

Študentská vedecká konferencia
Akademický rok 2013/2014

Riešenie okrajových úloh so šikmou deriváciou na nerovnomerných logicky štvoruholníkových siet'ach

Meno a priezvisko študenta, ročník, odbor: Bc. Matej Medľa, 2. ročník,

I-MPM

Vedúci práce: prof. RNDr. Karol Mikula,

DrSc.

Katedra / Ústav: Katedra matematiky a
deskriptívnej geometrie

Pod'akovanie

Ďakujem môjmu vedúcemu práce prof. RNDr. Karolovi Mikulovi, DrSc. za jeho cenné rady a podnetné pripomienky, ktoré mi ochotne poskytoval pri tvorbe tejto práce.

Abstrakt

V práci sa venujeme riešeniu Laplaceovej rovnice metódou konečných objemov na ne-rovnomerných logicky štvoruholníkových sieťach v 2D. Výpočtová oblasť môže reprezentovať napríklad výsek nad rezom topografiou Zeme. V prvej kapitole práce prezentujeme diskretizáciu výpočtovej oblasti. Sieť vytvárame vývojom otvorenej krivky, ktorá je časťou diskretizovanej topografie Zeme. Krivka sa vyvíja podľa krivosti a konštantnou silou f . Takýmto vývojom zabezpečíme, že krivka nadobudne približne tvar výseku kružnice. Vhodnou tangenciálnou redistribúciou zabezpečíme približne rovnakú veľkosť vnútorných konečných objemov a polovičnú veľkosť okrajových konečných objemov, čo je dôležité pre implementáciu Dirichletovej okrajovej podmienky. V druhej kapitole sa venujeme metóde konečných objemov na takto vytvorenej nerovnomernej štvoruholníkovej sieti. V jej prvej časti prezentujeme novú diskretizáciu Laplaceovej rovnice metódou konečných objemov. Rozdiel v prístupe oproti diskretizácii na rovnomernej sieti je, že deriváciu v smere normály k hrane konečného objemu rozdelíme na deriváciu v smere tangenty a deriváciu v smere vektora, ktorý spája reprezentačné body. V druhej časti sa venujeme Neumannovým okrajovým podmienkam a v tretej časti prípadu, keď je namiesto derivácie v smere normály zadaná derivácia v šikmom smere. V prípade šikmej derivácie nahradzame hranicu hraničnou oblasťou a riešime okrajovú podmienku v tvare šikmej derivácie ako rovnicu advekcie s využitím up-wind metódy.

Abstract

This work is devoted to solving the Laplace equation using the finite volume method on non-uniform logically rectangular 2D grids. Computational area can represents e.g. a partial crossing above the Earth topography. The first chapter deals with discretization of the computational domain. The grid is created by evolution of an open curve which is evolved according to its curvature and by a constant force f . Such evolution ensures that the curve take a form of circular arc. A redistribution of grid points in tangential direction guarantees the uniform size of internal finite volumes and half size of boundary finite volumes, which is important when implementing the Dirichlet boundary conditions. The second chapter deals with the finite volume method on the non-uniform logically rectangular 2D grid created in the first chapter. In its first section the Laplace equation is discretized by a new finite volume method. In comparison with the finite volume method on a uniform grid, the derivative in the normal direction to the edge of finite volume is split into the direction of tangent to the edge and to the vector connecting the representative points of finite volumes. The second section deals with the Neumann boundary condition and the third section deals with the prescribed derivative in an oblique direction. In the case of the oblique derivative, the boundary is replaced by a boundary layer and the oblique derivative boundary condition is solved as an advection equation using the up-wind method.

Obsah

1	Úvod	2
2	Tvorba siete	1
2.1	Vývoj krivky závislý od krivosti a vonkajšej sily	1
2.2	Odvodenie tangenciálnej rýchlosťi	2
2.3	Numerická approximácia	6
2.4	Riešenie sústavy rovníc	7
2.5	Preškálovanie	9
3	Diskretizácia okrajových úloh	11
3.1	Riešenie Laplaceovej rovnice s Dirichletovými okrajovými podmienkami	11
3.2	Riešenie Laplaceovej rovnice s Neumannovými okrajovými podmienkami v normálovom smere	15
3.3	Riešenie Laplaceovej rovnice s predpísanou deriváciou v šikmom smere	16
3.4	Numerické experimenty	18
4	Záver	23
5	Literatúra	24

Kapitola 1

Úvod

Laplaceova rovnica je parciálna diferenciálna rovnica opisujúca dej v rôznych častiach fyziky. V geodézii je to geodetická okrajová úloha s pevnou hranicou na oblasti Ω

$$\begin{aligned}\Delta T(x) &= 0, & x \in \Omega \\ v(x) \cdot \nabla T(x) &= g(x), & x \in \Gamma \\ T(x) &= T_{Dir}(x), & x \in \partial\Omega - \Gamma,\end{aligned}$$

kde $T(x)$ je poruchový potenciál. Jej riešenie pri zložitých oblastiach so zložitými okrajovými podmienkami nie je vždy jednoduché, preto sa využívajú rôzne numerické metódy. Práca sa zaobrá riešením Laplaceovej rovnice od vytvárania siete na výpočtovej oblasti, cez diskretizáciu Laplaceovej rovnice metódou konečných objemov po diskretizácii Neumannových okrajových podmienok a predpísanej šikmej derivácie na okraji. Prvá kapitola sa venuje špeciálnemu prípadu tvorby siete na oblasti, ktorá reprezentuje priestor nad výsekom rezu topografie Zeme. V práci sú prezentované numerické experimenty ukazujúce rád metód.

Kapitola 2

Tvorba siete

2.1 Vývoj krivky závislý od krivosti a vonkajšej sily

Uvažujeme, že máme výpočtovú oblasť, ktorej dolnou hranicou je časť rezu topografie Zeme a horná hranica je časť kružnice v určitej výške H nad topografiou Zeme. Túto výpočtovú oblasť diskretizujeme a vytvoríme sieť skladajúcu sa z konvexných štvoruholníkov.

Uvažujeme krivku Γ , ktorá reprezentuje rez topografiou Zeme. Ďalej uvažujeme, že máme danú hornú hranicu oblasti, ktorou je časť kružnice. Sieť vytvoríme postupným vývojom krivky Γ podľa krivosti a konštantnej sily f , čím docielime, že výsledná krivka nadobudne približne tvar časti kružnice s polomerom $1/f$. Ako f zvolíme $1/R$, kde R je polomer Zeme. Takýto vývoj spôsobí, že krivka nadobudne približne tvar časti kružnice, ale jej polomer nebude H . Túto krivku budeme musieť ešte preškálovať, aby krivka v konečnom čase vývoja mala polomer H a krivka v čase 0 bola nezmenená. Body siete budú tvorené bodmi preškálovanej krivky v jednotlivých časových krokoch vývoja.

Všeobecná rovnica pre vývoj krivky má tvar

$$(2.1) \quad \partial_t \mathbf{r} = \beta \mathbf{N} + \alpha \mathbf{T},$$

kde \mathbf{r} je pozičný vektor krivky Γ , ktorá je daná predpisom $\Gamma = \{\mathbf{r}(u, t), u \in S^1, t \geq 0\}$, kde S^1 je úsečka jednotkovej dĺžky a t je čas. Od okrajových bodov chceme, aby sa

v konečnom čase t_{end} dostali do vzdialenosťi R od stredu Zeme, teda máme okrajové podmienky $\mathbf{r}(0, t) = \mathbf{r}(0, 0) + \frac{\mathbf{r}(0, 0)}{|\mathbf{r}(0, 0)|}(R - |\mathbf{r}(0, 0)|)\frac{t}{t_{end}}$ a $\mathbf{r}(1, t) = \mathbf{r}(1, 0) + \frac{\mathbf{r}(1, 0)}{|\mathbf{r}(1, 0)|}(R - |\mathbf{r}(1, 0)|)\frac{t}{t_{end}}$ pre všetky t . Nazvime s taký parameter, aby rovnako veľkej zmene parametra prislúchala vždy rovnaká zmena dĺžky krivky. Ide o jednotkovú dĺžkovú parametrizáciu. Pre takto danú parametrizáciu platí, že každej hodnote s prislúcha jedinečný bod na krivke. Označme $g = |\mathbf{r}_u| = \sqrt{(\frac{dr_1}{du})^2 + (\frac{dr_2}{du})^2}$, potom platí $ds = gdu$.

