SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA
V BRATISLAVE
STAVEBNÁ FAKULTA

Evidenčné číslo: SvF-5342-67705

TVORBA "OPTIMÁLNYCH" LOGICKY ŠTVORUHOLNÍKOVÝCH SIETÍ V 2D A 3D OBLASTIACH NAD TOPOGRAFIOU ZEME

BAKALÁRSKA PRÁCA

Študijný program:	Matematicko-počítačové modelovanie
Číslo študijného odboru:	1114
Názov študijného odboru:	9.1.9 aplikovaná matematika
Školiace pracovisko:	Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie (SvF)
Vedúci záverečnej práce:	prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.
Konzultant:	Ing. Róbert Čunderlík, PhD.

Bratislava 2012 **Matej Medľa**

Čestné prehlásenie

Vyhlasujem, že som bakalársku prácu Tvorba "optimálnych" logicky štvoruholníkových sietí v 2D a 3D oblastiach nad topografiou Zeme vypracoval samostatne s použitím citovanej literatúry a s odbornou pomocou vedúceho práce.

18. mája 2012

vlastnoručný podpis

....

Poďakovanie

Ďakujem môjmu vedúcemu záverečnej práce prof. RNDr. Karolovi Mikulovi, DrSc. za jeho cenné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi ochotne poskytoval pri tvorbe tejto práce. Ďakujem aj Ing. Róbertovi Čunderlíkovi, PhD., že mi poskytol dáta topografie Zemského povrchu.

Súhrn

V práci prezentujeme numerickú metódu na tvorbu logicky štvoruholníkových sietí v 2D a 3D oblastiach nad topografiou zeme. Práca je rozdelená na dve časti. V prvej časti rozoberieme tvorbu siete nad uzavretou krivkou (prierez zemským povrchom) a v druhej časti sa budeme zaoberať tvorbou siete nad plochou, ktorá aproximuje zemský povrch. Sieť v 2D sa bude tvoriť vývojom uzavretej krivky v čase, a to v smere jej normály rýchlosťou dostatočne veľkou na to, aby sa krivka zväčšovala až do požadovanej vzdialenosti od počiatočného povrchu zeme. K tomuto potrebujeme pridať tiež vývoj podľa krivosti, čo nám zabezpečí, že výsledná krivka, dostatočne vzdialená od povrchu Zeme, nadobudne tvar blízky kružnici. Redistribúcia bodov vytvorenej siete v tangenciálnom smere nám zabezpečí, že sieť bude rozdelená rovnomerne. Vhodná voľba časového kroku nám zabezpečí sieť s rovnomerne vzdialenými bodmi aj v radiálnom smere. Sieť v 3D budeme vytvárať vývojom uzavretej plochy v čase v normálovom smere rýchlosťou dostatočne veľkou, aby sa plocha zväčšovala a tiež závislou od strednej krivosti. Rýchlosť pohybu v tangenciálnom smere vypočítame vzhľadom na jednotlivé krivky, čo nám zabezpečí, že body budú rovnomerne rozdelené len vzhľadom na jednotlivé krivky a nie vzhľadom na celú plochu. Ako v 2D aj tu je dôležitá vhodná voľba časového kroku, aby výsledná sieť bola rovnomerne rozdelená aj v radiálnom smere.

Abstract

We present numerical methods for creating logically rectangular grids in 2D and 3D domains above the Earth topography. The work will be divided into two parts. In the first part we discuss building of a grid above a closed curve (crossing of the Earth's surface). In the second part we will deal with creating of a grid above a surface that approximates the Earth topography. A grid in 2D will be created by evolution of a closed curve in time in the direction of its normal with speed large enough to magnify the curve up to a desired distance from the initial position. We also add the evolution according to curvature, which ensures that the resulting curve will lead to a circle. Redistribution of grid points in tangential direction will ensure that the grid will be uniform. With a right choice of time step, we provide a grid of almost uniformly discretized points in the radial direction. The grid in 3D will be created by evolution of a closed surface by a speed in normal direction large enough to magnify the surface and it will depend also on the mean curvature. The velocity of grid points in tangential direction will be computed regarding to each curve, which will ensure that points are uniformly distributed with respect to each curve and not with respect to the whole surface area. As in 2D, the choice of appropriate time step is important in order to get the resulting grid uniformly divided also in radial direction.

Obsah

Kapitola 1

Vývoj krivky v 2D

1.1 Vývoj krivky závislý od krivosti a vonkajšej sily

Vhodným spôsobom na tvorbu siete nad topografiou Zeme je pozeranie sa na rez povrchom Zeme ako na uzavretú krivku Γ, ktorá sa v čase vyvíja podľa krivosti, čo nám zabezpečí výslednú krivku v tvare blízkom kružnici. Vhodná voľba sily f, ktorá bude konštantná pre všetky body, nám zabezpečí, že sa krivka nebude sťahovať, ale naopak rozťahovať. Správnou voľbou časového kroku docielime, že krivky Γ_t budú od seba vhodne vzdialené. Presnejší popis voľby časového kroku a čo je vhodná vzdialenosť popíšem v práci neskôr. Model pre vývoj 2D krivky je uvedený v prácach [1,2,3,4,5].

Všeobecná rovnica pre vývoj krivky má tvar

$$\partial_t \mathbf{r} = \beta \mathbf{N} + \alpha \mathbf{T}, \tag{1.1}$$

kde $\mathbf{r}$ je pozičný vektor uzavretej krivky Γ, ktorá je daná predpisom $\Gamma = \{\mathbf{r}(u,t), u \in S^1, t \geq 0\}$, kde S^1 je kružnica jednotkovej dĺžky a t je čas. Nazvime s taký parameter, aby rovnako veľkej zmene parametra prislúchala vždy rovnaká zmena dĺžky krivky. Ide o parametrizáciu podľa dĺžky oblúka. Pre takto danú parametrizáciu platí, že každej hodnote s prislúcha jedinečný bod na krivke. Označme $g = |\mathbf{r}_u| = \sqrt{(\frac{dr_1}{du})^2 + (\frac{dr_2}{du})^2}$, potom platí $ds = gdu$.

Krivka sa bude vyvíjať v smere normály $\mathbf{N}$ rýchlosťou β a v smere tangenty $\mathbf{T}$

rýchlosťou α. Posun bodov krivky v smere tangenty nebude mať vplyv na výsledný tvar krivky len na rozloženie bodov, čo nám v našom prípade zabezpečí čo najrovnomernejšiu výslednú sieť.

Rýchlosť β bude závislá od krivosti krivky v danom bode, čo spôsobí, že krivka bude nadobúdať tvar kružnice. Bude tiež závislá od sily f, vďaka ktorej sa krivka nebude sťahovať ale rozširovať. Rovnica pre β má tvar

$$\beta = -\varepsilon k + f. \tag{1.2}$$

V rovnici je $\varepsilon > 0$ reálny parameter, ktorý bude určovať, ako rýchlo sa bude krivka zahladzovať. k je krivosť krivky a f je sila, zabezpečujúca rozširovanie krivky.

Rozpísaním rovnice dostaneme

$$\partial_t \mathbf{r} = -\varepsilon k \mathbf{N} + f\mathbf{N} + \alpha \mathbf{T}. \tag{1.3}$$

Pre každý bod sa dá tangenta vypočítať ako $\mathbf{T} = \partial_s \mathbf{r}$. Vďaka Frenetovým vzorcom ďalej platí $k\mathbf{N} = -\partial_s \mathbf{T} = -\partial_{ss}\mathbf{r}$. Čo nám dovoľuje prepísať rovnicu na tvar

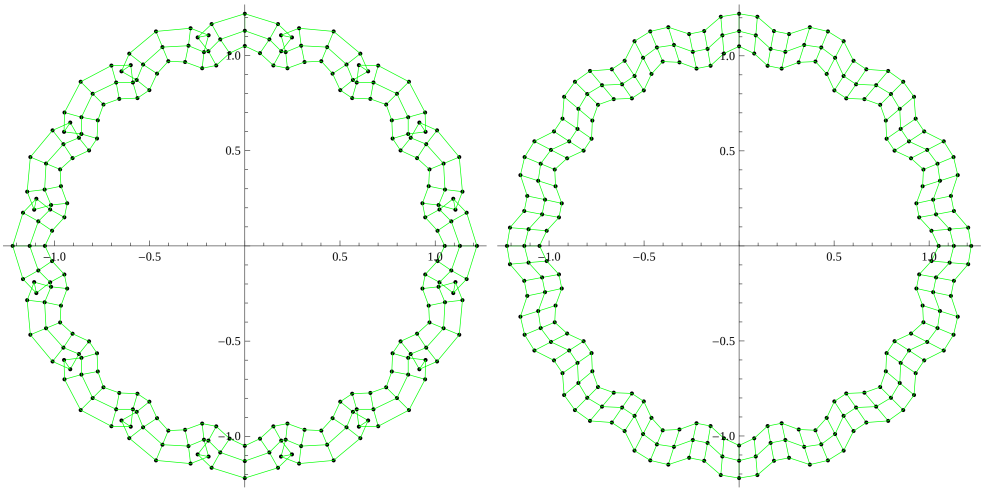
$$\partial_t \mathbf{r} = \varepsilon \partial_{ss} \mathbf{r} + f\mathbf{N} + \alpha \partial_s \mathbf{r}. \tag{1.4}$$

1.2 Odvodenie tangenciálnej rýchlosti

Dôležitou súčasťou vývoja krivky numerickou metódou je rovnomerné rozdelenie bodov. Bez takéhoto rozdelenia by na krivke mohli vznikať body singularity, kde by sa viacero bodov dostalo do jedného bodu, čím by vytvorili hranu na inak hladkej krivke. Ďalším problémom je, že by sa body mohli predbehnúť a tým by sa krivka mohla zauzliť. Viď obrázok (1.1). Na obrázku (1.1) je aj ten istý prípad, ale s vhodne zvoleným α.

