povrchu: $0.125^\circ \times 0.125^\circ$ (Obr. 24). Na diskretizovaný model boli následne aplikované Dirichletove okrajové podmienky. V Tab. 2 sa nachádza štatistika daného modelu.



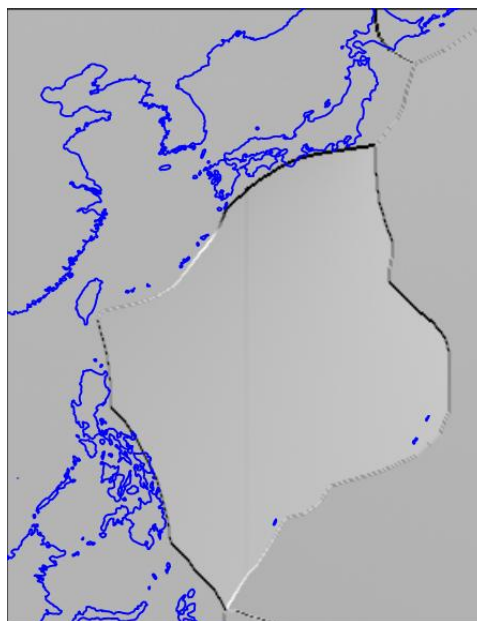
Obr. 24: Diskretizovaná výpočtová oblasť lokálneho experimentu Filipínskej platne a okolia

Celkový počet uzlov	507 205	Celkový počet neznámych	1 521 615
Celkový počet elementov	403 200	Celkový počet rovníc	1 217 292
Počet uzlov na povrchu Zeme	101 441		

Tab. 2: Štatistika globálneho experimentu.

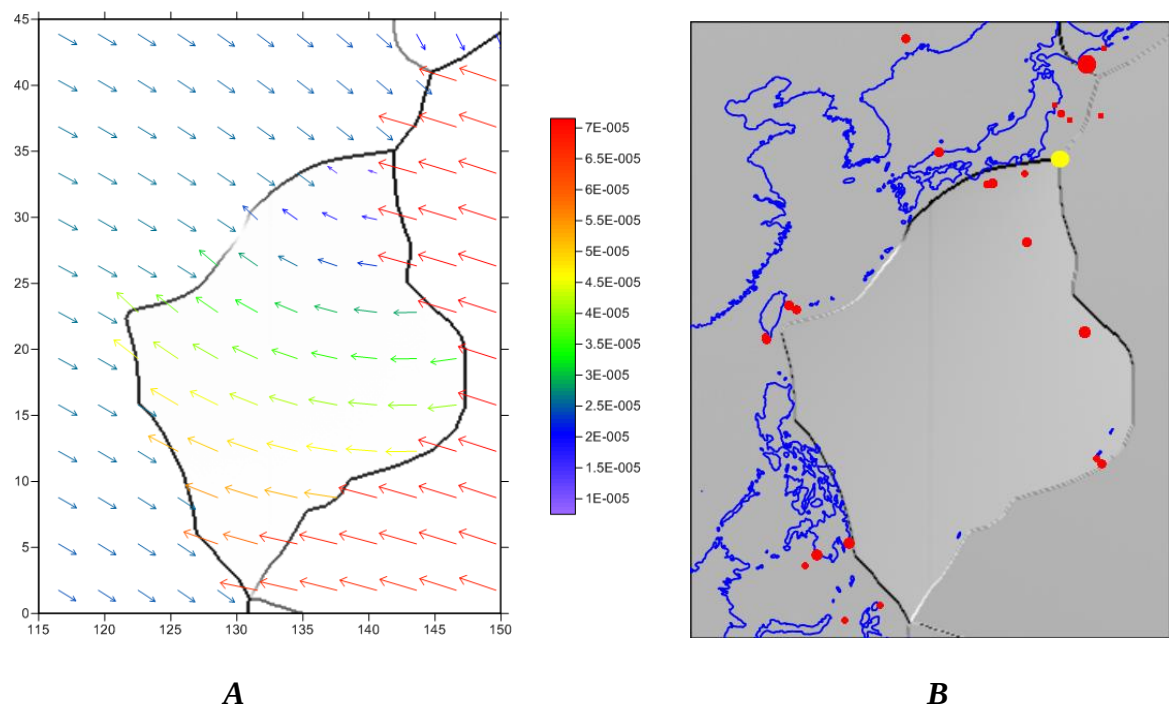
Vyriešením modelu sme získali zložky tenzora napätí ($SX, SY, SZ, SXY, SYZ, SXZ$) v jednotlivých uzlových bodoch a výsledne posunutia $Usum$. Výsledky boli znova tak isto ako v prípade globálneho experimentu pretransformované do sférických súradníc.

Všetky výsledky sme znova vizualizovali v softvéri Surfer. Na Obr. 25 sú znázornené hranice tektonických platní, ostrovov a kontinentov. Vidíme tu hranice Filipínskej platne s platňou Pacifickou a Euroázijskou. Na severe zasahuje časť Severoamerickej platne.



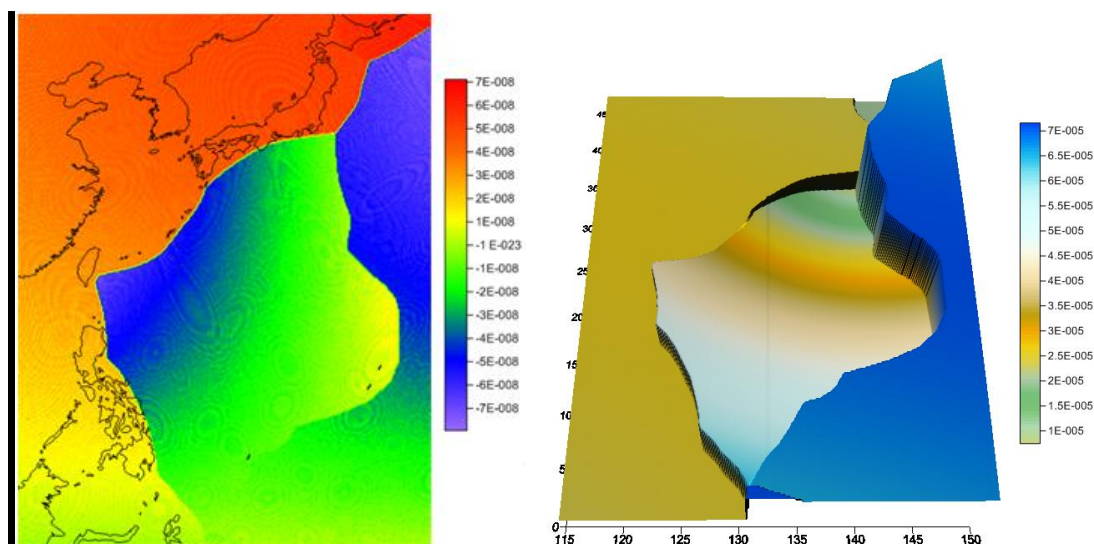
Obr. 25: Vizualizácia hraníc tektonických platní.

Obr. 26 A) vektorovo znázorňuje pohyby litosferických dosiek. Na obrázku je vidieť protichodný pohyb Filipínskej a Euroázijskej platne. Z toho môžeme predpokladať konvergenciu týchto platní, a tiež veľký pohyb Pacifickej platni smerom na Filipínsku aj Euroázijskú, ktorý tiež poukazuje na konvergenciu.



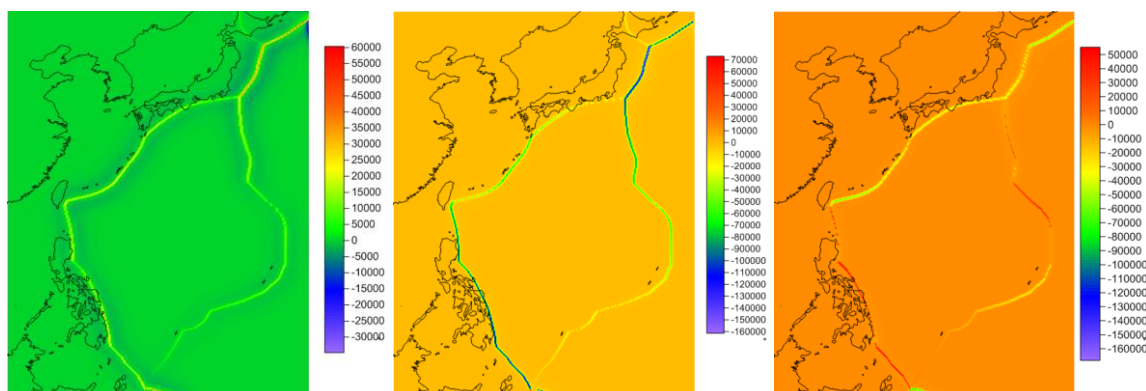
Obr. 26: A) Vektorová vizualizácia pohybov litosferických dosiek [km/rok], B): Proporčná vizualizácia zemetrasení počas rokov 2000-2006 s magnitúdou väčšou ako 7.0. Epicentrum zemetrasenia z roku 2011, ktoré zasiahlo Japonské pobrežie (magnitúda 8.9).

Na Obr. 26: B) sú zaznačené zemetrasenia s magnitúdou väčšou ako 7.0 počas rokov 2000 až 2006. Na obrázku Obr. 27 sú znázornené posunutia v radiálnom smere UX a veľkosti výsledných posunutí *Usum*. Z obrázka vidíme pokles Filipínskej platne v západnej časti. V tejto oblasti nastáva subdukcia pod eurázijskú platňu, proces tu formuje Filipínsky pás na strane Eurázijskej platne a Filipínsku priekopu na strane Filipínskej platne. V západnej časti vidíme stúpanie Filipínskej platne a prudké klesanie Pacifickej platne. Taktiež tu prebieha subdukcia, ale Pacifickej platne pod Filipínsku. Tento proces na strane poklesu Pacifickej platne formuje Izu-Ogasawara priekopu, ktorá je súčasťou dlhého pásu Mariánskej priekopy a na strane stúpania Filipínskej platne formuje Mariánske ostrovy. Na severe prechádza platňa priamo cez Japonské ostrovy, na jej hranici sa nachádza aj najvyššia sopka a vrch Japonska, Fudži. Zemetrasenie z roku 2011, ktoré vyvolalo ničivé tsunami, malo epicentrum 170 km severne od Tokia (Obr. 26 B, žltý bod), teda v miestach stretu Filipínskej Eurázijskej a Pacifickej platne. Zemetrasenie dosiahlo silu 9.0 magnitúda, teda ide o jeden z najsilnejších zmeraných prejavov platňovej tektoniky [13].

