

**SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE**  
**STAVEBNÁ FAKULTA**

Evidenčné číslo: SVF-5342-67660

**STOCHASTICKÉ  
DIFERENCIÁLNE ROVNICE  
BAKALÁRSKA PRÁCA**

|                                  |                                                    |
|----------------------------------|----------------------------------------------------|
| <b>Štúdijný program:</b>         | Matematicko-počítačové modelovanie                 |
| <b>Číslo študijného odboru:</b>  | 1114                                               |
| <b>Názov študijného odboru:</b>  | Aplikovaná matematika                              |
| <b>Školiace pracovisko:</b>      | Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie (SvF) |
| <b>Vedúci bakalárskej práce:</b> | Peter Sarkoci Ph.D.                                |

**Bratislava 2012**

**Viera Kleinová**

## **Pod'akovanie**

Touto cestou by som chcela pod'akovat' Petrovi Sarkocimu, Ph.D. za cenné pripomienky a odborné konzultácie počas vypracovania tejto práce. V neposlednom rade chcem vyjadriť svoju úprimnú vd'aku rodičom, ktorí ma viedli k úcte ku vzdelanosti.

### **Čestné prehlásenie**

Vyhlasujem, že bakalársku prácu Stochastické diferenciálne rovnice som vypracovala samostatne na základe použitej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

Vlastnoručný podpis

## Abstrakt

V práci sa zaoberáme numerickými metódami riešenia SDE v silnom zmysle slova. Prehľadová časť práce spomína viacero numerických schém silného riešenia SDE. V programovacom jazyku C implementujeme jednako základnú Eulerovu metódu a d'alej Milsteinovu metódu. Na modelových príkladoch SDE odhadujeme rád konvergenčiu metód vzhladom k diskretizačnej jemnosti v časovej súradnici. Okrem metód silného riešenia, zaoberáme sa aj riešeniami zodpovedajúcich Fokker-Planckovych PDE. Z nich vypočítané časové závislosti hustôt porovnávame s histogramami hodnôt silných riešení. Numerickú metódu riešenia Fokker-Planckovej rovnice implementujeme v CAS Mathematica<sup>TM</sup>.

**Kľúčové slová:** Stochastická difrenenciálna rovnica, Trajektória stochastického procesu, Fokker-Planckova parciálna diferenciálna rovnica, Hustota rozdelenia stochastického procesu

## Abstract

The work is devoted in the numerical methods of strong solutions to SDE's. The review part of the work mentions several numerical schemes. Out of these, the Euler method and the Milstein method are implemented in the programming language C. Using several sample SDE's we estimate the order of convergence of these methods w.r.t. the discretization step size in the time coordinate. Along with the strong solutions to SDE's we examine also the solutions to the corresponding Fokker-Planck PDE's. The time evolutions of probability density functions obtained from this PDE are compared with histograms of values of the corresponding strong solutions. The numerical solution of the Fokker-Planck PDE is implemented in CAS Mathematica<sup>TM</sup>.

**Keywords:** Stochastic differential equation, Realization of a stochastic process, Fokker-Planckova partial differential equation, Probability density function of a stochastic process

**MSC-2010:** 60H10 34F05 35Q84

# **Obsah**

|          |                                                                         |           |
|----------|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Úvod</b>                                                             | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Základné pojmy</b>                                                   | <b>2</b>  |
| 2.1      | Brownov pohyb . . . . .                                                 | 2         |
| 2.2      | Stochastické diferenciálne rovnice . . . . .                            | 4         |
| 2.3      | Vývoj hustoty pravdepodobnosti . . . . .                                | 9         |
| <b>3</b> | <b>Numerické riešenie SDE a Fokker-Planckovej rovnice</b>               | <b>9</b>  |
| 3.1      | Numerická approximácia riešenia . . . . .                               | 9         |
| 3.1.1    | Eulerova schéma . . . . .                                               | 10        |
| 3.1.2    | Milsteinova schéma . . . . .                                            | 10        |
| 3.1.3    | Taylorova schéma rádu 1.5 . . . . .                                     | 11        |
| 3.1.4    | Porovnanie schém . . . . .                                              | 11        |
| 3.2      | Numerická approximácia vývoja hustoty . . . . .                         | 12        |
| <b>4</b> | <b>Numerické experimenty</b>                                            | <b>13</b> |
| 4.1      | Numerický rád konvergencie . . . . .                                    | 13        |
| 4.2      | Vývoj hustoty pravdepodobnosti . . . . .                                | 15        |
| 4.3      | Porovnanie riešení SDE s riešeniami Fokker-Planckovej rovnice . . . . . | 16        |
| <b>5</b> | <b>Záverečná poznámka</b>                                               | <b>18</b> |
| <b>6</b> | <b>Appendix A</b>                                                       | <b>22</b> |
| <b>7</b> | <b>Appendix B</b>                                                       | <b>24</b> |

# 1 Úvod

Stochastické diferenciálne rovnice, od obdobia kedy ich matematická komunita vzala na vedomie, našli uplatnenie v najrozmanitejších odvetviach aplikovanej matematiky ako aj teoretickej fyziky. V posledných dekádach sú mimoriadne populárne najmä aplikácie vo finančnej matematike. Stochastické diferenciálne rovnice však súvisia s triedou advekčno-difúznych problémov ktoré sa prirodzeným spôsobom objavujú vo fyzike kontinua a sprostredkovane v najrozmanitejších odvetviach fyziky. Stochastické parciálne diferenciálne rovnice majú prekvapivé súvislosti v niektorých prístupoch ku kvantovej teórii poľa a v štatistickej mechanike.

Stochastická diferenciálna rovnica vzniká tam, kde je dynamický systém (štandardne modelovaný obyčajnou diferenciálnou rovnicou) ovplyvňovaný dopredu neznámym šumom. Ukazuje sa však, že tento šum je z matematického hľadiska komplikovaný objekt a to až natoľko, že po jeho zahrnutí do matematického modelu už nie je možné tento analyzovať klasickými metódami. Matematickou analýzou takto pozmenených modelov sa zaoberá odvetvie stochastického kalkulu.

V tejto práci sa zaoberáme výhradne jednorozmernými obyčajnými diferenciálnymi rovnicami, konkrétnie metódami numerického výpočtu ich trajektórií a hustôt pravdepodobnosti.

## 2 Základné pojmy

V tejto kapitole iba stručne spomenieme základné pojmy, ktoré budeme neskôr využívať.

*Pravdepodobnosťným priestorom* nazveme usporiadanú trojicu  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , kde  $\Omega$  je množina všetkých možných elementárnych javov,  $\mathcal{A}$  je  $\sigma$ -algebra na množine  $\Omega$  a  $P$  pravdepodobnosťná miera. Zobrazenie  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  je *náhodná premenná* na pravdepodobnosťnom priestore  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , ak pre každé  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  platí

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < t\} \in \mathcal{A}.$$

*Stochastický proces* na pravdepodobnosťnom priestore  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  s množinou časov  $T$  je zobrazenie  $D: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$  také, že pre každé  $t \in T$  je zobrazenie

$$D_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}: \omega \mapsto D(\omega, t)$$

náhodná premenná. Zobrazeniu  $D_t$  sa hovorí *náhodná premenná procesu D v čase t*. *Trajektória* stochastického procesu  $D$  je každé zobrazenie

$$\text{Trj}[D, \omega]: T \rightarrow \mathbb{R}: t \mapsto D(\omega, t).$$

*Prírastok stochastického procesu D* na intervale  $[t, u]$  je náhodná premenná  $D_u - D_t$  (čiže rozdiel medzi hodnotou, ktorú proces nadobúda v čase  $t$  a hodnotou, ktorú nadobúda v čase  $u$ ).

### 2.1 Brownov pohyb

V roku 1828 pozoroval škótsky botanik Róbert Brown pohyb peľových zrniečok vo vode, ktorý bol nepravidelný a náhodný. Róbert Brown nevedel tento pohyb zdôvodniť. Albert Einstein v roku 1905 objasnil pravú podstatu tohto javu [1]. Matematická formulácia Brownovo pohybu, ako špeciálneho stochastického procesu, bola vytvorená roku 1931 americkým matematikom Norbertom Wienerom. Norbert Wiener v roku 1923 dokázal existenciu Brownovo pohybu, ako matematického objektu, preto je Brownov pohyb tiež známy pod názvom Wienerov proces.