Pre deriváciu (1.1) podľa u platí

$$\begin{aligned}
(\mathbf{r}_t)_u &= (\beta\mathbf{N} + \alpha\mathbf{T})_u = \frac{d(\beta\mathbf{N} + \alpha\mathbf{T})}{du} \\
&= \frac{d(\beta\mathbf{N} + \alpha\mathbf{T})}{\frac{1}{g}ds} = g(\beta\mathbf{N} + \alpha\mathbf{T})_s \\
&= g(\beta_s\mathbf{N} + \beta\mathbf{N}_s + \alpha_s\mathbf{T} + \alpha\mathbf{T}_s). \qquad (1.5)
\end{aligned}$$



Obr. 1.1: Naľavo vývoj krivky bez α a napravo s α

Podľa Frenetových vzorcov platí $\mathbf{T}_s = k\mathbf{N}$ a $\mathbf{N}_s = -k\mathbf{T}$. Na základe čoho môžeme rovnicu prepísať na

$$g(\beta_s\mathbf{N} + \beta\mathbf{N}_s + \alpha_s\mathbf{T} + \alpha\mathbf{T}_s) = g((k\alpha + \beta_s)\mathbf{N} + (-k\beta + \alpha_s)\mathbf{T}). \tag{1.6}$$

Z čoho vyplýva, že

$$(\mathbf{r}_t)_u = g((k\alpha + \beta_s)\mathbf{N} + (-k\beta + \alpha_s)\mathbf{T}). \tag{1.7}$$

Ďalej platí, že

$$\mathbf{r}_u = \frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{d\mathbf{r}}{\frac{1}{g}ds} = g\frac{d\mathbf{r}}{ds} = g\mathbf{r}_s = g\mathbf{T}. \tag{1.8}$$

Pre časový vývoj g môžeme napísať

$$g_t = |\mathbf{r}_u|_t = \frac{\mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_u|} \cdot (\mathbf{r}_u)_t. \tag{1.9}$$

Keďže platí $(\mathbf{r}_u)_t = (\mathbf{r}_t)_u$, tak z (1.8) a (1.7) môžeme (1.9) prepísať na

$$\begin{aligned} g_t &= \frac{g\mathbf{T}}{g} \cdot g((k\alpha + \beta_s)\mathbf{N} + (-k\beta + \alpha_s)\mathbf{T}) \\ &= g(k\alpha + \beta_s)\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} + g(-k\beta + \alpha_s)\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \\ &= g(-k\beta + \alpha_s) = -gk\beta + g\frac{d\alpha}{ds} \\ &= -gk\beta + \frac{d\alpha}{\frac{1}{g}ds} = -gk\beta + \frac{d\alpha}{du} \\ &= -gk\beta + \alpha_u. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Zintegrovaním rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{S^1} g_t du &= = \int_{S^1} -gk\beta du + \int_{S^1} \alpha_u du \\ ds = gdu \Rightarrow \frac{1}{dt}\int_\Gamma ds &= \int_\Gamma -k\beta ds + \alpha(1) - \alpha(0). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Navyše, keďže je α cyklické, platí $\alpha(0) = \alpha(1)$. Z toho vyplýva

$$L_t = -\int_\Gamma k\beta ds. \tag{1.12}$$

Pretože chceme zachovať rovnomernú redistribúciu bodov, chceme, aby bolo g, teda zmena dĺžky vzhľadom na parameter u, konštantné. Keďže

$$\int_0^1 gdu = L, \tag{1.13}$$

tak sa konštantné $g = L$. Z čoho vyplýva, že by sme potrebovali, aby $\frac{g}{L} \to 1$ pre $t \to \infty$. Ďalej si zavedieme veličinu $\theta = \ln(\frac{g}{L})$. Chceme, aby táto veličina išla z narastajúcim časom k 0. Pre zmenu θ v čase platí

$$\begin{aligned} \theta_t &= (\ln(\frac{g}{L}))_t = \frac{L}{g}\frac{g_t L - gL_t}{L^2} = \frac{(-gk\beta + g\alpha_s)L + gL\langle k\beta\rangle_\Gamma}{gL} \\ &= -k\beta + \langle k\beta\rangle_\Gamma + \alpha_s, \end{aligned} \tag{1.14}$$

kde $\langle k\beta\rangle_\Gamma = \frac{1}{L}\int_\Gamma k\beta ds$. Ak bude $\alpha_s = -k\beta + \langle k\beta\rangle_\Gamma$, bude $\theta_t = 0$. Pretože sa nebude meniť pomer $\frac{g}{L}$, nebude sa meniť rozloženie bodov na krivke. Počiatočné rozloženie sa bude zachovávať. Ak navyše zvolíme

$$\alpha_s = -k\beta + \langle k\beta\rangle_\Gamma + \omega(e^{-\theta} - 1), \tag{1.15}$$

tak pre θ_t platí

$$\theta_t = \omega(e^{-\theta} - 1). \tag{1.16}$$

Riešením takejto rovnice je funkcia, pre ktorú platí $\theta \to 0$ keď $t \to \infty$. ω je relaxačný parameter, ktorý určuje, ako rýchlo sa budú body redistribuovať.

1.3 Numerická aproximácia

Zintegrovaním rovnice (1.4) na oblasti $[\mathbf{r}_{i-1/2}, \mathbf{r}_{i+1/2}]$ dostaneme

$$\int_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}} \partial_t \mathbf{r} ds = \int_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}} \varepsilon \partial_{ss} \mathbf{r} ds + \int_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}} f(\partial_s \mathbf{r})^{\perp} ds + \int_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}} \alpha \partial_s \mathbf{r} ds, \tag{1.17}$$

kde f a ε sú konštantné na celej oblasti. Vzdialenosť $\mathbf{r}_{i-1/2}$ od $\mathbf{r}_{i+1/2}$ vypočítame ako $|\mathbf{r}_{i+1/2} - \mathbf{r}_{i-1/2}| = \frac{h_{i+1}+h_i}{2}$, kde $h_i^m = \sqrt{(x_i^m - x_{i-1}^m)^2 + (y_i^m - y_{i-1}^m)^2}$ a časovú deriváciu nahradíme spätnou diferenciou. To nám dovoľuje prepísať rovnicu na tvar

$$\frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2} \frac{\mathbf{r}_i^{m+1} - \mathbf{r}_i^m}{\Delta t} = \varepsilon [\partial_s \mathbf{r}]_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}} + f([\mathbf{r}]_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i-1/2}})^{\perp} + \alpha [\mathbf{r}]_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}}. \tag{1.18}$$

Keď nahradíme derivácie v prvom člene pravej strany centrálnymi diferenciami a $\mathbf{r}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1}}{2}$, dostaneme rovnicu

$$\frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2} \frac{\mathbf{r}_i^{m+1} - \mathbf{r}_i^m}{\Delta t} = \varepsilon \left(\frac{\mathbf{r}_{i+1}^{m+1} - \mathbf{r}_i^{m+1}}{h_{i+1}^m} - \frac{\mathbf{r}_i^{m+1} - \mathbf{r}_{i-1}^{m+1}}{h_i^m} \right) + f_i^m \mathbf{N}_i^m + \alpha \frac{\mathbf{r}_{i+1}^{m+1} - \mathbf{r}_{i-1}^{m+1}}{2}, \tag{1.19}$$

kde $\mathbf{r}_i^{m+1} = [x_i^{m+1}, y_i^{m+1}], i = 1, ..., n$ je neznámy bod na krivke. $\mathbf{N}_i^m$ je normála, ktorú získame ako $\mathbf{N}_i^m = [n_{xi}^m, n_{yi}^m] = (\frac{\mathbf{r}_{i+1}^m - \mathbf{r}_{i-1}^m}{2})^{\perp} = [(y_{i-1}^m - y_{i+)}^m)/2, (x_{i+1}^m - x_{i-1}^m)/2]$.

Vo vzťahu si α vypočítame z

$$\alpha_s = -k\beta + \langle k\beta \rangle_{\Gamma} + \omega(e^{-\theta} - 1). \tag{1.20}$$

Po diskretizácii

$$\frac{\alpha_i^m - \alpha_{i-1}^m}{h_i^m} = -k_{i-1/2}^m \beta_{i-1/2}^m - \frac{\sum_{i=1}^n k_{i-1/2}^m \beta_{i-1/2}^m h_i^m}{\sum_{i=1}^n h_i^m} + \omega(\frac{\sum_{i=1}^n h_i^m}{n h_i^m} - 1), \tag{1.21}$$

kde

$$\begin{aligned} k_{i-1/2}^m &= \frac{\mathrm{sgn}(\det(\mathbf{h}_{i-1}^m, \mathbf{h}_{i+1}^m))}{2h_i^m} \arccos(\frac{\mathbf{h}_{i-1}^m \cdot \mathbf{h}_{i+1}^m}{h_{i-1}^m h_{i+1}^m}) \\ \beta_{i-1/2}^m &= -\varepsilon k_{i-1/2}^m + f_{i-1/2}^m \\ f_{i-1/2}^m &= \frac{f_{i-1}^m + f_i^m}{2}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Voľbou $\alpha_i^m = 0$ zabezpečíme, že prvý bod sa bude hýbať iba v normálovom smere a nie tangenciálnom. Ostatné tangenciálne rýchlosti sa vypočítajú vzťahom

$$\alpha_i^m = \alpha_{i-1}^m - k_{i-1/2}^m \beta_{i-1/2}^m h_i^m - h_i^m \frac{\sum_{i=1}^n k_{i-1/2}^m \beta_{i-1/2}^m h_i^m}{\sum_{i=1}^n h_i^m} + \omega(\frac{\sum_{i=1}^n h_i^m}{h_i^m} - h_i^m). \tag{1.23}$$

1.4 Riešenie sústavy rovníc

Zo vzťahu (1.19) dostaneme

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_i^m}\right) \mathbf{r}_{i-1}^{m+1} + \left(\frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} + \frac{\varepsilon}{h_{i+1}^m} + \frac{\varepsilon}{h_i^m}\right) \mathbf{r}_i^{m+1} + \left(-\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_{i+1}^m}\right) \mathbf{r}_{i+1}^{m+1} \\ = \frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} \mathbf{r}_i^m + f_i^m \mathbf{N}_i^m, \end{aligned} \tag{1.24}$$

kde $i = 1, ..., n$ a keďže Γ je uzavretá krivka, platia cyklické okrajové podmienky. Preto $\mathbf{r}_0^{m+1} = \mathbf{r}_n^{m+1}$ a $\mathbf{r}_{n+1}^{m+1} = \mathbf{r}_1^{m+1}$. Hodnoty α_i^m získame z vyššie uvedených rovníc a $\mathbf{r}_i^m$ je riešenie z predchádzajúceho časového kroku. Zo vzťahu (1.24) získame n rovníc s n neznámymi. Tento systém budeme riešiť ako cyklický trojdiagonálny systém.