Krivka sa bude vyvíjať v smere normály \mathbf{N} rýchlosťou β a v smere tangenty \mathbf{T} rýchlosťou α . Posun bodov krivky v smere tangenty nebude mať vplyv na výsledný tvar krivky len na rozloženie bodov, čo nám v našom prípade zabezpečí čo najrovnomernejsiu výslednú siet.

Rýchlosť β bude závislá od krivosti krivky v danom bode krát ε , čo spôsobí, že krivka bude nadobúdať tvar časti kružnice. Bude tiež závislá od sily f , vďaka ktorej sa vývoj krivky zastaví, keď krivka bude mať krivosť f/ε a teda pôjde o časť kružnice s polomerom ε/f . Rovnica pre β má tvar

$$(2.2) \quad \beta = -\varepsilon k + f.$$

V rovnici je $\varepsilon > 0$ reálny parameter, ktorý bude určovať, ako rýchlo sa bude krivka zhľadzovať, k je krivosť krivky a f je konštanta.

Rozpísaním rovnice (2.1) dostaneme

$$(2.3) \quad \partial_t \mathbf{r} = -\varepsilon k \mathbf{N} + f \mathbf{N} + \alpha \mathbf{T}.$$

Pre každý bod sa dá tangenta vypočítať ako $\mathbf{T} = \partial_s \mathbf{r}$. Vďaka Frenetovým vzorcom d'alej platí $k \mathbf{N} = -\partial_s \mathbf{T} = -\partial_{ss} \mathbf{r}$. Čo nám dovoľuje prepísať rovnicu na tvar

$$(2.4) \quad \partial_t \mathbf{r} = \varepsilon \partial_{ss} \mathbf{r} + f \mathbf{N} + \alpha \partial_s \mathbf{r}.$$

2.2 Odvodenie tangenciálnej rýchlosťi

Dôležitou súčasťou vývoja krivky numerickou metódou je rovnomerné rozdelenie bodov. Bez takéhoto rozdelenia by na krivke mohli vznikať body singularity, kde by sa

viacero bodov dostalo do jedného bodu, čím by vytvorili hranu na inak hladkej krivke. Ďalším problémom je, že by sa body mohli predbehnúť a tým by sa krivka mohla zauzliť.

Pre deriváciu (2.1) podľa u platí

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{r}_t)_u &= (\beta\mathbf{N} + \alpha\mathbf{T})_u = \frac{d(\beta\mathbf{N} + \alpha\mathbf{T})}{du} \\
 &= \frac{d(\beta\mathbf{N} + \alpha\mathbf{T})}{\frac{1}{g}ds} = g(\beta\mathbf{N} + \alpha\mathbf{T})_s \\
 (2.5) \quad &= g(\beta_s\mathbf{N} + \beta\mathbf{N}_s + \alpha_s\mathbf{T} + \alpha\mathbf{T}_s).
 \end{aligned}$$

Podľa Frenetových vzorcov platí $\mathbf{T}_s = k\mathbf{N}$ a $\mathbf{N}_s = -k\mathbf{T}$. Na základe čoho môžeme rovnicu prepísať na

$$(2.6) \quad g(\beta_s\mathbf{N} + \beta\mathbf{N}_s + \alpha_s\mathbf{T} + \alpha\mathbf{T}_s) = g((k\alpha + \beta_s)\mathbf{N} + (-k\beta + \alpha_s)\mathbf{T}).$$

Z čoho vyplýva, že

$$(2.7) \quad (\mathbf{r}_t)_u = g((k\alpha + \beta_s)\mathbf{N} + (-k\beta + \alpha_s)\mathbf{T}).$$

Ďalej platí, že

$$(2.8) \quad \mathbf{r}_u = \frac{d\mathbf{r}}{du} = \frac{d\mathbf{r}}{\frac{1}{g}ds} = g\frac{d\mathbf{r}}{ds} = g\mathbf{r}_s = g\mathbf{T}.$$

Pre časový vývoj g môžeme napísať

$$(2.9) \quad g_t = |\mathbf{r}_u|_t = \frac{\mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_u|} \cdot (\mathbf{r}_u)_t.$$

Ked'že platí $(\mathbf{r}_u)_t = (\mathbf{r}_t)_u$, tak z (2.8) a (2.7) môžeme (2.9) prepísať na

$$\begin{aligned}
 g_t &= \frac{g\mathbf{T}}{g} \cdot g((k\alpha + \beta_s)\mathbf{N} + (-k\beta + \alpha_s)\mathbf{T}) \\
 &= g(k\alpha + \beta_s)\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} + g(-k\beta + \alpha_s)\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \\
 &= g(-k\beta + \alpha_s) = -gk\beta + g\frac{d\alpha}{ds} \\
 &= -gk\beta + \frac{d\alpha}{\frac{1}{g}ds} = -gk\beta + \frac{d\alpha}{du} \\
 (2.10) \quad &= -gk\beta + \alpha_u.
 \end{aligned}$$

Zintegrovaním rovnice dostaneme

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \int_{S^1} g_t du &= \int_{S^1} -gk\beta du + \int_{S^1} \alpha_u du \\ ds = gdu \Rightarrow \frac{1}{dt} \int_{\Gamma} ds &= \int_{\Gamma} -k\beta ds + \alpha(1) - \alpha(0). \end{aligned}$$

Ked'že chceme, aby sa poloha bodov $\mathbf{r}(0, t)$ a $\mathbf{r}(1, t)$ v čase nemenila, musí byť tangenciálna rýchlosť týchto bodov nulová. Zvolíme $\alpha(0) = 0$ a $\alpha(1) = 0$. Z toho vyplýva

$$(2.12) \quad L_t = - \int_{\Gamma} k\beta ds.$$

Pretože chceme zachovať rovnomernú redistribúciu bodov, chceme, aby bolo g , teda zmena dĺžky vzhľadom na parameter u , konštantné. Ked'že

$$(2.13) \quad \int_0^1 gdu = L,$$

tak sa konštantné $g = L$. Z čoho vyplýva, že by sme potrebovali, aby $\frac{g}{L} \rightarrow 1$ pre $t \rightarrow \infty$ [2, 4, 5]. Pre zmenu $\frac{g}{L}$ v čase platí

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \left(\frac{g}{L}\right)_t &= \frac{g_t L - g L_t}{L^2} = \frac{(-gk\beta + g\alpha_s)L + gL\langle k\beta \rangle_{\Gamma}}{L^2} \\ &= \frac{g}{L} (-k\beta + \langle k\beta \rangle_{\Gamma} + \alpha_s). \end{aligned}$$

Ak zvolíme $(\frac{g}{L})_t = 0$, bude platiť $0 = -k\beta + \langle k\beta \rangle_{\Gamma} + \alpha_s$, kde $\langle k\beta \rangle_{\Gamma} = \frac{1}{L} \int_{\Gamma} k\beta ds$. Teda $\alpha_s = k\beta - \langle k\beta \rangle_{\Gamma}$. Pretože sa nebude meniť pomer $\frac{g}{L}$, nebude sa meniť rozloženie bodov na krivke [1, 3].

V práci [8] je g chápané ako tzv. hustota dĺžky, pričom pre predchádzajúce redistribúcie platí, že hustota dĺžky sa bud' nemení v čase, alebo konverguje ku konštante s narastajúcim časom. Vzhľadom na naše ďalšie ciele pri vytváraní sieti bude užitočné navrhnuť model s predpísanou hustotou dĺžky krivky. Ak chceme, aby krivka nadobudla hustotu dĺžky v , zvolíme

$$(2.15) \quad \left(\frac{g}{L}\right)_t = \omega \left(\frac{v}{L} - \frac{g}{L}\right).$$

Potom pôjde pomer $\frac{g}{L}$ k $\frac{v}{L}$, a teda pôjde g k v .