**Definícia 1.** *Brownov pohyb* je stochastický proces  $B: \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  s vlastnosťami:

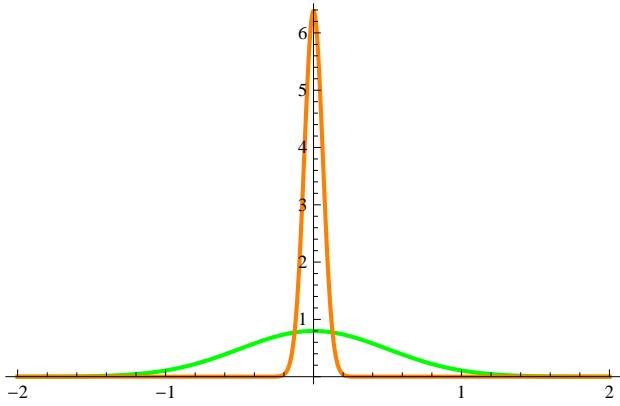
1.  $P[B_0 = 0] = 1$

2. pre každé  $t, u \in R_{\geq 0}$ , kde  $t < u$  a platí  $(B_u - B_t) \sim N(0, u - t)$

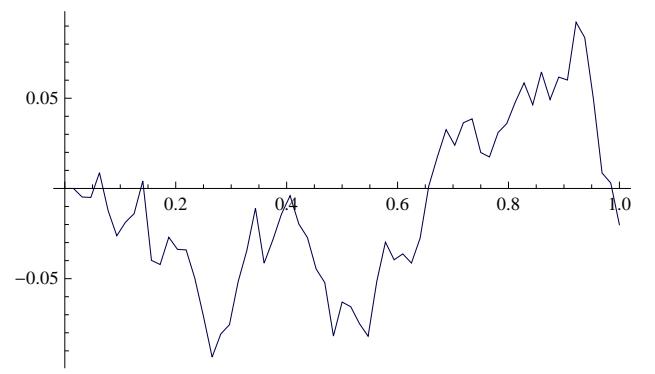
3. pre každé  $s, t, u \in R_{\geq 0}$ , kde  $s < t < u$  a platí  $B_s \perp (B_u - B_t)$

□

Tieto tri vlastnosti sa pokúsime ilustrovať na už spomínanom príklade pohybu peľovej častice vo vode. Bod 1 definície hovorí o tom, že pohyb častice v čase 0 začína v pozícii so súradnicou  $x = 0$ . Podľa bodu 2 definície sú prírastky polohy častice rozdelené normálne so stredom 0 a disperziou  $u - t$ . V tretom bode definície hovoríme o nezávislosti medzi polohou častice v čase  $s$  a prírastkom polohy častice medzi časmi  $u$  a  $t$ . To znamená, že poloha častice v čase  $s$  nijako neovplyvňuje rozdiel polôh častice medzi časmi  $u$  a  $t$ , za predpokladu, že  $s \notin [u, t]$ .



**Obr. 1:** Grafy hustoty normálneho rozdelenia zelený so strednou hodnotou 0 a disperziou  $\frac{1}{2}$  a oranžový so strednou hodnotou 0 a disperziou  $\frac{1}{4}$ .



**Obr. 2:** Graf jednej trajektórie Brownovho pohybu znázornený na časovom intervale  $[0, 1]$  s časovou diskretizáciou  $\frac{1}{2^6}$ .

Obrázok 2 znázorňuje jednu trajektóriu Brownovho pohybu na equidištančne diskretizovanom čase. Jedna spomedzi metód simulácie Brownovho pohybu spočíva v realizovaní náhodnej premennej

$$B_t = \sum_{i=0}^t I_i$$

kde  $I_i \sim N(0, \Delta t)$  pre  $i = 1, 2, \dots, n$  a  $I_i \perp I_j$  ak  $i \neq j$ . Disperzia  $I_i$  závisí od jemnosti časovej diskretizácie.

## 2.2 Stochastické diferenciálne rovnice

Stochastické diferenciálne rovnice (ďalej len SDE) vznikajú vnesením takzvaného šumu, stochastického vplyvu, do obyčajných diferenciálnych rovníc. Šum je stochastický proces  $S: \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ , ktorý má nasledovné tri vlastnosti:

1.  $E[S_t] = 0$  pre každé  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
2.  $S_t \perp S_u$  pre  $t \neq s$
3. proces  $S$  je *stacionárny*. To znamená, že pre každé  $n \in \mathbb{N}$ , pre každé  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  a pre každé  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  je

$$(S_{t_1}, S_{t_2}, \dots, S_{t_n}) \sim (S_{t_1+t}, S_{t_2+t}, \dots, S_{t_n+t})$$

Šum  $S: \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  má bud' nulovú disperziu  $D[S_t] = 0$ , pre každé  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , alebo s pravdepodobnosťou 1 má nikde spojité trajektórie [6]. Prípad  $D[S_t] = 0$  samozrejme nie je dobrým modelom šumu a preto túto situáciu vôbec nebudeme uvažovať.

**Definícia 2.** Nech  $S: \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  je stochastický proces. *Stochastická diferenciálna rovnica* riadená procesom  $S$  je rovnica o neznámom stochastickom procese  $X: \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  tvaru

$$\frac{dX_t}{dt} = \mu(X_t, t) + \sigma(X_t, t)S_t \quad (1)$$

kde  $\mu: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  sa nazýva *deterministickým členom* a  $\sigma: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  *stochastickým členom* SDE. □

V definícii predstavuje stochastický proces  $S$  "šum". Ak by stochastický proces  $S$  mal spojité trajektórie, nevznikol by žiadny problém s interpretáciou derivácie na ľavej strane SDE. Ako sme už spomenuli, v zaujímavých situáciách proces  $S$  nie je s pravdepodobnosťou 1 spojity v žiadnom bode. To ale predstavuje problém, pretože derivácia diferencovateľnej funkcie (ľavá strana (1)) je funkcia prvej Baireovej kategórie a teda nemôže byť nikde spojitá (pravá strana (1)). Preto treba venovať zvýšenú pozornosť interpretácií derivácie na ľavej strane (1). Jej skutočný význam je v konečnom dôsledku určený pojmom riešenia SDE.

**Definícia 3.** Stochastický proces  $X : \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  sa nazýva *riešením SDE* v tvare (1), ak pre každé  $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  existuje Riemannov integrál  $\int_0^t \mu(X_s, s)ds$  a Itoov integrál  $\int_0^t \sigma(X_s, s)dB(s)$  a splňajú vztah

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dB(s). \quad (2)$$

□

Pretože Itôov integrál v (2) je integrál podľa Brownovho pohybu, používa sa ako alternatívny zápis (1) skrátený tvar:

$$dX(t) = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dB_t. \quad (3)$$

V rovnici (3) je deterministický a stochastický člen vopred známy a sú závislé od polohy a času,  $X$  je neznámy proces a  $B$  je Brownov pohyb.

**Príklad 1.** Stochastická diferenciálna rovnica v tvare

$$dX_t = X_t dt + 0.5X_t dB_t \quad (4)$$

$$X_0 = 1$$

má riešenie  $X_t = e^{(1-0.5^2)t+0.5B_t}$ . Ide o špeciálny prípad *geometrického Brownovho pohybu*. Neskôr budeme potrebovať strednú hodnotu tohto riešenia. Je daná vztahom  $\mathbb{E}(X_t) = e^t$ .

**Príklad 2.** Stochastická diferenciálna rovnica

$$dX_t = -2X_t dt + e^{-2t} dB_t \quad (5)$$

$$X_0 = 0$$

popisuje stochastický pohyb častice, ktorá je pritahovaná ku svojej počiatočnej polohe  $x = 0$ . Navyše v čase klesá jej ochota nechat' sa ovplyvniť stochastickými vplyvmi okolia a teda jej poloha konverguje k 0. Riešením tejto SDE je stochastický proces  $X_t = e^{-2t}B_t$ . Jeho stredná hodnota je v čase konštantná a rovná 0.

**Príklad 3.** Stochastická diferenciálna rovnica

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{-2X}{(X^2 + 1)^3} dt + \frac{1}{X^2 + 1} dB_t \\ X_0 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

popisuje stochastický pohyb častice v ktorom sa súčasne prejavujú dve protichodné tendencie. Čím je častica bližšie ku svojej počiatočnej polohe, tým viac je ovplyvňovaná šumom a naopak, čím d'alej je častica od svojej počiatočnej pozície, tým viac je k nej pritiahovaná a menej ovplyvňovaná stochastickými vplyvmi okolia. Častica je teda tahaná k bodu 0 odkiaľ je ale náhodne odháňaná vplyvom šumu. Presné riešenie tejto SDE je stochastický proces  $X_t = f(B_t) - 1/f(B_t)$  kde

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt{4 + 9x^2} - 3x}}.$$

Stredná hodnota tohto riešenia je v čase konštantná a rovná 0.

Obrázky 3, 4, 5, 6 simulujú 160 trajektórií Brownovho pohybu a presných riešení SDE (4), (5) a (6).

