

SVOČ 2013
Opava

**Evolúcia plôch s tangenciálnou
redistribúciou a jej využitie pri
tvorbe 3D logicky
štvorholníkových sietí**

Meno Priezvisko študenta:	Bc. Matej Medľa
Škola:	Slovenská technická univerzita
Fakulta:	Stavebná fakulta
Ročník a program/odbor štúdia:	1. roč., 2. stupeň, matematicko-počítačové modelovanie
Vedúci práce:	prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.
Katedra:	KMaDG

Súhrn

V práci je prezentovaná nová numerická metóda pre pohyb plôch, ktorá je použitá na konštrukciu rovnomernej 3D logicky štvoruholníkových siete pre metódu konečných objemov. Sieť sa vytvára pohybom uzavretej plochy (napríklad topografie Zeme) v normálovom smere rýchlosťou dostatočne veľkou na to, aby sa plocha zväčšovala a tiež závislou od jej strednej krivosti, aby sa plocha zhladzovala a približovala sa sférickému tvaru. Je navrhnuté originálne riešenie pohybu v tangenciálnom smere jednotlivých bodov na diskretizovanej ploche, ktoré zabezpečuje rovnomernú redistribúciu dĺžok hrán konečných objemov.

Abstract

We present new numerical method for surface evolution, which is used for construction of uniform 3D logically rectangular grids for finite volume method. The grid is constructed by evolution of a closed surface (e.g. the Earth topography) in the normal direction by a constant speed large enough to allow the surface growth and by mean curvature to allow a smoothing of the evolving surface and its convergence to a spherical shape. New method for tangential redistribution of points on the moving surface is suggested which guarantee a uniform redistribution of the sizes of edges of finite volumes.

Obsah

1	Úvod	4
2	Vývoj plochy v 3D	5
2.1	Vývoj plochy závislý od krivosti a externej sily	5
2.2	Voľba vhodnej tangenciálnej rýchlosti	6
2.3	Numerická aproximácia vývoja plochy s tangenciálnou redistribúciou	9
2.4	Numerické experimenty	13
2.5	Tvorba siete	18
3	Záver	22
4	Literatúra	23

Kapitola 1

Úvod

Dôležitou súčasťou riešenia parciálnych diferenciálnych rovníc numerickými metódami je správna diskretizácia výpočtovej oblasti. Nesprávnou voľbou diskretizácie oblasti môžeme zhoršiť presnosť metódy. Často sa výpočty robia aj nad topografiou Zeme. Spodnou hranicou tejto oblasti je topografia Zeme a hornou hranicou je plocha málo sa líšiaca od sféry. Táto práca je zameraná na tvorbu podobných sietí. Vstupnými údajmi metódy prezentovanej v tejto práci bude uzavretá plocha (spodná hranica výpočtovej oblasti), ktorú budeme vyvíjať podľa krivosti a sily f aby sme dosiahli plochu podobnú sfére (horná hranica). Vhodnou voľbou redistribúcie a časového kroku docielime rovnomernú redistribúciu bodov siete na jednotlivých krivkách, ktoré logicky štvoruholníkovú sieť vytvárajú. S týmto cieľom je v práci vytvorená nová numerická metóda na báze metódy plávajúcich konečných objemov pre pohyb plochy v normálovom smere rýchlosťou danou externou silou f a strednou krivosťou plochy. Táto metóda obsahuje novým spôsobom riešenie tangenciálnu redistribúciu bodov plochy, ktoré sú priesečníkmi kriviek vytvárajúcich logicky štvoruholníkovú sieť. Navrhnutý numerický algoritmus bol implementovaný v jazyku C a sú prezentované výsledky výpočtov ukazujúce vlastnosti navrhovanej metódy.

Kapitola 2

Vývoj plochy v 3D

V tejto časti odvodíme rovnicu pre vývoj krivky v závislosti od strednej krivosti a externej sily a odvodíme pohyb v tangenciálnom smere, ktorý bude riadiť redistribúciu bodov, aby sme získali rovnomerne rozdelenú sieť. Na získanie približného riešenia použijeme metódou plávajúcich konečných objemov. Numerickými experimentami overíme presnosť metódy.

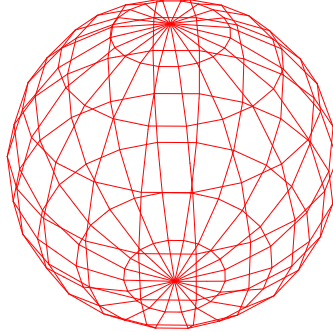
2.1 Vývoj plochy závislý od krivosti a externej sily

V našej práci budeme uvažovať diskretizáciu ako na obrázku 2.1. Na sieť sa budeme pozeráť, ako na uzavretú plochu a tú budeme aproximovať metódou konečných objemov [3-7].

Všeobecná rovnica pre vývoj plochy Ω , ktorú budeme uvažovať, má tvar

$$(2.1) \quad \partial_t \mathbf{r} = \varepsilon k \mathbf{N} + f \mathbf{N},$$

kde neznáma \mathbf{r} je pozičný vektor vyvíjajúcej sa plochy Ω a \mathbf{N} je normála na ňu v bode \mathbf{r} , f je externá sila pôsobiaca v smere normály, $k\mathbf{N}$ je vektor strednej krivosti (súčet hlavných krivostí) a ε je parameter určujúci, ako rýchlo plocha získa sférický tvar. V našom prístupe využijeme vzťah $k\mathbf{N} = \Delta_s \mathbf{r}$, kde Δ_s je tzv. Laplace-Beltramiho operátor.



Obr. 2.1: Diskretizácia gule

2.2 Voľba vhodnej tangenciálnej rýchlosti

Od siete, ktorú chceme vytvoriť, požadujeme aby mala rovnomerne rozdelené body, na jednotlivých krivkách, ktoré ju vytvárajú. Bez rovnomerného rozdelenia sa môže stať, že sa plocha zauzľí, alebo na nej budú vznikať singularity [1-5]. V našom prípade sa zameriavame na rovnomerné rozdelenie bodov na jednotlivých krivkách (rovnobežkách a poludníkoch). To docielime pridaním pohybu bodov plochy v smere $\alpha^i T^i$ a $\alpha^j T^j$, kde T^i je tangenta k i -tej rovnobežke, prechádzajúcej bodom \mathbf{r}_{ij} a T^j je tangenta k j -temu poludníku prechádzajúcej bodom \mathbf{r}_{ij} , α^i resp. α^j sú tangenciálne rýchlosti v príslušných smeroch. V prípade pólov pridáme $n_2/2$ pohybov $\alpha^j T^j$, pričom n_2 je počet poludníkov.