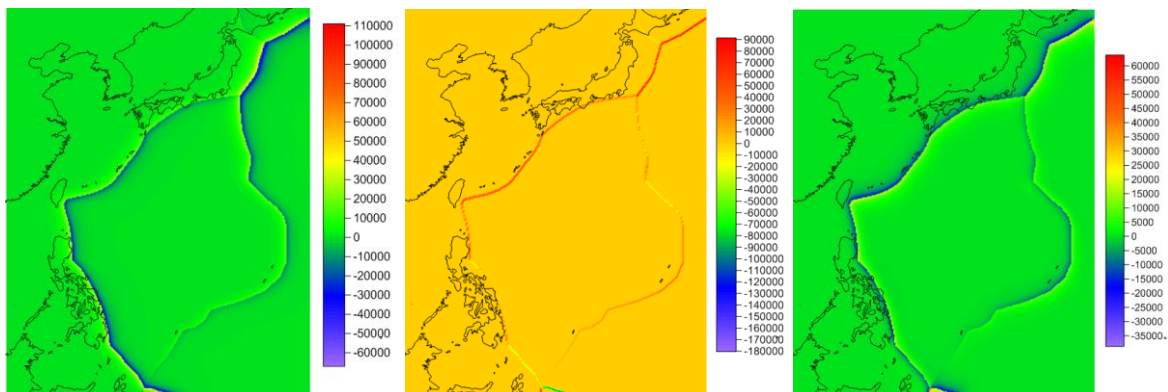


Obr.27 Posunutia v radiálnom smere UX, Výsledné posunutia Usum [km/rok].

Na nasledovných obrázkoch môžeme vidieť vizualizácie zložiek tenzora napätí v jednotlivých uzloch, na obrázku Obr. 29 sú znázornené normálové napätia SX, SY, SZ a na obrázku Obr. 29 tangenciálne napätia SXY, SYZ, SXZ.



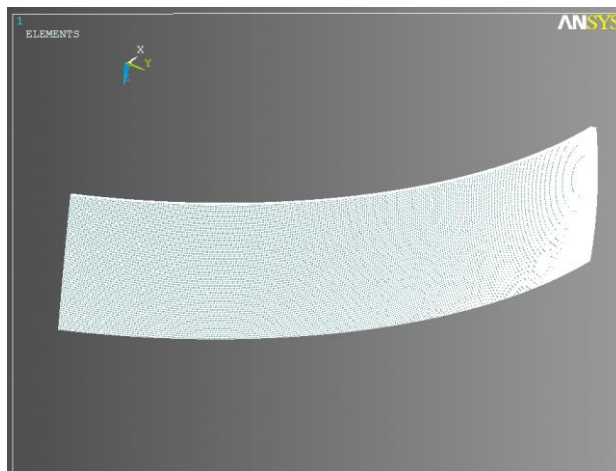
Obr. 28 Priebeh normálových napätí SX, SY, SZ v oblasti Filipínskej platne.



Obr. 29 Priebeh tangenciálnych napätí SXY, SXZ, SYZ v oblasti Filipínskej platne.

6.4.2. Indonézia a okolie, zobrazenie tektoniky a zhodnotenie výsledkov

Oblasť druhého lokálneho experimentu bola ohraničená rovnobežkami $B: (-10^\circ, 5^\circ)$ a poludníkmi $L: (90^\circ, 155^\circ)$. Počet delení v smere sférickej dĺžky bol 520, v smere sférickej šírky 120 a v radiálnom smere 4. Diskretizáciou vznikla mriežka $0.125^\circ \times 0.125^\circ$ (Obr. 30). V tabuľke Tab. 3 sa nachádza štatistika daného modelu.



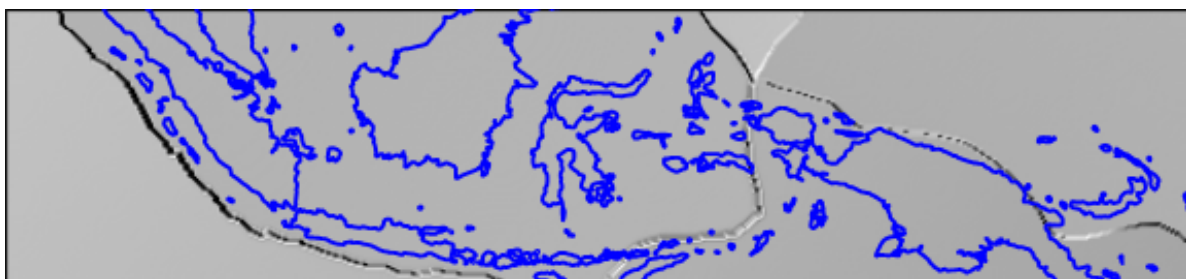
Obr. 30 Diskretizovaná výpočtová oblasť lokálneho experimentu Indonézia a okolie.

Celkový počet uzlov	315 205	Celkový počet neznámych	945 615
Celkový počet elementov	249 600	Celkový počet rovníc	756 492
Počet uzlov na povrchu Zeme	63 041		

Tab. 3: Štatistika lokálneho experimentu Indonézia a okolie.

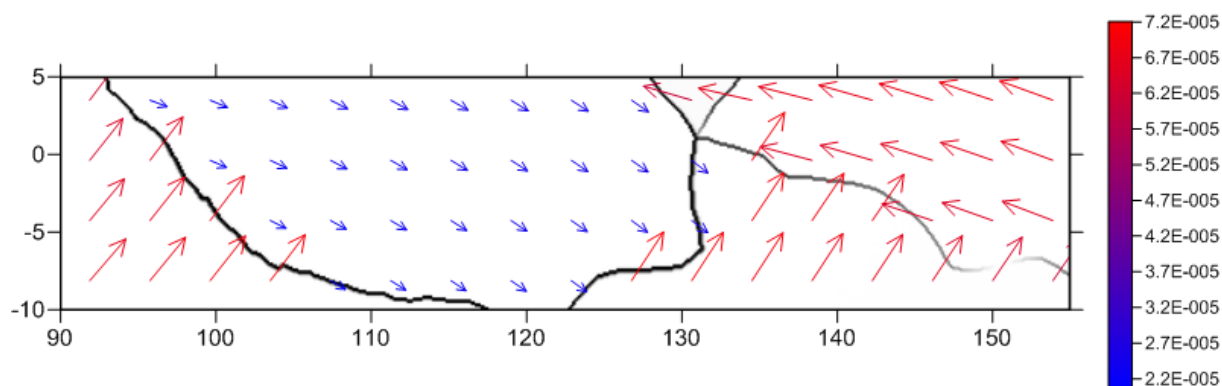
Vyriešením modelu sme získali zložky tenzora napätí ($SX, SY, SZ, SXY, SYZ, SXZ$) v jednotlivých uzlových bodoch a výsledne posunutia $Usum$. Výsledky boli pretransformované do sférických súradníc.

Všetky výsledky sme znova vizualizovali v softvéri Surfer. Na Obr. 31 sú znázornené hranice tektonických platní. Vidíme tu hranice časti Euroázijskej platne nazývanej Sunda, Pacifickej a Austrálskej platni. Na severe zasahuje časť Filipínskej platne.



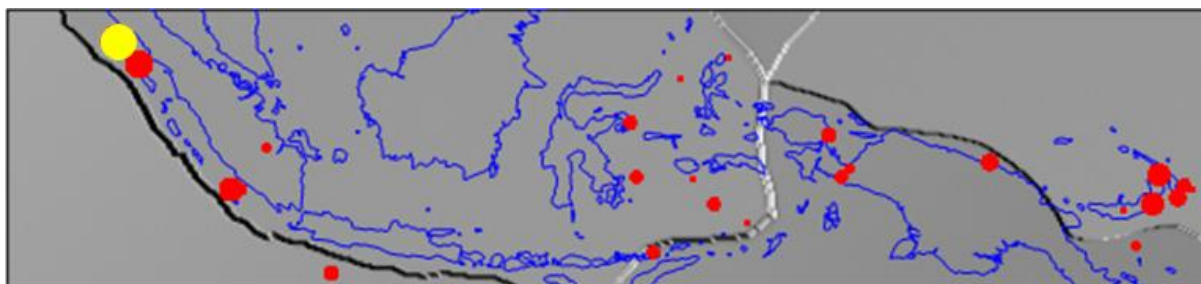
Obr. 31: Vizualizácia hraníc tektonických platní v oblasti Indonézie.

Obr. 32 vektorovo znázorňuje pohyby litosferických dosiek. Z vizualizácie je vidieť konvergenciu Austrálskej a Sunda platne, a Austrálskej a Pacifickej platne.



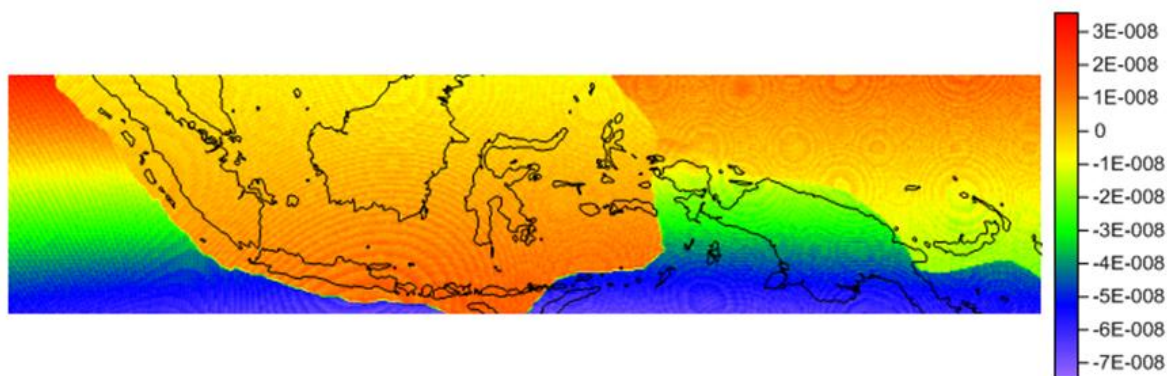
Obr. 32 Vektorová vizualizácia pohybov litosferických dosiek [km/rok].