Pri hľadaní riešení sa ako dôležitý nástroj ukazuje Itôova lemma. O stochastickom procese  $I: \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  hovoríme, že je *Itôovský* ak sa dá vyjadriť ako súčet Riemannovho integrálu a Itôovho integrálu v tvare

$$I_t = I_0 + \int_0^t d(B_s, s)ds + \int_0^t v(B_s, s)dB_s$$

kde  $B$  je Brownov pohyb a  $d, v: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ . Funkciu  $d$  nazývame *driftom* a funkciu  $v$  *volatilitou* Itôovského procesu  $I$ . Uvažujme dvakrát spojito diferencovateľnú funkciu  $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ . Potom proces  $J: \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  definovaný vztahom  $J(\omega, t) = g(I(\omega, t), t)$  je tiež Itôovský. Naviac, jeho drift je daný vztahom

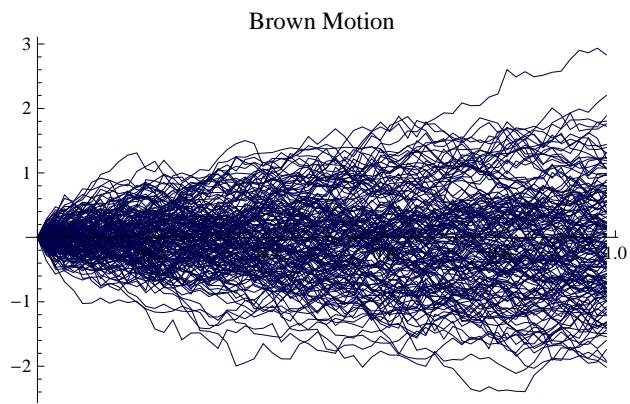
$$[\partial_2 g](I(\omega, t), t) + d(\omega, t)[\partial_1 g](I(\omega, t), t) + v^2(\omega, t)\frac{1}{2}[\partial_{11} g](I(\omega, t), t)$$

a volatilita vztahom

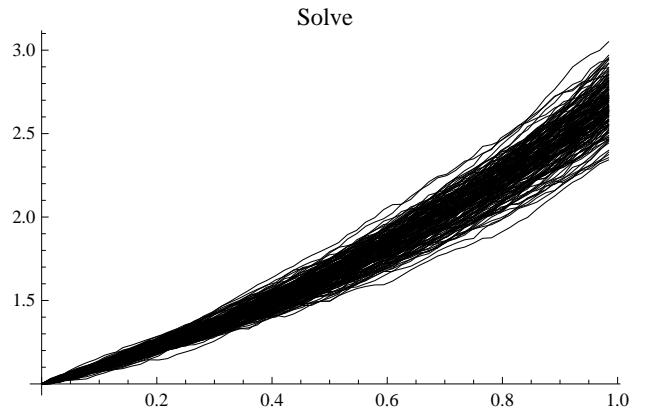
$$v(\omega, t)[\partial_2 g](I(\omega, t), t).$$

Pomocou tohto výsledku možno preveriť, či daný proces je alebo nie je riešením danej SDE.

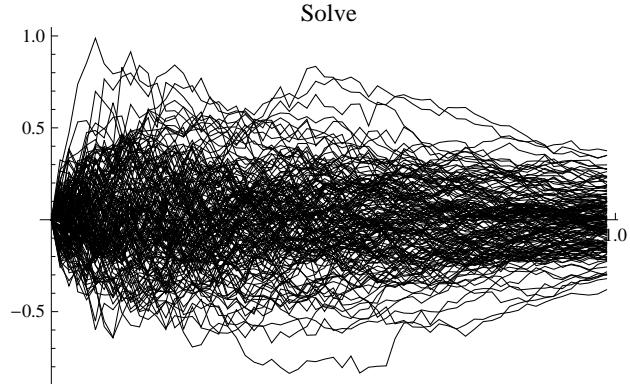
**Príklad 4.** Overíme, že stochastický proces  $e^{\mu t + \sigma B_t}$ , kde  $B$  je Brownov pohyb, je naozaj riešením problému (4). Zvolme si  $g(x, t) = e^{\mu x + \sigma t}$ . Chceme ukázať, že proces  $X_t = g(B_t, t)$  je riešením našej SDE.



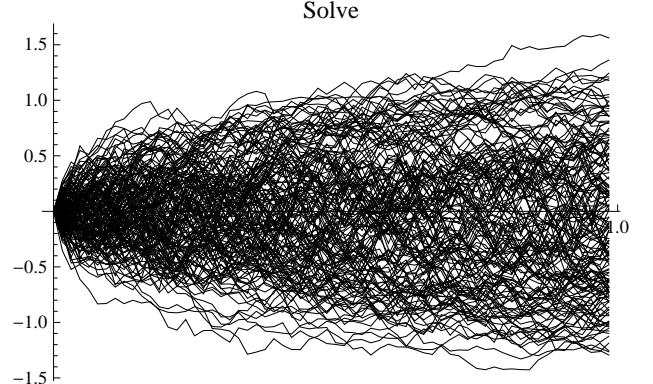
**Obr. 3:** Trajektórie Brownovho pohybu.



**Obr. 4:** Trajektórie presného riešenia SDE (4) riadenej procesom z obrázku 3.



**Obr. 5:** Trajektórie presného riešenia SDE (5) riadenej procesom z obrázku 3.



**Obr. 6:** Trajektórie presného riešenia SDE (6) riadenej procesom z obrázku 3.

Pre jednotlivé parciálne derivácie  $g$  dostávame vztahy:

$$[\partial_1 g](x, t) = \sigma e^{\mu t + \sigma x}$$

$$[\partial_{11} g](x, t) = \sigma^2 e^{\mu t + \sigma x}$$

$$[\partial_2 g](x, t) = \mu e^{\mu t + \sigma x}$$

a podľa Itôovej lemmy je driftom  $X$  proces

$$\mu e^{\mu t + \sigma B_t} + \frac{1}{2} \sigma^2 e^{\mu t + \sigma B_t} = \mu X_t + \frac{1}{2} \sigma^2 X_t = (\mu + \frac{1}{2} \sigma^2) X_t$$

a volatilitou proces

$$\sigma e^{\mu t + \sigma B_t} = \sigma X_t .$$

Z toho vyplýva, že proces  $X_t$  možno zapísat' v tvare:

$$X_t = X_0 + \int_0^t (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dB_s$$

čo na druhej strane znamená, že  $X_t$  je riešením SDE:

$$dX_t = (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)X_s ds + X_s dB_s.$$

Tým je dôkaz ukončený.

**Príklad 5.** Overíme, že stochastický proces  $e^{-2t}B_t$ , kde  $B$  je Brownov pohyb, je naozaj riešením problému (5). Zvolme si funkciu  $g(x, t) = e^{-2t}x$ . Ukážeme, že proces  $X_t = g(B_t, t)$  je riešením našej SDE.

Pre jednotlivé parciálne derivácie  $g$  dostávame vztahy:

$$\begin{aligned} [\partial_1 g](x, t) &= e^{-2t} \\ [\partial_{11} g](x, t) &= 0 \\ [\partial_2 g](x, t) &= -2e^{-2t}x \end{aligned}$$

a podľa Itôovej lemmy je driftom  $X$  proces

$$-2e^{-2t}B_t = -2X_t$$

a volatilitou proces

$$e^{-2t}.$$

Proces  $X_t$  možno potom zapísat' v tvare:

$$X_t = X_0 - \int_0^t 2X_s ds + \int_0^t e^{-2s}dB_s$$

to znamená, že  $X_t$  je riešením SDE:

$$dX_t = -2X_t dt + e^{-2t}dB_t$$

Tým je dôkaz ukončený.

### 2.3 Vývoj hustoty pravdepodobnosti

Riešenie SDE, teda stochastický proces, je za istých situácií objekt zbytočne komplikovaný pre daný typ aplikácie. Niekoľko je rozumné hľadať namiesto presného riešenia SDE funkciu popisujúcu časový vývoj hustôt pravdepodobností riešenia. Takýto vývoj v čase popisuje špeciálna parciálna diferenciálna rovnica známa ako Fokker-Planckova<sup>1</sup> rovnica. Pre SDE v tvare (3) má tvar

$$[\partial_2 h](x, t) = -\partial_1(\mu(x, t)h(x, t)) + \partial_{11}\left(\frac{\sigma^2(x, t)}{2}h(x, t)\right) \quad (7)$$

s neznámou  $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ . Fokker-Planckovu rovnicu možno ekvivalentne prepísat' do tvaru

$$[\partial_2 h](x, t) = A(x, t)h(x, t) + B(x, t)[\partial_1 h](x, t) + C(x, t)[\partial_{11} h](x, t) \quad (8)$$

z ktorého je zrejmé, že pravá strana je súčtom zdrojového, advekčného a difúzneho člena – je to teda advekčno-difúzny problém. Koeficenty  $A$ ,  $B$  a  $C$  zo zdrojového, advekčného a difúzneho člena majú tvar:

$$\begin{aligned} A(x, t) &= [\partial_{11}\sigma](x, t)\sigma(x, t) + [\partial_1\sigma]^2(x, t) - [\partial_1\mu](x, t) \\ B(x, t) &= 2[\partial_1\sigma](x, t)\sigma(x, t) - \mu(x, t) \\ C(x, t) &= \frac{1}{2}\sigma^2(x, t) \end{aligned}$$

## 3 Numerické riešenie SDE a Fokker-Planckovej rovnice

V tejto kapitole sa zaobráme numerickými schémami riešenia SDE a to ako aproximáciou trajektórií presného riešenia tak aj metódami numerického riešenia Fokker-Planckovej rovnice.

