ŠVOČ 2012
Bratislava

Aplikácia nového spôsobu riešenia topologických zmien pre všeobecný Lagrangeovský model šírenia lesného požiaru

Meno Priezvisko študenta:	Filip Pafčo
Škola:	Slovenská technická univerzita
Fakulta:	Stavebná fakulta
Ročník a program/odbor štúdia:	1. roč. 2. stupeň, Matematicko-počítačové modelovanie
Vedúci práce:	prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc. Mgr. Martin Balažovjech, Phd.
Katedra:	KMaDG

21.-23. Máj 2012

Anotácia:

Naša práca je zameraná na riešenie problému topologických zmien pri spájaní a delení požiarov, ktoré sa šíria z viacerých miest. Čelo požiaru je reprezentované rovinnou krivkou, riadenou externými silami a jej krivosťou. Pre simulovanie jej vývoja riešime numericky nelineárnu parciálnu diferenciálnu rovnicu Lagrangeovským prístupom. Na výpočet používame modifikovanú semi-implicitnú schému s tzv. inflow-implicit/outflow-explicit prístupom. Výhodou Lagrangeovského prístupu je efektivita výpočtu. Tento však prirodzene nezahŕňa topologické zmeny. Cieľom práce je vytvoriť efektívnejší algoritmus pre riešenie takýchto zmien, oproti pôvodnému, čím by sa minimalizoval prvotný nedostatok Lagrangeovského prístupu.

Annotation:

Our work is focused on a treatment of topological changes arising in the fire front merging and splitting when the fire spreads from several different places. Fire front is represented by a plane curve driven by external forces and curvature. For simulation of curve evolution we solve numerically a nonlinear partial differential equation by the so-called Lagrangean approach. For solving the equation we use a modified semiimplicit scheme with inflow-implicit/outflow-explicit equation elements. The advantage of the Lagrangean aprroach is the efficiency of computation. On the other hand, it does not treat naturally topological changes which may arise in front propagation. The aim of the work is to create more effective algorithm for solving theses changes, that could minimalize the deficiency of Lagrangean approach.

Úvod

Lesné požiare každoročne sužujú krajinu po celom svete. Pre niekoho to môže predstavovať “len” vypálené porasty, avšak lesy tvoria tzv. “pľúca Zeme”. Sú zdrojom kyslíka potrebného pre všetok život na našej planéte. Sú domovom pre množstvo rozmanitých druhov živočíchov či rastlín a spolu tak vytvárajú jedinečné ekosystémy, hodné ochrany. Nekontrolované lesné požiare rovnako ako na prírode zanechávajú škody na majetkoch obyvateľstva, v najhorších prípadoch aj straty na ľudských životoch.

Na vzniku požiaru sa podieľajú tri hlavné faktory - kyslík, palivo a iniciátor vzniku požiaru. Tým možu byť blesky, vulkanické aktivity, v obdobiach sucha aj samotné slnko, kde dochádza k spontánnemu samovznieteniu, či iskry spôsobené padaním skál. Napriek tomu však najčastejšie stojí za vznikom požiaru samotný človek. Nedbalou manipuláciou s otvoreným ohňom, ohorkom z cigarety, úmyselným podpaľovaním (pyrománia) dokáže prerásť malý plameň v katastrofický scenár.

Podstatný vplyv na šírenie požiaru má vietor, ktorý ho zásobuje kyslíkom. Za bezvetria sa oheň šíri rádovo rýchlosťou 1m/min. Pri vetre rýchlosť šírenia výrazne stúpa. Ďalším dôležitým faktorom je palivo - horľavý materiál a jeho vertikálne usporiadanie. Pri horení smerom do kopca dochádza k rýchlejšiemu vysušovaniu a tým aj šíreniu požiaru ako z kopca.

Podľa paliva rozlišujeme niekoľko druhov požiarov:

- **podzemný** - najčastejšie sa vyskytuje na rašeline, koreňoch stromov a inom podzemnom organickom materiále. Rýchlosť je pomerne malá, len zopár metrov za deň, avšak takýto požiar je ťažko lokalizovateľný a kontrolovateľný.

- **pozemný** - horí lístie, popadané ihličie, konáre a krovinatý porast. Je najčastešie sa vyskytujúcim druhom požiaru u nás. Je podporovaný hlavne vetrom, pričom požiar má zvyčajne eliptický charakter.

- **korunový** - plameň sa šíri korunami stromov. Vznikajú vzdušné prúdy a miestne vetrom vyvolané požiare. Takýto požiar je veľmi nebezpečný a jeho hasenie náročné.

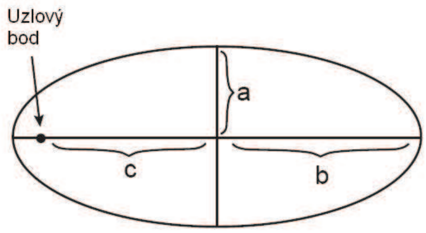
Protipožiarne aktivity závisia od druhu požiaru. Pri pozemných požiaroch sa väčšinou využíva hasenie z povrchu a vytváranie tzv. protipožiarnych pásov. Pri korunových požiaroch už takéto opatrenia nezaberajú, vytvárajú sa izolačné pásy. Takéto pásy predstavujú 30 - 50 metrov široký pás, v ktorom je odstránený horľavý materiál. V takýchto prípadoch je nutné použitie leteckej techniky.