Na Obr. 33 sú zaznačené zemetrasenia s magnitúdou väčšou ako 7.0 počas rokov 2000 až 2006. Žltý bod predstavuje zemetrasenie z roku 2004 (magnitúda 9.1) [13].

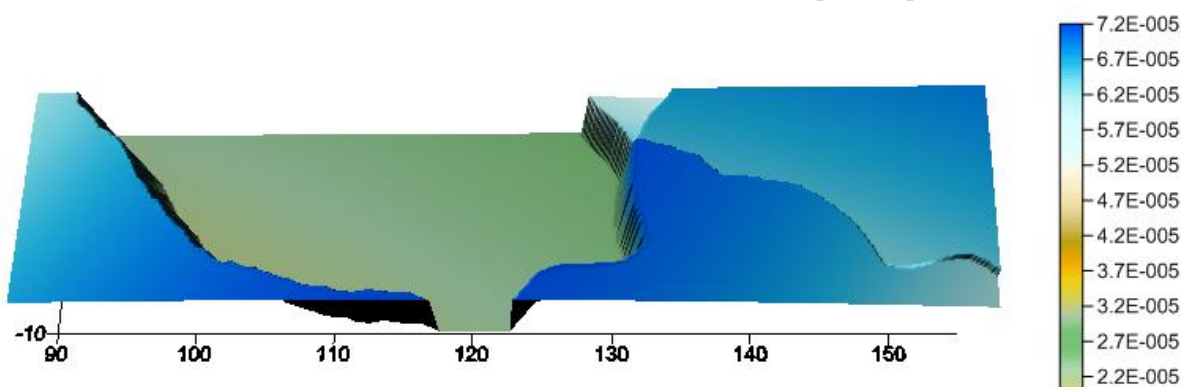


Obr. 33 Proporčná vizualizácia zemetrasení s magnitúdou väčšou ako 7.0 v rokoch 2000-2006.

Na Obr. 34 sú znázornené posunutia v radiálnom smere UX a na Obr. 35 veľkosti výsledných posunutí *Usum*. Východná časť Sunda dosky je v skutočnosti tvorená viacerými menšími doskami (Molucca, Banda a Timor doska). Z vizualizácie posunutí v radiálnom smere vidíme subdukciu Austrálskej dosky pod Sunda dosku. Týmto procesom boli vytvorené celé Indonézske ostrovy. V juhozápadnej časti sa nachádza sopečný oblúk (Sunda oblúk) tvorený ostrovmi Sumatra a Jáva. Sunda oblúk predstavuje reťazec vulkanicky najnebezpečnejších sopiek. Erupcia sopky Tambora z roku 1815 je považovaná za najväčšiu v zaznamenanej histórii. Na strane Austrálskej dosky vznikla podsunutím dosky priekopa. Masívne zemetrasenie v Indickom oceáne z roku 2004 malo epicentrum pravé v tejto oblasti (Obr. 33). Zemetrasenie spôsobilo sériu prívalových vĺn dosahujúcich výšku 30m, ktoré zasiahli až 11 krajín. S magnitúdou 9.1 sa radí medzi najsilnejšie zemetrasenia za posledných 100 rokov. Pri tomto zemetrasení bol zaznamenaný zatiaľ najdlhší čas pohybu zlomovej plochy, ktorý trval až 10 minút. Na hranici Austrálskej a Pacifickej platne vznikli v dôsledku subdukcie priekopy Tonga a Kermadec.

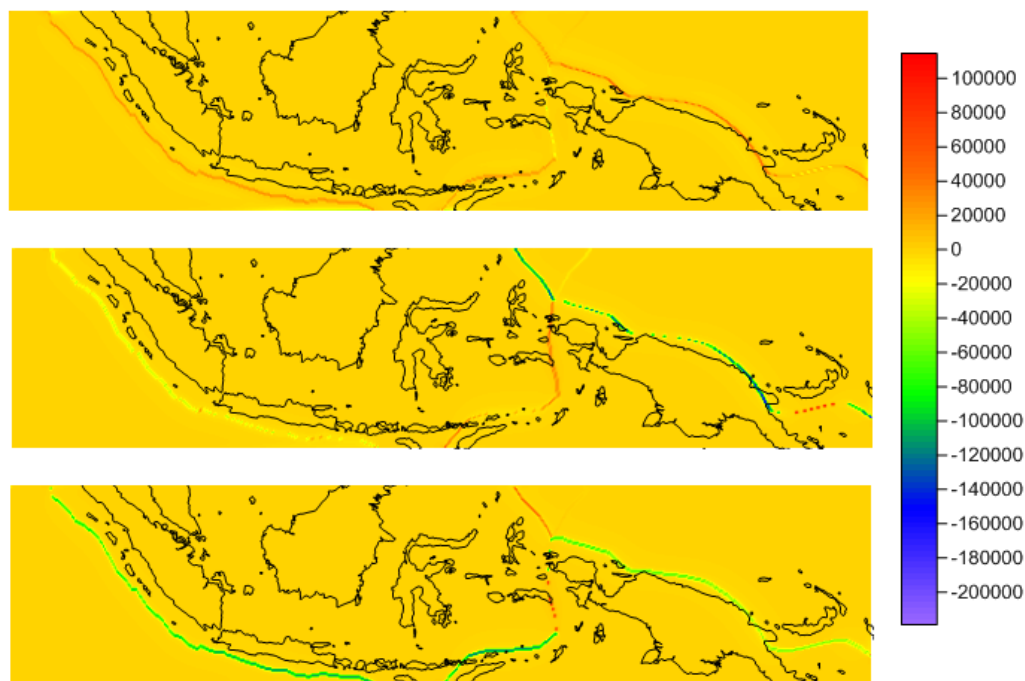


Obr.34 Posunutia v radiálnom smere UX [km/rok].

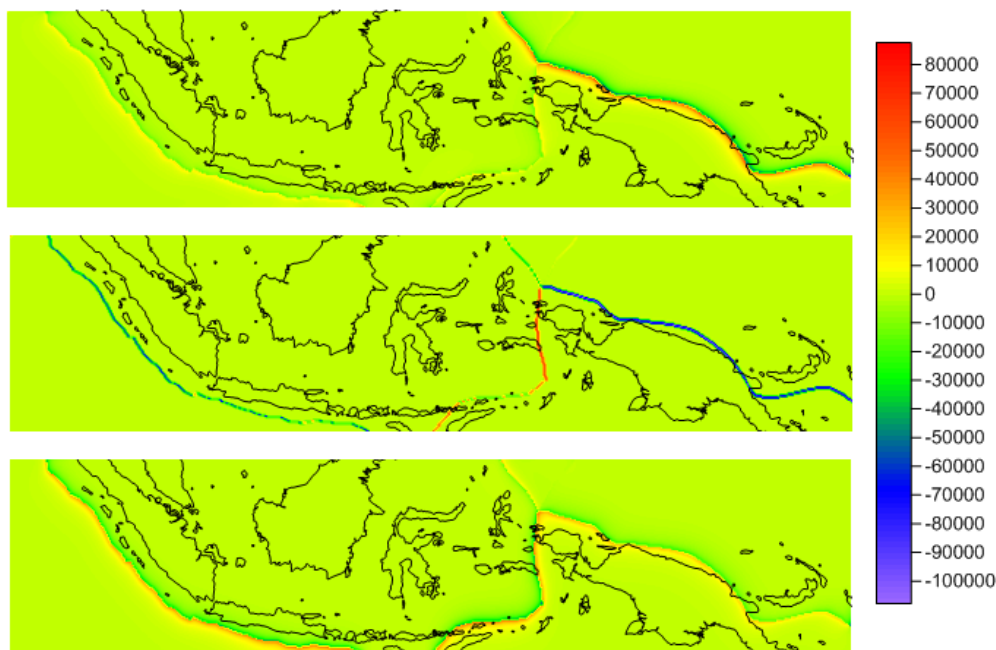


Obr.35 Výsledné posunutia U_{sum} [km/rok].

Na nasledovných obrázkoch môžeme vidieť vizualizácie zložiek tenzora napätí v jednotlivých uzloch. Na Obr. 36 sú znázornené normálové napätia SX , SY , SZ a na Obr. 37 tangenciálne napätia SXY , SYZ , SXZ .



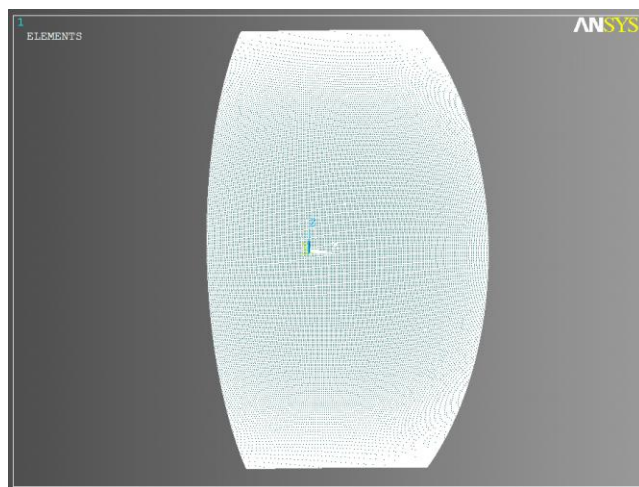
Obr. 36 Priebeh normálových napätí SX , SY , SZ v oblasti Indonézie.