### 3.1 Numerická approximácia riešenia

Numerické metódy riešenia SDE spočívajú v nahradení skutočného riešenia  $X: \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  stochastickým procesom  $Y: \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $T = \{t_0, t_1, \dots\}$  je množina diskrétnych časových krokov. My pri riešení SDE používame tri metódy: Eulerovu schému, Milsteinovu schému a Taylorovu schému. V tejto kapitole sa budeme venovať každej schéme zvlášt'. Taktiež sa venujeme porovnaniu Eulerovej a Milstienovej schémy.

---

<sup>1</sup>Rovnice sú pomenované po holandskom fyzikovi Adriaan Daniëlovi Fokkerovi a nemeckom fyzikovi Max Karl Ernst Ludwigovi Planckovi.

### 3.1.1 Eulerova schéma

Švajčiarsky matematik a fyzik Leonhard Paul Euler publikoval v roku 1768 aproximačnú schému na riešenie obyčajných diferenciálnych rovníc. Túto schému modifikoval v roku 1950 Maruyama tak, že umožňovala riešiť SDE. Preto sa Eulerovej schéme hovorí aj Euler-Maruyamova approximácia [4]. Schéma je najjednoduchšou explicitnou metódou riešenia SDE. V praxi sa využíva málo, ale slúži ako základ pre konštrukciu zložitejších schém.

Presný tvar Eulerovej schémy pre SDE v tvare (3) je:

$$Y_{n+1} = Y_n + \mu(Y_n, \tau_n) \Delta \tau_n + \sigma(Y_n, \tau_n) \Delta B_n \quad (9)$$

kde  $\Delta \tau_n = \tau_{n+1} - \tau_n$  je dĺžka  $n$ -tého časového kroku a  $\Delta B_n = B_{\tau_{n+1}} - B_{\tau_n}$  je prírastok Brownovho procesu  $B$  je  $n$ -tom časovom kroku. Náhodná premenná  $\Delta B_n$  má rozdelenie  $N(0, \Delta \tau_n)$ . Schéma sa iteruje pre  $n = 1, 2, \dots, N-1$  s počiatočnou podmienkou  $Y_0 = X_0$ .

Rád konvergencie Eulerovej schémy je  $\frac{1}{2}$ . V prípade, že deterministický aj stochastický člen SDE sú dostatočne hladké funkcie rád konvergencie môže byť aj vyšší.

### 3.1.2 Milsteinova schéma

Milsteinova schéma [3], pomenovaná po Grigori N. Milsteinovi, je metóda na výpočet približného riešenia SDE. Milsteinova schéma pre SDE v tvare (3) má tvar:

$$\begin{aligned} Y_{n+1} = & Y_n + \mu(Y_n, \tau_n) \Delta \tau_n + \sigma(Y_n, \tau_n) \Delta B_n - \\ & - \frac{1}{2} \sigma(Y_n, \tau_n) [\partial_1 \sigma](Y_n, \tau_n) ((\Delta B_n)^2 - \Delta \tau_n) \end{aligned} \quad (10)$$

pre  $n = 1, 2, \dots, N-1$  s počiatočnou podmienkou  $Y_0 = X_0$ .

Pri simulácii jedného riešenia SDE pomocou Milsteinovej schémy je potrebné zvoliť si, tak ako aj pri Eulerovej schéme, vhodnú veľkosť kroku  $\Delta \tau_n = \tau_{n+1} - \tau_n$ , simulovali jednu trajektóriu Brownovho pohybu s normálnym rozdelením prírastku  $N(0, \Delta \tau_n)$  a určiť počiatočnú podmienku.

Schéma má rád konvergencie rovný 1. Aj tu platí, že pre dostatočne hladké problémy môže byť rád konvergencie vyšší.

### 3.1.3 Taylorova schéma rádu 1.5

Pre zaujímavosť' predvedieme schému rádu 1.5 [4]. Pre SDE v tvare (3) má táto schéma tvar:

$$\begin{aligned}
 Y_{n+1} = & Y_n + \mu(Y_n, \tau_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + \sigma(Y_n, \tau_n)(\Delta W) - \\
 & - \frac{1}{2}\sigma(Y_n, \tau_n)[\partial_1\sigma](Y_n, \tau_n)((\Delta B_n)^2 - \Delta\tau_n) + \\
 & + [\partial_1\mu](Y_n, \tau_n)\sigma(Y_n, \tau_n)\Delta Z_n + \frac{1}{2}(\mu(Y_n, \tau_n)[\partial_1\mu](Y_n, \tau_n) + \\
 & + \frac{1}{2}\sigma^2(Y_n, \tau_n)[\partial_{11}\mu](Y_n, \tau_n))(\Delta\tau_n)^2 + \\
 & + (\mu(Y_n, \tau_n)[\partial_1\sigma](Y_n, \tau_n) + \frac{1}{2}\sigma^2(Y_n, \tau_n)[\partial_{11}\sigma](Y_n, \tau_n))(\Delta B_n - \Delta Z_n) \\
 & + \frac{1}{2}\sigma(Y_n, \tau_n)(\sigma(Y_n, \tau_n)[\partial_1\sigma](Y_n, \tau_n) + \\
 & + ([\partial_1\sigma](Y_n, \tau_n))^2)(\frac{1}{3}(\Delta B_n)^2 - \Delta\tau_n)\Delta B_n
 \end{aligned} \tag{11}$$

kde  $Z_n$  je náhodná premenná s rozdelením  $N(0, 1)$  taká, že vektor  $(B_n, Z_n)$  má korelačný koeficient  $\frac{1}{2}\Delta\tau$ . Z výpočtového hľadiska sa takýto náhodný vektor skonštruuje nasledovne:

$$\begin{aligned}
 \Delta B_n &= (\Delta\tau_n)^{\frac{1}{2}}U_{1,n}, \\
 \Delta Z_n &= \frac{1}{2}(\Delta\tau_n)^{\frac{3}{2}}(U_{1,n} + \frac{1}{\sqrt{3}}U_{2,n})
 \end{aligned}$$

kde  $U_{1,n}$  a  $U_{2,n}$  sú postupnosti nezávislých, štandardne normálne rozdelených náhodných premenných.

Schéma má rád konvergencie rovný 1.5. Aj tu platí, že pre dostatočne hladké problémy môže byť rád konvergencie vyšší.

### 3.1.4 Porovnanie schém

Milsteinova schéma vzniká rozšírením Eulerovej schémy (9) o člen

$$\frac{1}{2}\sigma(Y_n, \tau_n)[\partial_1\sigma](Y_n, \tau_n)((\Delta B_n)^2 - \Delta\tau_n)$$

ktorého úlohou je zvýšiť rád konvergencie. Je to práve tento člen čomu Milsteinova schéma vdŕačí za svoju vyššiu presnosť'. Lenže, ak je derivácia stochastického člena nulová, potom Milsteinova schéma degraduje na Eulerovu schému a rád konvergencie oboch schém je rovný 1. Tento jav ilustruje Obázok 7.

Taylorova schéma vzniká ďalším rozšírením Milsteinovej schémy (10) o člen

$$\begin{aligned}
& [\partial_1 \mu](Y_n, \tau_n) \sigma(Y_n, \tau_n) \Delta Z_n + \\
& + \frac{1}{2} (\mu(Y_n, \tau_n) [\partial_1 \mu](Y_n, \tau_n) + \frac{1}{2} \sigma^2(Y_n, \tau_n) [\partial_{11} \mu](Y_n, \tau_n)) (\Delta \tau_n)^2 + \\
& + (\mu(Y_n, \tau_n) [\partial_1 \sigma](Y_n, \tau_n) + \frac{1}{2} \sigma^2(Y_n, \tau_n) [\partial_{11} \sigma](Y_n, \tau_n)) (\Delta B_n - \Delta Z_n) + \\
& + \frac{1}{2} \sigma(Y_n, \tau_n) (\sigma(Y_n, \tau_n) [\partial_{11} \sigma](Y_n, \tau_n) + [\partial_1 \sigma](Y_n, \tau_n)^2) (\frac{1}{3} (\Delta B_n)^2 - \Delta \tau_n) \Delta B_n
\end{aligned}$$

Aj úlohou tohto člena je zvýšiť rát konvergencie. V prípade ak derivácie  $[\partial_1 \mu]$ ,  $[\partial_{11} \mu]$ ,  $[\partial_1 \sigma]$ ,  $[\partial_{11} \sigma]$  sú rovné nule, potom Taylorova schéma tiež degraduje na Eulerovu a rát konvergencie oboch schém je rovný 1.5. Toto pozorovanie má však rýdzo akademickú hodnotu, pretože podmienka, ktorú tu uvažujeme znamená, že ako  $\sigma$  tak aj  $\mu$  sú konštanty a teda SDE je špeciálneho typu (je to SDE Brownovho pohybu s driftom).



**Obr. 7:** Grafy znázorňujú jednu trajektóriu presného riešenia (čierna farba), Eulerovej schémy (oranžová farba) a Milsteinovej schémy (zelená farba). V ľavo: graf SDE (5). V pravö: graf SDE (6). Povšimnutia je hodný fakt, že v prípade SDE (5) sa trajektórie Eulerovského a Milsteinovského riešenia zhodujú zatialčo v prípade (6) to tak nie je.