V posledných rokoch dochádza k vývoju počítačových softvérov, ktoré sú schopné predikovať šírenie lesného požiaru, čím dokážu protipožiarne sily účinnejšie a včasne reagovať na možné nebezpečenstvo. Ich nedostatky však spočívajú v čase, ktorý je potrebný na výpočet.

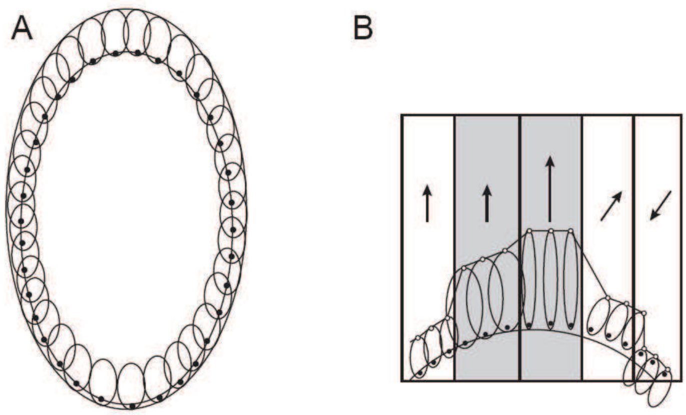
Numerické metódy modelovania šírenia lesných požiarov

Farsite

Farsite je momentálne najznámejší a najpoužívanejší softvér pre simuláciu šírenia lesných požiarov používajúci empiricko-matematický model založený na Huygensovom princípe [8]. Tento princíp sa používa pri šírení vĺn, kde podstatnú úlohu zohráva myšlienka, že každý bod takejto vlny je zdrojom jej ďalšieho šírenia. V prípade softvéru FARSITE sa však namiesto kružníc využívajú elipsy. Osy tejto elipsy, jej orientácia a vzdialenosť uzlového bodu záležia od vplyvov ako sú horľavosť materiálu, sila a smer vetra (Obr. 1, Obr. 2.B). Čelo požiaru je reprezentované krivkou, na ktorej sú rozmiestnené uzlové body. Pre každý takýto bod sú potom charakteristické jednotlivé elipsy (Obr. 1.A). Následne sa vytvorí obálka takto vytvoreného polygónu a celý postup sa opakuje, čím sa dostatočným počtom krokov dokáže vytvoriť simulácia šírenia čela lesného požiaru.



Obr. 1: Osy elipsy a vzdialenosť uzlového bodu od stredu.



Obr. 2: A - Využitie Huygensovho princípu pri simulácii krivky, B - vplyv horľavosti materiálu, sily a smeru vetra.

Okrem už spomínaných faktorov, zohľadňuje softvér aktuálny stav (vlhkosť porastu), teplotu a vlhkosť vzduchu, no taktiež sklon terénu. Softvér FARSITE rieši už spomínané pozemné a korunové druhy lesných požiarov.

Vývoj krivky v rovine

Pre vývoj kriviek sa zvyčajne využívajú dva prístupy a to Eulerovský a Lagrangeovský. Obidva však majú svoje pozitíva i negatíva.

Eulerovský: Pri takomto prístupe je výpočtová sieť reprezentovaná pevne zvolenými mriežkovými bodmi rovnomerne rozdelenými na výpočtovej oblasti $\mathbf{\Omega}$. Vývoj krivky $\mathbf{\Gamma}$, ktorá tvorí podmnožinu oblasti $\mathbf{\Omega}$ je daný riešením diferenciálných rovníc pre celú diskretizovanú oblasť $\mathbf{\Omega}$. Táto metóda kladie veľké nároky na výpočtový čas. Výhodou je, že vo svojej podstate zahŕňa topologické zmeny. Príkladom je *level-set* metóda.

Lagrangeovský: V tomto prípade je výpočtová sieť tvorená len pohyblivými bodmi, ktoré reprezentujú krivku $\mathbf{\Gamma}$. Vďaka tomu oproti Eulerovskému prístupu podstatne znižuje pamäťové nároky rovnako ako aj časovú náročnosť. Na druhej strane však nezahŕňa topologické zmeny a je ich pre tento model nutné naprogramovať dodatočne. Odvodením numerickej schémy pre vývoj rovinnej krivky s Lagrangeovským prístupom, rovnako ako aj topologickými zmenami, sa budeme zaoberať v nasledujúcich častiach tejto práce.