Pre prípad uzavretej krivky Γ v 3D, ktorej tangenciálnu rýchlosť α^Γ chceme určiť, si pohyb jej bodov rozložíme do troch smerov. Do smeru \mathbf{N}_1^Γ , čo je smer normály k ploche ležiaci v normálovej rovine krivky Γ . Do smeru \mathbf{N}_2^Γ , ktorý je kolmý na \mathbf{N}_1^Γ a leží v normálovej rovine krivky Γ . A do smeru \mathbf{T}^Γ , čo je tangenta ku krivke. Takže krivka sa bude pohybovať podľa rovnice

$$(2.2) \quad \partial_t \mathbf{r} = U^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + V^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma + \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma,$$

kde \mathbf{r} je v tomto prípade pozičný vektor krivky Γ a nie plochy Ω ako v predchádzajúcej časti. Prvé dva členy na pravej strane (2.2) vyjadrujú normálové zložky pohybu bodu na krivke Γ a sú zviazané s normálovým pohybom plochy Ω , tretí člen $\alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma$ bude reprezentovať pohyb v smere tangenty, ktorý nám bude zabezpečovať rovnomernú redistribúciu bodov na krivke. Normálové rýchlosti U^Γ a V^Γ sa vypočítajú vzťahmi

$$(2.3) \quad \begin{aligned} U^\Gamma &= (\varepsilon k \mathbf{N} + f \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}_1^\Gamma, \\ V^\Gamma &= (\varepsilon k \mathbf{N} + f \mathbf{N}) \cdot \mathbf{N}_2^\Gamma. \end{aligned}$$

V prípade špeciálneho rýchlostného pola, ktoré uvažujeme v tejto práci len v normálovom smere, je $V^\Gamma = 0$. Pre všeobecné rýchlostné pole môže byť V^Γ nenulové, preto ho uvádzame v odvodeniach, ktoré nasledujú.

Tangenciálnu rýchlosť, zabezpečujúcu rovnomernú redistribúciu bodov na krivke získame nasledujúcim postupom, pozri tiež [6]. Pre časový vývoj lokálneho dĺžkového elementu g^Γ , ktorý je určený vzťahom $g^\Gamma = |\mathbf{r}_u| = \sqrt{\left(\frac{dr_1}{du}\right)^2 + \left(\frac{dr_2}{du}\right)^2 + \left(\frac{dr_3}{du}\right)^2}$, platí

$$(2.4) \quad g_t^\Gamma = |\mathbf{r}_u|_t = \frac{\mathbf{r}_u}{|\mathbf{r}_u|} \cdot (\mathbf{r}_u)_t,$$

kde $u \in S^1$ reprezentuje fixnú parametrizáciu krivky Γ nezávislú na čase, S^1 je kružnica s jednotkovou dĺžkou. Medzi fixnou parametrizáciou a jednotkovou dĺžkovou parametrizáciou s je vzťah $ds = g^\Gamma du$. Potom môžeme napísať

$$(2.5) \quad (\mathbf{r}_u)_t = (\mathbf{r}_t)_u = (U^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + V^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma + \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma)_u = g^\Gamma (U^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + V^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma + \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma)_s$$

Ďalej platí

$$(2.6) \quad \mathbf{r}_u = \frac{d\mathbf{r}}{du} = g^\Gamma \frac{d\mathbf{r}}{ds} = g^\Gamma \mathbf{r}_s = g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma.$$

Z rovnice (2.6) a z rovnice (2.5) si môžeme rovnicu (2.4) napísať ako

$$(2.7) \quad g_t^\Gamma = g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot (U^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + V^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma + \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma)_s.$$

Keďže \mathbf{N}_1^Γ a \mathbf{T}^Γ sú navzájom kolmé vektory, platí

$$(2.8) \quad 0 = (\mathbf{T}^\Gamma \cdot \mathbf{N}_1^\Gamma)_s = \mathbf{T}_s^\Gamma \cdot \mathbf{N}_1^\Gamma + \mathbf{T}^\Gamma \cdot (\mathbf{N}_1^\Gamma)_s.$$

Z toho vyplýva

$$(2.9) \quad \mathbf{T}^\Gamma \cdot (\mathbf{N}_1^\Gamma)_s = -\mathbf{T}_s^\Gamma \cdot \mathbf{N}_1^\Gamma.$$

Podľa Frenetovho vzorca platí

$$(2.10) \quad \mathbf{T}^\Gamma \cdot (\mathbf{N}_1^\Gamma)_s = -\mathbf{T}_s^\Gamma \cdot \mathbf{N}_1^\Gamma = -\mathbf{N}_1^\Gamma \cdot (k_1^\Gamma \mathbf{N}^\Gamma) = -\mathbf{N}_1^\Gamma \cdot (k_1^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + k_2^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma) = -k_1^\Gamma,$$

kde k_1^Γ je projekcia $k^\Gamma \mathbf{N}^\Gamma$ do \mathbf{N}_1^Γ . Analogicky platí

$$(2.11) \quad \mathbf{T}^\Gamma \cdot (\mathbf{N}_2^\Gamma)_s = -\mathbf{T}_s^\Gamma \cdot \mathbf{N}_2^\Gamma = -k_2^\Gamma,$$

kde k_2^Γ je projekcia $k^\Gamma \mathbf{N}^\Gamma$ do \mathbf{N}_2^Γ . Vďaka (2.10), (2.11) a tomu, že $\mathbf{T}^\Gamma \cdot \mathbf{T}_s^\Gamma = 0$, môžeme rovnicu (2.7) prepísať na tvar

$$\begin{aligned} g_t^\Gamma &= g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot (U_s^\Gamma \mathbf{N}_1^\Gamma + U^\Gamma (\mathbf{N}_1^\Gamma)_s + V_s^\Gamma \mathbf{N}_2^\Gamma + V^\Gamma (\mathbf{N}_2^\Gamma)_s + \alpha_s^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma + \alpha^\Gamma (\mathbf{T}^\Gamma)_s) \\ &= g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot U^\Gamma (\mathbf{N}_1^\Gamma)_s + g^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \cdot V^\Gamma (\mathbf{N}_2^\Gamma)_s + g^\Gamma \alpha_s^\Gamma \\ (2.12) \quad &= -g^\Gamma U^\Gamma k_1^\Gamma - g^\Gamma V^\Gamma k_2^\Gamma + g^\Gamma \alpha_s^\Gamma = -g^\Gamma U^\Gamma k_1^\Gamma - g^\Gamma V^\Gamma k_2^\Gamma + \alpha_u^\Gamma. \end{aligned}$$