### 3.2 Numerická approximácia vývoja hustoty

Pri numerickej approximácii hustoty riešenia využívame explicitnú metódu riešenia PDE, ktorú aplikujeme na Fokker-Planckovu rovnicu (7). Riešenie approximujeme jeho diskretizáciou na pravidelnej mriežke bodov typu  $m \times n$ , pričom priestorová súradnica je diskretizovaná na  $m$  a časová na  $n$  bodov. Jednotlivé diferenciálne operátory z rovnice (7) diskretizujeme nasledovne:

$$\begin{aligned}
[\partial_2 h]_{i,j} &= \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{\Delta t} \\
[\partial_1 h]_{i,j} &= \frac{h_{i-1,j+1} - h_{i-1,j-1}}{2\Delta x} \\
[\partial_{11} h]_{i,j} &= \frac{h_{i-1,j+1} - 2h_{i-1,j} + h_{i-1,j-1}}{(\Delta x)^2}
\end{aligned}$$

Explicitná schéma umožňuje priamy výpočet riešenia v čase  $i+1$  z jeho hodnôt v predchádzajúcom čase  $i$ . V našom prípade je tento výpočet daný vztahom:

$$h_{i,j} = h_{i-1,j+1}K_{i,j} + h_{i-1,j}L_{i,j} + h_{i-1,j-1}M_{i,j} \quad (12)$$

kde  $K_{i,j}$ ,  $L_{i,j}$  a  $M_{i,j}$  sú funkcie  $\mu$ ,  $\sigma$  a ich parcialných derivacií podľa  $x$ . Tieto koeficienty sú dané vztahmi:

$$\begin{aligned} K_{i,j} &= \Delta t \left( \frac{1}{2\Delta x} (-2(\partial_1 \sigma)_{i-1,j} \sigma_{i-1,j} - \mu_{i-1,j}) + \frac{\sigma_{i-1,j}^2}{2(\Delta x)^2} \right) \\ L_{i,j} &= 1 + \Delta t \left( (\partial_{11} \sigma)_{i-1,j} \sigma_{i-1,j} + (\partial_1 \sigma)_{i-1,j}^2 - (\partial_1 \mu)_{i-1,j} - \frac{\sigma_{i-1,j}^2}{(\Delta x)^2} \right) \\ M_{i,j} &= \Delta t \left( \frac{1}{2\Delta x} (2(\partial_1 \sigma)_{i-1,j} \sigma_{i-1,j} - \mu_{i-1,j}) + \frac{\sigma_{i-1,j}^2}{2(\Delta x)^2} \right) \end{aligned}$$

kde  $\sigma_{i-1,j}$  a  $\mu_{i-1,j}$  sú hodnoty koeficientov  $\sigma$  a  $\mu$  SDE (3) v uzlovom bode  $(i-1, j)$ . Za istých okolnoý stí možno vhodnou vol'bou časového kroku  $\Delta t$  zabezpečiť, že všetky tri koeficienty  $K_{i,j}$ ,  $L_{i,j}$ ,  $M_{i,j}$  sú nezáporné.

Okrajovú podmienku volíme Dirichletovu rovnú 0. A počiatočnú podmienku volíme v tvare

$$h_{1,j} = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x} & \text{ak } j = n_0 \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

kde  $n_0$  je index uzlu, ktorého  $x$ -ová súradnica najlepšie approximuje  $x_0$ .

## 4 Numerické experimenty

V tejto kapitole sa venujeme numerickému riešeniu konkrétnych SDE a vyšetrujeme na nich rád konvergencie metód riešenia. Ďalej počítame intervale spolahlivosti odhadu presného riešenia a venujeme sa výpočtu riešenia Fokker-Planckovej rovnice.

### 4.1 Numerický rád konvergencie

Tu sa venujeme numerickému odhadu rádu konvergencie numerických metód riešenia SDE v závislosti od jemnosti diskretizácie časového intervalu. Rády konvergencie počítame zo stredných hodnôt chýb riešenia.

Tieto stredné hodnoty získame nasledujúcim spôsobom. Najprv vygenerujeme  $N = 2000$  trajektorií Brownovho pohybu. Označme  $Y_n$  hodnotu numerického riešenia SDE (či už Eulerovou alebo Milsteinovou metódou) v čase 1 zodpovedajúceho  $n$ -tej trajektórii Brownovho pohybu. Podobne,  $X_n$  nech je hodnota presného riešenia SDE v čase 1 zodpovedajúceho tej istej trajektórii. Chyba numerického riešenia je  $|Y_n - X_n|$ . Strednú chybu  $\hat{\varepsilon}$  získame ako aritmetický priemer chýb cez všetky simulované realizácie Brownovho pohybu:

$$\hat{\varepsilon} = \sum_{n=1}^N |Y_n - X_n|.$$

Samotné rády konvergencie sme získali lineárnu regresiou závislosti  $\hat{\varepsilon}$  od diskretizačnej jemnosti  $\Delta t$  v dvojito logaritmických súradničach. V nasledujúcich tabuľkách sú hodnoty odhadov stredných hodnôt pre rôzne diskretizačné jemnosti a zodpovedajúce rády konvergencie pre Eulerovu a Milsteinovu schému aplikovanú na tri modelové SDE. Za povšimnutie stojí fakt, že rád konvergencie Eulerovej metódy pre SDE (5) je rovnaký ako pri Milsteinovej metóde. Je to spôsobené tým, že pre túto SDE Milsteinova schéma degraduje na Eulerovu.

| Stochastická diferenciálna rovnica (4) |                         |                         |
|----------------------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $\Delta t$                             |                         | $\hat{\varepsilon}$     |
|                                        | Euler                   | Milstein                |
| $2^{-1}$                               | $6.36366 \cdot 10^{-1}$ | $6.42359 \cdot 10^{-1}$ |
| $2^{-2}$                               | $1.76789 \cdot 10^{-1}$ | $2.25329 \cdot 10^{-1}$ |
| $2^{-3}$                               | $4.72617 \cdot 10^{-2}$ | $4.80351 \cdot 10^{-2}$ |
| $2^{-4}$                               | $2.98692 \cdot 10^{-2}$ | $1.23283 \cdot 10^{-2}$ |
| $2^{-5}$                               | $9.45597 \cdot 10^{-3}$ | $3.78191 \cdot 10^{-3}$ |
| $2^{-6}$                               | $2.74889 \cdot 10^{-3}$ | $8.72923 \cdot 10^{-4}$ |
| $2^{-7}$                               | $1.24895 \cdot 10^{-3}$ | $2.29730 \cdot 10^{-4}$ |
| $2^{-8}$                               | $5.45305 \cdot 10^{-4}$ | $5.35299 \cdot 10^{-5}$ |
| $2^{-9}$                               | $2.79635 \cdot 10^{-4}$ | $1.47431 \cdot 10^{-5}$ |
| $2^{-10}$                              | $1.28695 \cdot 10^{-4}$ | $3.20665 \cdot 10^{-6}$ |
| Rád konvergencie                       | 1.35324                 | 1.9648                  |

| Stochastická diferenciálna rovnica (5) |                         |                                 |
|----------------------------------------|-------------------------|---------------------------------|
| $\Delta t$                             | Euler                   | $\hat{\varepsilon}$<br>Milstein |
| $2^{-1}$                               | $8.40111 \cdot 10^{-2}$ | $8.40111 \cdot 10^{-2}$         |
| $2^{-2}$                               | $6.49822 \cdot 10^{-3}$ | $6.49822 \cdot 10^{-3}$         |
| $2^{-3}$                               | $9.85810 \cdot 10^{-4}$ | $9.85810 \cdot 10^{-4}$         |
| $2^{-4}$                               | $1.71050 \cdot 10^{-4}$ | $1.71050 \cdot 10^{-4}$         |
| $2^{-5}$                               | $3.23031 \cdot 10^{-5}$ | $3.23031 \cdot 10^{-5}$         |
| $2^{-6}$                               | $9.18279 \cdot 10^{-6}$ | $9.18279 \cdot 10^{-6}$         |
| $2^{-7}$                               | $2.11478 \cdot 10^{-6}$ | $2.11478 \cdot 10^{-6}$         |
| $2^{-8}$                               | $5.42365 \cdot 10^{-7}$ | $5.42365 \cdot 10^{-7}$         |
| $2^{-9}$                               | $1.04235 \cdot 10^{-7}$ | $1.04235 \cdot 10^{-7}$         |
| $2^{-10}$                              | $3.32457 \cdot 10^{-8}$ | $3.32457 \cdot 10^{-8}$         |
| Rád konvergencie                       | 2.2902                  | 2.2902                          |

| Stochastická diferenciálna rovnica (6) |                         |                                 |
|----------------------------------------|-------------------------|---------------------------------|
| $\Delta t$                             | Euler                   | $\hat{\varepsilon}$<br>Milstein |
| $2^{-1}$                               | $3.71584 \cdot 10^{-1}$ | $4.07715 \cdot 10^{-1}$         |
| $2^{-2}$                               | $1.67390 \cdot 10^{-1}$ | $1.22824 \cdot 10^{-1}$         |
| $2^{-3}$                               | $7.74337 \cdot 10^{-2}$ | $4.99350 \cdot 10^{-2}$         |
| $2^{-4}$                               | $2.71810 \cdot 10^{-2}$ | $1.38974 \cdot 10^{-2}$         |
| $2^{-5}$                               | $1.62248 \cdot 10^{-2}$ | $7.34963 \cdot 10^{-3}$         |
| $2^{-6}$                               | $8.86025 \cdot 10^{-3}$ | $4.21210 \cdot 10^{-3}$         |
| $2^{-7}$                               | $5.05435 \cdot 10^{-3}$ | $2.16933 \cdot 10^{-3}$         |
| $2^{-8}$                               | $3.14244 \cdot 10^{-3}$ | $1.33994 \cdot 10^{-3}$         |
| $2^{-9}$                               | $1.71614 \cdot 10^{-3}$ | $7.43437 \cdot 10^{-4}$         |
| $2^{-10}$                              | $5.65700 \cdot 10^{-4}$ | $2.51163 \cdot 10^{-4}$         |
| Rád konvergencie                       | 0.980352                | 1.10606                         |