Pohybová rovnica

V našom prípade čelo požiaru reprezentujeme uzavretou krivkou $\mathbf{\Gamma}$ v dvojrozmernom priestore. Krivka $\mathbf{\Gamma}$ je daná pomocou polohového vektora $\mathbf{r} = [x, y]$. Jej pohyb v každom bode môžeme rozložit do tangenciálneho a normálového smeru a vystihuje ho parciálna diferenciálna rovnica:

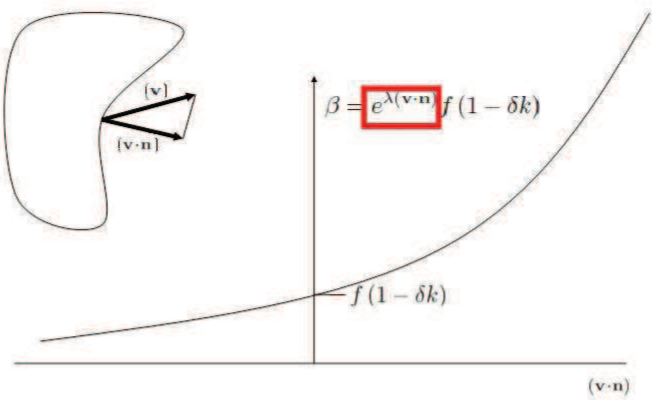
$$\partial_t \mathbf{r} = \beta \mathbf{n} + \alpha \mathbf{t} \tag{1}$$

kde rýchlosť $\partial_t \mathbf{r}$, daná časovou deriváciou polohového vektora, pozostáva z rýchlosti β v normálovom smere $\mathbf{n}$ a z rýchlosti α v tangenciálnom smere $\mathbf{t}$. Koeficient β priamo vplýva na šírenie krivky, zatiaľ čo koeficient α nemá na šírenie žiaden vplyv a zabezpečuje rovnomerné rozdelenie uzlových bodov pozdĺž celého obvodu krivky a tým aj celkovú stabilitu systému.

Ako už bolo spomínané, na vývoj požiaru majú vplyv veľkosť a smer vetra, rovnako ako aj horľavosť materiálu. Preto musí normálová rýchlosť β zahŕňať takéto parametre.

Z empirického pozorovania šírenia lesných požiarov je známe, že pri prúdení vetra v normálovom smere (v smere šírenia požiaru), rýchlosť požiaru v tomto smere rapídne narastá. Na druhej strane pri prúdení vetra proti smeru normály, rýchlosť klesá. V smere kolmom na čelo požiaru je vplyv vetra nulový (Obr. 4).

Preto je najvhodnejším kandidátom pre popísanie vplyvu vetra na šírenie čela požiaru exponenciálna funkcia tvare $e^{\lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})}$, kde skalárny súčin $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ je priemet vektora rýchlosti vetra na normálu. Parameter λ je miera vplyvu vetra.



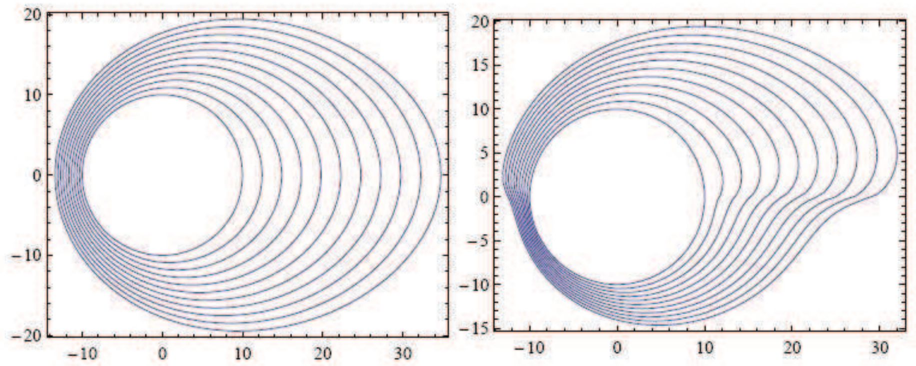
Obr. 3: Projekcia veľkosti a smeru vetra na normálu krivky.

Palivo, čiže horľavosť lesa reprezentuje skalárne rýchlostné pole f . Na vývoji krivky sa podieľa tiež jej krivosť k , ktorá má vlastnosť krivku sťahovať. Mieru vplyvu krivosti reprezentuje parameter δ .

Normálovú rýchlosť potom definujeme ako súčin týchto zložiek vzťahom:

$$\beta = e^{\lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})} f\,(1 - \delta k) \tag{2}$$

Takto zvolená β nám zabezpečí, že čelo požiaru neprenikne nehorľavým materiálom.



Obr. 4: Vývoj krivky s vplyvom západného vetra homogénneho a nehomogénne horľavého podkladu.

Keďže platia vzťahy $k\mathbf{n} = -\partial_s \mathbf{t} = -\partial_{ss}\mathbf{r}$, môžeme rýchlosť $\beta\mathbf{n}$ z pohybovej rovnice (1) prepísať v tvare

$$\beta\mathbf{n} = e^{\lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})} f\mathbf{n} + e^{\lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})} f\,\delta\,\partial_{ss}\mathbf{r} \tag{3}$$

Rovnako použitím vzťahov $\mathbf{t} = \partial_s\mathbf{r}$ pre tangenciálu v rovnici (1) a $\mathbf{n} = \mathbf{t}^{\perp} = (\partial_s\mathbf{r})^{\perp}$ pre normálu vo vzťahu (3), dostávame pre pohybovú rovnicu nasledujúci tvar:

$$\partial_t\mathbf{r} = \delta\, f\, e^{\lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})}\partial_{ss}\mathbf{r} + \alpha\partial_s\mathbf{r} + e^{\lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})} f\ (\partial_s\mathbf{r})^{\perp} \tag{4}$$