Zintegrovaním rovnice (2.12) dostaneme

$$(2.13) \quad \begin{aligned} \int_{S^1} g_t^\Gamma du &= \int_{S^1} -g^\Gamma (U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) du + \int_{S^1} \alpha_u^\Gamma du \\ \frac{d}{dt} \int_\Gamma ds &= \int_\Gamma -(U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) ds + \alpha^\Gamma(1) - \alpha^\Gamma(0). \end{aligned}$$

Keďže člen na ľavej strane predstavuje zmenu dĺžky krivky L v čase a α^Γ je cyklické, t.j. $\alpha^\Gamma(0) = \alpha^\Gamma(1)$, dostaneme

$$(2.14) \quad L_t^\Gamma = \int_\Gamma -(U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) ds = -\langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma L^\Gamma,$$

kde $\langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma = \frac{1}{L^\Gamma} \int_\Gamma U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma ds$. Keďže našim cieľom je získať rovnomernú redistribúciu bodov na krivke, podobne ako v 2D prípade [4], aj tu požadujeme, aby pomer $\frac{g_t^\Gamma}{L^\Gamma} \rightarrow 1$ pre $t \rightarrow \infty$ a teda aby $\theta^\Gamma = \ln \left(\frac{g_t^\Gamma}{L^\Gamma} \right) \rightarrow 0$ pre $t \rightarrow \infty$. Pre zmenu θ^Γ v čase platí

$$\begin{aligned} \theta_t^\Gamma &= \left(\ln \left(\frac{g_t^\Gamma}{L^\Gamma} \right) \right)_t = \frac{L^\Gamma g_t^\Gamma L^\Gamma - g^\Gamma L_t^\Gamma}{g^\Gamma (L^\Gamma)^2} \\ &= \frac{(-g^\Gamma U^\Gamma k_1^\Gamma - g^\Gamma V^\Gamma k_2^\Gamma + g^\Gamma \alpha_s^\Gamma) L^\Gamma + g^\Gamma L^\Gamma \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma}{g^\Gamma L^\Gamma} \\ (2.15) \quad &= \alpha_s^\Gamma - (U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) + \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma. \end{aligned}$$

Ak $\alpha_s^\Gamma = (U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) - \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma$ bude $\theta_t^\Gamma = 0$. Z toho vyplýva, že sa s meniacim časom nebude meniť rozloženie bodov na krivke. Ak zvolíme

$$(2.16) \quad \alpha_s^\Gamma = (U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma) - \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma + \omega(e^{-\theta^\Gamma} - 1),$$

tak platí

$$(2.17) \quad \theta_t^\Gamma = \omega(e^{-\theta^\Gamma} - 1),$$

kde parameter ω určuje ako rýchlo pojde redistribúcia krivky k jednotkovej dĺžkovej redistribúcii. Takáto rovnica spĺňa našu požiadavku, aby θ^Γ išla k nule pre zväčšujúci sa čas, čo spôsobí rovnomernú redistribúciu bodov na Γ a bude našim východiskom pre tvorbu algoritmu na zrovnomerňovanie siete.

Pridaním pohybu bodov plochy v smere dotyčníc jednotlivých kriviek má naša výsledná rovnica pre pohyb plochy Ω tvar

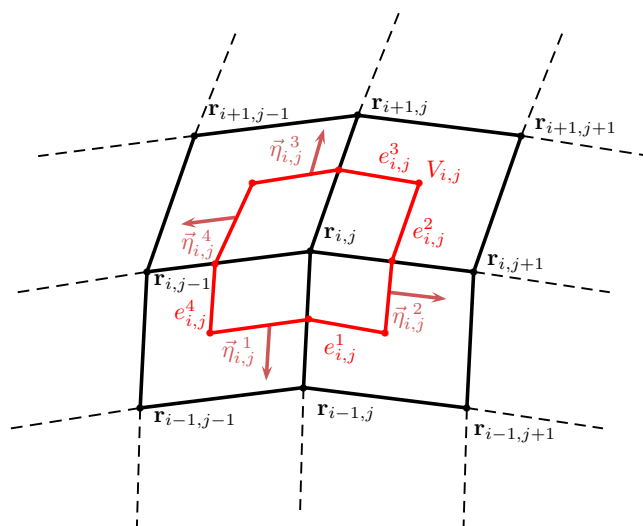
$$(2.18) \quad \partial_t \mathbf{r} = \varepsilon k \mathbf{N} + f \mathbf{N} + \langle \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \rangle,$$

kde $\langle \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \rangle$ je priemer tangenciálnych rýchlostí všetkých kriviek prechádzajúcich daným bodom. V spojitom modeli dávajú rovnice (2.18) a (2.1) rovnaký obraz vyvíjajúcej sa plochy.

2.3 Numerická aproximácia vývoja plochy s tangenciálnou redistribúciou

V našom prístupe uvažujeme diskretizáciu plochy ako na obrázku 2.1. Plocha sa bude skladať z n_1 rovnobežiek a n_2 poludníkov. Bod, v ktorom sa pretína i -ta rovnobežka a j -ty poludník, označíme \mathbf{r}_{ij} . Plochu rozdelíme na konečný počet konečných objemov. Objem V_{ij} prislúcha bodu \mathbf{r}_{ij} . Označme pomocou \mathbf{r}_{ij}^q body spojené s \mathbf{r}_{ij} hranou siete, budeme ich volať susedné. Konečný objem V_{ij} je priestorový plošný útvar s vrcholmi v ťažiskách úsečiek $\mathbf{r}_{ij}\mathbf{r}_{ij}^q$ a v ťažiskách štvoruholníkov (v prípade pólov ide o trojuholníky) prislúchajúci k bodu \mathbf{r}_{ij} . Pomocou e_{ij}^q označíme časť hranice konečného

objemu V_{ij} medzi bodom \mathbf{r}_{ij} a bodom \mathbf{r}_{ij}^q a pomocou $\vec{\eta}_{ij}^q$ označíme vonkajšiu normálu k časti hranice e_{ij}^q . Pre lepšie pochopenie vid' obr. 2.2.