Výsledný systém má tvar:

$$\begin{aligned} b_i &= (\frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} + \frac{\varepsilon}{h_{i+1}^m} + \frac{\varepsilon}{h_i^m}) \\ a_i &= (\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_i^m}), \\ c_i &= (-\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_{i+1}^m}), \\ p_i &= \frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} \mathbf{r}_i^m + f_i^m \mathbf{r}_i^m, \\ a &= (\frac{\alpha_1^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_1^m}), \\ c &= (-\frac{\alpha_n^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_{n+1}^m}). \end{aligned} \tag{1.25}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & & \dots & 0 & a \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & & & & & \\ & & 0 & a_i & b_i & c_i & 0 & \\ & & & & & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ c & 0 & \dots & & \dots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \\ p_i \\ \\ \vdots \\ p_{n-1} \\ p_n \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

Na riešenie použijeme Sherman-Morrisonov vzorec, čo je upravený Thomasov algoritmus. Aby sme dostali správne riešenie systému, musí byť matica systému diagonálne dominantná. Teda musí platiť

$$|b_i| \geq |a_i| + |c_i|. \tag{1.27}$$

Pre náš systém musí platiť

$$\left|\frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} + \frac{\varepsilon}{h_{i+1}^m} + \frac{\varepsilon}{h_i^m}\right| \geq \left|\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_i^m}\right| + \left| -\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_{i+1}^m}\right|. \tag{1.28}$$

Keďže vzdialenosť je vždy nezáporná a ε sa tiež volí ako nezáporné číslo, potom môžeme zapísať

$$\begin{aligned} \tfrac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} + \tfrac{\varepsilon}{h_{i+1}^m} + \tfrac{\varepsilon}{h_i^m} &\geq \left|\tfrac{\alpha_i^m}{2} - \tfrac{\varepsilon}{h_i^m}\right| + \left| -\tfrac{\alpha_i^m}{2} - \tfrac{\varepsilon}{h_{i+1}^m}\right| \quad , \\ \tfrac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} &\geq \left|\tfrac{\alpha_i^m}{2} - \tfrac{\varepsilon}{h_i^m}\right| + \left| -\tfrac{\alpha_i^m}{2} - \tfrac{\varepsilon}{h_{i+1}^m}\right| - \tfrac{\varepsilon}{h_{i+1}^m} - \tfrac{\varepsilon}{h_i^m} \quad , \\ \Delta t &\leq \tfrac{1}{2} \frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{\left|\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_i^m}\right| + \left| -\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_{i+1}^m}\right| - \frac{\varepsilon}{h_{i+1}^m} - \frac{\varepsilon}{h_i^m}} \end{aligned} \tag{1.29}$$

Pre riešiteľnosť sústavy musí platiť vyššie uvedená nerovnosť pre $i = 1, ..., n$.

1.5 Numerické experimenty

1.5.1 Porovnanie s presným riešením

Rád konvergencie vyššie použitej schémy si overíme na jednoduchom experimente s jednotkovou kružnicou, sťahujúcou sa len podľa krivosti bez sily f a s rovnomernou počiatočnou distribúciou bodov. Krivka sa bude sťahovať do času $t = 0.1$.

Body počiatočnej krivky budú mať predpis

$$x_i = \cos(2\pi/n), \qquad y_i = \sin(2\pi)/n, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{1.30}$$

Presný polomer v čase t získame ako

$$|\mathbf{r}(t)| = \sqrt{|\mathbf{r}(0)|^2 - 2t}. \tag{1.31}$$

Pre výpočet chyby použijeme numerickú L2 chybu

$$\|e^M_{n(\mathbf{r})}\| = \sqrt{\sum_{m=1}^{M} \Delta t \sum_{i=1}^{n} (|\mathbf{r}_i^m| - |\mathbf{r}(m\Delta t)|)^2 \frac{h_i^m + h_{i+1}^m}{2}}. \tag{1.32}$$

Rád konvergencie určíme ako

$$\mathrm{EOC} = \log_2 \frac{\|e^M_{n(\mathbf{r})}\|}{\|e^{2M}_{2n(\mathbf{r})}\|}. \tag{1.33}$$

V tabuľke (1.1) sú uvedené chyby pre výpočty s rôznym počtom bodov a s rôznym časovým krokom. Z tabuľky vyplýva, že rád konvergencie semi-implicitnej Eulerovej schémy je 1. Na obrázku (1.2) je zobrazená sťahujúca sa jednotková kružnica s počtom bodov $n = 40$ a s časovým krokom $\Delta t = 0.025$.

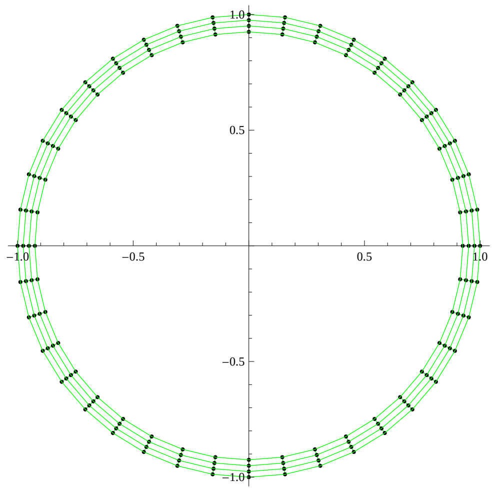
Druhým pokusom si overíme rád konvergencie výpočtu s nerovnomerným počiatočným rozdelením bodov.

Body počiatočnej krivky budú mať predpis

$$x_i = \cos(2\pi/n + 0.125\sin(4\pi/n)), \qquad y_i = \sin(2\pi + 0.125\sin(4\pi/n))/n, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{1.34}$$

n	Δt	$\Vert e_{n(r)^M}\Vert$	EOC
10	0.1	0.0115279	
20	0.05	0.00492918	1.22571
40	0.025	0.00221758	1.15236
80	0.0125	0.00104144	1.09041
160	0.00625	0.000503117	1.04961
320	0.003125	0.000247056	1.02606
640	0.0015625	0.000122389	1.01336

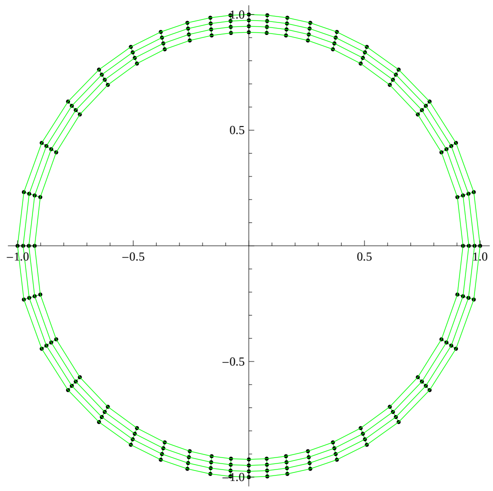
Tabuľka 1.1



Obr. 1.2: Sťahujúca sa jednotková kružnica s rovnomerným počiatočným rozdelením

n	Δt	$\|e_{n(r)^M}\|$	EOC
10	0.1	0.011144	
20	0.05	0.0047429	1.23243
40	0.025	0.00222523	1.09181
80	0.0125	0.00107217	1.05342
160	0.00625	0.000524712	1.03094
320	0.003125	0.000259316	1.01681
640	0.0015625	0.000128871	1.00878

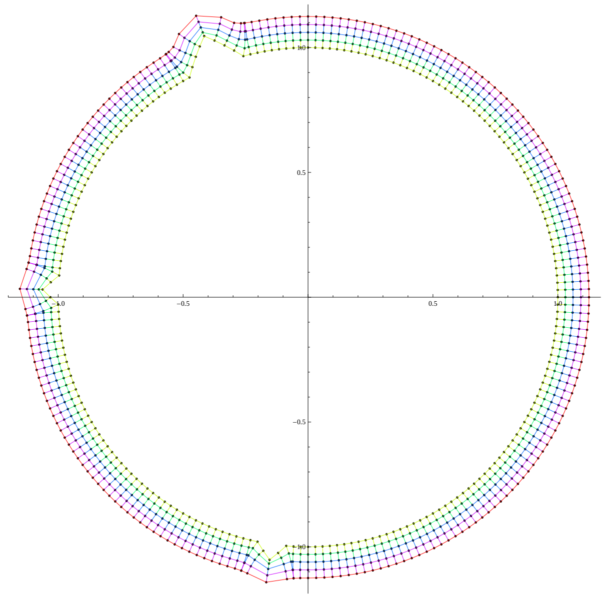
Tabuľka 1.2



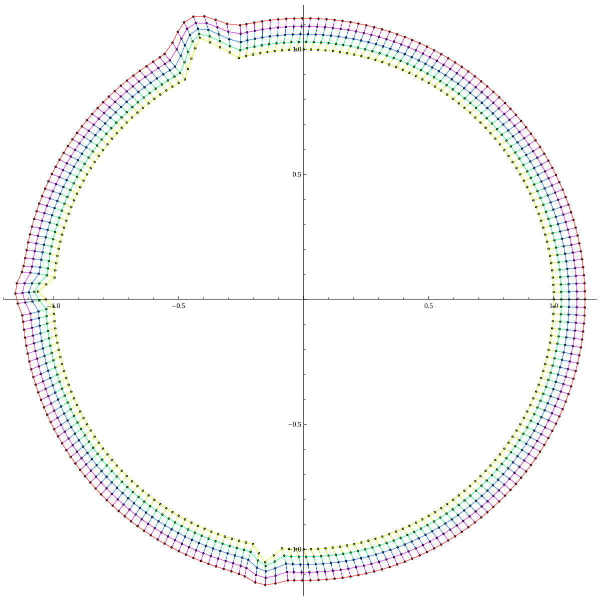
Obr. 1.3: Sťahujúca sa jednotková kružnica s nerovnomerným počiatočným rozdelením

Presný polomer sa vypočíta podľa vzorca (1.31). Chyba podľa vzorca (1.32). A rád konvergencie podľa vzorca (1.33). Z výsledkov v tabuľke (1.2) je vidno, že rád konvergencie je 1 aj s nenulovou α.