Tangenciálnu rýchlosť α získame riešením rovnice[3, 4, 5, 8]:

$$\partial_s\alpha = \beta k - \frac{1}{L}\int_{\Gamma}\beta k\, ds + \left(\frac{L}{g} - 1\right)\omega \tag{5}$$

Kde časť $\beta k - \frac{1}{L}\int_{\Gamma}\beta k\, ds$ nám zabezpečuje zachovanie pomeru dĺžok elementov krivky $\mathbf{\Gamma}$, zatiaľ čo druhá časť $\left(\frac{L}{g} - 1\right)\omega$ zabezpečuje rovnomernú redistribúciu uzlových bodov po obvode krivky. Relaxačný parameter ω určuje rýchlosť redistribúcie uzlových bodov, g vyjadruje tzv. lokálnu dĺžku.

Numerická diskretizácia pohybovej rovnice

Pomocou metódy konečných objemov odvodíme numerickú schému pre vývoj krivky.

Pohybovú rovnicu (4) zintegrujeme na oblasti $\left[\mathbf{r}_{i-\frac{1}{2}}, \mathbf{r}_{i+\frac{1}{2}}\right]$, pričom $\mathbf{r}_{i-\frac{1}{2}}$ predstavuje stred elementu medzi bodmi $\mathbf{r}_{i-1}$ a $\mathbf{r}_i$, a podobne $\mathbf{r}_{i+\frac{1}{2}}$ je stred medzi $\mathbf{r}_i$ a $\mathbf{r}_{i+1}$. Nech $h_i = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}|$ a $h_{i+1} = |\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i|$ potom:

$$\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \partial_t \mathbf{r} ds = \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \delta\, f\, e^{\lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})} \partial_{ss} \mathbf{r} ds + \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \alpha \partial_s \mathbf{r} ds + \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} e^{\lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})} f \left(\partial_s \mathbf{r}\right)^{\perp} ds \tag{6}$$

,

Keďže hodnoty δ , f , $e^{\lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})}$, α pre rovnicu (6) uvažujeme v bodoch $\mathbf{r}_i$ konštantné, môžeme ich následne vybrať pred integrál.

$$\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \partial_t \mathbf{r} ds = \delta\, f\, e^{\lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})} \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \partial_{ss} \mathbf{r} ds + \alpha \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \partial_s \mathbf{r} ds + e^{\lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})} f \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \left(\partial_s \mathbf{r}\right)^{\perp} ds \tag{7}$$

Jednotlivé časti rovnice (7) zintegrujeme postupne.

1. Použitím divergenčnej vety a centrálnej diferencie dostávame:

$$\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \partial_{ss} \mathbf{r} ds = \left[\partial_s \mathbf{r}\right]_{\mathbf{r}_{i-\frac{1}{2}}}^{\mathbf{r}_{i+\frac{1}{2}}} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}\right)_{i-\frac{1}{2}} = \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i}{h_{i+1}} - \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}}{h_i} \tag{8}$$

2.

$$\alpha \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \partial_s \mathbf{r} ds = \alpha \left[\mathbf{r}_i\right]_{\mathbf{r}_{i-\frac{1}{2}}}^{\mathbf{r}_{i+\frac{1}{2}}} = \alpha(\mathbf{r}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{r}_{i-\frac{1}{2}}) = \alpha \frac{\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_{i-1}}{2} \tag{9}$$

3. Vypočítame integrál $\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \left(\partial_s \mathbf{r}\right)^{\perp} ds$. Keďže $\partial_s \mathbf{r} = \left[\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}\right]$, pre kolmicu naň platí $\left(\partial_s \mathbf{r}\right)^{\perp} = \left[\frac{\partial y}{\partial s}, -\frac{\partial x}{\partial s}\right]$, preto tento vektor zintegujeme postupne po zložkách.

$$\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial y}{\partial s} ds = \left[y\right]_{\mathbf{r}_{i-\frac{1}{2}}}^{\mathbf{r}_{i+\frac{1}{2}}} = (y_{i+\frac{1}{2}} - y_{i-\frac{1}{2}}) = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2}$$

Podobným spôsobom dostaneme zintegrovaním zložky $-\frac{dx}{ds}$:

$$\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} -\frac{\partial x}{\partial s} ds = -\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial x}{\partial s} ds = -\left[x\right]_{\mathbf{r}_{i-\frac{1}{2}}}^{\mathbf{r}_{i+\frac{1}{2}}} = (x_{i-\frac{1}{2}} - y_{i+\frac{1}{2}}) = \frac{x_{i-1} - x_{i+1}}{2}$$

Označme si vektor týchto zložiek ako

$$\tilde{\mathbf{n}}_i = \left[\frac{y_{i+1} - y_{y-1}}{2}, \frac{x_{i-1} - x_{i+1}}{2}\right] \tag{10}$$

.