Obr. 37 Priebeh tangenciálnych napätí SXY, SXZ, SYZ v oblasti Indonézie.

6.4.3. USA, Stredná Amerika a západné pobrežie Južnej Ameriky, zobrazenie tektoniky a zhodnotenie výsledkov.

Výpočtová oblasť tretieho lokálneho experimentu je guľový pás s ohraňčením: polomer hornej sférickej hranice $R=6371$ km, polomer dolnej sférickej hranice $R=6300$ km, hranice rovnobežiek $B: (-50^\circ, 50^\circ)$ a poludníkov $L: (-130^\circ, -70^\circ)$. Počet delení v smere sférickej dĺžky bol nastavený na 240, v smere sférickej šírky na 400 a v radiálnom smere na 4. Diskretizáciou vzniklo delenie na zemskom povrchu $0.25^\circ \times 0.25^\circ$ (Obr. 38). V Tab. 4 sa nachádza počet uzlov, elementov a rovníc, ktoré vstupovali do výpočtu.



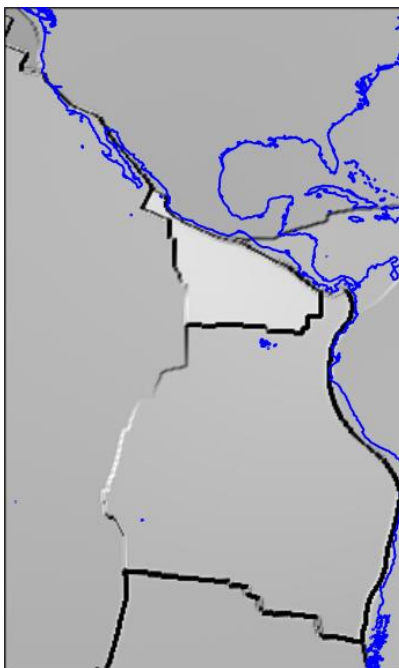
Obr. 38 Výpočtová oblasť rozdelená na elementy, ktorá bola použitá pri lokálnom experimente pre územie USA, Strednej Ameriky a západného pobrežia Južnej Ameriky.

Celkový počet uzlov	483 205	Celkový počet neznámych	1 449 615
Celkový počet elementov	384 000	Celkový počet rovníc	1 159 692
Počet uzlov na povrchu Zeme	96 641		

Tab. 4: Štatistika tretieho lokálneho experimentu.

Vyriešením modelu sme získali zložky tenzora napätí ($SX, SY, SZ, SXY, SYZ, SXZ$) v jednotlivých uzlových bodoch a výsledne posunutia $Usum$. Výsledky boli pretransformované do sférických súradníc.

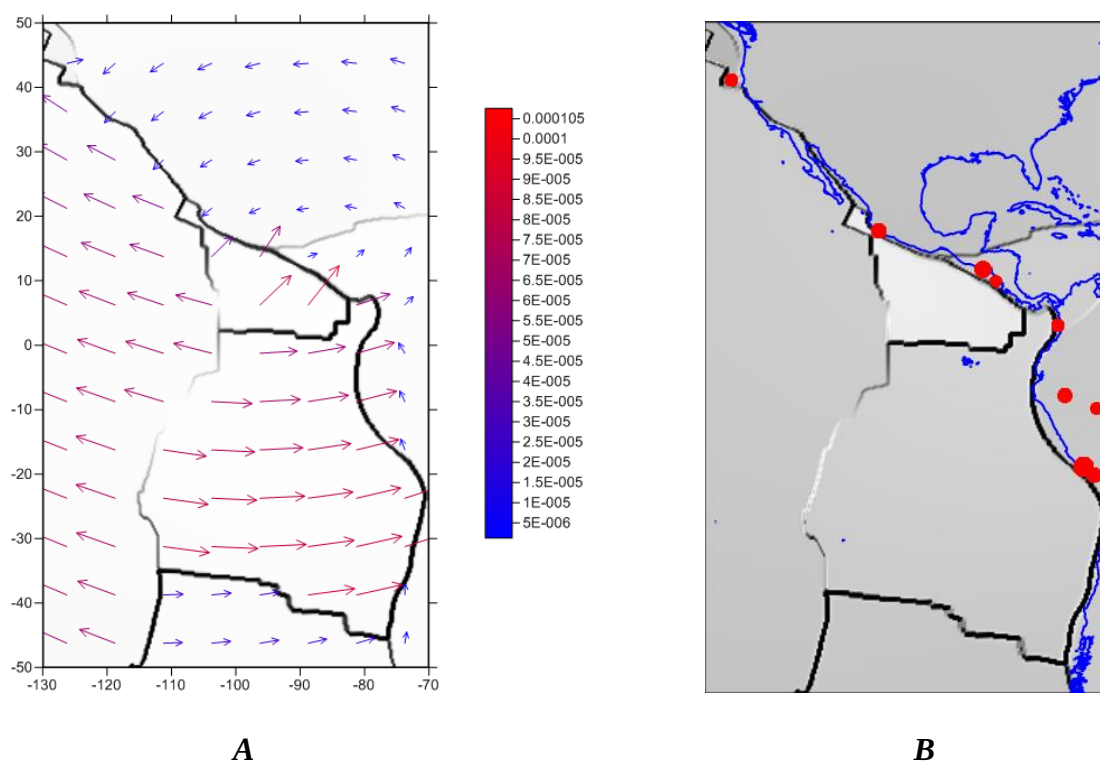
Všetky výsledky sme znova vizualizovali v softvéri Surfer. Na Obr. 39 sú znázornené hranice tektonických platní. Vidíme tu hranice Pacifickej, Antarktickej, Nazca, Juhoamerickej, Kokosovej, Karibskej, Juan de Fuca a Severoamerickej platne.



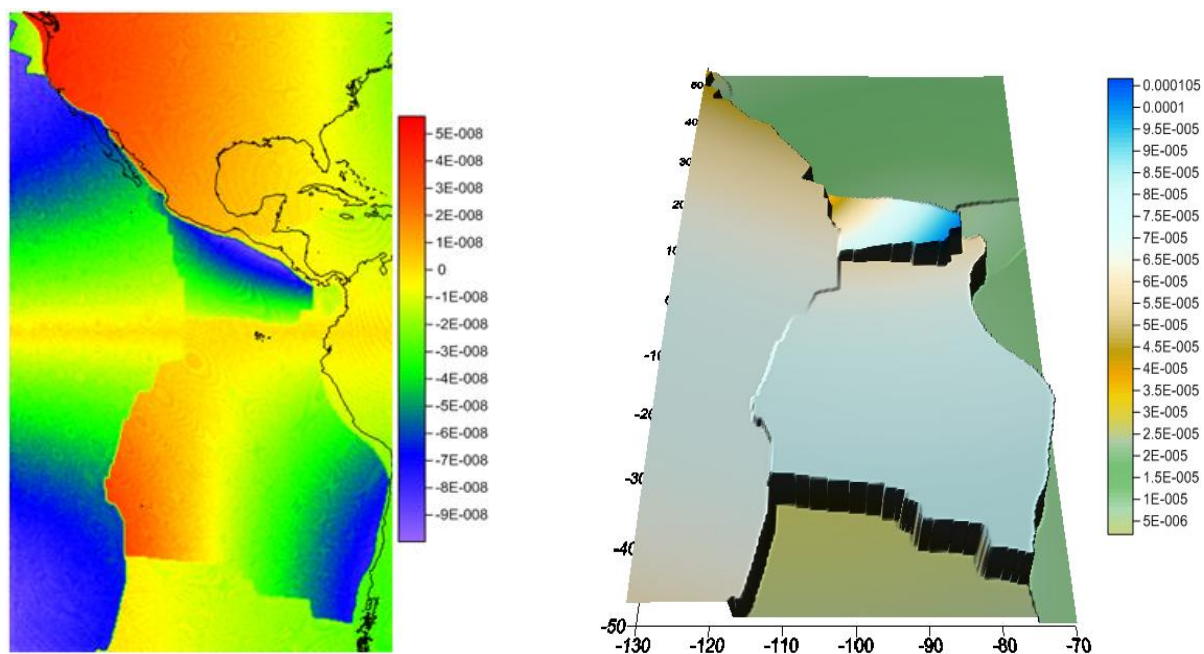
Obr. 39 Vizualizácia hraníc tektonických platní

Obr. 40 A) vektorovo znázorňuje pohyby litosferických dosiek v tejto oblasti. Na obrázku je vidieť divergencia Nazca, Antarktickej a Kokosovej platne s Pacifickou platňou. V tomto mieste nastáva najrýchlejšie rozpínanie zemskej kôry (až 10 cm/rok). Formuje sa tu Východopacifický chrbát. Na severovýchode Pacifickej platne vidíme divergenciu s Juan de Fuca platňou. V dôsledku horizontálneho pohybu Pacifickej platne vzhľadom na Severoamerickú vznikol v tejto oblasti transformný zlom San Andreas, ktorý je miestom častého výskytu menších zemetrasení. V niektorých častiach na hranici Pacifickej a Severoamerickej platne dochádza aj ku konvergencii platní, v dôsledku čoho vznikli na západnom pobreží USA Kaskádové vrchy a pohorie Sierra Nevada. Hranica Nazca a Kokosovej platne diverguje, čo zapríčinilo vznik Galapágskeho chrbta. Dôsledkom horizontálnych posunov na južnej hranici Nazca a antarktickej platni tu vznikol transformný oceánsky zlom, z ktorého vytekajúca láva vyformovala Čilský chrbát.