Rovnicu (2.14) môžeme prepísať

$$(2.16) \quad \alpha_s = k\beta - \langle k\beta \rangle_\Gamma + \omega \frac{L}{g} \left(\frac{v}{L} - \frac{g}{L} \right),$$

$$(2.17) \quad \alpha_s = k\beta - \langle k\beta \rangle_\Gamma + \omega \left(\frac{L}{g} \frac{v}{L} - 1 \right),$$

$$(2.18) \quad \alpha_s = k\beta - \langle k\beta \rangle_\Gamma + \omega \left(\frac{v}{g} - 1 \right).$$

Ked'že g bude konvergovať k v v nekonečne a pre všetky g platí rovnica (2.13), musíme zvoliť v , pre ktoré platí

$$(2.19) \quad \int_0^1 v du = L,$$

Označme v' funkciu relatívnej hustoty dĺžky, ktorá nespĺňa vzťah (2.19) a označme

$$(2.20) \quad L_2 = \int_0^1 v' du,$$

potom môžeme funkciu relatívnej hustoty v' upraviť na funkciu hustoty dĺžky, aby splňala vzťah (2.19) transformáciou

$$v = \frac{v' L}{L_2}$$

$$(2.21) \quad \alpha_s = k\beta - \langle k\beta \rangle_\Gamma + \omega \left(\frac{\frac{v' L}{L_2}}{g} - 1 \right).$$

Ak chceme, aby g bolo rovnomerné, zvolíme za $v' = L$ a teda

$$(2.22) \quad \alpha_s = k\beta - \langle k\beta \rangle_\Gamma + \omega \left(\frac{L}{g} - 1 \right),$$

2.3 Numerická aproximácia

Zintegrovaním rovnice (2.4) na oblasti $[\mathbf{r}_{i-1/2}, \mathbf{r}_{i+1/2}]$ dostaneme

$$(2.23) \quad \int_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}} \partial_t \mathbf{r} ds = \int_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}} \varepsilon \partial_{ss} \mathbf{r} ds + \int_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}} f(\partial_s \mathbf{r})^\perp ds + \int_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}} \alpha \partial_s \mathbf{r} ds,$$

kde f a ε sú konštantné na celej oblasti. Vzdialenosť $\mathbf{r}_{i-1/2}$ od $\mathbf{r}_{i+1/2}$ vypočítame ako $|\mathbf{r}_{i+1/2} - \mathbf{r}_{i-1/2}| = \frac{h_{i+1} + h_i}{2}$, kde $h_i^m = \sqrt{(x_i^m - x_{i-1}^m)^2 + (y_i^m - y_{i-1}^m)^2}$ a časovú deriváciu nahradíme spätnou diferenciou. To nám dovoľuje prepísaať rovnicu na tvar

$$(2.24) \quad \frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2} \frac{\mathbf{r}_i^{m+1} - \mathbf{r}_i^m}{\Delta t} = \varepsilon [\partial_s \mathbf{r}]_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}} + f([\mathbf{r}]_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}})^\perp + \alpha [\mathbf{r}]_{\mathbf{r}_{i-1/2}}^{\mathbf{r}_{i+1/2}},$$

kde $\mathbf{r}_i^{m+1} = [x_i^{m+1}, y_i^{m+1}], i = 1, \dots, n$ sú neznáme body na krivke. Ked' nahradíme derivácie v prvom člene pravej strany centrálnymi diferenciami a $\mathbf{r}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1}}{2}$, dostaneme rovnicu

$$(2.25) \quad \frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2} \frac{\mathbf{r}_i^{m+1} - \mathbf{r}_i^m}{\Delta t} = \varepsilon \left(\frac{\mathbf{r}_{i+1}^{m+1} - \mathbf{r}_i^{m+1}}{h_{i+1}^m} - \frac{\mathbf{r}_i^{m+1} - \mathbf{r}_{i-1}^{m+1}}{h_i^m} \right) + f_i^m \mathbf{N}_i^m + \alpha \frac{\mathbf{r}_{i+1}^{m+1} - \mathbf{r}_{i-1}^{m+1}}{2},$$

kde \mathbf{N}_i^m je normálka, ktorú získame ako $\mathbf{N}_i^m = [n_{xi}^m, n_{yi}^m] = (\frac{\mathbf{r}_{i+1}^m - \mathbf{r}_{i-1}^m}{2})^\perp = [(y_{i-1}^m - y_{i+1}^m)/2, (x_{i+1}^m - x_{i-1}^m)/2]$. Z okrajových podmienok vyplýva, že $\mathbf{r}_1^{m+1} = \mathbf{r}_1^1$ a $\mathbf{r}_n^{m+1} = \mathbf{r}_n^1$

Tangenciálnu rýchlosť α vypočítame zo vzťahu

$$(2.26) \quad \alpha_s = k\beta - \langle k\beta \rangle_\Gamma + \omega \left(\frac{\frac{v'L}{L_2}}{g} - 1 \right).$$

Po diskretizácii

$$(2.27) \quad \frac{\alpha_i^m - \alpha_{i-1}^m}{h_i^m} = k_{i-1/2}^m \beta_{i-1/2}^m - \frac{\sum_{j=1}^n k_{j-1/2}^m \beta_{j-1/2}^m h_j^m}{\sum_{j=1}^n h_j^m} + \omega \left(\frac{\frac{(v')_i^m \sum_{j=1}^n h_j^m}{\sum_{j=2}^n (v')_j^m}}{nh_i^m} - 1 \right),$$

kde

$$(2.28) \quad \begin{aligned} k_{i-1/2}^m &= \frac{\operatorname{sgn}(\det(\mathbf{h}_{i-1}^m, \mathbf{h}_{i+1}^m))}{2h_i^m} \arccos\left(\frac{\mathbf{h}_{i-1}^m \cdot \mathbf{h}_{i+1}^m}{h_{i-1}^m h_{i+1}^m}\right), \\ \beta_{i-1/2}^m &= -\varepsilon k_{i-1/2}^m + f_{i-1/2}^m, \\ f_{i-1/2}^m &= \frac{f_{i-1}^m + f_i^m}{2}, \\ \mathbf{h}_i^m &= \mathbf{r}_i^m - \mathbf{r}_{i-1}^m. \end{aligned}$$

Voľbou $\alpha_i^m = 0$ zabezpečíme, že prvý bod sa bude hýbať iba v normálovom smere a nie tangenciálnom. Ostatné tangenciálne rýchlosť sa vypočítajú vzťahom

$$(2.29) \quad \alpha_i^m = \alpha_{i-1}^m + k_{i-1/2}^m \beta_{i-1/2}^m h_i^m - h_i^m \frac{\sum_{j=1}^n k_{j-1/2}^m \beta_{j-1/2}^m h_j^m}{\sum_{j=1}^n h_j^m} + \omega \left(\frac{(v')_i^m \sum_{j=1}^n h_j^m}{\sum_{j=1}^n (v')_j^m} - h_i^m \right).$$

Vo vzťahu (2.29) je $\sum_{j=1}^n h_j^m$ rovné L . Do hodnoty α_n^m sa zosumujú všetky predchádzajúce α_i^m . Časť vzťahu $\frac{(v')_i^m L}{\sum_{j=1}^n (v')_j^m} - h_i^m$ sa zosumuje na 0 lebo h_i^m sa zosumuje na L a $\frac{(v')_i^m L}{\sum_{j=1}^n (v')_j^m}$ sa tiež zosumuje na L , keďže $\frac{(v')_i^m L}{\sum_{j=1}^n (v')_j^m}$ sa zosumuje na 1.

V našom prípade, keď vytvárame siet pre metódu konečných objemov, chceme, aby konečné objemy na okraji výpočtovej oblasti mali polovičný obsah, teda zvolíme $(v')_i^m = 1/2$ pre $i = 1$ a $i = n$, a $(v')_i^m = 1$ inde. Výsledok tejto redistribúcie je vidieť na obrázku 2.2.