Obr. 2.2: Konečný objem

Zintegrovaním rovnice (2.18), v ktorej nahradíme vektor krivosti Laplace-Beltramiho operátorom, na konečnom objeme V_{ij} dostaneme

$$(2.19) \quad \int_{V_{ij}} \partial_t \mathbf{r} dx = \epsilon \int_{V_{ij}} \Delta_s \mathbf{r} dx + \int_{V_{ij}} f \mathbf{N} dx + \int_{V_{ij}} \langle \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \rangle dx.$$

Vďaka Greenovej vete môžeme rovnicu prepísať na tvar

$$(2.20) \quad \int_{V_{ij}} \partial_t \mathbf{r} dx = \epsilon \int_{\partial V_{ij}} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_{ij} ds + \int_{V_{ij}} f \mathbf{N} dx + \int_{V_{ij}} \langle \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \rangle dx,$$

kde $\vec{\eta}_{ij}$ je vonkajšia normála k hranici konečného objemu V_{ij} . Z tvaru konečného objemu V_{ij} vyplýva, že prvý člen pravej strany rovnice (2.20) môžeme prepísať na

$$(2.21) \quad \int_{\partial V_i} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_{ij} ds = \int_{\partial V_{ij}} \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_{ij}^q ds = \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \int_{\partial V_{ij}} \nabla_s \mathbf{r} \cdot \vec{\eta}_{ij}^q ds = \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \int_{\partial V_{ij}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vec{\eta}_{ij}^q} ds,$$

kde Q_{ij} je počet susedných bodov k \mathbf{r}_{ij} .

Na časti hranici e_{ij}^q budeme predpokladať konštantnú parciálnu deriváciu \mathbf{r}_{ij} podľa normály η_{ij}^q a jej hodnotu aproximujeme vzťahom

$$(2.22) \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{\eta}_{ij}^q} = \frac{\mathbf{r}_{ij}^q - \mathbf{r}_{ij}}{h_{ij}^q},$$

kde h_{ij}^q je vzdialenosť medzi bodom \mathbf{r}_{ij} a jeho q -tým susedom. To nám dovoľí prepísať rovnicu (2.21) na tvar

$$(2.23) \quad \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \int_{\partial V_{ij}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \bar{\eta}_{ij}^q} ds = \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \frac{\mathbf{r}_{ij}^q - \mathbf{r}_{ij}}{h_{ij}^q} m(e_{ij}^q),$$

kde $m(e_{ij}^q)$ je dĺžka hrany e_{ij}^q .

Na celom objeme V_{ij} budeme predpokladať konštantnú hodnotu $f\mathbf{N}_{ij}$. Vďaka tomu môžeme prepísať druhý člen pravej strany na tvar

$$(2.24) \quad \int_{V_{ij}} f\mathbf{N} dx = m(V_{ij})f\mathbf{N}_{ij},$$

kde $m(V_{ij})$ je plocha objemu V_{ij} . Podobne predpokladáme, že α^Γ a \mathbf{T}^Γ sú na celom objeme V_{ij} konštantné, čo nám dovoľuje prepísať posledný člen (2.20)

$$(2.25) \quad \int_{V_{ij}} \langle \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \rangle dx = m(V_{ij}) \langle \alpha^\Gamma \mathbf{T}^\Gamma \rangle = \frac{m(V_{ij})}{|M|} \sum_{\Gamma \in M} \alpha_{ij}^\Gamma \frac{\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma E} - \mathbf{r}_{ij}^{\Gamma W}}{h_{ij}^{\Gamma E} + h_{ij}^{\Gamma W}},$$

kde $\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma W}$ je predchádzajúci bod na krivke Γ a $\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma E}$ je nasledujúci bod, $h_{ij}^{\Gamma W}$ a $h_{ij}^{\Gamma E}$ sú vzdialenosti bodov \mathbf{r}_{ij}^Γ a $\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma W}$, resp. \mathbf{r}_{ij}^Γ a $\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma E}$, M je množina všetkých kriviek prechádzajúcich bodom \mathbf{r}_{ij} a $|M|$ je počet kriviek prechádzajúcich týmto bodom. Ďalej, $\partial_t \mathbf{r}$ aproximujeme v bode \mathbf{r}_{ij} spätnou diferenciou, pričom predpokladáme konštantnú hodnotu \mathbf{r}_{ij} na konečnom objeme V_{ij} , vďaka čomu môžeme ľavú stranu rovnice (2.20) prepísať na tvar

$$(2.26) \quad \int_{V_{ij}} \partial_t \mathbf{r} dx = m(V_{ij}) \left(\frac{\mathbf{r}_{ij}^{m+1} - \mathbf{r}_{ij}^m}{\Delta t} \right),$$

kde m predstavuje index časového kroku a Δt veľkosť časového kroku.

Využitím rovníc (2.23), (2.24), (2.25) a (2.26), pričom členy (2.23) a (2.25) budú uvažované v čase $m + 1$ semi-implicitne, dostaneme

$$(2.27) \quad m(V_{ij}) \left(\frac{\mathbf{r}_{ij}^{m+1} - \mathbf{r}_{ij}^m}{\Delta t} \right) = \varepsilon \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \frac{\mathbf{r}_{ij}^{q, m+1} - \mathbf{r}_{ij}^{m+1}}{h_{ij}^{q, m}} m(e_{ij}^q) + m(V_{ij}) f \mathbf{N}_{ij}^m \\ + \frac{m(V_{ij})}{|M|} \sum_{\Gamma \in M} \alpha_{ij}^{\Gamma, m} \frac{\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma E, m+1} - \mathbf{r}_{ij}^{\Gamma W, m+1}}{h_{ij}^{\Gamma W, m} + h_{ij}^{\Gamma E, m}}.$$