Na Obr. 40 B) sú zaznačené zemetrasenia s magnitúdou väčšou ako 7.0 počas rokov 2000 až 2006 [13]. Na Obr. 41 sú znázornené posuny v radiálnom smere a veľkosti výsledných posunov. Pri vizualizácii radiálnych posunov si môžeme všimnúť subdukciu Nazca platne pod Juhoamerickú platňu, na ktorej kladné radiálne posuny spôsobujú formovanie Ánd. Tento proces zapríčinil v roku 1960 na pobreží Chile zatiaľ najväčšie zaznamenané zemetrasenie. Magnitúda v epicentre dosahovala hodnôt 9.5 Richterovej stupnice. Na východnej strane Nazca platne vidíme záporné radiálne posuny predstavujúce prehlbovanie Peruánsko-čilskej priekopy. Na západnom kraji platne vidíme kladne radiálne posuny v oblasti vzniku novej kôry pozdĺž Východopacifického chrbta. Rovnaký prípad nastáva aj na severe platne, kde kladne radiálne posuny predstavujú vznik kôry pozdĺž Galapágskeho chrbta. Záporne radiálne posuny na severovýchode kokosovej platne predstavujú subdukciu pod Severoamerickú a Karibskú platňu. Dôsledkom tohto procesu vznikol severovýchodne od subdukčnej zóny v Karibskom mori vulkanický oblúk tiahnući sa od Kostariky do Guatemaly. Na vizualizácii výsledného posunutia vidíme, že najväčšie posuny sa nachádzajú práve na Kokosovej platni v oblasti subdukcie. Ničivé zemetrasenia v Mexiko City z roku 1985 a v El Salvadore z roku 2001 zapríčinil práve subdukčný proces Kokosovej platne pod Severoamerickú resp. Karibskú platňu.

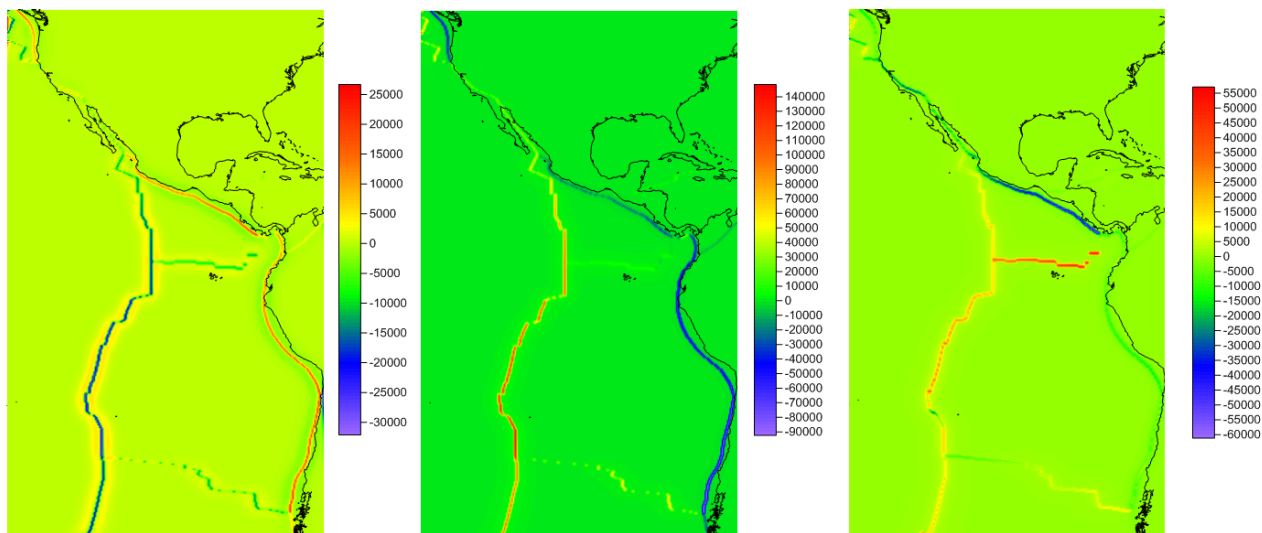


Obr. 40: A) Vektorová vizualizácia pohybov litosferických dosiek [km/rok], B): Proporčná vizualizácia zemetrasení počas rokov 2000-2006 s magnitúdou väčšou ako 7.0.

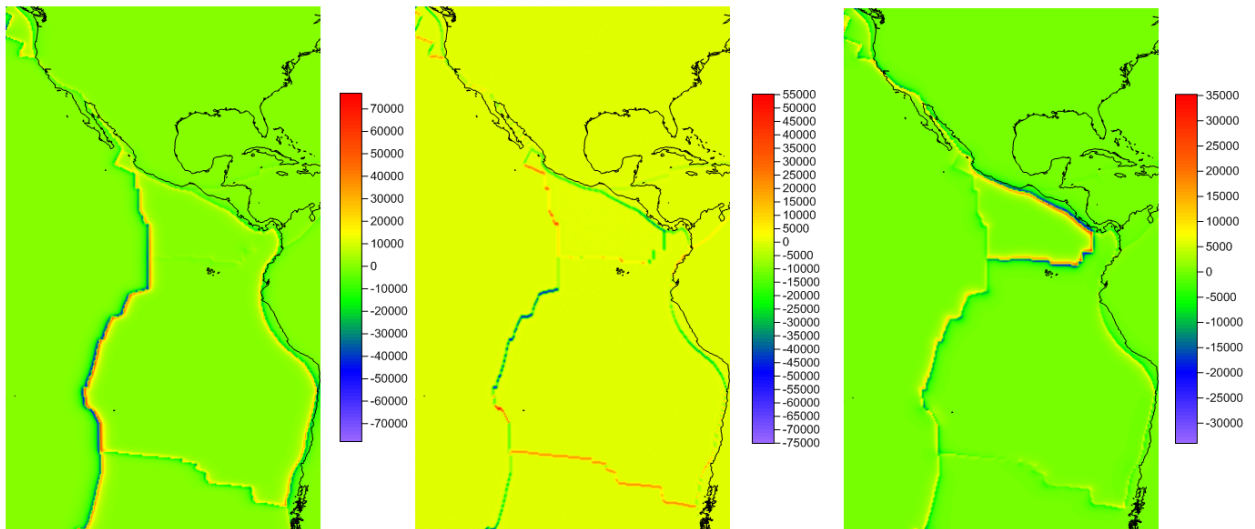


Obr.41 Posunutia v radiálnom smere UX, Výsledné posunutia Usum [km/rok].

Na nasledovných obrázkoch môžeme vidieť vizualizácie zložiek tenzora napätí v jednotlivých uzloch, na obrázku Obr. 42 sú znázornené normálové napätia SX, SY, SZ a na obrázku Obr. 43 tangenciálne napätia SXY, SYZ, SXZ.



Obr. 42 Priebeg normálových napätí SX,SY,SZ pri lokálnom experimente pre územie USA, Strednej Ameriky a západného pobrežia Južnej Ameriky.



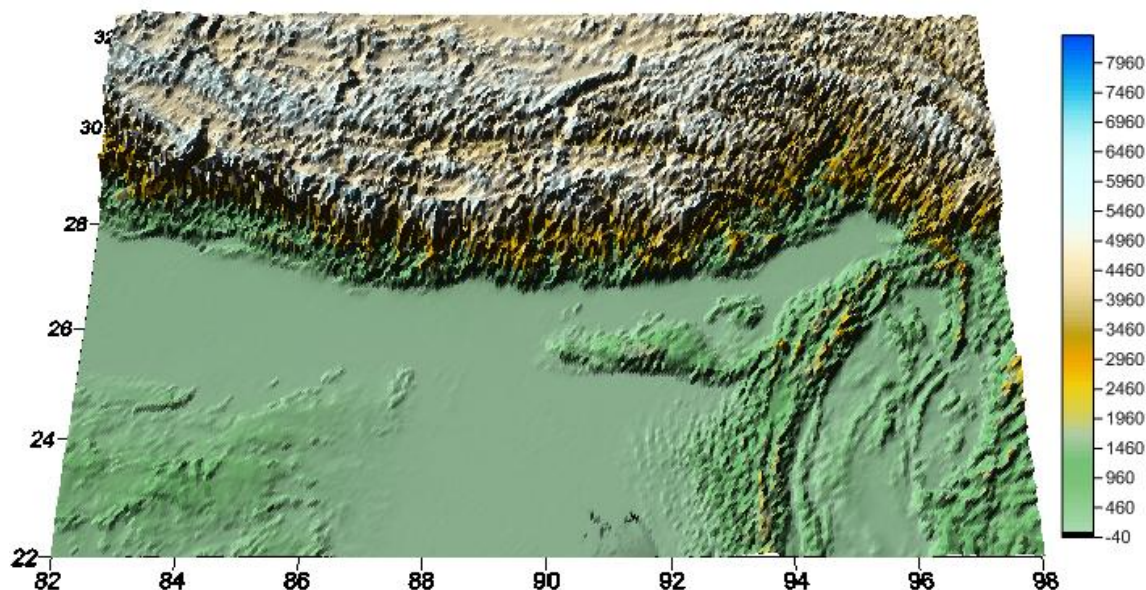
Obr. 43 Priebeh tangenciálnych napätí S_{XY} , S_{XZ} , S_{YZ} pri lokálnom experimente pre územie USA, Strednej Ameriky a západného pobrežia Južnej Ameriky.