Na obrázku 2.1 je krivka z redistribuovanými bodmi, keď numerická hodnota funkcie relatívnej hustoty dĺžky v' je daná vzťahom

$$(2.30) \quad (v')_i^m = 5 \frac{|k_{i-1/2}^m - k_{min}^m|}{k_{max}^m - k_{min}^m} + 1,$$

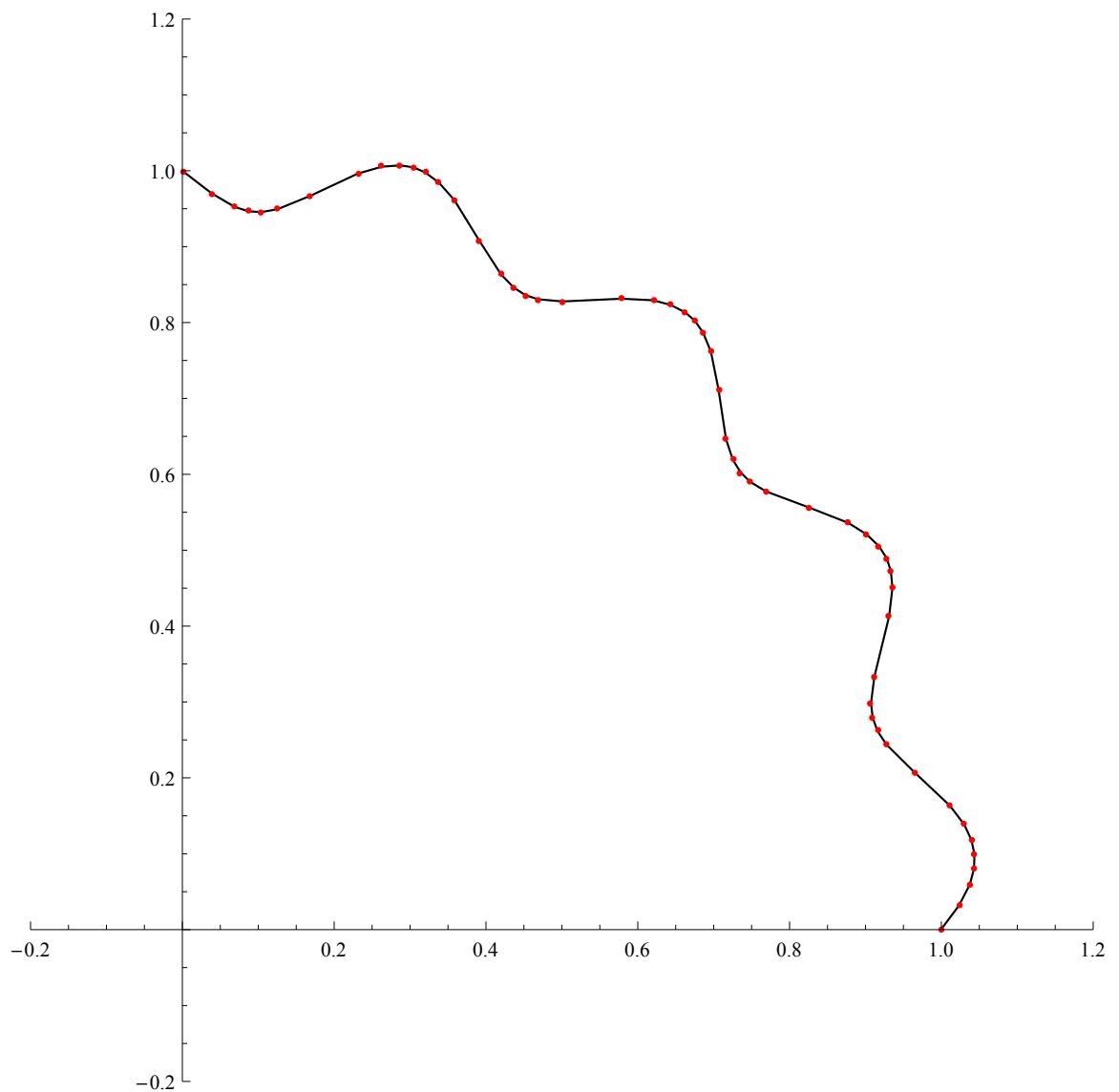
kde k_{max}^m je maximálna krivost a k_{min}^m je minimálna krivost. Takáto voľba funkcie v' zabezpečí, že sa body redistribuujú podľa krivosti. Funkcia v' nie je priamo funkcia krivosti lebo v prípade nulovej krivosti by sa vo vzťahu (2.29) delilo nulou. Distribúcia podľa krivosti nie je v tejto práci priamo využitá ale može byť veľmi užitočná.

2.4 Riešenie sústavy rovníc

Zo vzťahu (2.25) dostaneme

$$(2.31) \quad \left(\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_i^m} \right) \mathbf{r}_{i-1}^{m+1} + \left(\frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} + \frac{\varepsilon}{h_{i+1}^m} + \frac{\varepsilon}{h_i^m} \right) \mathbf{r}_i^{m+1} + \left(-\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_{i+1}^m} \right) \mathbf{r}_{i+1}^{m+1} = \frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} \mathbf{r}_i^m + f_i^m \mathbf{N}_i^m,$$

kde $i = 2, \dots, n-1$. Hodnoty α_i^m získame z vyššie uvedených rovníc a \mathbf{r}_i^m je riešenie z predchádzajúceho časového kroku. Zo vzťahu (2.31) získame $n-1$ rovníc s $n-1$ neznámymi. Tento systém budeme riešiť ako trojdiagonálny systém.



Obr. 2.1: Krivka z redistribuovanými bodmi podľa krivosti

Výsledný systém má tvar:

$$\begin{aligned}
 b_i &= \left(\frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} + \frac{\varepsilon}{h_{i+1}^m} + \frac{\varepsilon}{h_i^m} \right) \\
 a_i &= \left(\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_i^m} \right), \\
 c_i &= \left(-\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_{i+1}^m} \right), \\
 p_i &= \frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} \mathbf{r}_i^m + f_i^m \mathbf{r}_i^m, \\
 a &= \left(\frac{\alpha_1^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_1^m} \right), \\
 c &= \left(-\frac{\alpha_n^m}{2} - \frac{\varepsilon}{h_{n+1}^m} \right).
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

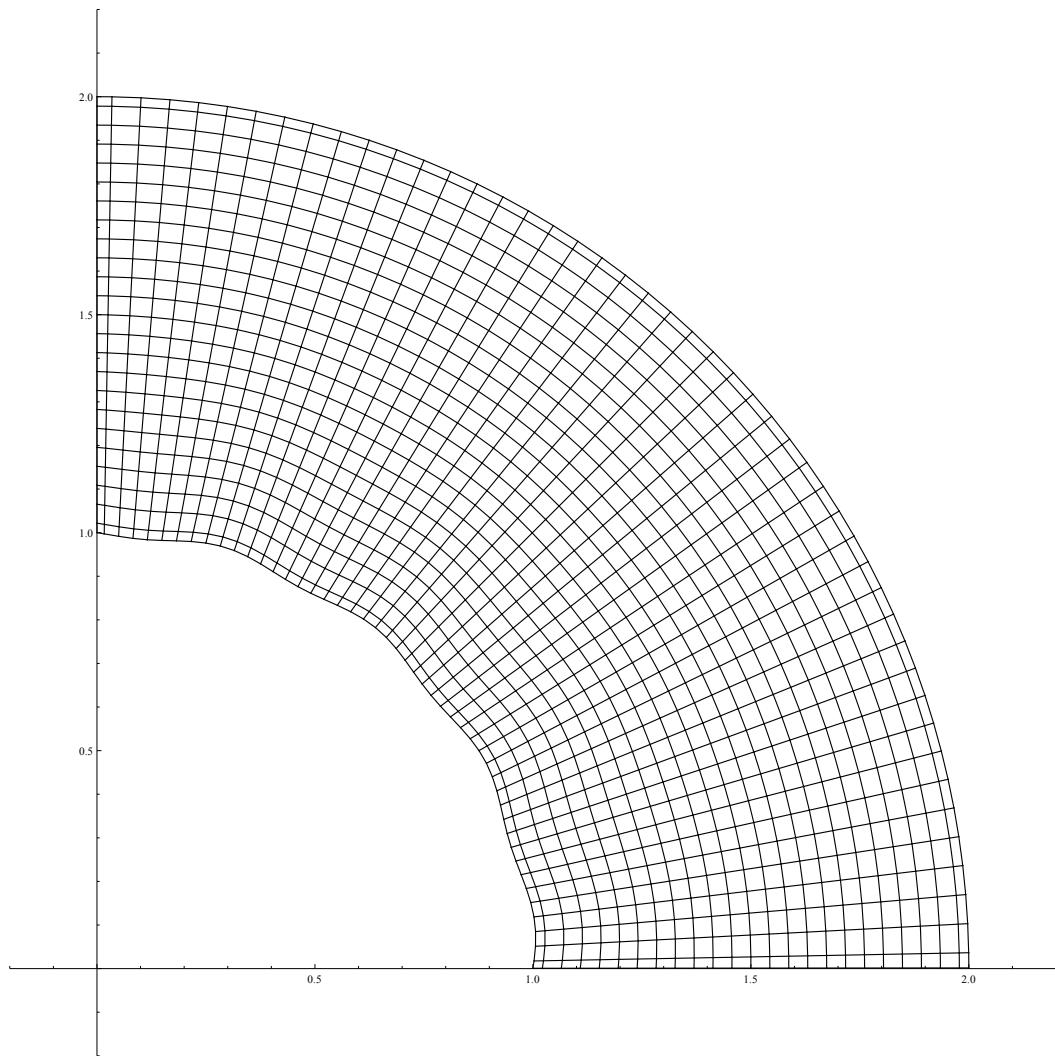
$$\begin{pmatrix}
 b_2 & c_2 & 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 \\
 a_3 & b_3 & c_3 & 0 & & & 0 & \\
 \vdots & & \ddots & & & & \vdots & \\
 & 0 & a_i & b_i & c_i & 0 & & \\
 & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \\
 & 0 & & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & \\
 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1}
 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
 p_2 - ar_1^{m+1} \\
 p_3 \\
 \vdots \\
 p_i \\
 \vdots \\
 p_{n-2} \\
 p_{n-1} - cr_n^{m+1}
 \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