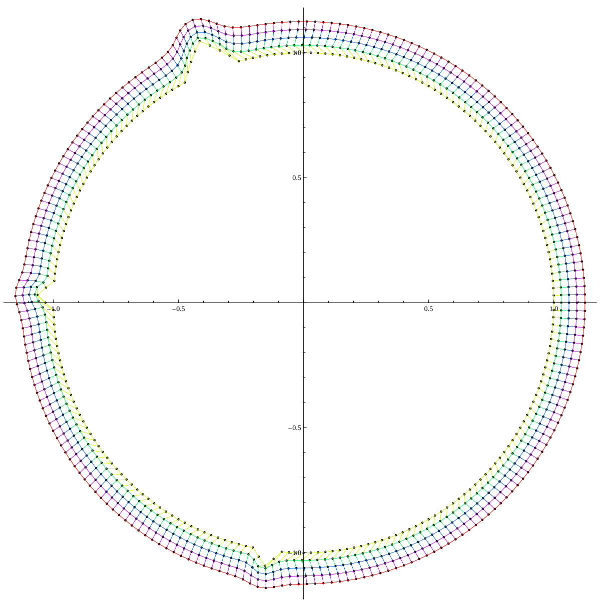
Dôležitosť použitia pohybu v tangenciálnom smere budeme prezentovať na umelo vytvorených dátach. V prvom experimente sa bude vyvíjať krivka bez použitia pohybu v tangencialnom smere. Na obrázku (1.4) je vidno miesta, kde sa body na krivke zhlukujú. V druhom experimente použijeme na tú istú krivku aj pohyb v tangenciálnom smere s $\omega = 0$. Na obrázku (1.5) je vidno, že pohyb v tangenciálnom smere sa tomuto zhlukovaniu snaží zabrániť, ale kedže α s $\omega = 0$ udržiava rozdelenie bodov len z predchádzajúceho časového kroku. Akonáhle sa body k sebe priblížia, tento pohyb ich už neoddeľuje. V treťom experimente použijeme α s $\omega = 100$. Na obrázku (1.6) je vidno, že α udržiava rovnomernú redistribúciu bodov po celý čas vývoja krivky.



Obr. 1.4: Vyvíjajúca sa krivka bez použitia tangenciálneho pohybu



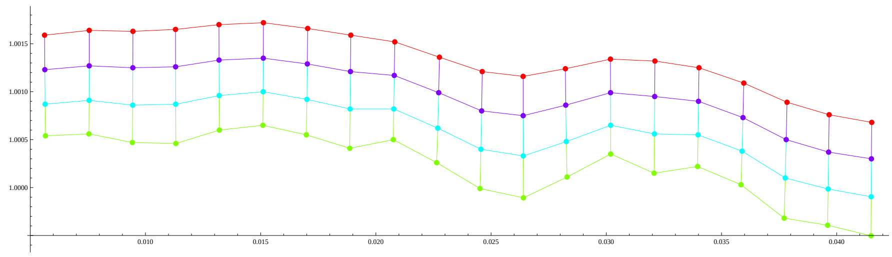
Obr. 1.5: Vyvíjajúca sa krivka s použitím tangenciálneho pohybu s $\omega = 0$



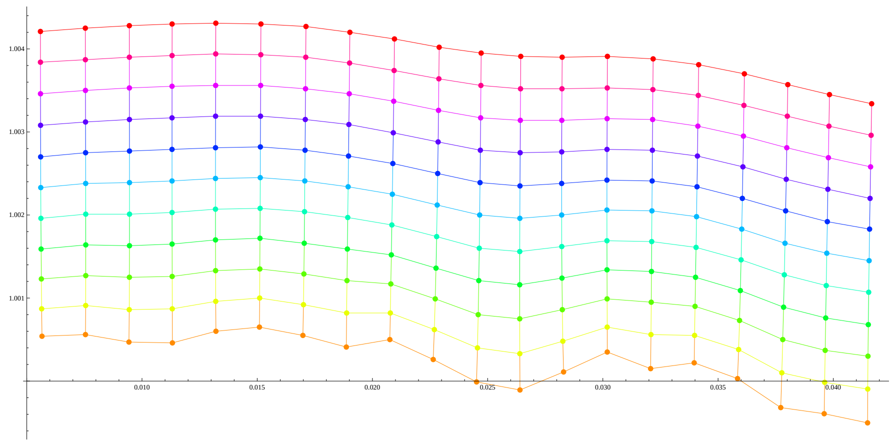
Obr. 1.6: Vyvíjajúca sa krivka s použitím tangenciálneho pohybu s $\omega = 100$

1.5.2 Výpočty s reálnymi dátami

Výsledky budeme prezentovať na dátach Zeme z rovnobežky 27.525 stupňa severnej zemepisnej šírky s počtom deliacich bodov 3332. Rozdiel medzi jednotlivými bodmi je približne 0.10804 stupňa a približne 10.665 km. Presná hodnota závisí od nadmorskej výšky, v ktorej sa bod a jeho susedia nachádzajú. Voľba parametra ε pre veľkosť vplyvu krivosti je 0.002, čo nám zabezpečí, že sa krivka nevyrovná hneď v druhom časovom kroku. Parameter ω sme zvolili 100. Na obrázku (1.7) sú zobrazené prvé tri časové kroky a na obrázku (1.8) je ich 10.



Obr. 1.7: 27.525 rovnobežka. Prvé tri časové kroky.



Obr. 1.8: 27.525 rovnobežka. Desať časových krokov.

Kapitola 2

Vývoj plochy v 3D

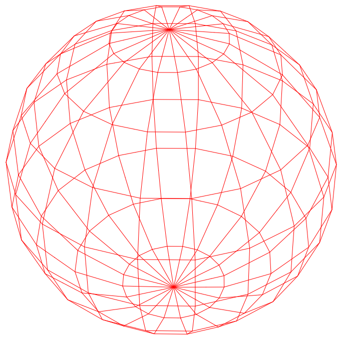
2.1 Vývoj plochy závislý od krivosti

Rozhodujúce pri voľbe metódy pre tvorbu sietí nad topografiou Zeme je počiatočná diskretizácia siete. V práci budeme uvažovať len diskretizáciu Zeme ako na obrázku (2.1). Pôvodný zámer bolo pozerať sa na sieť ako na systém navzájom previazaných kriviek, ktoré by sa vyvíjali, ako je uvedené v kapitole 1. Tento prístup nie je vhodný pre takúto diskretizáciu Zeme, lebo spojením krátkych rovnobežiek blízko pólov a poludníkov dostávame väčšiu krivosť, ako spojením dlhých rovnobežiek pri rovníku s poludníkmi. To spôsobí, že sa bude výsledná plocha pri póloch sťahovať rýchlejšie. Vhodnejšia metóda je pozerať sa na sieť, ako na uzavretú plochu a tú aproximovať metódou konečných objemov, ako je to uvedené v práci [7].

Všeobecná rovnica pre vývoj plochy podľa krivosti

$$\partial_t \mathbf{r} = \varepsilon k \mathbf{N} + f \mathbf{N}. \tag{2.1}$$

Neznáma $\mathbf{r}$ je pozičný vektor vyvíjajúcej sa plochy Ω a $\mathbf{N}$ je normála na ňu v bode $\mathbf{r}$. f je sila pôsobiaca v smere normály. $k\mathbf{N}$ vypočítame ako $k\mathbf{N} = \Delta_s \mathbf{r}$. ε je parameter určujúci, ako rýchlo sa plocha vyrovná. Δ_s je Laplac-Beltramiho operátor, čo je Laplacov operátor na ploche. Rovnicu budeme riešiť metódou konečných objemov.



Obr. 2.1: Diskretizácia gule

2.2 Odvodenie tangenciálnej rýchlosti

Ako v prípade krivky v 2D, je aj pre plochu v 3D dôležité udržiavať rovnomerné rozdelenie bodov. Aj tu sa nám bez rovnomerného rozdelenia môže stať, že sa plocha zauzlí, alebo na nej budú vznikať body singularity. Jedným zo spôsobov udržiavania rovnomerného rozdelenia je zachovávanie rovnako veľkých konečných objemov. V našom prípade je však dôležitejšie zachovať rovnomerné rozdelenie bodov na jednotlivých krivkách (rovnobežkách a poludníkoch). To docielime pridaním pohybu plochy v smere $\alpha^i T^i$ a $\alpha^j T^j$, kde T^i je tangenta k i-tej rovnobežke, prechádzajúcej bodom $\mathbf{r}_{ij}$ a T^j je tangenta k j-temu poludníku prechádzajúcemu bodom $\mathbf{r}_{ij}$. V prípade pólov pridáme n_j pohybov $\alpha^j T^j$, pričom n_j je počet poludníkov.