4. Keďže $\partial_t \mathbf{r}$ uvažujeme na intervale $\left(i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}\right)$ konštantné, zintegrovaním dostaneme:

$$\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \partial_t \mathbf{r} ds = \frac{h_{i+1} + h_i}{2} \partial_t \mathbf{r}_i \tag{11}$$

Dosadením vzťahov (8,9,10,11) pre pohybovú rovnicu (7) dostaneme sústavu obyčajných diferenciálnych rovníc - **semidiskrétnu schému:**

$$\frac{h_{i+1}+h_i}{2}\partial_t \mathbf{r}_i = \delta_i\, f_i\, e^{\lambda(\mathbf{v_i}\cdot\mathbf{n_i})}\left(\frac{\mathbf{r}_{i+1}-\mathbf{r}_i}{h_{i+1}}-\frac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_{i-1}}{h_i}\right)+\alpha_i\frac{\mathbf{r}_{i+1}-\mathbf{r}_{i-1}}{2}+e^{\lambda(\mathbf{v_i}\cdot\mathbf{n_i})}f_i\tilde{\mathbf{n}}_i \qquad (12)$$

Z rovnice (8) vidno, že prvá a druhá derivácia polohového vektora vzľadom na dĺžku krivky sú aproximované nasledujúcimi diferenciami:

$$\partial_s \mathbf{r}_i = \tfrac{\mathbf{r}_{i+1}-\mathbf{r}_{i-1}}{2} / \tfrac{h_{i+1}+h_i}{2}$$

$$\partial_{ss}\mathbf{r}_i = \left(\tfrac{\mathbf{r}_{i+1}-\mathbf{r}_i}{h_{i+1}}-\tfrac{\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_{i-1}}{h_i}\right)/\left(\tfrac{h_{i+1}+h_i}{2}\right)$$

pre $\mathbf{r}_i{=}[x_i, y_i]^T$ je polohový vektor pre i-ty uzlový bod krivky $\mathbf{\Gamma}$, $i = 1,...,n$, kde n je počet uzlových bodov krivky, $h_i = |\mathbf{h}_i|$, $\mathbf{h}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$, a kde normálový vektor je daný
$\mathbf{n}_i = [n_{xi}, n_{yi}] = \left(\tfrac{\mathbf{r}_{i-1}-\mathbf{r}_{i+1}}{h_{i+1}+h_i}\right)^{\perp} = \left[\tfrac{y_{i+1}-y_{i-1}}{h_{i+1}+h_i}, \tfrac{x_{i-1}-x_{i+1}}{h_{i+1}+h_i}\right]$.

Diskretizáciou diferenciálnej rovnice pre skalárnu rýchlosť α v tangenciálnom smere dostaneme:

$$\frac{\alpha_i-\alpha_{i-1}}{h_i} = \beta_{i+\frac{1}{2}}k_{i+\frac{1}{2}} - \frac{\sum_{i=1}^n \beta_{i+\frac{1}{2}}k_{i+\frac{1}{2}}h_i}{\sum_{i=1}^n h_i} + \left(\frac{\sum_{i=1}^n h_i}{nh_i}-1\right)\omega$$

kde

$$k_{i+\frac{1}{2}} = \frac{sgn(det(\mathbf{h}_{i-1}, \mathbf{h}_{i+1}))}{2h_i} arccos\left(\frac{\mathbf{h}_{i-1}\cdot\mathbf{h}_{i+1}}{h_{i-1}h_{i+1}}\right).$$

Kvôli cyklickým okrajovým podmienkam uvažujeme hodnoty $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_n$ a $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_1$.

Ak aproximujeme časovú deriváciu $\partial_t\mathbf{r}_i$ v rovnici (12) diferenciou v tvare $\frac{\mathbf{r}_i^{m+1}-\mathbf{r}_i^m}{\Delta t}$ dostaneme **plne diskrétnu schému.**

Základné typy takýchto schém sú:

- **Explicitná schéma** - pre výpočet polohového vektora $\mathbf{r}_i^{m+1}$ využíva všetky hodnoty zo starého časového kroku m. Nevýhodou je nestabilita. Schéma má tvar

$$\frac{h_{i+1}^m+h_i^m}{2}\frac{\mathbf{r}_i^{m+1}-\mathbf{r}_i^m}{\Delta t} = \delta_i\, f_i^m\, e^{\lambda(v_i^m\cdot n_i^m)}\left(\frac{\mathbf{r}_{i+1}^m-\mathbf{r}_i^m}{h_{i+1}^m}-\frac{\mathbf{r}_i^m-\mathbf{r}_{i-1}^m}{h_i^m}\right)+\alpha_i^m\frac{\mathbf{r}_{i+1}^m-\mathbf{r}_{i-1}^m}{2}+$$

$$+e^{\lambda(v_i^m\cdot n_i^m)}f_i^m\tilde{\mathbf{n}}_i^m.$$

- **Plne implicitná schéma** - hodnoty vektora $\mathbf{r}_i^{m+1}$ získame riešením nasledujúceho nelineárneho trojdiagonálneho systému rovníc