6.5. Regionálny numerický experiment v oblasti Himaláji

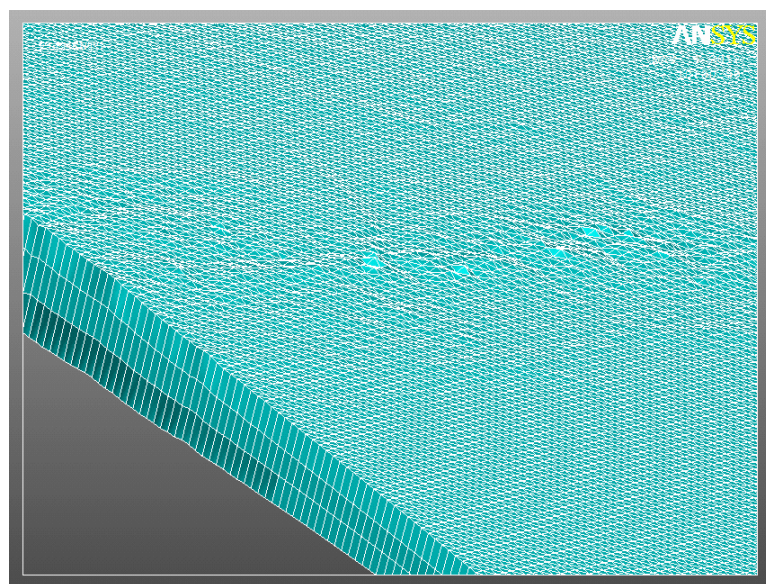
Výpočtová oblasť regionálneho numerického experimentu je ohraničená rovnobežkami B : ($22^\circ, 32^\circ$) a poludníkmi L : ($82^\circ, 98^\circ$) (Obr.44). Pri tomto numerickom experimente bol reálny zemský povrch aproximovaný množinou trojuholníkov. Súradnice vrcholov týchto trojuholníkov boli vygenerované na povrchu Zeme a na oceánskom dne zo SRTM30 [11], (Obr. 45). Celá výpočtová oblasť bola na základe modelu CRUST 2.0. [2] rozdelená do troch vrstiev predstavujúcich hornú, strednú a dolnú časť zemskej kôry. Pre každú vrstvu boli zadane rozdielne hodnoty Poissonovej konštanty a Youngovho modulu pružnosti získané z článku [7]. Dolná hranica spodnej vrstvy predstavovala MOHO plochu a bola tiež aproximovaná množinou trojuholníkov. Diskretizáciou vzniklo delenie na zemskom povrchu $0.05^\circ \times 0.05^\circ$ (Obr. 46). V Tab. 5 sa nachádza počet uzlov, elementov a rovníc, ktoré vstupovali do výpočtu.



Obr. 44: Vybratá oblasť pre regionálny experiment.



Obr. 45 Reálna topografia zemského povrchu použitá pri regionálnom numerickom experimente.



Obr. 46 Detail výpočtovej oblasti s rozdelením na jednotlivé vrstvy.

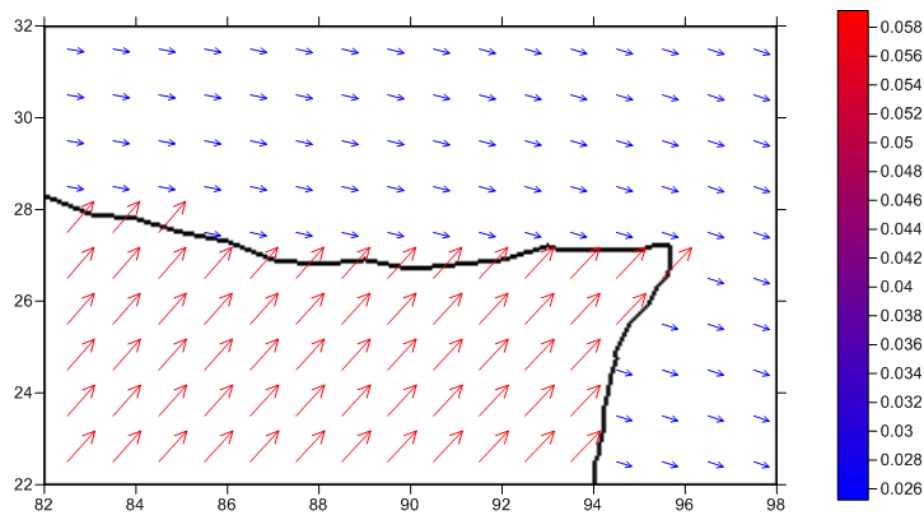
Celkový počet uzlov	258 084	Celkový počet neznámych	580 689
Celkový počet elementov	384 000	Celkový počet rovníc	387 126
Počet uzlov na povrchu Zeme	64 521		

Tab. 5: Štatistika regionálneho experimentu.

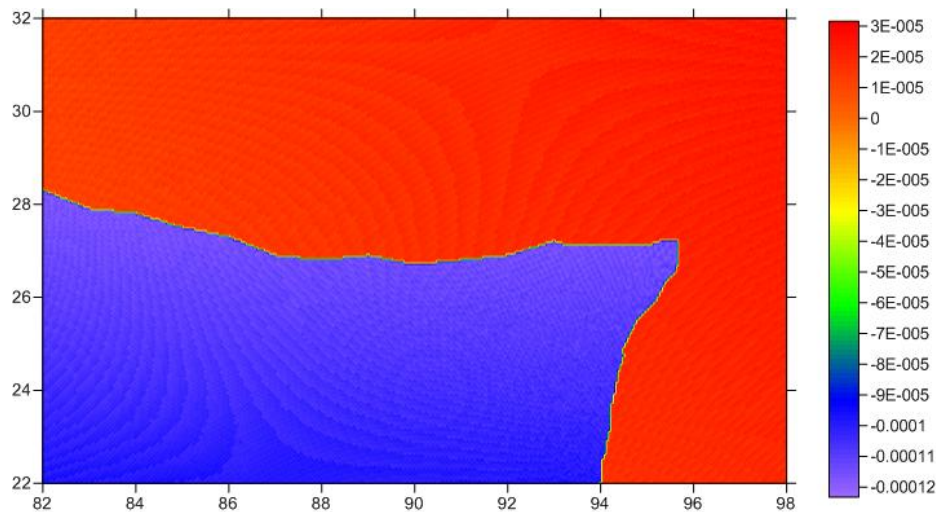
Vyriešením modelu sme získali zložky tenzora napätí ($SX, SY, SZ, SXY, SYZ, SXZ$) v jednotlivých uzlových bodoch a výsledne posunutia U_{sum} .

6.5.1. Zobrazenie tektoniky regionálneho experimentu a zhodnotenie výsledkov

Výsledky regionálneho experimentu sme vizualizovali v softvéri ANSYS a Surfer. Na Obr. 47 sú vektorovo znázornené pohyby litosferických platní v tejto oblasti. Na obrázku vidieť konvergenciu Indickej a Eurázijskej platne. Tento proces dosahuje rýchlosť až 5,8 cm/rok. Na Obr. 48 znázorňujúcom radiálne posuny si môžeme všimnúť subdukciu Indickej platne pod Eurázijskú. Dôsledkom tohto procesu vzniklo na strane Eurázijskej platne orogenetické pásmo, ktoré tvorí Tibetskú náhornú plošinu a Himaláje.

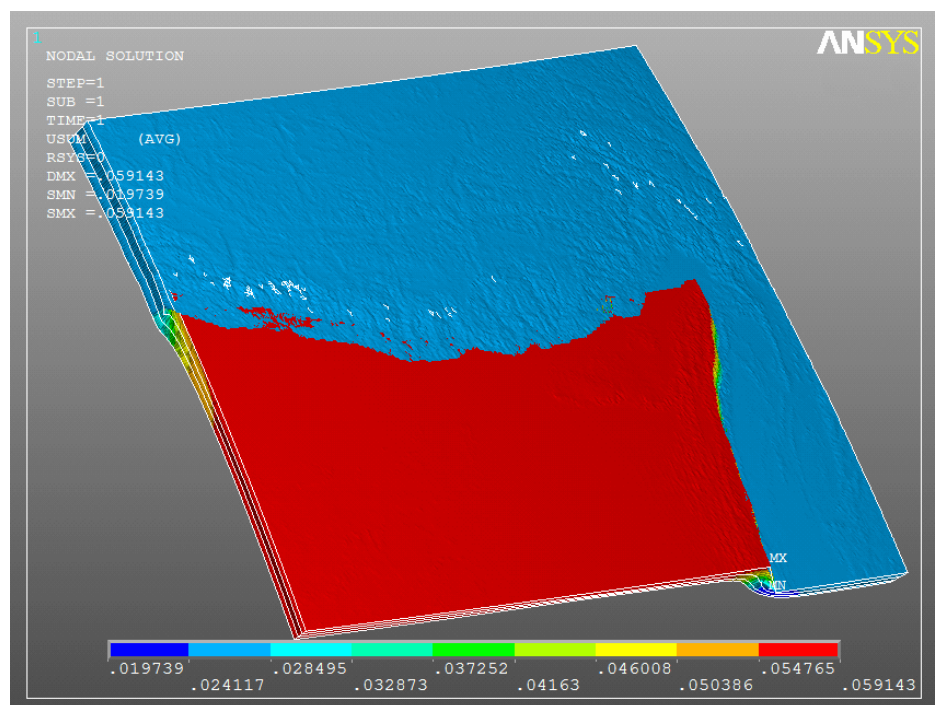


Obr. 47 Vektorová vizualizácia pohybov litosferických dosiek [m/rok].

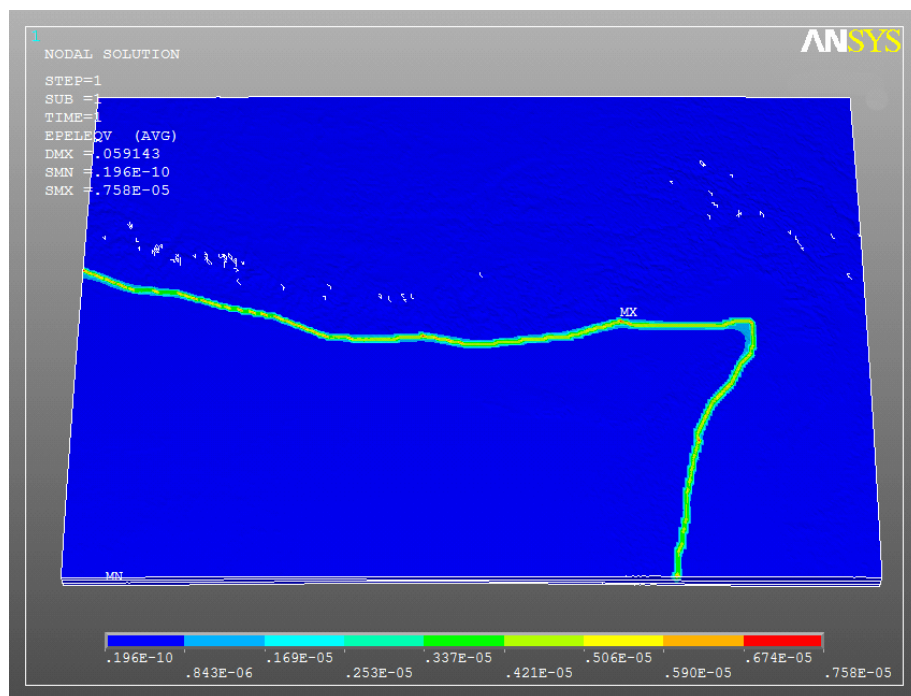


Obr. 48 Posunutia v radiálnom smere UX [m/rok].