V ďalšom texte budeme počítať α^Γ vzhľadom na jednotlivé krivky, ktoré nám tvoria plochu, ako je to uvedené v práci [6], s rozdelením pohybu aj do tangenciálneho smeru. Výpočet bude rovnaký ako pre krivku v 2D, ale pre prípad krivky Γ v 3D, ktorej α^Γ chceme počítať, si pohyb v smere normály podľa krivosti a sily f rozdelíme do troch smerov. Do smeru $\mathbf{N}_1^\Gamma$, čo je smer normály k ploche premietnutý do normálovej plochy krivky. Do smeru $\mathbf{N}_2^\Gamma$, ktorý je kolmý na $\mathbf{N}_1^\Gamma$ a leží v normálovej ploche krivky. A do smeru $\mathbf{T}^\Gamma$, čo je tangenta ku krivke. Teda krivka sa bude pohybovať podľa rovnice

$$\partial_t \mathbf{r} = U^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + V^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma + \tilde{\alpha}^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma + \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma, \tag{2.2}$$

kde $\mathbf{r}$ je pozičný vektor uzavretej krivky Γ a nie plochy Ω. Ďalej α^Γ je veľkosť pohybu v smere tangenty, ktorý nám bude zabezpečovať rovnomernú redistribúciu bodov na krivke a U^Γ,V^Γ a $\tilde{\alpha}^\Gamma$ sa vypočíta ako

$$\begin{aligned} U^\Gamma &= (\varepsilon k \mathbf{N} + f\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}_1^\Gamma \\ V^\Gamma &= (\varepsilon k \mathbf{N} + f\mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}_2^\Gamma \\ \tilde{\alpha}^\Gamma &= (\varepsilon k \mathbf{N} + f\mathbf{N}) \cdot \mathbf{T}^\Gamma \end{aligned} \tag{2.3}$$

Pre časový vývoj g^Γ, ktoré je určené ako $g^\Gamma = |\mathbf{r}_{u^\Gamma}| = \sqrt{(\frac{dr_1}{du^\Gamma})^2 + (\frac{dr_2}{du^\Gamma})^2 + (\frac{dr_3}{du^\Gamma})^2}$, môžme napísať

$$g_t^\Gamma = |\mathbf{r}_{u^\Gamma}|_t = \frac{\mathbf{r}_{u^\Gamma}}{|\mathbf{r}_{u^\Gamma}|} \cdot (\mathbf{r}_{u^\Gamma})_t. \tag{2.4}$$

Pre väčšiu prehľadnosť textu budeme ďalej parametrizáciu u^Γ označovať len ako u. Ďalej budeme Λ^Γ označovať súčet α^Γ a $\tilde{\alpha}^\Gamma$,t.j. $\Lambda^\Gamma = \alpha^\Gamma + \tilde{\alpha}^\Gamma$. Môžme napísať

$$(\mathbf{r}_u)_t = (\mathbf{r}_t)_u = (U^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + V^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma + \Lambda^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma)_u = g^\Gamma (U^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + V^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma + \Lambda^\Gamma \mathbf{T})_s \tag{2.5}$$

Z rovnice (1.8) a z rovnice (2.5) si môžme rovnicu (2.4) napísať ako

$$g_t^\Gamma = g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot (U^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + V^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma + \Lambda^\Gamma \mathbf{T})_s. \tag{2.6}$$

Kedže sú $\mathbf{N}_1^\Gamma$ a $\mathbf{T}^\Gamma$ navzájom kolmé, platí

$$0 = (\mathbf{T}^\Gamma \cdot \mathbf{N}_1^\Gamma)_s = \mathbf{T}_s^\Gamma \cdot \mathbf{N}_1^\Gamma + \mathbf{T}^\Gamma \cdot (\mathbf{N}_1^\Gamma)_s. \tag{2.7}$$

Z čoho vyplýva, že

$$\mathbf{T}^\Gamma \cdot (\mathbf{N}_1^\Gamma)_s = -\mathbf{T}_s^\Gamma \cdot \mathbf{N}_1^\Gamma \tag{2.8}$$

Podľa Frenetovho vzorca platí

$$-\mathbf{T}_s^\Gamma \cdot \mathbf{N}_1^\Gamma = -\mathbf{N}_1^\Gamma \cdot (k^\Gamma \mathbf{N}^\Gamma) = -\mathbf{N}_1^\Gamma \cdot (k_1^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + k_2^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma) = -k_1^\Gamma, \tag{2.9}$$

kde k_1^Γ je projekcia $k^\Gamma \mathbf{N}^\Gamma$ do $\mathbf{N}_1^\Gamma$ a k_2^Γ je projekcia $k^\Gamma \mathbf{N}^\Gamma$ do $\mathbf{N}_2^\Gamma$. Analogicky platí

$$-\mathbf{T}_s^\Gamma \cdot \mathbf{N}_2^\Gamma = -k_2^\Gamma. \tag{2.10}$$

Vďaka tomu môžme rovnicu (2.6) prepísať na tvar

$$\begin{aligned}
g_t^\Gamma &= g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot (U_s^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + U^\Gamma (\mathbf{N}_1^\Gamma)_s + V_s^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma + V^\Gamma (\mathbf{N}_2^\Gamma)_s + \Lambda_s^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma + \Lambda^\Gamma (\mathbf{T}^\Gamma)_s) \\
&= g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot U_s^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot U^\Gamma (\mathbf{N}_1^\Gamma)_s + g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot V^\Gamma (\mathbf{N}_2^\Gamma)_s \\
&\quad + g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot \Lambda_s^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma + g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot \Lambda^\Gamma (\mathbf{T}^\Gamma)_s \\
&= g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot U^\Gamma (\mathbf{N}_1^\Gamma)_s + g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot V^\Gamma (\mathbf{N}_2^\Gamma)_s + g^\Gamma \Lambda_s^\Gamma \\
&= -g^\Gamma U^\Gamma k_1^\Gamma - g^\Gamma V^\Gamma k_2^\Gamma + g^\Gamma \Lambda_s^\Gamma
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Zintegrovaním rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}
\int_{S^1} g_t^\Gamma \mathrm{d}u &= \int_{S^1} -g^\Gamma (U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) \mathrm{d}u + \int_{S^1} -g^\Gamma \Lambda_s^\Gamma \mathrm{d}u \\
\frac{1}{\mathrm{d}t} \int_\Gamma \mathrm{d}s &= \int_\Gamma -(U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) \mathrm{d}s + \Lambda^\Gamma(1) - \Lambda^\Gamma(0).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Keďže je Λ^Γ cyklické, platí $\Lambda^\Gamma(0) = \Lambda^\Gamma(1)$. Z čoho vyplýva

$$L_t^\Gamma = \int_{S^1} -(U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) \mathrm{d}u. \tag{2.13}$$

Keďže chceme zachovať rovnomernú redistribúciu bodov tak ako v 2D prípade, aj tu chceme, aby $\frac{g^\Gamma}{L^\Gamma} \to 1$ pre $t \to \infty$. Teda $\theta^\Gamma = \ln(\frac{g^\Gamma}{L^\Gamma}) \to 0$ pre $t \to \infty$. Pre zmenu θ^Γ v čase platí

$$\begin{aligned}
\theta_t^\Gamma &= (\ln(\frac{g^\Gamma}{L^\Gamma}))_t = \frac{L^\Gamma}{g^\Gamma} \frac{g_t^\Gamma L^\Gamma - g^\Gamma L_t^\Gamma}{L^{\Gamma 2}} \\
&= \frac{(-g^\Gamma U^\Gamma k_1^\Gamma - g^\Gamma V^\Gamma k_2^\Gamma + g^\Gamma \Lambda_s^\Gamma) L^\Gamma + g^\Gamma L^\Gamma \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma}{g^\Gamma L^\Gamma} \\
&= \Lambda_s^\Gamma - (U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) + \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

kde $\langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma = \frac{1}{L^\Gamma} \int_\Gamma -(U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) \mathrm{d}s$. Keď $\Lambda_s^\Gamma = (U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) + \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma$ bude $\theta^\Gamma = 0$. Z toho vyplýva, že sa s meniacim časom nebude meniť rozloženie bodov na krivke. Ak zvolíme

$$\Lambda_s^\Gamma = (U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) - \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma + \omega(e^{-\theta^\Gamma} - 1), \tag{2.15}$$

tak platí

$$\theta_s^\Gamma = \omega(e^{-\theta^\Gamma} - 1). \tag{2.16}$$

Takáto rovnica spĺňa našu požiadavku, aby θ^Γ išla k nule pre zväčšujúci sa čas, čo spôsobí zrovnomerňovanie siete. Výsledná rovnica bude mať tvar

$$\alpha_s^\Gamma = -\tilde{\alpha}_s^\Gamma - (U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) + \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma + \omega(e^{-\theta^\Gamma} - 1). \tag{2.17}$$

Pridaním pohybu v smere tangenty kriviek, prechádzajúcich bodmi, bude mať výsledná rovnica pre pohyb plochy Ω tvar

$$\partial_t \mathbf{r} = \varepsilon k \mathbf{N} + f\mathbf{N} + \langle \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \rangle, \tag{2.18}$$

kde $\langle \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \rangle$ je priemer všetkých $\alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma$. V spojitom modeli dávajú rovnice (2.18) a (2.1) rovnaký obraz vyvíjajúcej plochy.