Prepísaním rovnice dostaneme systém $n_1 \times n_2$ rovníc s $n_1 \times n_2$ neznámymi \mathbf{r}_{ij} , $i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2$

$$(2.28) \quad \left(\frac{m(V_{ij})}{\Delta t} + \varepsilon \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \frac{m(e_{ij}^q)}{h_{ij}^q} \right) \mathbf{r}_{ij}^{m+1} - \varepsilon \sum_{q=1}^{Q_{ij}} \frac{m(e_{ij}^q)}{h_{ij}^{q, m}} \mathbf{r}_{ij}^{q, m+1} - \frac{m(V_{ij})}{|M|} \sum_{\Gamma \in M} \frac{\alpha_{ij}^{\Gamma, m}}{h_{ij}^{\Gamma W, m} + h_{ij}^{\Gamma E, m}} \mathbf{r}_{ij}^{\Gamma E, m+1} \\ + \frac{m(V_{ij})}{|M|} \sum_{\Gamma \in M} \frac{\alpha_{ij}^{\Gamma, m}}{h_{ij}^{\Gamma W, m} + h_{ij}^{\Gamma E, m}} \mathbf{r}_{ij}^{\Gamma W, m+1} = \frac{m(V_{ij})}{\Delta t} \mathbf{r}_{ij}^m + m(V_{ij}) f \mathbf{N}_{ij}^m,$$

kde \mathbf{r}_{ij}^{m+1} a $\mathbf{r}_{ij}^{q, m+1}$ sú neznáme a $\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma W, m+1}$ a $\mathbf{r}_{ij}^{\Gamma E, m+1}$ sú tiež príslušné susedné body $\mathbf{r}_{ij}^{q, m+1}$. Normálu \mathbf{N}_{ij}^m vypočítame ako kolmicu na dve tangenty ku krivkám, ktoré prechádzajú bodom \mathbf{r}_{ij}^m , t.j. $\mathbf{N}_{ij}^m = \mathbf{T}_{ij}^{\Gamma 1} \times \mathbf{T}_{ij}^{\Gamma 2}$. Tangenciálnu rýchlosť $\alpha_{ij}^{\Gamma, m}$ počítame zo vzťahu (2.16) pričom v nasledujúcom odvodení vynecháme index m . Nech bod \mathbf{r}_{ij} je p -tým bodom krivky Γ . Potom z (2.16) dostaneme

$$(2.29) \quad \frac{\alpha_p^\Gamma - \alpha_{p-1}^\Gamma}{h_p} = (U_{p-1/2}^\Gamma k_{1p-1/2}^\Gamma + V_{p-1/2}^\Gamma k_{2p-1/2}^\Gamma) - \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma + \omega \left(\frac{L^\Gamma}{g^\Gamma} - 1 \right),$$

kde α_p^Γ a α_{p-1}^Γ sú hodnoty tangenciálnych rýchlostí dvoch po sebe nasledujúcich bodov krivky Γ , h_p je vzdialenosť medzi nimi, $U_{p-1/2}^\Gamma$, $V_{p-1/2}^\Gamma$, $k_{1p-1/2}^\Gamma$, $k_{2p-1/2}^\Gamma$ sú aproximácie príslušných veličín na segmente medzi p -tým a predchádzajúcim bodom krivky a

$$(2.30) \quad \langle U^\Gamma k_1^\Gamma + V^\Gamma k_2^\Gamma \rangle_\Gamma = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{n^\Gamma} h_l (U_{l-1/2}^\Gamma k_{1l-1/2}^\Gamma + V_{l-1/2}^\Gamma k_{2l-1/2}^\Gamma),$$

$$(2.31) \quad L^\Gamma = \sum_{l=1}^{n^\Gamma} h_l.$$

Zo vzťahov (2.29), (2.30) a (2.31) dostaneme pre výpočet α_p^Γ vzťah

$$(2.32) \quad \alpha_p^\Gamma = \alpha_{p-1}^\Gamma + h_p(U_{p-1/2}^\Gamma k_{1p-1/2}^\Gamma + V_{p-1/2}^\Gamma k_{2p-1/2}^\Gamma) - \frac{h_p}{\sum_{l=1}^{n_\Gamma} h_l} \sum_{l=1}^{n_\Gamma} h_l (U_{l-1/2}^\Gamma k_{1l-1/2}^\Gamma + V_{l-1/2}^\Gamma k_{2l-1/2}^\Gamma) + \omega \left(\frac{\sum_{l=1}^{n_\Gamma} h_l}{n_\Gamma} - h_p \right),$$

Po dosadení všetkých tangenciálnych rýchlostí do (2.28) výsledný lineárny systém riešime algoritmom SOR.

2.4 Numerické experimenty

V prvom experimente overíme rád konvergenie metódy a v ďalších experimentoch ukážeme vývoj elipsoidu a perturbovanej gule ku expandujúcej guľovej ploche. V prvom experimente sa bude sťahovať jednotková guľa len podľa krivosti. V druhom sa bude rozťahovať elipsoid a v treťom sa bude rozťahovať perturbovaná guľa aj vplyvom konštantnej externej sily.

Jednotková guľa je daná predpisom

$$(2.33) \quad \begin{aligned} x_{ij} &= \sin((i-1)\pi/(n_1-1)) \cos(j2\pi/n_2) \\ y_{ij} &= \sin((i-1)\pi/(n_1-1)) \sin(j2\pi/n_2) \\ z_{ij} &= \cos((i-1)\pi/(n_1-1)) \end{aligned}$$

pre $i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_2$. Presná hodnota polomeru gule sťahujúcej sa podľa strednej krivosti sa vypočíta ako

$$(2.34) \quad r(t) = \sqrt{r(0)^2 - 4t}$$

Pre výpočet chyby použijeme numerickú L2 chybu

$$(2.35) \quad \|e_{n_1, n_2}^M\| = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^M \Delta t \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} (|\mathbf{r}_{ij}^m| - r(m\Delta t))^2}{n_1 n_2}}.$$

Rád konvergenie určíme ako

$$(2.36) \quad \text{EOC} = \log_2 \frac{\|e_{n_1, n_2}^M\|}{\|e_{2n_1, 2n_2}^{2M}\|}.$$

V tabuľke 2.1 sú uvedené hodnoty chýb a rád konvergenzie EOC pre zjemňujúcu sa sieť a zmenšujúci sa časový krok. Z tabuľky vyplýva, že metóda je 2. rádu pri väzbe $\Delta t \sim h^2$.

n_1	n_2	Δt	$\ e_{n(r)M}\ $	EOC
10	20	0.1	0.0842326	
20	40	0.025	0.0160878	2.38841
40	80	0.00625	0.00382243	2.07341
80	160	0.0015625	0.000945399	2.01549