$$\frac{h_{i+1}^{m+1}+h_i^{m+1}}{2}\frac{\mathbf{r}_i^{m+1}-\mathbf{r}_i^m}{\Delta t} = \delta_i\, f_i^{m+1}\, e^{\lambda\left(v_i^{m+1}\cdot n_i^{m+1}\right)}\left(\frac{\mathbf{r}_{i+1}^{m+1}-\mathbf{r}_i^{m+1}}{h_{i+1}^{m+1}}-\frac{\mathbf{r}_i^{m+1}-\mathbf{r}_{i-1}^{m+1}}{h_i^{m+1}}\right)+$$

$$+\alpha_i^{m+1}\frac{\mathbf{r}_{i+1}^{m+1}-\mathbf{r}_{i-1}^{m+1}}{2}+e^{\lambda\left(v_i^{m+1}\cdot n_i^{m+1}\right)}f_i^{m+1}\tilde{\mathbf{n}}_i^{m+1},$$

  kde koeficienty nachádzajúce sa v matici systému uvažujeme z nového časového kroku a získame ich pomocou iterácií. Nevýhoda tejto schémy spočíva vo väčšom nároku na výpočtový čas.

- **Semi implicitná schéma** - hodnoty vektora $\mathbf{r}_i^{m+1}$ získame riešením trojdiagonálneho systému rovníc

$$\frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2} \frac{\mathbf{r}_i^{m+1} - \mathbf{r}_i^m}{\Delta t} = \delta_i \, f_i \, e^{\lambda(v_i \cdot n_i)} \left(\frac{\mathbf{r}_{i+1}^{m+1} - \mathbf{r}_i^{m+1}}{h_{i+1}^m} - \frac{\mathbf{r}_i^{m+1} - \mathbf{r}_{i-1}^{m+1}}{h_i^m} \right) + \alpha_i^m \frac{\mathbf{r}_{i+1}^{m+1} - \mathbf{r}_{i-1}^{m+1}}{2} +$$

$$+ e^{\lambda(v_i \cdot n_i)} f_i^m \tilde{\mathbf{n}}_i^m, \tag{13}$$

kde koeficienty nachádzajúce sa v matici systému uvažujeme z nového aj starého časového kroku. Takáto semi-implicitná schéma sa bežne používa na výpočet vývoja kriviek [2, 3, 4, 5, 8].

Presnosť týchto schém je prvého rádu.

Riešiteľnosť sústavy rovníc

Trojdiagonálny cyklický systém rovníc (13) môžme zapísať v tvare

$$A \mathbf{r}_{i-1}^{m+1} + B \mathbf{r}_i^{m+1} C \mathbf{r}_{i+1}^{m+1} = D$$

kde koeficienty mimo diagonály sú

$$A = \left(\frac{\alpha_i^m}{2} - \frac{\delta_i^m \, f_i^m \, e^{\lambda(v_i^m \cdot n_i^m)}}{h_i^m} \right), \; C = -\left(\frac{\alpha_i^m}{2} + \frac{\delta_i^m \, f_i^m \, e^{\lambda(v_i^m \cdot n_i^m)}}{h_{i+1}^m} \right),$$

koeficienty na diagonále sú

$$B = \left(\frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} - A - C \right) \tag{14}$$

a pravá strana

$$D = \left(\frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} \right) \mathbf{r}_i^m + \delta_i^m \, f_i^m \, e^{\lambda(v_i^m \cdot n_i^m)} \tilde{\mathbf{n}}_i^m$$

Pre riešenie semi-iplicitnej schémy využívame efektívny solver na báze Gaussovej eliminácie.

Sústava je riešiteľná vtedy, keď je matica sústavy diagonálne dominantná, alebo symetrická a pozitívne definitná. Naša matica sústavy nie je symetrická a pre overenie diagonálnej dominantnosti musíme pre riadky matice sústavy testovať podmienku

$$|A| + |C| \leq |B|.$$

Keďže $B > 0$, môžme prechádzajúci vzťah zapísať v tvare $|A| + |C| \leq B$. Ak teraz B vyjadríme dosadením vzťahu (16) dostávame nerovnosť

$$|A| + |C| \leq \frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\Delta t} - A - C \tag{15}$$

Zo vzťahu (15) dostaneme podmienku riešiteľnosti sústavy pre časový krok

$$\Delta t \leq \frac{h_{i+1}^m + h_i^m}{2\left(|A| + |C| + A + C\right)}.$$

Podmienku riešiteľnosti je potom nutné testovať pre každý diagonálny prvok matice systému (13), pričom sa vyberie najmenší možný časový krok Δt, pre ktorý je potom systém riešiteľný. Pri viacerých ktivkách, ktoré sa vyvíjajú, tak môžme dostať rozdielne požiadavky na časový krok. A teda tak, ako každý z nás starneme rovnako, aj tieto krivky musia "starnúť" rovnakou rýchlosťou, čo by sme nedosiahli, ak by sme pre výpočet kriviek v nových časových krokoch volili pre každú krivku rozdielne Δt. Takto by sa nám samotný systém značne skomplikoval.

Numerická schéma pre pohyb krivky bez obmedzenia na časový krok

Problém s požiadavkou na veľkosť časové kroku vieme eliminovať využitím tzv. inflow-implicit/outflow-explicit (I^{2}OE) schémy, prezentovanej v článku [1]. Hlavná myšlienka spočíva v rozdelení advekcie na vtokovú (inflow) časť, ktorú budeme v schéme uvažovať implicitne, a výtokovú (outflow) časť, uvažovanú explicitne. Výsledným efektom je, že matica lineárneho systému bude vždy diagonálne dominantná, čím nemusíme brať v úvahu veľkosť časového kroku.