Na riešenie použijeme metódu SOR.

2.5 Preškálovanie

Ďalším krokom je preškálovanie kriviek v jednotlivých časových okamihoch, aby sme dosiahli diskretizáciu celej výpočtovej oblasti. Preškálujeme ich tak, aby sa prvá krivka nezmenila a posledná krivka bola časťou kružnice s polomerom H a so stredom v strede Zeme. To znamená, že každý bod krivky preškálujeme pomocou rovnice

$$\mathbf{r}_i^m = \left(\frac{m}{M} \left(\frac{H}{R} - 1 \right) + 1 \right) (\mathbf{r}_i^m - \mathbf{C}) + \mathbf{C}. \tag{2.34}$$

Obr. 2.2: Výsledná siet²

kde \mathbf{C} je stred Zeme, R je jej polomer a M je posledný časový krok vývoja krvky. Pre $m = 0$ platí $\mathbf{r}_i^m = \mathbf{r}_i^0$ a pre $m = M$ platí $\mathbf{r}_i^m = \frac{H}{R}(\mathbf{r}_i^m - \mathbf{C}) + \mathbf{C}$. Jednotlivé body \mathbf{r}_i^m budú tvoriť uzly siete.

Na obrázku 2.2 je výsledná siet² vytvorená prezentovaným postupom.

Kapitola 3

Diskretizácia okrajových úloh

3.1 Riešenie Laplaceovej rovnice s Dirichletovými okrajovými podmienkami

Uvažujeme Laplaceovu rovnicu na oblasti Ω s Dirichletovými okrajovými podmienkami.

$$(3.1) \quad \Delta T = 0,$$

$$(3.2) \quad T(x) = T_{Dir}, \quad x \in \partial\Omega.$$

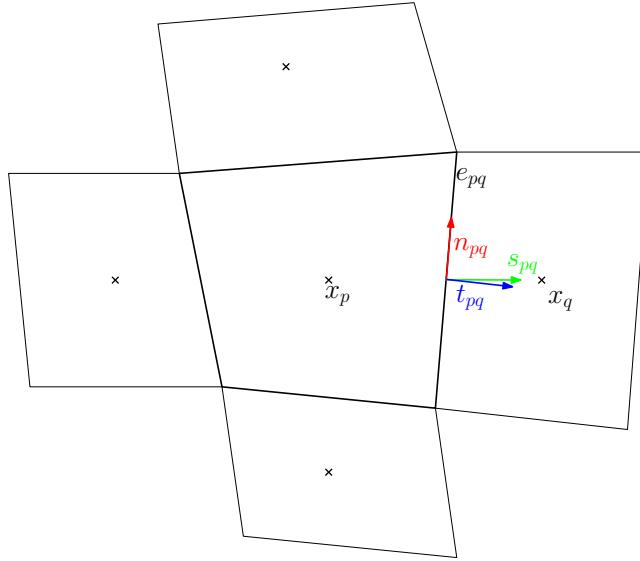
Oblast Ω rozdelíme na konečný počet konvexných štvoruholníkových podoblastí (konečných objemov) tak, aby každý konečný objem, ktorý nie je na hranici, mal štyroch susedov, s ktorými má spoločnú hranu. Množinu týchto susedov nazveme $N(p)$. Každý objem bude mať aj štyroch susedov, s ktorými má spoločný vrchol. Pre okrajové konečné objemy bude hodnota predpísaná Dirichletovou okrajovou podmienkou. Označme množinu konečných objemov, v ktorých je hodnota T neznáma, ako P .

Zintegrovaním rovnice (3.1) na konečnom objeme $p \in P$ dostaneme

$$(3.3) \quad \int_p \Delta T dx = 0.$$

Použitím Greenovej vety dostaneme

$$(3.4) \quad \int_{\partial p} \nabla T \cdot \mathbf{n} d\tau = 0.$$



Obr. 3.1: Konečný objem

Ked' budeme uvažovať, že konečný objem p má susedné objemy $q \in N(p)$, pričom e_{pq} je hranica medzi objemami p a q , môžeme rovnicu (3.4) prepísať na tvar

$$(3.5) \quad \sum_{q \in N(p)} \int_{e_{pq}} \nabla T \cdot \mathbf{n} d\tau = 0.$$

Oblast Ω zdiskretizujeme tak, že každému konečnému objemu $p \in P$ priradíme reprezentačný bod $x_p = (x_{1p}, x_{2p})$ ako tažisko konečného objemu p . V bode x_p budeme uvažovať neznámu hodnotu T_p . Okrajovým konečným objemom priradíme reprezentačný bod do polovice hranice konečného objemu, ktorá leží na hranici oblasti Ω .

Jednotkový vektor \mathbf{s}_{pq} smerujúci do susedného bodu x_q z bodu x_p je daný vzťahom

$$(3.6) \quad \mathbf{s}_{pq} = \frac{x_q - x_p}{|x_q - x_p|}.$$

Tangenta \mathbf{t}_{pq} k hranici medzi objemami p a q je daná vzťahom

$$(3.7) \quad \mathbf{t}_{pq} = \frac{x_{pq}^2 - x_{pq}^1}{|x_{pq}^2 - x_{pq}^1|},$$

kde x_{pq}^1 a x_{pq}^2 sú súradnice hraničných bodov úsečky e_{pq} .

Pre normálu k hranici objemu platí

$$(3.8) \quad \mathbf{n}_{pq} = \mathbf{t}_{pq}^\perp,$$

pričom normála sa skonštruuje tak, aby išlo o vonkajšiu normálu k objemu p .

Ked'že vektor \mathbf{s}_{pq} môžeme rozložiť do dvoch navzájom kolmých vektorov \mathbf{n}_{pq} a \mathbf{t}_{pq} [7], platí

$$(3.9) \quad \nabla T \cdot \mathbf{s}_{pq} = \nabla T \cdot (\beta_{pq} \mathbf{n}_{pq} + \alpha_{pq} \mathbf{t}_{pq}) = \beta_{pq} \nabla T \cdot \mathbf{n}_{pq} + \alpha_{pq} \nabla T \cdot \mathbf{t}_{pq},$$

kde

$$(3.10) \quad \beta_{pq} = \mathbf{s}_{pq} \cdot \mathbf{n}_{pq}$$

a

$$(3.11) \quad \alpha_{pq} = \mathbf{s}_{pq} \cdot \mathbf{t}_{pq}.$$

V prípade, že \mathbf{s}_{pq} a \mathbf{n}_{pq} sú totožné $\beta_{pq} = 0$ a $\alpha_{pq} = 0$.