2.3 Numerická aproximácia

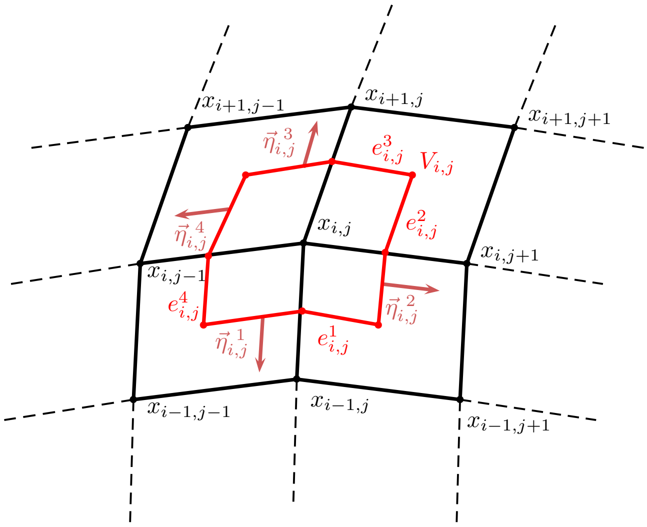
Plochu si zdiskretizujeme ako na obrázku (2.1). Plocha sa bude skladať z n_i rovnobežiek a n_j poludníkov. Bod, kde sa pretína i-ta rovnobežka a j-ty poludník, bude bod $\mathbf{r}_{ij}$. Plochu si rozdelíme na konečný počet konečných objemov. Objem V_{ij} bude patriť bodu $\mathbf{r}_{ij}$. Označme si $\mathbf{r}_{ij}^q$ susedné body k $\mathbf{r}_{ij}$. Konečný objem V_{ij} je priestorový plošný útvar s vrcholmi v ťažiskách úsečiek $\mathbf{r}_{ij}\mathbf{r}_{ij}^q$ a v ťažiskách štvorstenov (v prípade pólov ide o trojuholníky) prislúchajúcich k tomu istému bodu. e_{ij}^q označíme časť hranice konečného objemu V_{ij} medzi bodom $\mathbf{r}_{ij}$ a bodom $\mathbf{r}_{ij}^q$. $\vec{\eta}_{ij}^q$ si označíme vonkajšiu normálu k časti hranice e_{ij}^q. Pre lepšie pochopenie viď obr. (2.2).

Zintegrovaním rovnice 2.18 na konečnom objeme V_{ij} dostaneme slabú formuláciu.

$$\int_{V_{ij}} \partial_t \mathbf{r} \mathrm{d}x = \int_{V_{ij}} \Delta_s \mathbf{r} \mathrm{d}x + \int_{V_{ij}} f\mathbf{N} \mathrm{d}x + \int_{V_{ij}} \langle \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \rangle \mathrm{d}x. \tag{2.19}$$

Vďaka Greenovej vete môžme rovnicu prepísať na tvar

$$\int_{V_i} \partial_t \mathbf{r} \mathrm{d}x = \int_{\partial V_i} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_{ij} \mathrm{d}s + \int_{V_{ij}} f\mathbf{N} \mathrm{d}x + \int_{V_{ij}} \langle \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \rangle \mathrm{d}x, \tag{2.20}$$



Obr. 2.2: Konečný objem

kde $\vec{\eta}_i$ je vonkajšia normála k hranici konečného objemu V_{ij}. Z tvaru konečného objemu V_{ij} vyplýva, že prvý člen pravej strany rovnice (2.20) môžme prepísať na

$$\int_{\partial V_i} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_{ij} \mathrm{d}s = \int_{\partial V_{ij}} \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_{ij}^{q} \mathrm{d}s = \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \int_{\partial V_{ij}} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_{ij}^{q} \mathrm{d}s, \tag{2.21}$$

kde Q_{ij} je počet susedných bodov k $\mathbf{r}_{ij}$. Rovnicu si ďalej možeme prepísať na

$$\sum_{q=1}^{Q_{ij}} \int_{\partial V_{ij}} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_{ij}^{q} \mathrm{d}s = \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \int_{\partial V_{ij}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vec{\eta}_{ij}^{q}} \mathrm{d}s. \tag{2.22}$$

Na hranici ∂V_{ij}^q budeme predpokladať konštantnú parciálnu deriváciu $\mathbf{r}_{ij}$ podľa normály η_{ij}^q. Jej hodnotu potom môžeme aproximovať vzťahom

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vec{\eta}_{ij}^{q}} = \frac{\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{ij}^q}{h_{ij}^q}, \tag{2.23}$$

kde h_{ij}^q je vzdialenosť medzi bodom $\mathbf{r}_{ij}$ a jeho q-tym susedom. To nám dovolí prepísať rovnicu (2.22) na tvar

$$\sum_{q=1}^{Q_{ij}} \int_{\partial V_{ij}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vec{\eta}_{ij}^{q}} \mathrm{d}s = \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \frac{\mathbf{r}_{ij} - \mathbf{r}_{ij}^q}{h_{ij}^q} m(e_{ij}^q), \tag{2.24}$$

kde $m(e_{ij}^q)$ je miera hrany e_{ij}^q, teda jej dĺžka.

Na celom objeme V_{ij} budeme predpokladať konštantnú hodnotu $f\mathbf{N}_{ij}$. Vďaka tomu môžme prepísať druhý člen pravej strany na tvar

$$\int_{V_{ij}} f\mathbf{N}\mathrm{d}x = m(V_{ij})f\mathbf{N}_{ij}, \tag{2.25}$$

kde $m(V_{ij})$ je miera objemu V_{ij}. Aj α^Γ a $\mathbf{T}^\Gamma$ predpokladáme na celom objeme V_{ij} konštantné, čo nám dovoľuje prepísať

$$\int_{V_{ij}} \langle\alpha^\Gamma\mathbf{T}^\Gamma\rangle\mathrm{d}x = m(V_{ij})\langle\alpha^\Gamma\mathbf{T}^\Gamma\rangle = \frac{m(V_{ij})}{|M|}\sum_{\Gamma\in M}\alpha_{ij}^\Gamma\frac{\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma E}-\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma W}}{h_{ij+1}+h_{ij}}, \tag{2.26}$$

kde $\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma W}$ je predchádzajúci bod na krivke Γ a $\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma E}$ je nasledujúci bod. Potom M si označíme ako množinu všetkých kriviek prechádzajúcich bodom $\mathbf{r}_{ij}$ a $|M|$ je počet kriviek prechádzajúcich bodom. Ďalej, $\partial\mathbf{r}_{ij}$ aproximujeme spätnou diferenciou a budeme predpokladať konštantnú hodnotu $\mathbf{r}_{ij}$ na konečnom objeme V_{ij}, vďaka čomu môžeme ľavú stranu rovnice prepísať na tvar

$$\int_{V_{ij}} \partial_t\mathbf{r}\mathrm{d}x = m(V_{ij})\left(\frac{\mathbf{r}_{ij}^{m+1}-\mathbf{r}_{ij}^m}{\Delta t}\right). \tag{2.27}$$

Využitím rovníc (2.24), (2.25), (2.26) a (2.27), pričom výpočty (2.24) a (2.25) budú v čase $m+1$, dostaneme

$$\begin{aligned} m(V_{ij})(\frac{\mathbf{r}_{ij}^{m+1}-\mathbf{r}_{ij}^m}{\Delta t}) &= \sum_{q=1}^{Q_{ij}}\frac{\mathbf{r}_{ij}^{m+1}-\mathbf{r}_{ij}^{q\ m+1}}{h_{ij}^q}m(e_{ij}^q) + m(V_{ij})f\mathbf{N}_{ij} \\ &+\frac{m(V_{ij})}{|M|}\sum_{\Gamma\in M}\alpha_{ij}^\Gamma\frac{\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma E\ m+1}-\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma W\ m+1}}{h_{ij+1}+h_{ij}}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Prepísaním rovnice dostaneme systém $n_i \times n_j$ rovníc s $n_i \times n_j$ neznámymi $\mathbf{r}_{ij}$, $i = 1,\dots,n_i, j = 1,\dots,n_j$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{m(V_{ij})}{\Delta t} - \sum_{q=1}^{Q_{ij}}\frac{m(e_{ij}^q)}{h_{ij}^q}\right)\mathbf{r}_{ij}^{m+1} + \sum_{q=1}^{Q_{ij}}\frac{m(e_{ij}^q)}{h_{ij}^q}\mathbf{r}_{ij}^{q\ m+1} - \frac{m(V_{ij})}{|M|}\sum_{\Gamma\in M}\frac{\alpha_{ij}^\Gamma}{h_{ij+1}+h_{ij}}\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma E\ m+1} \\ &+\frac{m(V_{ij})}{|M|}\sum_{\Gamma\in M}\frac{\alpha_{ij}^\Gamma}{h_{ij+1}+h_{ij}}\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma W\ m+1} = \frac{m(V_{ij})}{\Delta t}\mathbf{r}_{ij}^m + m(V_{ij})f\mathbf{N}_{ij}, \end{aligned} \tag{2.29}$$

kde $\mathbf{r}_{ij}^{m+1}$ a $\mathbf{r}_{ij}^{q\ m+1}$ sú neznáme a $\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma E\ m+1}$ a $\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma E\ m+1}$ sú jedným zo susedných bodov $\mathbf{r}_{ij}^{q\ m+1}$. Normálu a α vypočítame v čase m. V našom prípade výpočet normály ako $\mathbf{N} = \frac{k\mathbf{N}}{|k\mathbf{N}|}$ dával nepresnejšie výsledky, ako keď sme zobrali výpočet normály ako kolmicu na dve tangenty ku krivkám, ktoré prechádzajú bodom $\mathbf{r}_{ij}^{m}$. V našom prípade boli tieto krivky rovnobežka a poludník. Teda $\mathbf{N}_{ij} = \mathbf{T}_{ij}^{\Gamma 1} \times \mathbf{T}_{ij}^{\Gamma 2}$.