Obr. 49 znázorňuje výsledné posunutia U_{sum} . Deformačný škálovací faktor bol nastavený na hodnotu 1 000 000 (čo predstavuje deformáciu po 1 000 000 rokoch pri konštantných posunoch). Vidíme tu vertikálne zaoblenia Indickej platne, predstavujúce jej podsúvanie pod Eurázijskú. Obr. 50 sú zobrazené Von Mises napätia τ_v dané rovnakým vzťahom ako pri globálnom experimente.

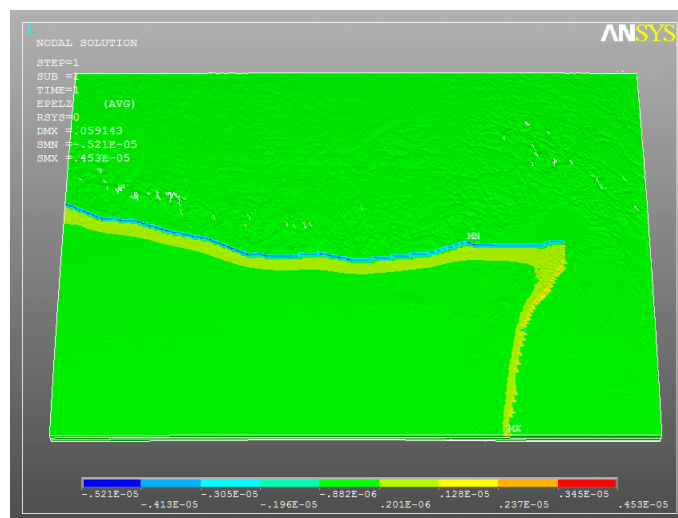
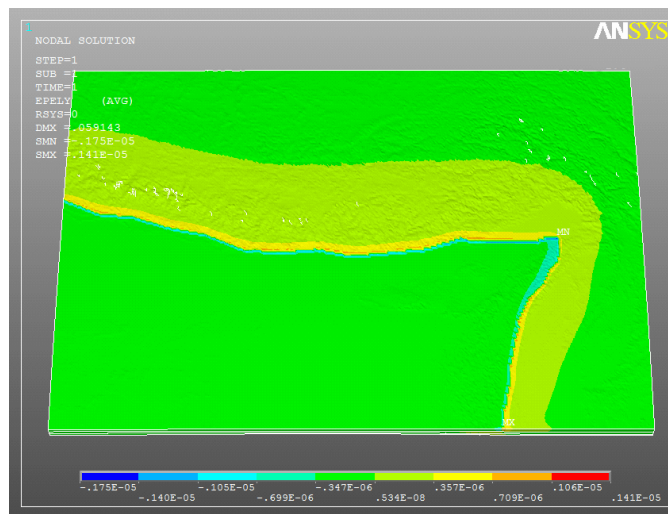
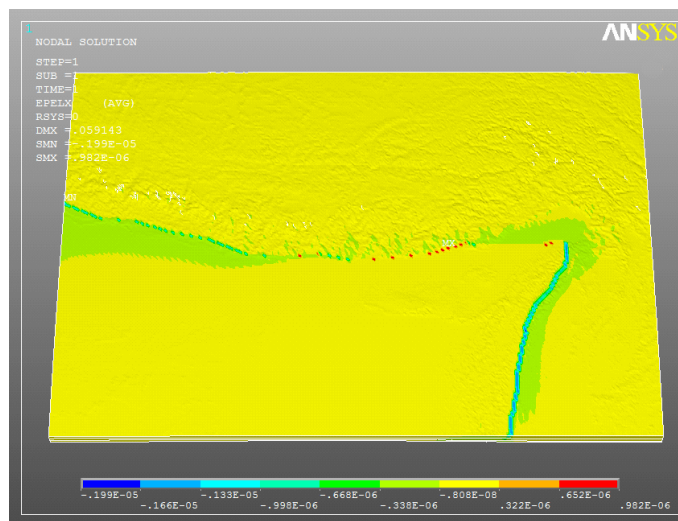


Obr. 49 Výsledné posunutia U_{sum} [m/rok] a deformácia.

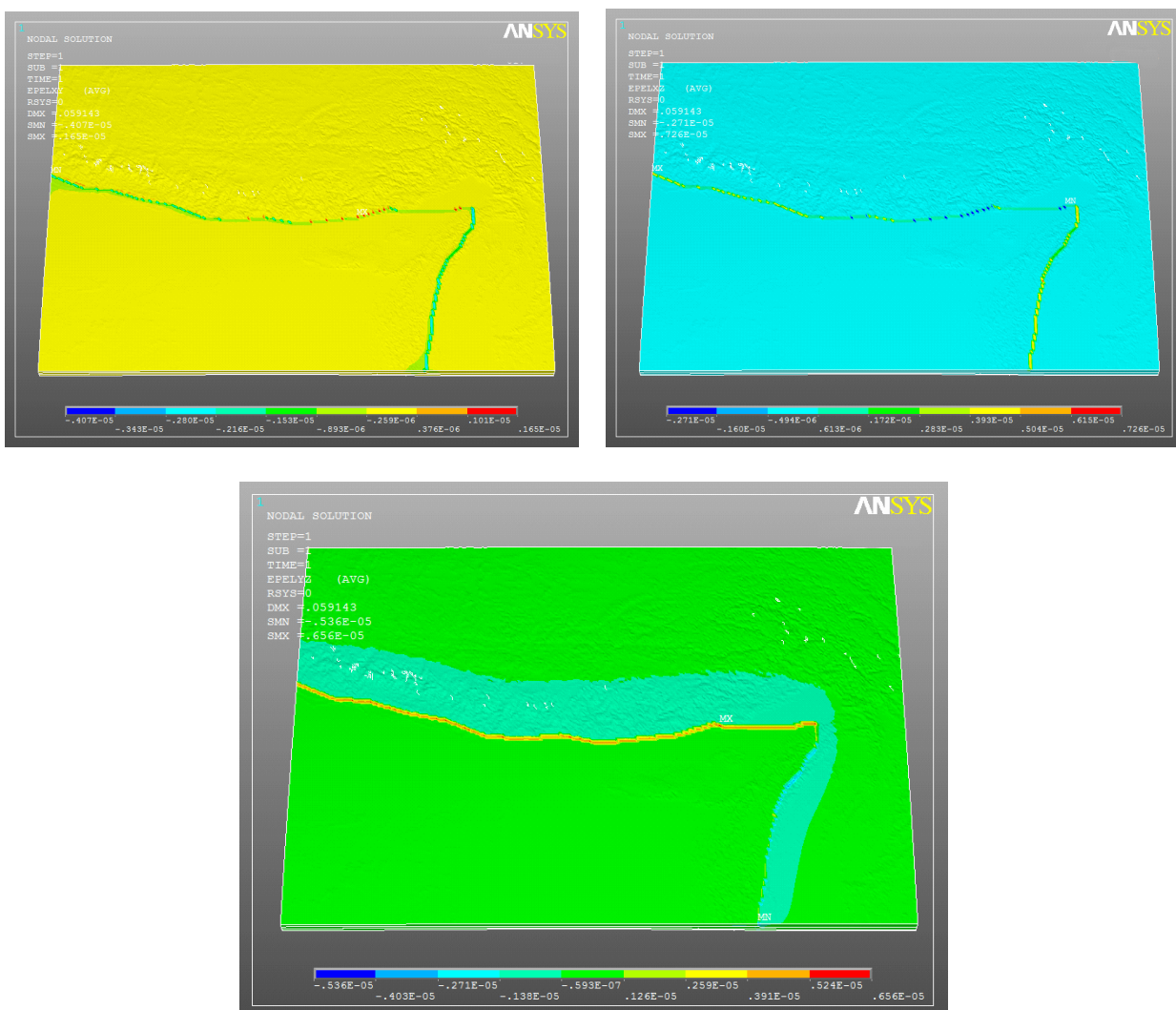


Obr. 50 Priebeh von-Mises-ových napätí.

Na nasledujúcich obrázkoch sú znázornené veľkosti zložiek tenzora napätí v jednotlivých uzloch. Na Obr. 51 su vizualizované normalové napätia S_X, S_Y, S_Z a na Obr. 52 tangenciálne napätia S_{XY}, S_{YZ}, S_{XZ} .