Z toho vyplýva, že pre deriváciu v smere normály platí

$$(3.12) \quad \nabla T \cdot \mathbf{n}_{pq} = \frac{1}{\beta_{pq}} (\nabla T \cdot \mathbf{s}_{pq} - \alpha_{pq} \nabla T \cdot \mathbf{t}_{pq}).$$

Rovnicu (3.12) aproximujeme vzťahom

$$(3.13) \quad \frac{1}{\beta_{pq}} (\nabla T \cdot \mathbf{s}_{pq} - \alpha_{pq} \nabla T \cdot \mathbf{t}_{pq}) \approx \frac{1}{\beta_{pq}} \frac{T_q - T_p}{d_{pq}} - \frac{\alpha_{pq}}{\beta_{pq}} \frac{T_{pq}^2 - T_{pq}^1}{m(e_{pq})},$$

kde T_{pq}^1 a T_{pq}^2 sú hodnoty v bodoch x_{pq}^1 , x_{pq}^2 a d_{pq} je vzdialenosť medzi bodmi x_q a x_p , a $m(e_{pq})$ je dĺžka hranice e_{pq} .

Využitím rovnice (3.13) môžeme rovnicu (3.5) prepísat na tvar

$$(3.14) \quad \sum_{q \in N(p)} \left(m(e_{pq}) \frac{1}{\beta_{pq}} \frac{T_q - T_p}{d_{pq}} - \frac{\alpha_{pq}}{\beta_{pq}} (T_{pq}^2 - T_{pq}^1) \right) = 0,$$

kde T_p je neznáma hodnota v konečnom objeme p . V prípade vnútorných konečných objemov je T_{pq} neznáma hodnota v susedných konečných objemoch. V prípade konečných objemov, ktoré susedia s objemami na hranici výpočtovej oblasti Ω , je hodnota T_{pq} na hraničnom objeme, daná Dirichletovou okrajovou podmienkou (3.2).

Hodnoty T_{pq}^1 a T_{pq}^2 vyjadrieme pomocou bilineárnej interpolácie.

$$(3.15) \quad T_{pq}^l = T(x_{pq}^l) = a + b * x_{1pq}^l + c * x_{2pq}^l + d * x_{1pq}^l * x_{2pq}^l, \quad l = 1, 2.$$

Označme hodnoty riešenia v konečných objemoch, na hraniciach ktorých leží bod x_{pq}^l ako T_{pq1}^l , T_{pq2}^l , T_{pq3}^l , T_{pq4}^l . Potom koeficienty a , b , c , d možno získať riešením sústavy rovníc

$$(3.16) \quad \begin{aligned} T_{pq1}^l &= T(x_{pq1}^l) = a + b * x_{1pq1}^l + c * x_{2pq1}^l + d * x_{1pq1}^l * x_{2pq1}^l, \\ T_{pq2}^l &= T(x_{pq2}^l) = a + b * x_{1pq2}^l + c * x_{2pq2}^l + d * x_{1pq2}^l * x_{2pq2}^l, \\ T_{pq3}^l &= T(x_{pq3}^l) = a + b * x_{1pq3}^l + c * x_{2pq3}^l + d * x_{1pq3}^l * x_{2pq3}^l, \\ T_{pq4}^l &= T(x_{pq4}^l) = a + b * x_{1pq4}^l + c * x_{2pq4}^l + d * x_{1pq4}^l * x_{2pq4}^l. \end{aligned}$$

V koeficientoch a , b , c , d vystupujú neznáme hodnoty T_{pq1}^l , T_{pq2}^l , T_{pq3}^l , T_{pq4}^l , pričom bilineárnu interpoláciu prepíšeme do tvaru

$$(3.17) \quad T_{pq}^l = T(x_{pq}^l) = k_{pq1}^l * T_{pq1}^l + k_{pq2}^l * T_{pq2}^l + k_{pq3}^l * T_{pq3}^l + k_{pq4}^l * T_{pq4}^l.$$

Rovnicu (3.14) môžeme pomocou (3.17) prepísať do tvaru

$$(3.18) \quad \sum_{q \in N(p)} \left(m(e_{pq}) \frac{1}{\beta_{pq}} \frac{T_q - T_p}{d_{pq}} - \frac{\alpha_{pq}}{\beta_{pq}} (k_{pq1}^2 * T_{pq1}^2 + k_{pq2}^2 * T_{pq2}^2 + k_{pq3}^2 * T_{pq3}^2 + k_{pq4}^2 * T_{pq4}^2) \right. \\ \left. - \frac{\alpha_{pq}}{\beta_{pq}} (k_{pq1}^1 * T_{pq1}^1 + k_{pq2}^1 * T_{pq2}^1 + k_{pq3}^1 * T_{pq3}^1 + k_{pq4}^1 * T_{pq4}^1) \right) = 0.$$

Aj keď sa zdá, že v rovnici vystupuje veľa neznámych, ide len o 9 neznámych, keďže väčšina rôzne označených neznámych je totožných.

Rovnica (3.18) platí pre každý konečný objem $p \in P$ s neznámou hodnotou T_p . Z toho vyplýva, že máme toľko rovníc, kolko máme neznámych. Z týchto rovníc vytvoríme sústavu, ktorú následne riešime.

3.2 Riešenie Laplaceovej rovnice s Neumannovými okrajovými podmienkami v normálovom smere

Uvažujeme Laplaceovu rovnicu na oblasti Ω s Neumannovými okrajovými podmienkami danými na časti hranice Γ a Dirichletovými okrajovými podmienkami danými na zvyšku hranice $\partial\Omega - \Gamma$. T.j. máme danú rovnicu (3.1) a okrajové podmienky

$$(3.19) \quad \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}(x) = g(x), \quad x \in \Gamma.$$

$$(3.20) \quad T(x) = T_{Dir}(x), \quad x \in \partial\Omega - \Gamma$$

Oblast Ω rozdelíme na konečný počet konvexných štvoruholníkových podoblastí (konečných objemov), vid' predchádzajúcu kapitolu. Pre konečné objemy, ktorých časť hranice leží na $\partial\Omega - \Gamma$, je daná hodnota T pomocou Dirichletových okrajových podmienok. Označme množinu konečných objemov s neznámou hodnotou T ako P .

Pre konečne objemy P budeme pokračovať ako v predchádzajúcej kapitole, až po rovnicu (3.18). Tu si však treba uvedomiť rozdiel, že v prípade okrajových konečných objemov, na ktorých nie je predpísaná Dirichletova okrajová podmienka sa bod $x_p = (x_{1p}, x_{2p})$ vypočíta ako ťažisko konečného objemu p a nie ako stred hranice.

V rovnici (3.18) pre objemy p , nachádzajúce sa na okraji oblasti Ω , vystupujú neznáme susedné hodnoty T_q , ktoré nie sú definované. Tohto problému sa zbavíme pridaním nových neznámych v smere normály \mathbf{n}_{pq} vo vzdialosti od hranice e_{pq} , ktorá je rovná vzdialosti e_{pq} od x_p . Teda bod x_q , v ktorom uvažujeme novú neznámu T_q sa vypočíta ako

$$(3.21) \quad x_q = x_p + 2|x_p, e_{pq}|\mathbf{n}_{pq},$$

kde $|x_p, e_{pq}|$ je vzdialenosť x_p od e_{pq} . Označme množinu všetkých novo pridaných neznámych a ich súradníc ako N . Tým sme každému hraničnému objemu z množiny P pridali susednú neznámu, s ktorou susedí s hranicou. Vždy keď sme pridali suseda T_q cez hranu e_{pq} , pridali sme suseda aj d'alším konečným objemom, ktoré majú vrchol vo vrchole e_{pq} .

Objemy p , nachádzajúce sa na okraji oblasti Ω , so susedným objemom s predpísanou Dirichletovou okrajovou podmienkou majú stále jedného alebo aj viacerých neexistujúcich susedov, susediacich cez vrchol. Tohto suseda pridáme do najbližšieho bodu k vrcholu, cez ktorý má susediť, kde je predpísaná Dirichletova okrajová podmienka. Bude to sused s prepísanou Dirichletovou okrajovou podmienkou.