Zo vzťahu (2.17) aproximáciou α_s^Γ a $\tilde{\alpha}_s^\Gamma$ dostaneme

$$
\begin{aligned}
(2.30)\quad \frac{\alpha_{ij}^\Gamma - \alpha_{ij-1}^\Gamma}{h_{ij}} = -\frac{\tilde{\alpha}_{ij}^\Gamma - \tilde{\alpha}_{ij-1}^\Gamma}{h_{ij}} &+ (U_{ij-1/2}^\Gamma k_{1ij-1/2}^\Gamma \\
&+ V_{ij-1/2}^\Gamma k_{2ij-1/2}^\Gamma) - \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_1^\Gamma \rangle_\Gamma + \omega(\frac{L^\Gamma}{g^\Gamma} - 1),
\end{aligned}
$$

kde α_{ij-1} a $\tilde{\alpha}_{ij-1}$ sú hodnoty pre predchádzajúci bod krivky Γ a h_{ij} je vzdialenosť medzi bodom $\mathbf{r}_{ij}$ a predchádzajúcim bodom krivky. Vo vzťahu (2.30)

$$
(2.31)\qquad \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_1^\Gamma \rangle_\Gamma = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{n_i} h_{il} (U_{il-1/2}^\Gamma k_{1il-1/2}^\Gamma + V_{il-1/2}^\Gamma k_{1il-1/2}^\Gamma),
$$

$$
(2.32)\qquad L^\Gamma = \sum_{l=1}^{n_i} h_{il}.
$$

Zo vzťahov (2.30), (2.31) a (2.32) dostaneme

$$
\begin{aligned}
(2.33)\quad \alpha_{ij}^\Gamma = \alpha_{ij-1}^\Gamma - \tilde{\alpha}_{ij}^\Gamma - \tilde{\alpha}_{ij-1}^\Gamma &- h_{ij}(U_{ij-1/2}^\Gamma k_{1ij-1/2}^\Gamma + V_{ij-1/2}^\Gamma k_{2ij-1/2}^\Gamma) \\
&+ h_{ij} \sum_{l=1}^{n_i} h_i l (U_{il-1/2}^\Gamma k_{1il-1/2}^\Gamma + V_{il-1/2}^\Gamma k_{1il-1/2}^\Gamma) + \omega(\frac{\sum_{l=1}^{n_i} h_l}{n_i} - h_{ij}),
\end{aligned}
$$

Výsledný systém (2.27) riešime algoritmom SOR.

2.4 Numerické experimenty

V prvom experimente overíme rád konvergencie metódy a v ďalších konvergenciu elipsoidu a perturbovanej gule ku expandujúcej guľovej ploche. V prvom experimente sa bude sťahovať jednotková guľa len podľa krivosti. V druhom sa bude rozťahovať elipsoid a v treťom sa bude rozťahovať perturbovaná guľa.

Jednotková guľa daná predpisom

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \sin((i-1)\pi/(n_i-1))\cos(j2\pi/n_j) \\ y_{ij} &= \sin((i-1)\pi/(n_i-1))\sin(j2\pi/n_j) \\ z_{ij} &= \cos((i-1)\pi/(n_i-1)) \end{aligned} \tag{2.34}$$

pre $i = 1, \ldots, n_i$, $j = 1, \ldots, n_j$. Skutočná hodnota polomeru gule sťahujúcej sa podľa krivosti sa vypočíta ako

$$r(t) = \sqrt{r(0)^2 - 4t} \tag{2.35}$$

Pre výpočet chyby použijeme numerickú L2 chybu

$$\|e^M_{n(\mathbf{r})}\| = \sqrt{\sum_{m=1}^{M} \Delta t \sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} \frac{(|\mathbf{r}^m_{ij}| - \mathbf{r}(m\Delta t)|)^2}{n_i n_j}}. \tag{2.36}$$

Rád konvergencie určíme ako

$$\mathrm{EOC} = \log_2 \frac{\|e^M_{n(\mathbf{r})}\|}{\|e^{2M}_{2n(\mathbf{r})}\|}. \tag{2.37}$$

V tabuľke (2.1) sú uvedené hodnoty chýb a rád konvergencie EOC pre zjemňujúcu sa sieť a zmenšujúci sa časový krok. Z tabuľky vyplýva, že metóda je 1. rádu.

n_i	n_j	Δt	$\|e_{n(r)^M}\|$	EOC
10	20	0.1	0.0142043	
14	28	0.05	0.00653283	1.12055
20	40	0.025	0.00306943	1.08974
28	56	0.0125	0.0014745	1.05774
39	78	0.00625	0.000719444	1.03527

Tabuľka 2.1

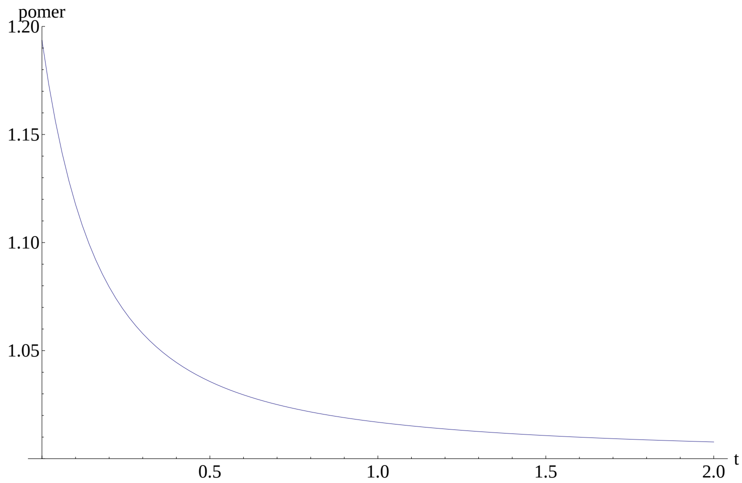
V experimente budeme pozorovať meniace sa pomery hlavných osí elipsoidu. Dĺžky hlavných osí v čase 0 budú 1.2 v z-ovom smere a 1 v x-ovom a y-ovom smere. Počet deliacich bodov bude 42 na rovnobežke a 40 na poludníkoch. V grafe (2.1) sledujeme meniaci sa pomer osi v z-ovom smere a x-ovom smere. Budeme uvažovať vývoj plochy podľa krivosti s parametrom $\varepsilon = 1$ a v smere vonkajšej normály so silou $f = 4$. Parameter ω nastavíme na 1. Počet časových krokov je 100 a veľkosť časového kroku je 0.02. Z grafu vyplýva, že so zväčšujúcim sa časom ide pomer k 1.

Ako aj v predchádzajúcom experimente aj teraz budeme pozorovať, ako sa bude meniť pomer osí v závislosti od času. Budeme mať perturbovanú guľu danú predpisom

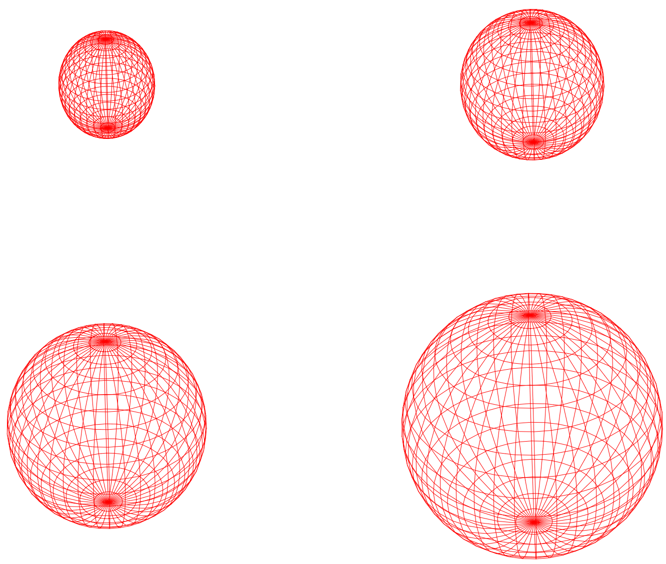
$$\begin{aligned} x_{ij} &= (\cos(12(i-1)\pi/(n_i-1))/20+1)\sin((i-1)\pi/(n_i-1)) \\ &\quad (\cos(12j\pi/n_j)/20+1)\cos(j2\pi/n_j) \\ y_{ij} &= (\cos((12i-1)\pi/(n_i-1))/20+1)\sin((i-1)\pi/(n_i-1)) \\ &\quad (\cos(12j\pi/n_j)/20+1)\sin(j2\pi/n_j) \\ z_{ij} &= (\cos(12(i-1)\pi/(n_i-1))/20+1)\cos((i-1)\pi/(n_i-1)) \end{aligned} \tag{2.38}$$

pre $i = 1, \ldots, n_i$, $j = 1, \ldots, n_j$. Na perturbovanej guli sa nachádzajú miesta s rôzne dlhými polomermi. Budeme sledovať pomer najdlhšieho polomeru k najkratšiemu polomeru. Parametre nastavíme ako $\varepsilon = 0.02$, $f = 3$. Parameter ω nastavíme na 100. Počet časových krokov je 100 a veľkosť časového kroku je 0.02. Z grafu (2.2) je vidno, že aj tento pomer ide k 1.