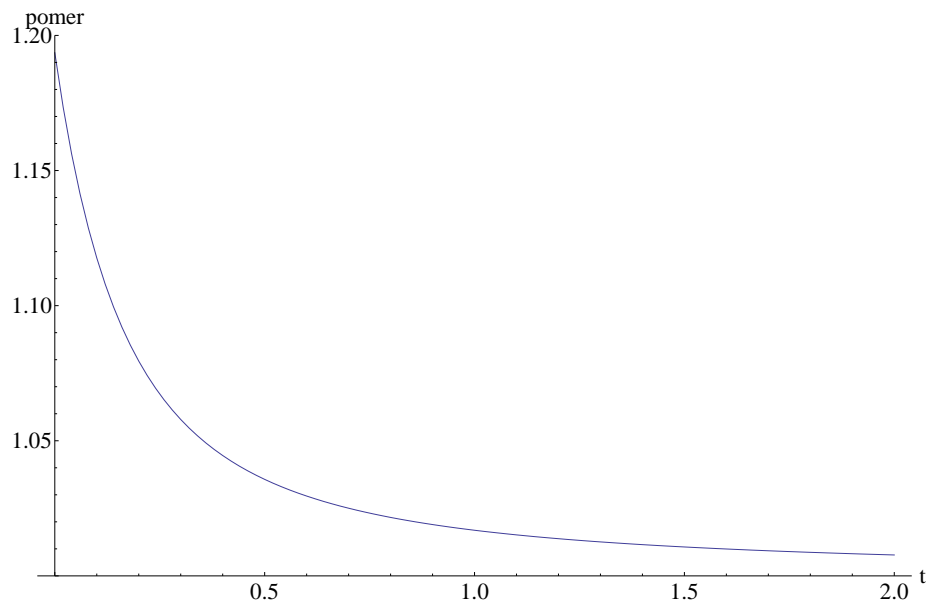
Tabuľka 2.1

V druhom numerickom experimente budeme pozorovať meniace sa pomery hlavných osí elipsoidu. Dĺžky hlavných osí v čase 0 budú 1.2 v z -ovom smere a 1 v x -ovom a y -ovom smere. Počet deliacich bodov bude 42 na rovnobežkách a 40 na poludníkoch. Na obrázku 2.3 sledujeme meniaci pomer osí v z -ovom smere a x -ovom smere, pričom uvažujeme vývoj plochy podľa strednej krivosti s parametrom $\varepsilon = 1$ a v smere vonkajšej normály silou $f = 4$. Parameter ω nastavíme na 1, $\Delta t = 0.002$ a počítame 100 časových krokov. Z grafu vidno, že so zväčšujúcim sa časom ide pomer hlavných osí k jednotke.

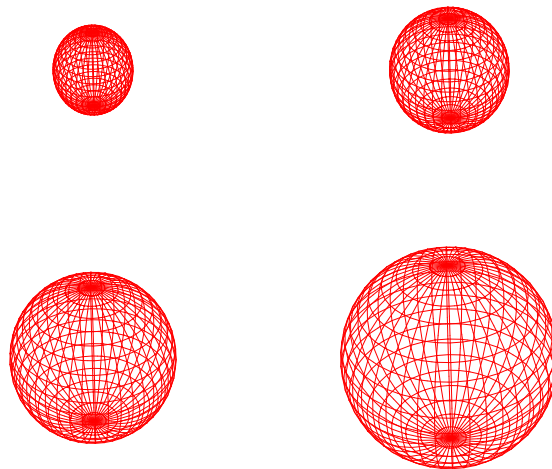
V treťom experimente uvažujeme perturbovanú guľu danú predpisom

$$\begin{aligned}
 x_{ij} &= (\cos(12(i-1)\pi/(n_1-1))/20 + 1) \sin((i-1)\pi/(n_1-1)) \\
 &\quad (\cos(12j\pi/n_2)/20 + 1) \cos(j2\pi/n_2) \\
 y_{ij} &= (\cos((12i-1)\pi/(n_1-1))/20 + 1) \sin((i-1)\pi/(n_1-1)) \\
 &\quad (\cos(12j\pi/n_2)/20 + 1) \sin(j2\pi/n_2) \\
 (2.37) \quad z_{ij} &= (\cos(12(i-1)\pi/(n_1-1))/20 + 1) \cos((i-1)\pi/(n_1-1))
 \end{aligned}$$

pre $i = 1, \dots, n_1$, $j = 1, \dots, n_2$, pričom budeme najskôr sledovať vývoj ku guľovej ploche a potom redistribúciu bodov v tangenciálnom smere. Na perturbovanej guľi sa nachádzajú miesta s rôzne dlhými vzdialenosťami od počiatku. Najskôr budeme sledovať pomer najdlhšej vzdialenosti k najkratšej vzdialenosti od počiatku. Hodnoty

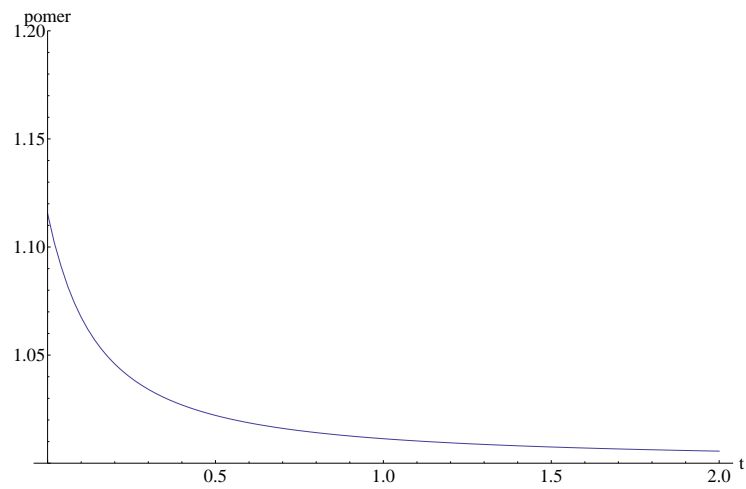


obr. 2.3: Priebek pomeru hlavných osí v čase pre vyvíjajúci sa elipsoid

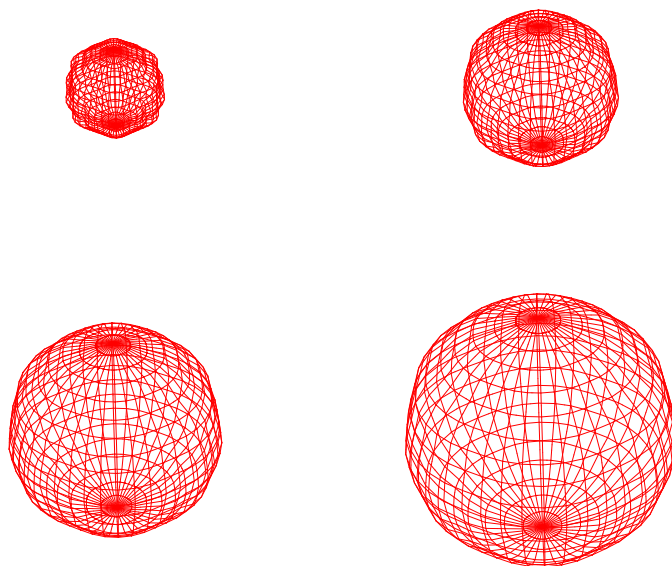
obr. 2.4: Elipsoid vyvíjajúci sa podľa krivosti a sily f v časovom kroku 0, 10, 20, 30