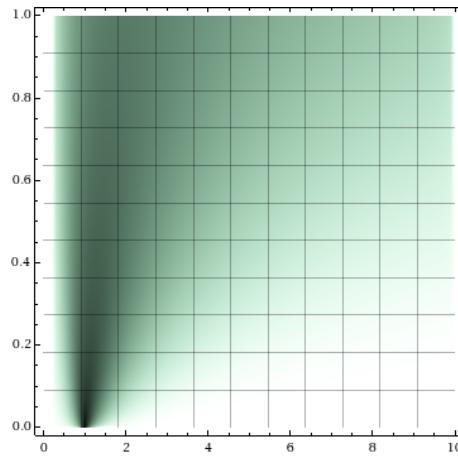
## 4.2 Vývoj hustoty pravdepodobnosti

Vývoj hustoty pravdepodobnosti sme počítali na obdĺžnikovej doméne, ktorej časovým faktorom, rovnako ako pri výpočte presných riešení, bol vždy interval  $[0, 1]$ . Priestorový faktor domény  $[x_l, x_r]$  sme

pre rôzne úlohy volili rôzne.

- a) V prípade geometrického Brownovho pohybu (4) sme zvolili  $[x_l, x_r] = [0, 10]$  keďže pre  $X_0 = 1$  je riešenie nezáporné. Ďalej  $m = 101$  a  $n = 3000$ . Tieto hodnoty boli zvolené s ohľadom na stabilitu schémy.
- b) V prípade SDE s časovo závislým stochastickým členom SDE (5) sme zvolili  $X_0 = 0$  a  $[x_l, x_r] = [-3, 3]$ ,  $m = 101$  a  $n = 1000$ .
- c) V prípade SDE (6) sme zvolili  $X_0 = 0$  a  $[x_l, x_r] = [-3, 3]$ ,  $m = 101$  a  $n = 1000$ .

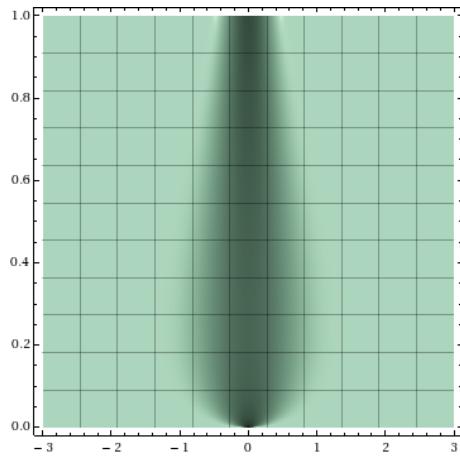
Na obrázkoch 8, 9 a 10 sú znázornené vývoje hustoty pravdepodobnosti pre dané SDE.



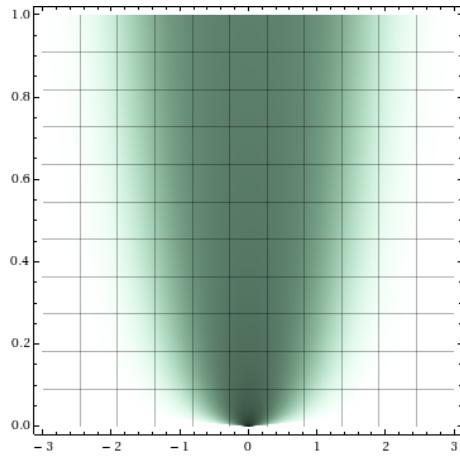
**Obr. 8:** Vývoj hustoty pravdepodobnosti SDE (4) pre  $X_0 = 1$ . V počiatocnom čase je všetka pravdepodobnostná masa koncentrovaná v pozícii 1. Výrazný deterministický člen tejto rovnice má za následok, že hustota je advekciou výrazne zanášaná doprava, pričom s rastúcou súradnicou rýchlosť advekcie a difúzie rastie.

### 4.3 Porovnanie riešení SDE s riešeniami Fokker-Planckovej rovnice

Pomocou explicitnej metódy aplikovanej na Fokker-Planckovu rovnicu sme určili graf funkcie vývoja hustoty pravdepodobnosti vo fixnom čase, následne sme tento graf vykreslili spoločne s histogramom



**Obr. 9:** Vývoj hustoty pravdepodobnosti SDE (5) pre  $X_0 = 0$ . V počiatocnom čase je všetka pravdepodobnostná masa koncentrovaná v pozícii 0. Výrazný deterministický člen tejto rovnice má za následok, že po opadnutí vyraznej difúzie je hustota pravdepodobnosti rekonzentrovaná v okoliach bodu 0.



**Obr. 10:** Vývoj hustoty pravdepodobnosti SDE (6) pre  $X_0 = 0$ . V počiatocnom čase je všetka pravdepodobostná masa koncentrovaná v pozícii 0 a následne pomaly a symetricky difunduje v okolí svojej počiatocnej pozície.

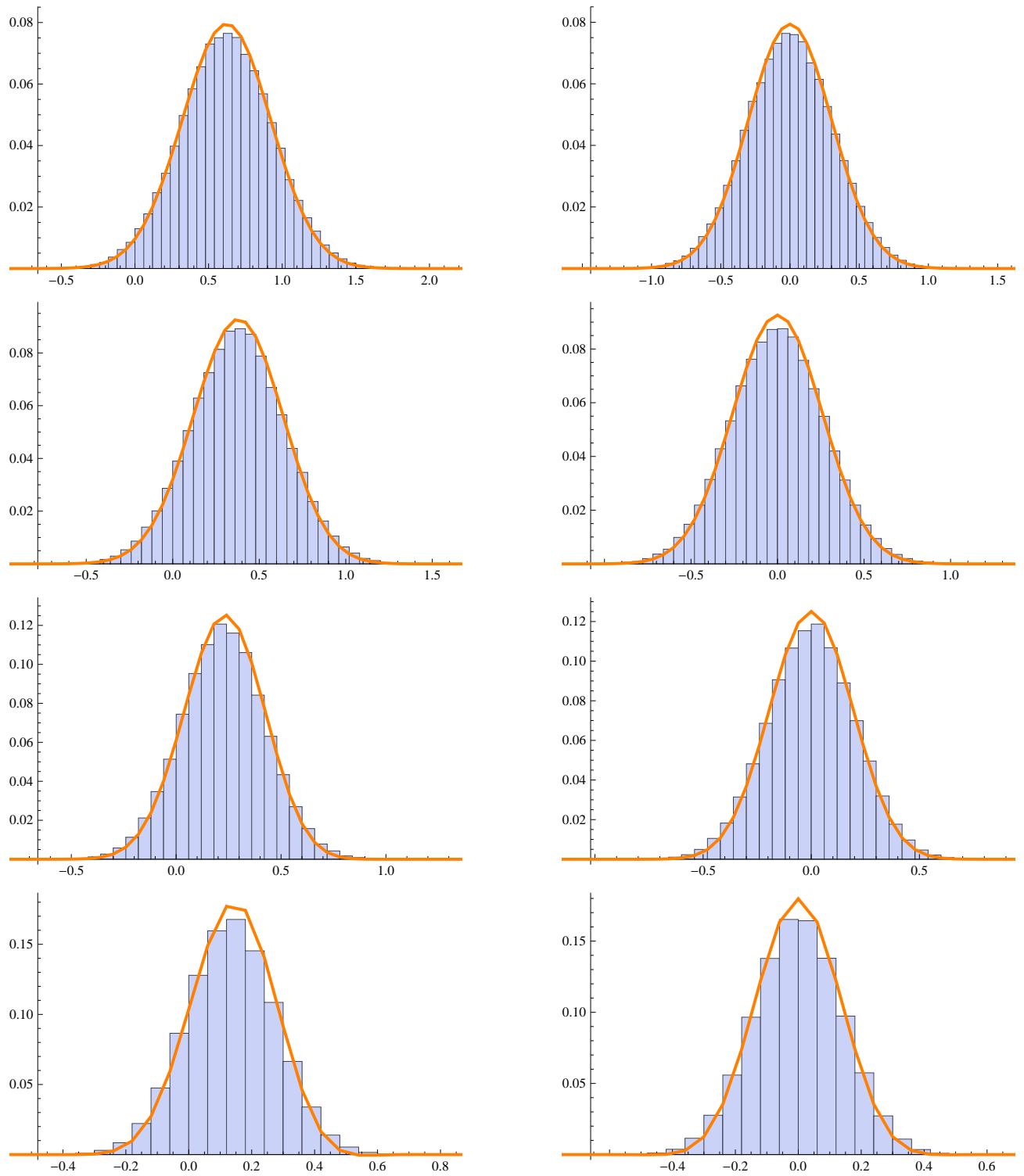
hodnôt riešenia SDE. Histogram bol získaný pomocou Milsteinovej schémy, vypočítaním hodnôt 2000 trajektií vo fixnom čase  $t \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$  a ich následným vykreslením.