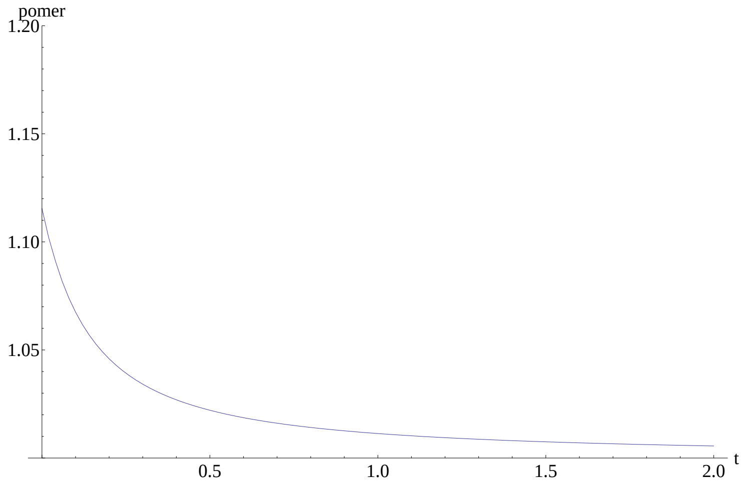
Dôležitosť použitia redistribúcii budeme prezentovať na vývoji perturbovanej guli. Perturbovaná guľa sa bude vyvíjať s $\varepsilon = 0.001$ a $f = 1$. Na obrázku (2.4) je vidno, ako sa bez použitia redistribúcie body na niektorých oblastiach zhlukujú. Na obrázku (2.5) je vidno, že použitie redistribúcie zachováva rovnomerné vzdialenosti na jednotlivých krivkách. V grafe (2.3) je vidno, ako sa zachováva pomer najdlhšej vzdialenosti od najkratšej na jednej z kriviek s použitím redistribúcie a bez.



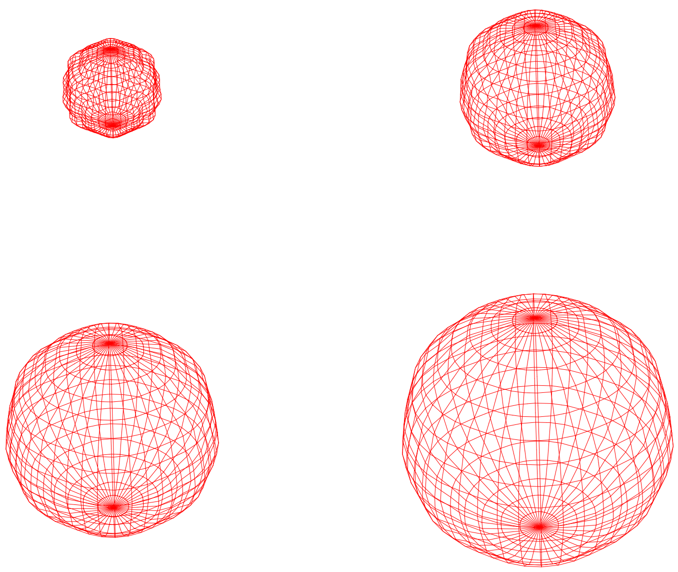
Graf 2.1: Závislosť pomerov hlavných osí od času pre vyvíjajúci sa elipsoid



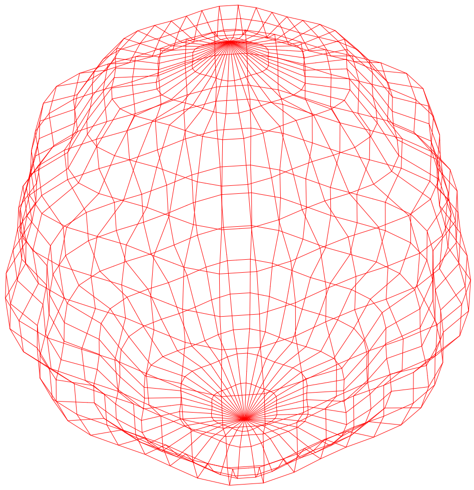
obr. (2.3): elipsoid vyvíjajúci sa podľa krivosti a sily f v časovom kroku 0, 10, 20, 30



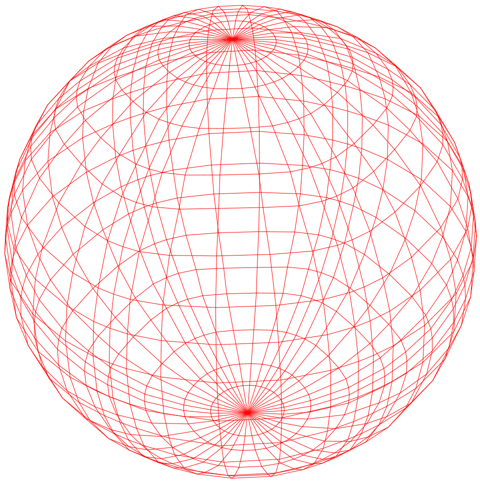
Graf 2.2: Závislosť pomerov najdlhšieho a najkratšieho polomeru od času pre perturbovanú guľu



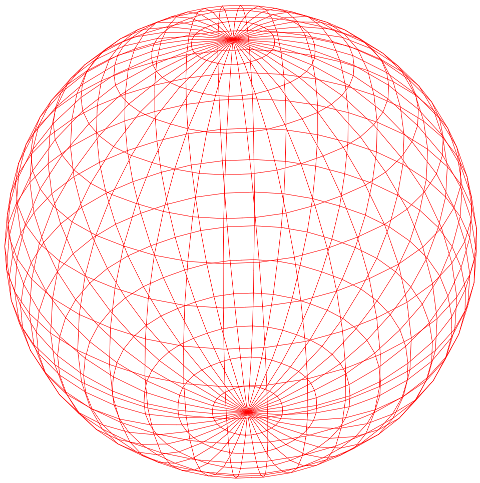
obr. 2.4: Pertrubovaná guľa vyvíjajúca sa podľa krivosti a sily f v časovom kroku 0, 10, 20, 30



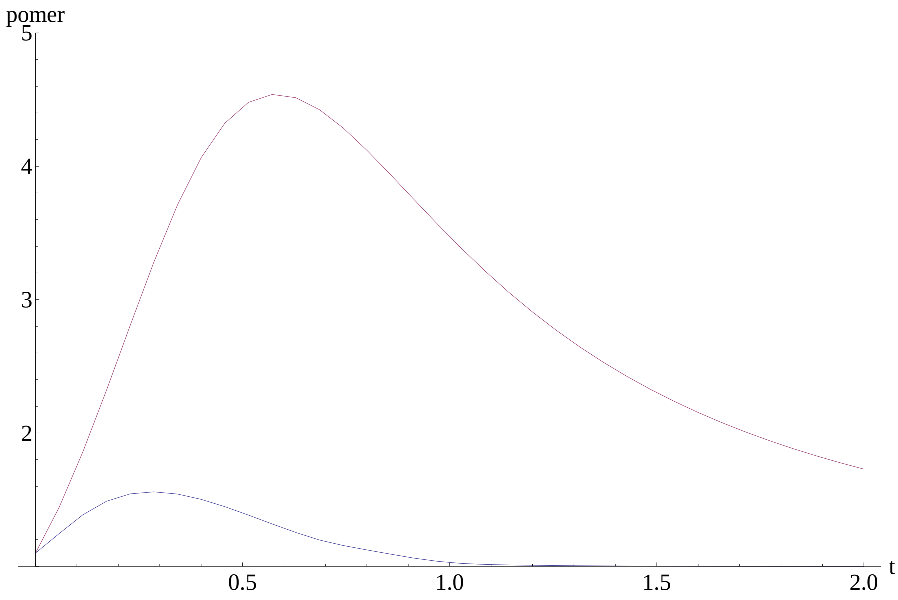
Obr. 2.3: Perturbovaná guľa v čase 0



Obr. 2.4: Perturbovaná guľa bez použitia redistribúcie v 20. časovom kroku



Obr. 2.5: Perturbovaná guľa s použitím redistribúcie v 20. časovom kroku



Graf 2.3: Závislosť pomerov vzdialeností na 6 rovnobežke. Modrá krivka je s použitím redistribúcie. Fialová krivka je bez použitia redistribúcie.

Kapitola 3

Záver

Zámerom práce bolo vytvoriť optimálnu logickú štvoruholníkovú sieť nad topografiou Zeme. Cieľom bolo dosiahnuť približne rovnaké vzdialenosti medzi jednotlivými bodmi siete a teda čo najrovnomernejšiu sieť. Ďalšou požiadavkou bolo, aby spodnou hranicou siete bola topografia Zeme v 3D a prierez topografiou Zeme v 2D a vrchnou hranicou bola plocha blízka guli v 3D a krivka blízka kružnici v 2D. Prístup, ktorý sme si zvolili, bolo pozerať sa na počiatočnú topografiu Zeme ako na plochu (krivku), vyvíjajúcu sa podľa krivosti a konštantnej sily, vďaka čomu naša výsledná sieť bola nad topografiou Zeme a postupne nadobúdala tvar blízky guli (kružnici). Správna voľba časového kroku a pohyb krivky v tangenciálnom smere nám zabezpečili približne rovnaké vzdialenosti medzi bodmi na jednotlivých krivkách.

Kapitola 4

Literatúra

[1] T.Y. Hou, J. Lowengrub, M. Shelley, *Removing the stiffness from interfacial flows and surface tension,* J. Comput. Phys., 114 (1994), pp. 312-338.

[2] M. Kimura, *Numerical analysis for moving boundary problems using the boundary tracking method,* Japan J. Indust. Appl. Math., 14 (1997), pp. 373-398.

[3] K. Mikula, D. Ševčovič, *Evolution of plane curves driven by a nonlinear function of curvature and anisotropy*, SIAM J. Appl. Math., 61 (2001), pp. 1473-1501.

[4] K. Mikula, D. Ševčovič, *A direct method for solving an anisotropic mean curvature flow of planar curve with an external force,* Mathematical Methods in Applied Sciences, 27(13) (2004) pp. 1545-1565.

[5] K. Mikula, D. Ševčovič, M.Balažovjech, *A simple, fast and stabilized floowing finite volume method for solving general curve evolution equations,* Communications in Computational Physics, Vol. 7, No. 1 (2010) pp. 195-211

[6] K. Mikula, J. Urbán, *3D curve evolution algorithm with tangential redistribution for a fully automatic finding of an ideal camera path in virtual colonoscopy,* Lecture Notes in Computer Science 6667, Springer, 2011

[7] M. Tunega, *Využitie metód evolúcie plôch v softvéri pre obuvnícky priemysel,* Diplomová práca, SvF STU, 2011