Pridaním $|N|$ neznámych sme spôsobili, že máme viac neznámych ako rovníc. Tento problém nám pomôže vyriešiť rovnica (3.19). Pre každú novo pridanú neznámu T_p , pridáme rovnicu

$$(3.22) \quad \frac{T_p - T_q}{d_{pq}} = g\left(\frac{x_p + x_q}{2}\right), p \in N$$

Vďaka pridaniu týchto rovníc je počet neznámych a počet rovníc rovnaký, čo nám dovoľuje vyriešiť túto sústavu rovníc.

3.3 Riešenie Laplaceovej rovnice s predpísanou deriváciou v šikmom smere

Uvažujeme Laplaceovu rovnicu (3.1) na oblasti Ω s danou kladnou deriváciou v ľubovoľnom smere v , smerujúcom von s oblasti Ω , na časti hranici Γ a Dirichletovými okrajovými podmienkami (3.20) na zvyšku hranice, t.j.

$$(3.23) \quad v \cdot \nabla T = g(x), x \in \Gamma$$

Pri delení oblasti na podmnožiny budeme postupovať ako v predchádzajúcej kapitole, až kým nedôjdeme do časti kde pridávame neznáme. V tejto časti okrem toho, že pridáme neznáme hodnoty, pridáme k nim celé konečné objemy. Pridané konečné objemy budú konvexné štvoruholníky s jednou hranou spájajúcou nový konečný objem s konečným objemom p . Ďalšie dve hrany, budú predĺžením hrán konečného objemu p , ktoré majú spoločný bod s novo pridanou hranou a budú rovnako dlhé ako hrany, ktorých predĺžením sú. Posledná hrana je už jednoznačne určená predchádzajúcimi hranami. Množinu novo pridaných konečných objemov označíme N .

Rovnicu (3.23) budeme chápať ako rovnicu advekcie, pozri tiež [6], a zintegrujeme ju na konečnom objeme $p \in N$

$$(3.24) \quad \int_p v \cdot \nabla T dx = \int_p g dx.$$

Ked'že platí

$$(3.25) \quad v \cdot \nabla T = \nabla \cdot (vT) - T \nabla \cdot v,$$

môžeme rovnicu (3.24) prepísat do tvaru

$$(3.26) \quad \int_p \nabla \cdot (vT) dx - \int_p T \nabla \cdot v dx = \int_p g dx.$$

Ked'že považujeme hodnotu T za konštantnú na konečnom objeme, môžeme T v druhom integráli vyňať pred integrál

$$(3.27) \quad \int_p \nabla \cdot (vT) dx - T_p \int_p \nabla \cdot v dx = \int_p g dx.$$

Použitím Greenovej vety môžeme rovnicu prepísat do tvaru

$$(3.28) \quad \int_{\partial p} T v \cdot \mathbf{n} ds - T_p \int_{\partial p} v \cdot \mathbf{n} ds = \int_p g dx.$$

Predpokladajme g konštantné na objeme a T konštantné na hraniciach a ked'že konečný objem má hranice e_{pq} , môžeme rovnicu prepísat do tvaru

$$(3.29) \quad \sum_{q \in N(p)} T_{pq} \int_{e_{pq}} v \cdot \mathbf{n} ds - T_p \sum_{q \in N(p)} \int_{e_{pq}} v \cdot \mathbf{n} ds = |p|g,$$

kde T_{pq} je hodnota na hranici e_{pq} .

Tu sa využije metóda up-wind. Označme tok

$$(3.30) \quad v_{pq} = \int_{e_{pq}} v \cdot \mathbf{n} ds.$$

V prípade, že $v_{pq} > 0$ ide o tok z oblasti, takzvaný outflow, a $T_{pq} = T_p$. V prípade, že $v_{pq} < 0$ ide o tok do oblasti, takzvaný inflow, a $T_{pq} = T_q$. Označme $N^{out}(p)$ susedov, pre ktorých platí $v_{pq} > 0$ a $N^{in}(p)$ susedov, pre ktorých platí $v_{pq} < 0$. Potom môžeme rovnicu (3.29) prepísat do tvaru

$$(3.31) \quad \sum_{q \in N^{in}(p)} T_q v_{pq} ds - \sum_{q \in N^{in}(p)} T_p v_{pq} + \sum_{q \in N^{out}(p)} T_p v_{pq} - \sum_{q \in N^{out}(p)} T_p v_{pq} = |p|g.$$

Po úprave tejto rovnice dostaneme rovnicu

$$(3.32) \quad \sum_{q \in N^{in}(p)} v_{pq} (T_q - T_p) = |p|g,$$

kde

$$(3.33) \quad v_{pq} = m(e_{pq})(v \cdot \mathbf{n}).$$

Ked'že sme poslednú hranu konečného objemu $p \in N$ vytvorili tak aby vektor v vychádzal von z oblasti vo výslednej rovnici tento neexistujúci sused nebude vystupovať.

Vďaka pridaniu týchto rovníc je počet neznámych a počet rovníc rovnaký čo nám dovoluje vyriešiť túto sústavu rovníc.

3.4 Numerické experimenty

Rád konvergencie numerickej metódy riešenia Laplaceovej rovnice s Dirichletovými okrajovými podmienkami overíme na príklade, keď je riešením Laplaceovej rovnice funkcia $T(x, y) = -\ln(\sqrt{x^2 + y^2})$. Výpočtová oblasť bude kruhový výsek, ktorého spodnou hranicou je krivka $(\sin(p)(1 - 0.01 \sin(16p)), \sin(p)(1 - 0.01 \cos(16p)))$, $p \in (0, \pi/2)$ a hornou hranicou je štvrtkružnica. Výpočtová oblasť pre najhustejšiu sieť je diskretizovaná metódou, ktorá je prezentovaná v prvej kapitole, až na ten rozdiel, že aj okrajové objemy budú mať približne rovnaký obsah ako vnútorné objemy. Menej hustá sieť je vytvorená tak, že z hustejšej siete je odstránený každý druhý bod v oboch smeroch. Keby boli okrajové konečné objemy najhustejšej siete polovičnej veľkosti, pri odstranovaní každého druhého bodu by sa polovičný pomer nezachoval. Takéto siete sa vytvárajú len na účely testovania rádu metódy, na praktické výpočty budú uvažované siete s polovičnými konečnými objemami v okolí hranice so zadanými Dirichletovými okrajovými podmienkami. Chyba metódy sa dá zapísat vzťahom

$$(3.34) \quad E_h = C h^\alpha,$$

h_{max}	$\ e_{h_{max}}\ $	EOC
0.583761	0.00365633	
0.343303	0.00154455	1.6232
0.184575	0.000497954	1.82414
0.0954733	0.000141749	1.906
0.0485238	$3.80067e - 005$	1.9449