parametrov nastavíme na $\varepsilon = 0.02$, $f = 3$, $\omega = 100$, $\Delta t = 0.02$ a počet časových krokov je 100. Na obrázku 2.5 je vidno, že aj tento pomer ide k jednotke aj v tomto prípade.

Dôležitosť použitia tangenciálnej redistribúcie budeme prezentovať na vývoji perturbovanej gule, pričom zvolíme parametre $\varepsilon = 0.001$ a $f = 1$. Na obrázku 2.8 je vidno, ako sa bez použitia redistribúcie body v niektorých oblastiach zhlukujú. Na obrázku

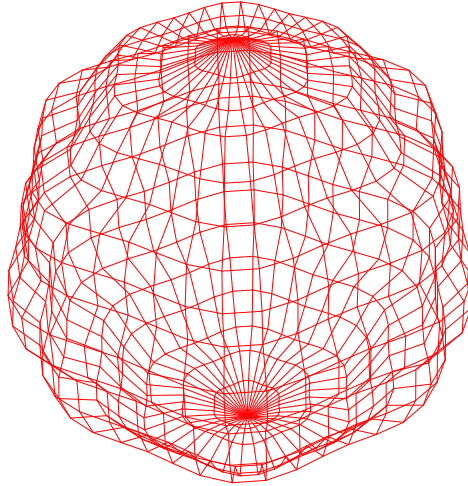


Obr 2.5: Priebeh pomeru najdlhšej a najkratšej vzdialenosti bodu od počiatku v čase pre perturbovanú guľu

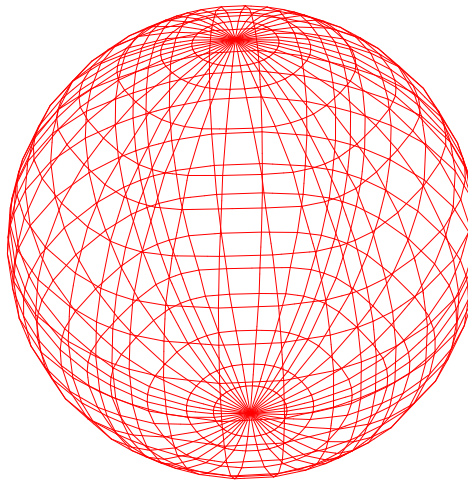


obr. 2.6: Pertubovaná guľa vyvíjajúca sa podľa krivosti a sily f v časovom kroku 0, 10, 20, 30

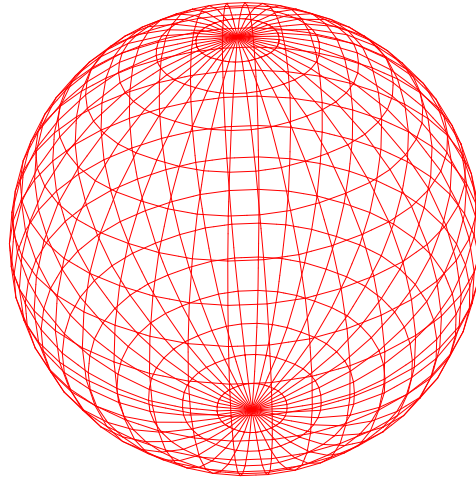
2.9 je naopak vidno, že použitie redistribúcie spôsobuje rovnomerné vzdialenosti na jednotlivých krivkách. Na obrázku 2.10 je zobrazený časový vývoj pomeru najdlhšej a najkratšej vzdialenosti na jednej z kriviek s použitím redistribúcie a bez jej použitia.