Použitím centrálnej diferencie pre deriváciu polohového vektora $\mathbf{r}_i^m$ v explicitnej časti takejto schémy ako výsledok dostaneme

$$-\left(\frac{1}{2}b_{i-\frac{1}{2}}^{in}+\frac{\delta_i^m\, f_i^m\, e^{\lambda(v_i^m\cdot n_i^m)}}{h_i^m}\right)\mathbf{r}_{i-1}^{m+1}+-\left(\frac{1}{2}b_{i+\frac{1}{2}}^{in}+\frac{\delta_i^m\, f_i^m\, e^{\lambda(v_i^m\cdot n_i^m)}}{h_{i+1}^m}\right)\mathbf{r}_{i+1}^{m+1}+$$

$$\left(\frac{h_{i+1}^m+h_i^m}{2\Delta t}+\frac{\delta_i^m\, f_i^m\, e^{\lambda(v_i^m\cdot n_i^m)}}{h_i^m}+\frac{\delta_i^m\, f_i^m\, e^{\lambda(v_i^m\cdot n_i^m)}}{h_{i+1}^m}+\frac{1}{2}b_{i-\frac{1}{2}}^{in}+\frac{1}{2}b_{i+\frac{1}{2}}^{in}\right)\mathbf{r}_i^{m+1}=$$

$$\left(\frac{h_{i+1}^m+h_i^m}{2\Delta t}\right)\mathbf{r}_i^m+\frac{1}{4}b_{i-\frac{1}{2}}^{out}\left(\mathbf{r}_{i+1}^m-\mathbf{r}_{i-1}^m\right)+\frac{1}{4}b_{i+\frac{1}{2}}^{out}\left(\mathbf{r}_{i+1}^m-\mathbf{r}_{i-1}^m\right)+\delta_i^m\, f_i^m\, e^{\lambda(v_i^m\cdot n_i^m)}\tilde{\mathbf{n}}_i^m$$

kde

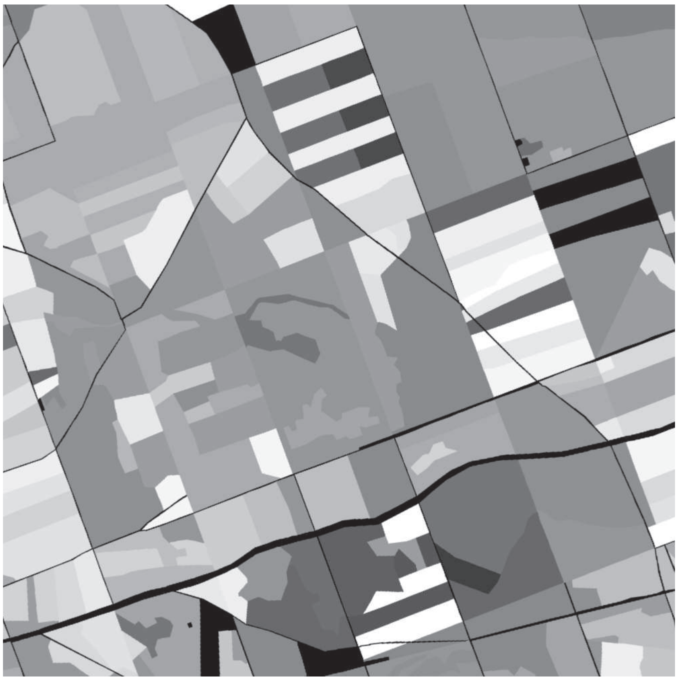
$$b_{i-\frac{1}{2}}^{in}=max(-\alpha_i^m,0),\;\; b_{i-\frac{1}{2}}^{out}=min(-\alpha_i^m,0)$$

$$b_{i+\frac{1}{2}}^{in}=max(\alpha_i^m,0),\;\; b_{i+\frac{1}{2}}^{out}=min(-\alpha_i^m,0)$$

Odvodenie takejto schémy je popísané v článku [8].

Vstupné údaje

Vstupné dáta pre našu prácu bude predstavovať mapa terénu. Táto bola špeciálne pripravéná vďaka spolupráci s Mgr. Máriou Petrášovou z Botanického ústavu SAV a útvarom Vojenských lesov a majetkov SR v Malackách. Keďže náš model ešte nezahŕňa vplyv sklonu terénu, je rovinatá oblasť VO Záhorie vhodným územím.



Obr. 5: Mapa terénu v odtieňoch šedi reprezentujúcich horľavosť podložia.

Mapa predstavuje terén o rozlohe 1 km štvorcový, pričom jeden pixel obrázku reprezentuje jeden meter štvorcový. Obrázok je v odtieňoch šedi v hodnotách od 0 po 255, ktoré predstavujú horľavosť podložia. Pri hodnote 0 je materiál nehorľavý, naopak pri hodnote 255 je horľavosť materiálu maximálna.