Na obrázku 11 sú znázornené histogramy rezov Fokker-Planckovej rovnice pre SDE (5) s počiatočnými podmienkami  $X_0 = 0.0$  a  $X_0 = 1.0$  vo fixných časoch  $t \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ .

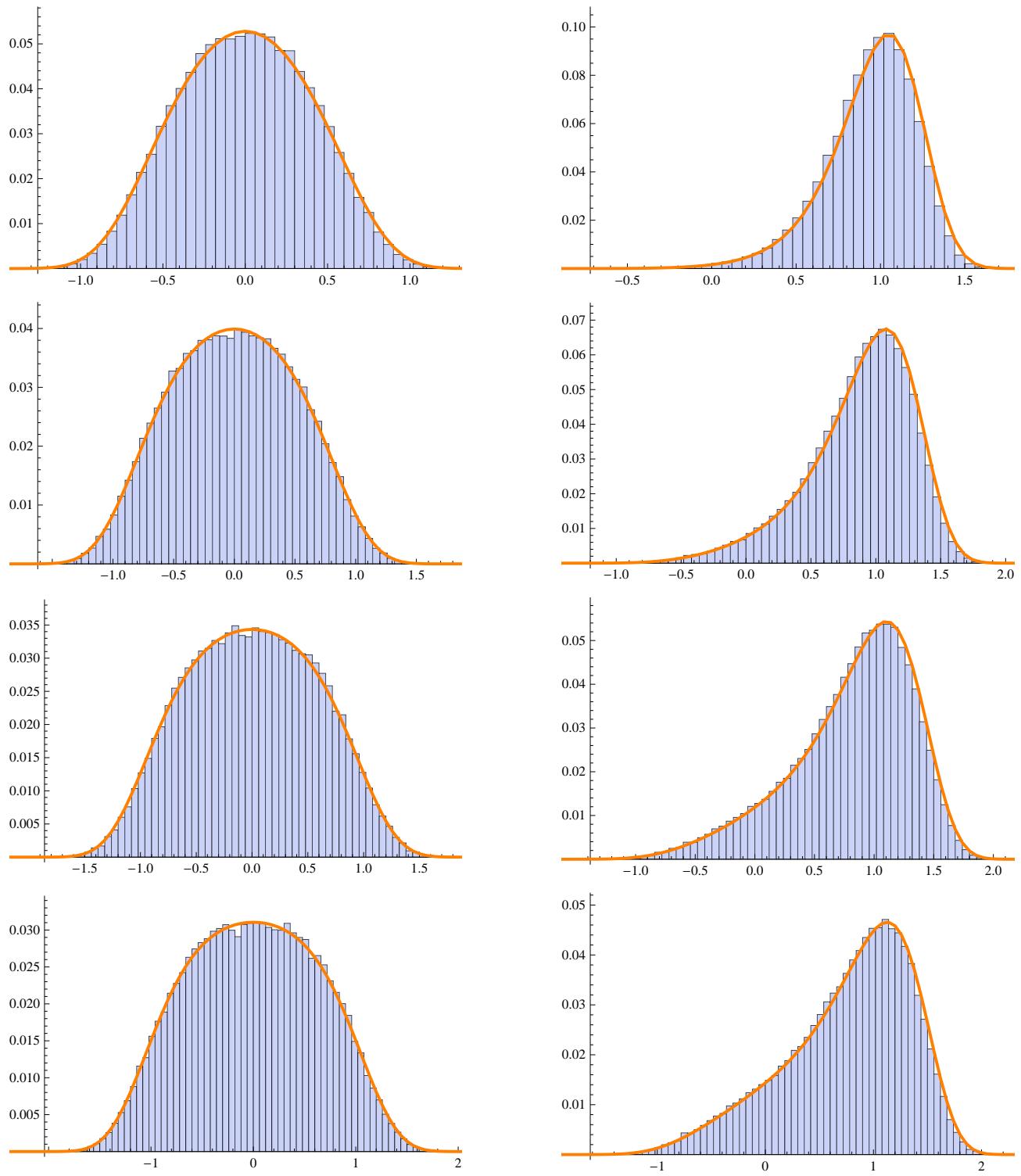
Obrázok 12 znázorňuje histogramy rezov Fokker-Planckovej rovnice pre SDE (6) s počiatočnými podmienkami  $X_0 = 0.0$  a  $X_0 = 1.0$  vo fixných časoch  $t \in \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ .

## 5 Záverečná poznámka

V blízkej budúcnosti sa chceme venovať štúdiu rádu konvergencie numerického odhadu strednej hodnoty riešenia k presnej strednej hodnote. Výpočty sú implementované, zatiaľ však čakajú na spracovanie.



**Obr. 11:** Rezy riešenia Focker-Planckovej rovnice pre SDE (5) vo fixných časoch  $t = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ . Na ľavo: s počiatočnou podmienkou  $X_0 = 1.0$ . Na pravо: s počiatočnou podmienkou  $X_0 = 0.0$ .



**Obr. 12:** Rezy riešenia Focker-Planckovej rovnice pre SDE (6) vo fixných časoch  $t = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$ . Na ľavo: s počiatočnou podmienkou  $X_0 = 0.0$ . Na pravо: s počiatočnou podmienkou  $X_0 = 1.0$ .

## Literatúra

- [1] A. Einstein: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. Ann. Phys. 17:549–560, 1905.
- [2] F. C. Klebaner: Introduction to Stochastic Calculus with Applications. Imperial College (1998) London.
- [3] G. N. Milstein: Approximate integration of stochastic differential equations. Theor. Prob. Appl. 19:557–562, 1974.
- [4] P. E. Kloeden, E. Platen: Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Springer (1995) New-York Berlin Heidelberg.
- [5] J. Komorník, M. Komorníková, K. Mikula: Modelovanie ekonomických a finančných procesov. Univerzita Komenského (1998) Bratislava.
- [6] B. Øksendal: Stochastic Differential Equations. Springer (2010) Heidelberg New-York.

## 6 Apendix A

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include "seq.h"

SEQ *seq_new(int len)
{
    SEQ *to_create;
    if((to_create = (SEQ*)malloc(sizeof(SEQ))) == NULL)
        return NULL;
    to_create->len = len;
    if(len == 0)
    {
        to_create->seq = NULL;
        return to_create;
    }
    if((to_create->seq = (double*)malloc(sizeof(double)*len)) == NULL)
        return NULL;
    return to_create;
}

void seq_destroy(SEQ *to_destroy)
{
    if( to_destroy->len != 0 )
        free(to_destroy->seq);
    free(to_destroy);
}

void seq_print(SEQ *to_print)
{
    unsigned int i;
    printf("%d:\n", to_print->len);
    for(i=0; i<to_print->len; i++)
    {
```

```

printf(" %lf", to_print->seq[i]);
}
printf("\n");
}

double seq_mean(SEQ *to_mean)
{
unsigned int i;
double a;
a=0;
for(i=0;i<to_mean->len;i++)
{
a=a+to_mean->seq[i];
}
return a;
}

double seq_variance(SEQ *to_variance)
{
unsigned int i;
double a,x;
a=0;
for(i=0;i<to_variance->len;i++)
{
a=a+to_variance->seq[i];
}
x=a/to_variance->len;
a=0;
for(i=0;i<to_variance->len;i++)
{
a=a+pow(to_variance->seq[i]-x,2);
}
return a;
}

```

## 7 Apendix B

```
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <time.h>

#include "seq.h"
#include "sde3.h"

double rand_std_normal()
{
    double u1, u2;
    double z1, z2;

    u1 = (((double)rand())+1)/((double)(RAND_MAX)+1);
    u2 = (((double)rand())+1)/((double)(RAND_MAX)+1);

    z1 = sqrt(-2.0*log(u1))*cos(M_PI*2*u2);

    return(z1);
}

void std_random_process(SEQ *to_init)
{
    int i;

    if( to_init->len == 0 )
        return;

    to_init->seq[0] = 0.0;

    for( i=1; i<to_init->len; i++ )
    {
        to_init->seq[i] = rand_std_normal();
    }
}
```