Obr. 2.7: Perturovaná guľa v čase 0



Obr. 2.8: Perturovaná guľa bez použitia redistribúcie v 20. časovom kroku

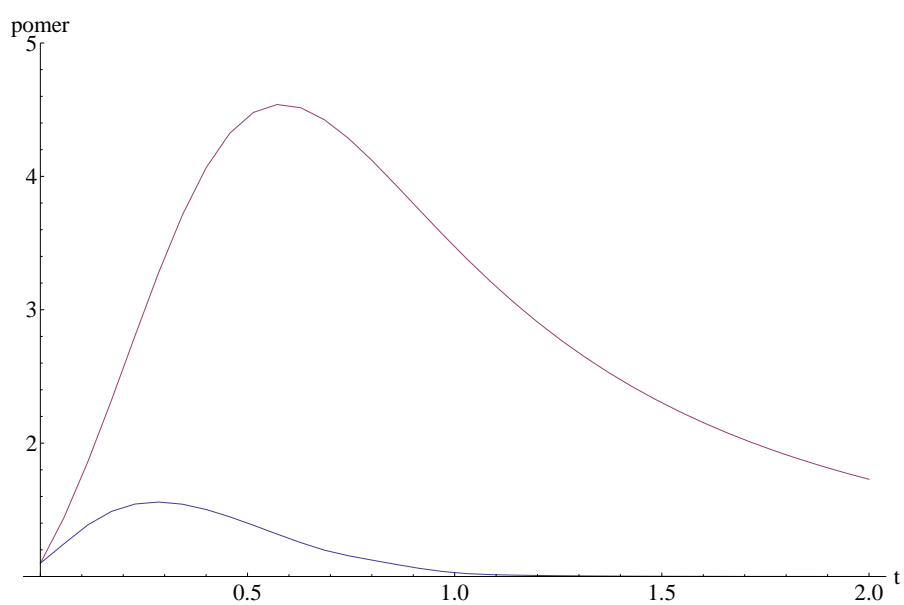


Obr. 2.9: Perturovaná guľa s použitím redistribúcie v 20. časovom kroku

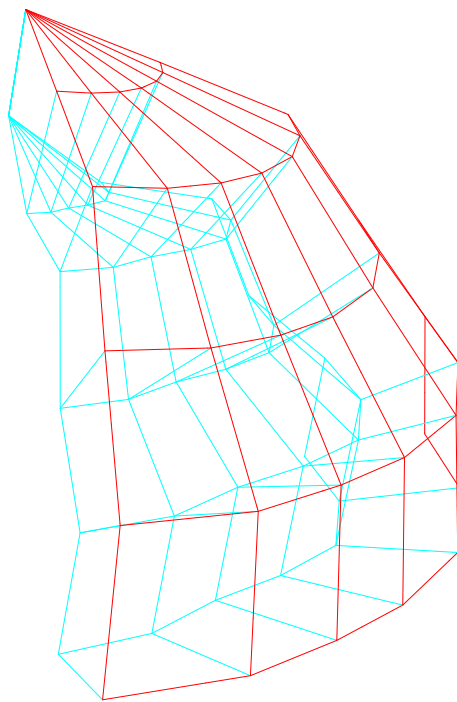
2.5 Tvorba siete

Samotná sieť sa bude skladať z vrstiev vytvorených pomocou evolúcií plochy. Dolnou hranicou siete bude počiatocná diskretizácia plochy, ktorá sa bude vyvíjať modelom (2.18). Ďalšie vrstvy 3D siete budú diskretizácie plochy v rôznych časových intervaloch. Keďže sme pri vývoji plochy použili externú silu f , každá ďalšia vrstva bude nad tou predchádzajúcou. Vývoj plochy zastavíme, keď bude plocha tak vzdialená od počiatocnej plochy ako od nej požadujeme. Tak ako sme použili redistribúciu bodov, aby sme získali rovnomernú sieť v jednotlivých vrstvách, tak v radiálnom smere použijeme vhodnú voľbu časového kroku závislú od priemernej vzdialenosti bodov na ploche v predchádzajúcej vrstve.

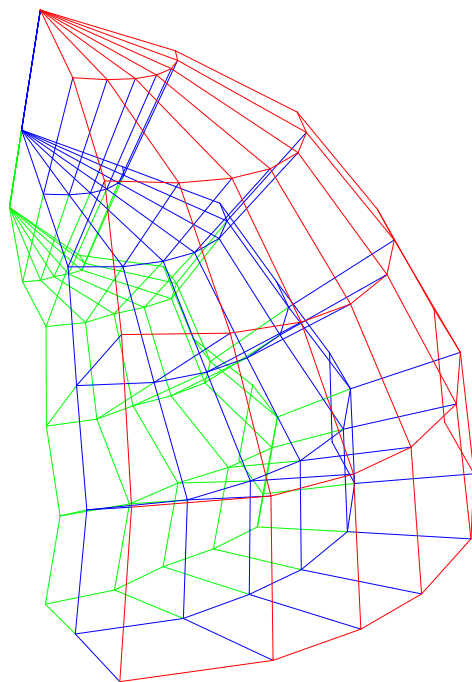
Na obrázkoch 2.10 a 2.11 sú prezentované dve, resp. tri vrstvy takto vytvorenej siete, kde počiatocná plocha bola zadaná ako perturovaná guľa.



Obr. 2.10: Časový vývoj pomeru najdlhšej a najkratšej vzdialenosti na 6. rovnobežke. Modrá krivka reprezentuje vývoj s použitím redistribúcie a fialová krivka bez použitia redistribúcie.



Obr. 2.10: Dve vrstvy siete vytorenej perturbovanej gule



Obr. 2.11: Tri vrstvy siete vytvorenej perturbovanej gule

Kapitola 3

Záver

V práci sme vytvorili novú metódu na tvorbu 3D logicky štvoruholníkových sietí nad uzavretou plochou. Na tvorbu siete sme využili rovnicu pre pohyb plochy v normálovom smere rýchlosťou danou externou silou f a strednou krivosťou plochy. V práci sme vytvorili nový spôsob tangenciálnej redistribúcie bodov plochy. Body siete sme redistribuovali tak aby sme zrovnomernili body len vzhľadom na krivky, ktoré plochu tvoria. Experimenty ukázali, že nová metóda na redistribúciu bodov vytvára rovnomernejšiu sieť ako keby sme túto metódu nepoužili. Táto metóda bola tiež využitá v článku [8] pre návrh konštrukcie v tvare minimálnej plochy s rovnomernou redistribúciou dĺžok hrán elementov.

Kapitola 4

Literatúra

- [1] T.Y. Hou, J. Lowengrub, M. Shelley, *Removing the stiffness from interfacial flows and surface tension*, J. Comput. Phys., 114 (1994), pp. 312-338.
- [2] M. Kimura, *Numerical analysis for moving boundary problems using the boundary tracking method*, Japan J. Indust. Appl. Math., 14 (1997), pp. 373-398.
- [3] K. Mikula, D. Ševčovič, *Evolution of plane curves driven by a nonlinear function of curvature and anisotropy*, SIAM J. Appl. Math., 61 (2001), pp. 1473-1501.
- [4] K. Mikula, D. Ševčovič, *A direct method for solving an anisotropic mean curvature flow of planar curve with an external force*, Mathematical Methods in Applied Sciences, 27(13) (2004) pp. 1545-1565.
- [5] K. Mikula, D. Ševčovič, M. Balážovjech, *A simple, fast and stabilized flowing finite volume method for solving general curve evolution equations*, Communications in Computational Physics, Vol. 7, No. 1 (2010) pp. 195-211
- [6] K. Mikula, J. Urbán, *3D curve evolution algorithm with tangential redistribution for a fully automatic finding of an ideal camera path in virtual colonoscopy*, Lecture Notes in Computer Science 6667, Springer, 2011
- [7] M. Tunega, *Využitie metód evolúcie plôch v softvéri pre obuvnícky priemysel*, Diplomová práca, SvF STU, 2011

- [8] M. Huska, M. Medla, K. Mikula, P. Novysedlak, M. Remesikova, *A new form-finding method based on mean curvature flow of surfaces*, *ALGORITMY 2012*, 19th Conference on Scientific Computing, Podbanske, Slovakia, September 9-14, 2012, Proceedings of contributed papers and posters (Eds. A.Handlovicova, Z.Minarechova, D.Sevcovic), ISBN 978-80-227-3742-5, Publishing House of STU, 2012, pp. 120-131