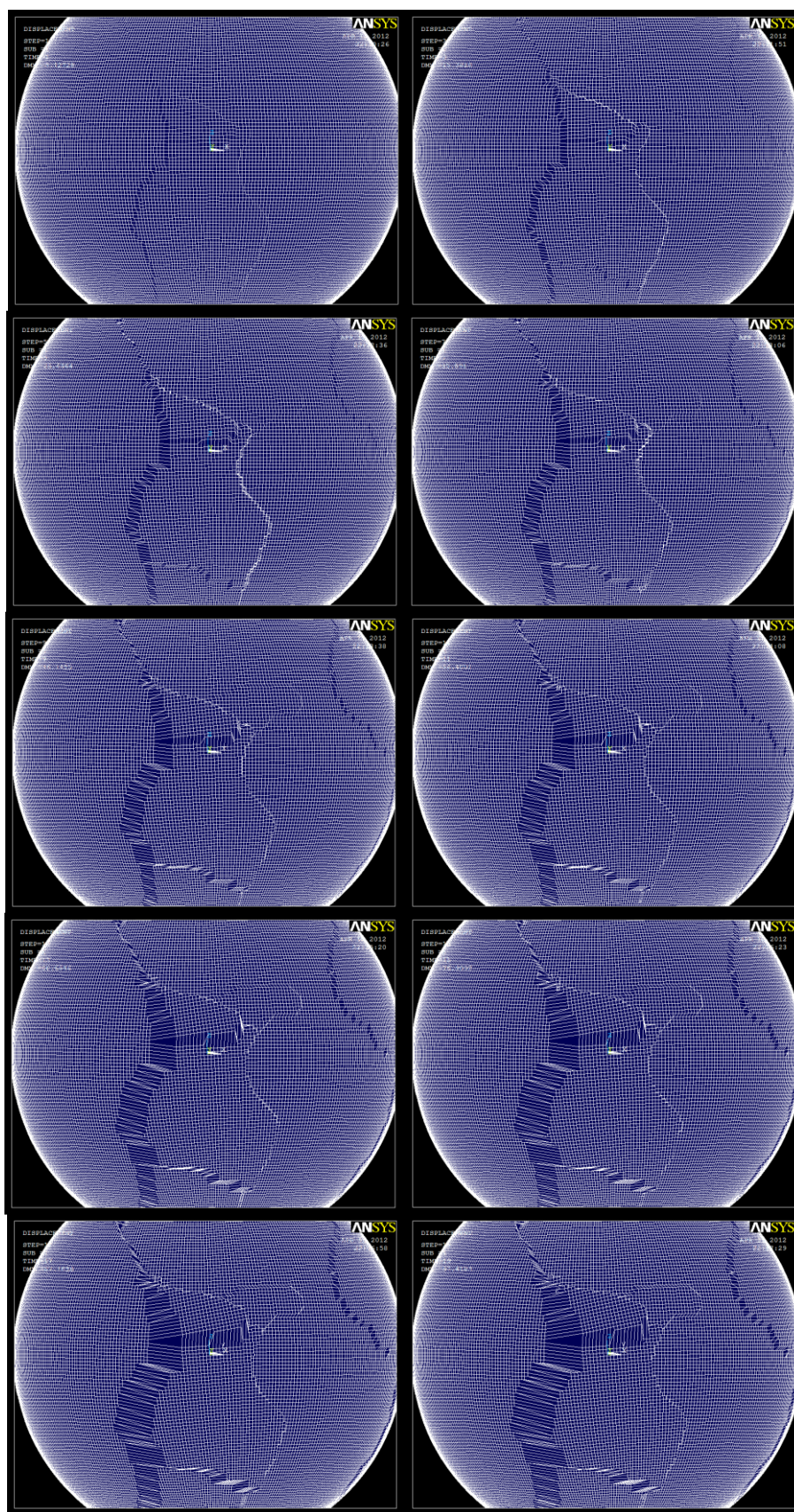
Obr. 51 Normálové napätia SX,SY,SZ



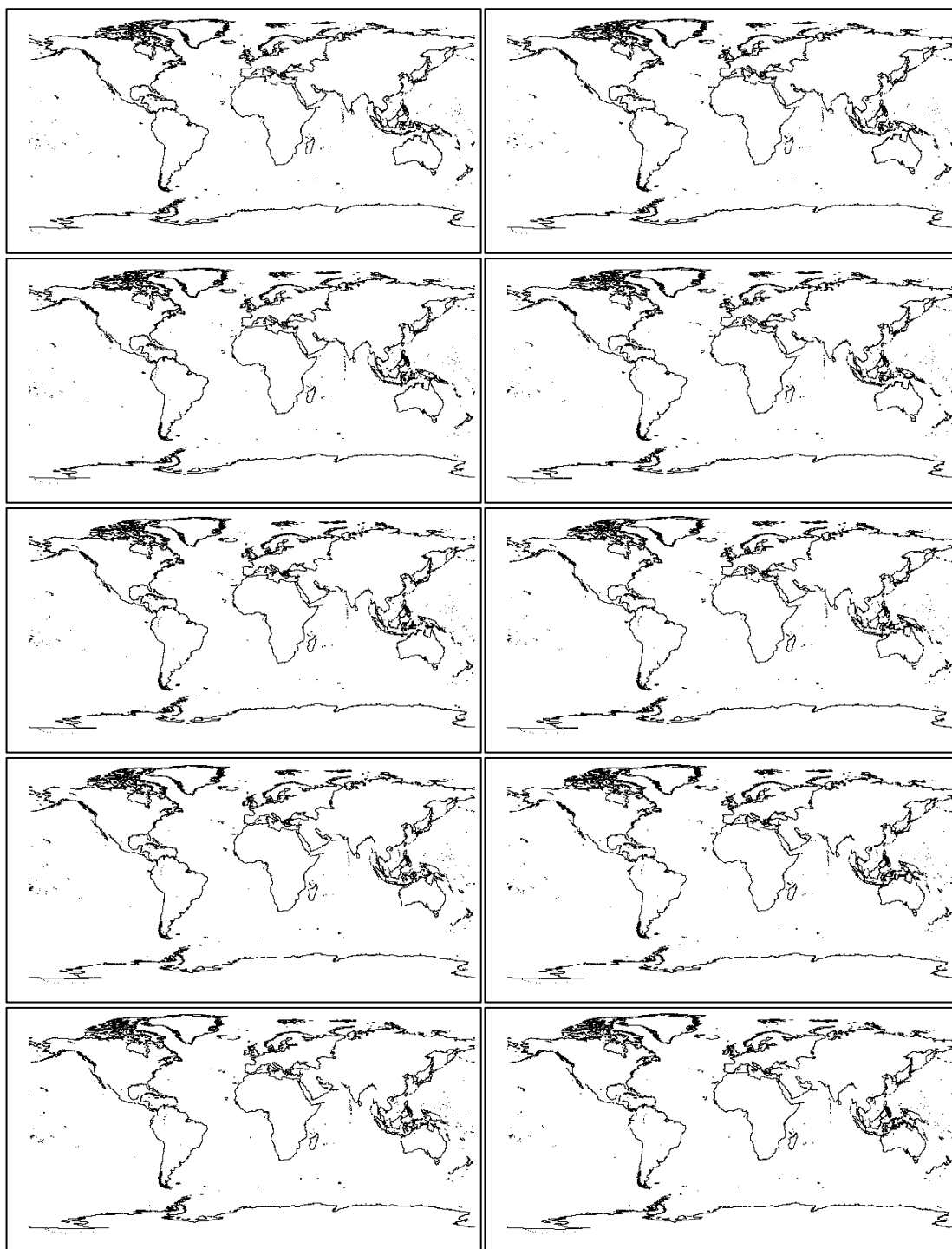
Obr. 51 Tangenciálne napätia SXY,SXZ,SYZ

6.6. Simulácia pohybu litosferických dosiek

Na simuláciu bol použitý rovnaký konečno-prvkový model ako pri globálnom experimente (kapitola 6.3). Na tento model boli postupne aplikované $500000i$ násobky ($i = 1,2,3 \dots 20$) Dirichletových podmienok získaných pre globálny model. Animácia predstavuje simuláciu pohybu litosferických dosiek na nasledujúcich 10 000 000 rokov s krokom po 500 000 rokoch. Na Obr. 52 je sled obrázkov animácie predstavujúcej pohybu litosferických dosiek z tretieho lokálneho experimentu (kapitola 6.4.3). Obr. 53 znázorňuje jednotlivé snímky animácie simulácie pohybu kontinentov.



Obr. 44 Sled obrázkov animácie simulácie pohybu litosferických dosiek v programe ANSYS.



Obr. 44 Sled obrázkov animácie simulácie pohybu kontinentov v prostredí Surfer.

Zoznam použitej literatúry

- [1] ANSYS. <http://www.ansys.com/>
- [2] CRUST 2.0. <http://igppweb.ucsd.edu/~gabi/crust2.html>
- [3] Čabalová, D. - Baliak, F. Kopecký, M. *Geológia*. Bratislava: STU, 2009
- [4] Feynman, R. P. - Leighton, R. B. - Sands, M. *Feynmanovy prednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*. Havlíčkův Brod: Fragment, 2001. 806 s. ISBN 80-7200-420-4.
- [5] SURFER. <http://www.goldensoftware.com/products/surfer/surfer.html>
- [6] Hefty, J. - Husár, L. *Družicová geodézia - globálny polohový systém*. Bratislava: STU, 2003. 186 s. ISBN 80-227-1823-8
- [7] Joshi, G. - Hayashi, D. *Numerical Modeling of Neotectonic Movements and State of Stresses in the Central Seismic Gap Region, Garhwal Himalaya*, Journal of Mountain Science. Volume 5, Number 4 (2008), 279-298
- [8] Mathematica. <http://www.wolfram.com/mathematica/>
- [9] Míka, S. - Kufner, A. *Parciální diferenciální rovnice I : Stacionární rovnice*. Praha: SNTL, 1983. 181 s.
- [10] Reddy, J. *An Introduction to the Finite Element*. New York: McGraw-Hill, 1993. 684 s. ISBN 0-07-112799-2.
- [11] SRTM30. <http://www.dgadv.com/srtm30/>
- [12] UNAVCO. http://www.unavco.org/community_science/science-support/crustal_motion
- [13] USGS. <http://earthquake.usgs.gov/earthquakes/recenteqsww>
- [14] Gašparovič, M. *Geodynamika Strednej Európy*, Bakalárska práca, Bratislava: STU, 2010.
- [15] Boudová, K. *Štúdium geodynamických procesov na území Slovenska*, Bakalárska práca, Bratislava: STU, 2011.

Zoznam príloh

1. Príloha č.1: PHP skript na získanie a spracovanie okrajových podmienok.
2. Príloha č.2: Program v softvéri Mathematica na transformáciu karteziánskych súradníc na sférické.
3. Príloha č.3: Program v softvéri Mathematica na transformáciu elipsiodických súradníc na karteziánske.
4. Príloha č.4 Program v softvéri Mathematica na transformáciu posunov v karteziánskom súradnicovom systéme do lokálneho topocentrického systému.
5. Príloha č.5: Ukážka vstupného súboru geometrie pre program ANSYS