```

}

void w_z_process(SEQ *u1, SEQ *u2, double deltat)
{
int i;
double a,b;
if(u1->len != u2->len)
return;
for(i=0;i<u1->len;i++)
{
a=u1->seq[i];
b=u2->seq[i];
u1->seq[i]=a*sqrt(deltat);
u2->seq[i]=0.5*pow(deltat,3/2)*(a+(1/sqrt(3))*b);
}
}

void brown_process(SEQ *w, SEQ *b)
{
int i;
b->seq[0]=w->seq[0];
for(i=1;i<w->len;i++)
{
b->seq[i]
=
b->seq[i-1]
+
w->seq[i];
}
}

void solve_scheme(SEQ *b, SEQ *s, double deltat)
{
int i;

for(i=0;i<s->len;i++)

```

```

{

s->seq[i]
=
SDE3solve(b->seq[i],i*deltat);
}

}

void euler_scheme(SEQ *b,SEQ *e, double deltat, double init_val, double (*m)(double,double), double (*s)(double,double,do
{
int i;

e->seq[0]=init_val;
for(i=1;i<e->len;i++)
{
e->seq[i]
=
e->seq[i-1]
+
(*m)(e->seq[i-1],(i-1)*deltat)*deltat
+
(*s)(e->seq[i-1],(i-1)*deltat)*(b->seq[i]-b->seq[i-1]);
}

}

void milstein_scheme(SEQ *b, SEQ *m, double deltat)
{
int i;

m->seq[0]=SDE3Y();
for(i=1;i<m->len;i++)
{
m->seq[i]
=
m->seq[i-1]
}

```

```

+
SDE3mi(m->seq[i-1],(i-1)*deltat)*deltat
+
SDE3sigma(m->seq[i-1],(i-1)*deltat)*(b->seq[i]-b->seq[i-1])
+
0.5*SDE3sigma(m->seq[i-1],(i-1)*deltat)
*
SDE3Dsigma(m->seq[i-1],(i-1)*deltat)
*
(pow(b->seq[i]-b->seq[i-1],2)-deltat);
}
}

int main(void)
{
double deltat,pome,pomm;
int i,j,c,p,NN,t0,T,p1,p3;
SEQ *proc1, *proc2, *brown, *euler, *milstein, *solve;
FILE *bm, *b, *e, *m, *s, *emt, *SDEE, *SDEM, *histogram;

srand((unsigned)time (NULL));

p=160;//pocet trajektorii
p3=100000;
c=6;//mocnina;
NN=pow(2,c);//pocet krokov
t0=0;//zaciatak intervalu
T=1;//koniec intervalu
deltat=(double)(T-t0)/NN;//velkost kroku

bm=fopen("Scheme.nb","w");
b=fopen("BM.txt","w");
e=fopen("EU.txt","w");
m=fopen("MI.txt","w");
s=fopen("S0.txt","w");
SDEE=fopen("SDEE.txt","w");

```

```

SDEM=fopen("SDEM.txt","w");
histogram=fopen("HISTOGRAM.txt","w");
emt=fopen("EMT.txt","w");

proc1 = seq_new(NN);
proc2 = seq_new(NN);
brown=seq_new(NN);
euler=seq_new(NN);
milstein=seq_new(NN);
solve=seq_new(NN);

for(j=1;j<=p;j++)
{
    std_random_process(proc1);
    std_random_process(proc2);

    w_z_process(proc1,proc2,deltat);
    brown_process(proc1,brown);
    euler_scheme( brown, euler, deltat, 0.0, &SDE3mi, &SDE3sigma );
    milstein_scheme(brown,milstein,deltat);
    solve_scheme(brown,solve,deltat);

    for(i=0;i<brown->len;i++)
    {
        fprintf(b,"%lf %lf\n",i*deltat,brown->seq[i]);
        fprintf(e,"%lf %lf\n",i*deltat,euler->seq[i]);
        fprintf(m,"%lf %lf\n",i*deltat,milstein->seq[i]);
        fprintf(s,"%lf %lf\n",i*deltat,solve->seq[i]);
    }
}

fprintf(bm,"SetDirectory[\"/home/vierka/bakalarska_praca/C\"];\n\n");

fprintf(bm,"d=ReadList[\"BM.txt\",{Number,Number}];\n");
fprintf(bm,"b=Partition[d,%d];\n",NN);
fprintf(bm,"For[j=1,j<=%d,j++,graf[j]=ListLinePlot[b[[j]],PlotStyle->Darker[Blue,0.7],PlotRange->All]]\n",p);

```

```

fprintf(bm,"Show[Table[graf[i],{i,1,%d}],PlotRange->All,PlotLabel->\\"Brown Motion\"\"]\n\n",p);

fprintf(bm,"ds=ReadList[\"S0.txt\",{Number,Number}];\n");
fprintf(bm,"bs=Partition[ds,%d];\n",NN);
fprintf(bm,"For[j=1,j<=%d,j++,grafS0[j]=ListLinePlot[bs[[j]],PlotStyle->Black,PlotRange->All]]\n",p);
fprintf(bm,"Show[Table[grafS0[i],{i,1,%d}],PlotRange->All,PlotLabel->\\"Solve\"\"]\n\n",p);

fprintf(bm,"de=ReadList[\"EU.txt\",{Number,Number}];\n");
fprintf(bm,"be=Partition[de,%d];\n",NN);
fprintf(bm,"For[j=1,j<=%d,j++,grafEU[j]=ListLinePlot[be[[j]],PlotStyle->Orange,PlotRange->All]]\n",p);
fprintf(bm,"Show[Table[grafEU[i],{i,1,%d}],PlotRange->All,PlotLabel->\\"Euler Scheme\"\"]\n\n",p);

fprintf(bm,"dm=ReadList[\"MI.txt\",{Number,Number}];\n");
fprintf(bm,"bm=Partition[dm,%d];\n",NN);
fprintf(bm,"For[j=1,j<=%d,j++,grafMI[j]=ListLinePlot[bm[[j]],PlotStyle->Green,PlotRange->All]]\n",p);
fprintf(bm,"Show[Table[grafMI[i],{i,1,%d}],PlotRange->All,PlotLabel->\\"Milstein Scheme\"\"]\n\n",p);

for(i=0;i<brown->len;i++)
{
fprintf(emt,"%lf %lf\n",i*deltat,euler->seq[i]);
}

for(i=0;i<brown->len;i++)
{
fprintf(emt,"%lf %lf\n",i*deltat,milstein->seq[i]);
}

fprintf(bm,"demt=ReadList[\"EMT.txt\",{Number,Number}];\n");
fprintf(bm,"bemt=Partition[demt,%d];\n",NN);
fprintf(bm,"For[j=1,j<=%d,j++,grafEMT[j]=ListLinePlot[bemt[[j]],PlotStyle->Red,PlotRange->All]]\n",p);
fprintf(bm,"Show[Table[grafEMT[i],{i,1,%d}],PlotRange->All,PlotLabel->\\"Euler Milstein\"\"]\n\n",p);

fclose(b);
fclose(e);
fclose(m);
fclose(s);

```

```

for(i=0;i<euler->len;i++)
{
    fprintf(emt,"%lf %lf\n",i*deltat,euler->seq[i]);
}

for(i=0;i<milstein->len;i++)
{
    fprintf(emt,"%lf %lf\n",i*deltat,milstein->seq[i]);
}

for(i=0;i<solve->len;i++)
{
    fprintf(emt,"%lf %lf\n",i*deltat,solve->seq[i]);
}

fprintf(bm,"demt=ReadList[\"EMT.txt\",{Number,Number}];\n");
fprintf(bm,"bemt=Partition[demt,%d];\n",NN);
fprintf(bm,"grafEMT[1]=ListLinePlot[bemt[[1]],PlotStyle->Orange,PlotRange->All];\n");
fprintf(bm,"grafEMT[2]=ListLinePlot[bemt[[2]],PlotStyle->Green,PlotRange->All];\n");
fprintf(bm,"grafEMT[3]=ListLinePlot[bemt[[3]],PlotStyle->Red,PlotRange->All];\n");
fprintf(bm,"Show[Table[grafEMT[i],{i,1,3}],PlotRange->All,PlotLabel->\\"Euler Milstein Solve\\"]\n\n");

seq_destroy(proc1);
seq_destroy(proc2);
seq_destroy(brown);
seq_destroy(euler);
seq_destroy(milstein);
seq_destroy(taylor);
seq_destroy(solve);

proc1 = seq_new(NN);
proc2 = seq_new(NN);
brown = seq_new(NN);
milstein=seq_new(NN);

```

```

deltat=(double)(T-t0)/NN;

for(j=1;j<=p3;j++)
{
    std_random_process(proc1);
    std_random_process(proc2);
    w_z_process(proc1,proc2,deltat);
    brown_process(proc1,brown);
    milstein_scheme(brown,milstein,deltat);

    fprintf(histogram,"%lf\n",milstein->seq[15]);
}

seq_destroy(proc1);
seq_destroy(proc2);
seq_destroy(brown);
seq_destroy(milstein);

fclose(SDEE);
fclose(SDEM);
fclose(emt);
fclose(bm);
fclose(histogram);

return 1;
}

```