Tabuľka 3.1: Rád konvergencie pre Dirichletove okrajove podmienky

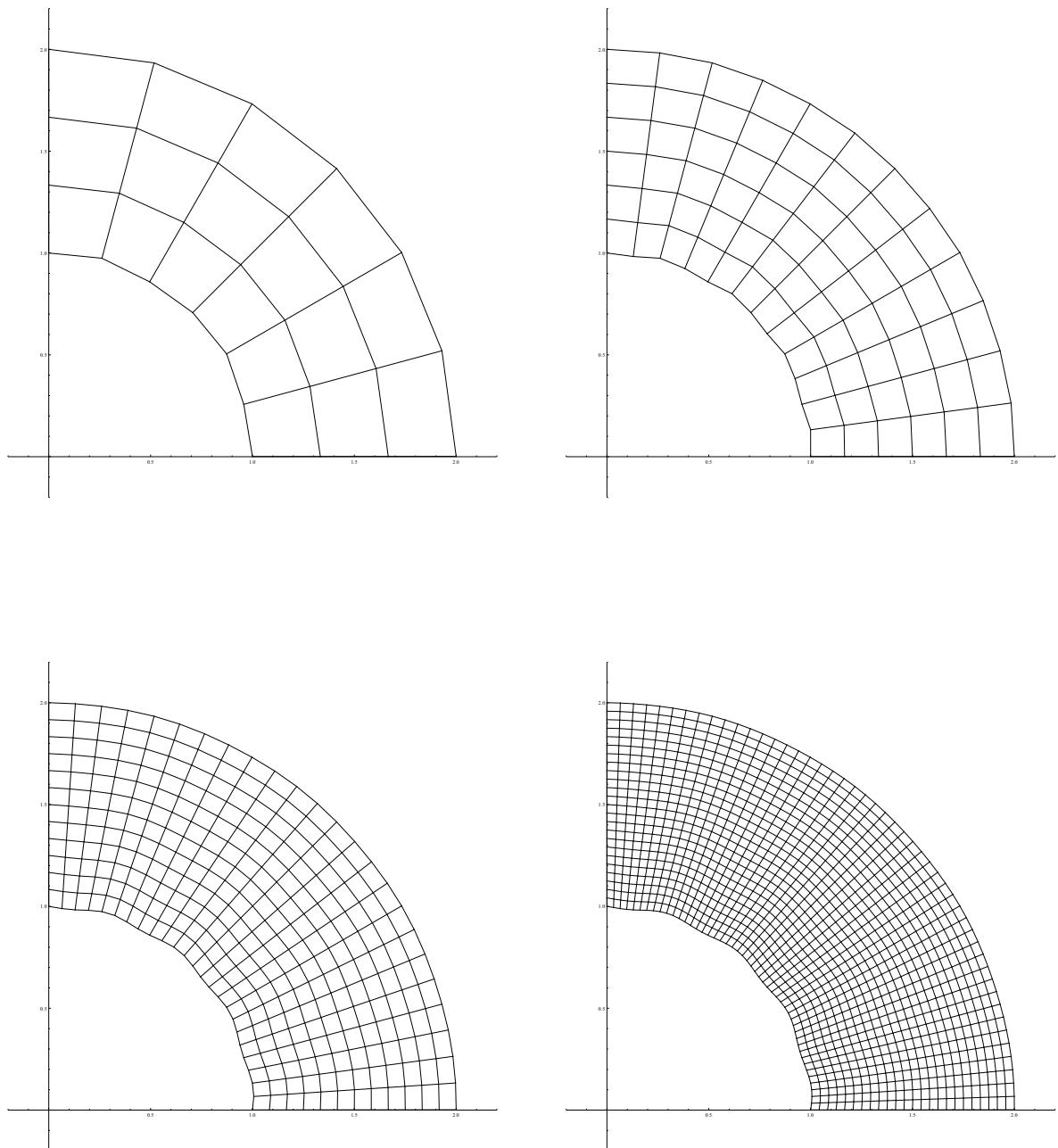
kde C je konštanta vychádzajúca z vlastností siete a numerickej metódy, h je maximálna vzdialenosť susedných reprezentačných bodov a α je rád metódy. Potom sa rád metódy vypočíta vzťahom

$$(3.35) \quad \alpha = \log_{h_1/h_2} \left(\frac{E_{h_1}}{E_{h_2}} \right).$$

Keby bola každá sieť vytváraná samostatne, ovplyvnilo by to hodnotu C , čo by sa prejavilo na ráde metódy počítaného vzťahom (3.35). Pre výpočet chyby sa použije numerická L_2 norma. Z tabuľky (3.1) vyplýva, že metóda je druhého rádu.

Pre overenie rádu konvergencie metódy riešenia Laplaceovej rovnice s Neumannovými okrajovými podmienkami v normálovom smere a v ľubovoľnom smere použijeme rovnaké presné riešenie na rovnakej sieti ako v predchádzajúcim prípade. Neumannova okrajová podmienka je na spodnej hranici oblasti. Šikmá derivácia je daná na spodnej hranici v normálovom smere otočenom o $\pi/8$ proti smeru hodinových ručičiek. Z tabuľky (3.2) vyplýva, že metóda s Neumannovými okrajovými podmiekami je druhého rádu a z tabuľky (3.3) vyplýva, že metóda s šikmou deriváciou je prvého rádu.

V poslednom experimente ukážeme, že metóda odvodená pre deriváciu v šikmom smere funguje, aj keď sa smery, v ktorých je zadaná derivácia, križujú. Vektor $v(x)$ je v tomto prípade otočený o uhol, ktorý sa vypočíta ako $\sin(p*512)/3$, kde $p = \arcsin(x_1)$. V tabuľke (3.4) vidno, že aj pre tento prípad metóda konverguje.



obr. 3.2: Rôzne husté siete použité pri výpočte rádu konvergencie

h_{max}	$\ e_{h_{max}}\ $	EOC
0.583761	0.00365633	
0.343303	0.00154455	1.6232
0.184575	0.000497954	1.82414
0.0954733	0.000141749	1.906
0.0485238	$3.80067 * 10^{-5}$	1.9449
0.024513	$9.86559 * 10^{-6}$	1.97511

Tabuľka 3.2: Rád konvergencie pre Neumannove okrajove podmienky v smere normálnej

h_{max}	$\ e_{h_{max}}\ $	EOC
0.583761	0.0270094	
0.343303	0.0156229	1.03121
0.184575	0.00791816	1.09511
0.0954733	0.0038136	1.10827
0.0485238	0.00186823	1.05436
0.024513	0.000926264	1.02744

Tabuľka 3.3: Rád konvergencie pre deriváciu danú v normálom smere otočenom o $\pi/8$

h_{max}	$\ e_{h_{max}}\ $	EOC
0.583761	0.0268217	
0.343303	0.019441	0.60622
0.184575	0.00705683	1.63303
0.0954733	0.0036628	0.994777
0.0485238	0.00183307	1.02282
0.024513	0.000874991	1.08301

Tabuľka 3.4: Rád konvergencie pre deriváciu danú v normálom smere otočenom o funkciu sínusu

Kapitola 4

Záver

V práci je prezentovaná numerická metóda na riešenie Laplaceovej rovnice s okrajovými podmienkami. Prvá kapitola sa venuje diskretizácii výpočtovej oblasti nad výsekom rezu topografie Zeme. Sieť sa vytvára vývojom krivky s využitím redistribúcie. V práci je odvodený nový model redistribúcie bodov. V druhej kapitole je odvodená metóda konečných objemov na nerovnomerných sieťach, kde sa využíva rozdelenie derivácie v smere normály na deriváciu v smere tangenty a deriváciu v smere vektora, ktorý spája reprezentačné body konečných objemov. Šikmá derivácia sa rieši ako rovnica advekcie na okrajovej oblasti s využitím up-wind metódy. V poslednej časti práce sú prezentované numerické experimenty, ktoré ukazujú, že metódy pre Dirichletove okrajové podmienky a Neumannove okrajové podmienky sú druhého rádu a metóda so šikmou deriváciou je prvého rádu.

Kapitola 5

Literatúra

- [1] T.Y. Hou, J. Lowengrub, M. Shelley, *Removing the stiffness from interfacial flows and surface tension*, J. Comput. Phys., 114 (1994), pp. 312-338.
- [2] M. Kimura, *Numerical analysis for moving boundary problems using the boundary tracking method*, Japan J. Indust. Appl. Math., 14 (1997), pp. 373-398.
- [3] K. Mikula, D. Ševčovič, *Evolution of plane curves driven by a nonlinear function of curvature and anisotropy*, SIAM J. Appl. Math., 61 (2001), pp. 1473-1501.
- [4] K. Mikula, D. Ševčovič, *A direct method for solving an anisotropic mean curvature flow of planar curve with an external force*, Mathematical Methods in Applied Sciences, 27(13) (2004) pp. 1545-1565.
- [5] K. Mikula, D. Ševčovič, M.Balažovjech, *A simple, fast and stabilized flowing finite volume method for solving general curve evolution equations*, Communications in Computational Physics, Vol. 7, No. 1 (2010) pp. 195-211
- [6] M. Macák, *Numerické metódy v geodézii*, PhD práca, Svf STU Bratislava, Pracovná verzia
- [7] M. Macák, K. Mikula, Z. Minarechová, *Solving the oblique derivative boundary-value problem by the finite volume method*, ALGORITMY 2012, 19th Conference on

Scientific Computing, Podbanske, Slovakia, September 9-14, 2012, Proceedings of contributed papers and posters (Eds. A.Handlovicova, Z.Minarechova, D.Sevcovic), ISBN 978-80-227-3742-5, Publishing House of STU, 2012, pp. 75-84

- [8] Karol Mikula, Mariana Remešíková, Peter Sarkoci, Daniel Ševčovič, *Surface evolution with tangential redistribution of points*, submitted.