Vplyv vetra pre náš problém budeme uvažovať s konštatnou veľkosťou a smerom.

Ciele Práce

1. Cieľom našej práce je vyvinúť nový, efektívny algoritmus pre zahrnutie topologických zmien do výpočtu pohybovej rovnice pre šírenie jedného alebo viacerých požiarov a porovnať ho s pôvodným. V práci [8] bol navrhnutý efektívny algoritmus na riešenie topologických zmien pri delení kriviek. V tejto práci tento algoritmus zovšeobecníme na všeobecný prípad spájania a delenia kriviek, pričom uvažujeme nový spôsob vyhodnocovania detekovaných zmien a ich realizácie.

Topologické zmeny pri šírení lesných požiarov

Ako sme už na začiatku spomínali, topologické zmeny nie sú obsiahnuté v Lagrangeovskom prístupe vývoja kriviek. Pri šírení lesných požiarov dochádza k dvom typom topologických zmien.

Delenie krivky

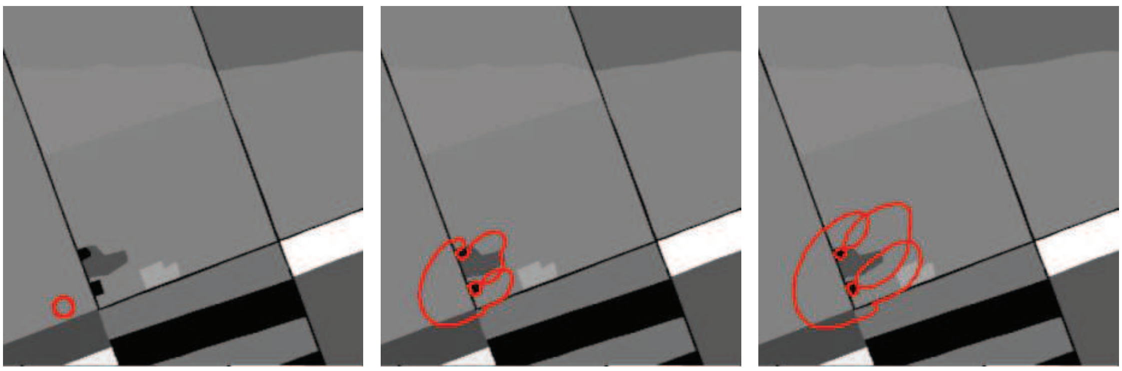
Delenie krivky nastáva napríklad v prípadoch, keď oheň obkolesuje nehorľavú oblasť. Na druhej strane sa dva konce tej istej krivky spoja, pričom sa krivka rozdelí na dve samostatné časti. Prvá pokračuje smerom od prekážky a druhá krivka smerom k prekážke, pokiaľ sa nestiahne na minimum. Takýto algoritmus rovnako ošetruje situácie, keď krivka v niektorých miestach nadobúda silne konvexný charakter. Body na okrajoch konvexného oblúku môžu mať v určitých situáciách dostatočne veľkú normálovú rýchlosť na to, aby stihli "prebehnúť" z jednej strany konvexnej časti na druhú, čím sa vytvorí akási slučka. Takýto efekt je pre simulovanie šírenia lesného požiaru nežiadúci.

Pôvodný algoritmus pre delenie krivky:

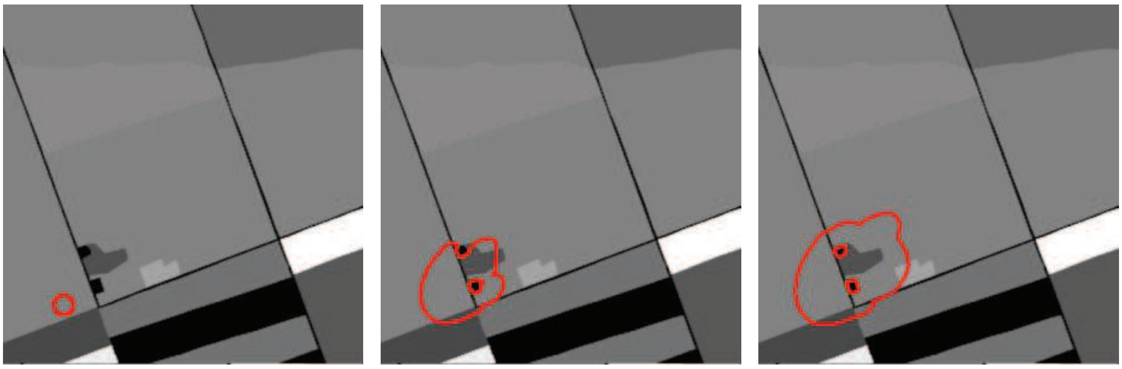
1. Vypočítame najmenšiu vzdialenosť dvoch susedných bodov krivky. $m1 = \min\,[h_i^m]$, $i = 1, ..., n$.
2. Nájdeme vzájomnú vzdialenosť všetkých uzlov metódou "každý s každým" okrem susedných uzlov. $m2 = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, $i = 1, ..., n$, $j = ..., i-3,\, i-2,\, i+2,\, i+3, ...$.
3. Následne testujeme podmienku $m1 > C\,m2$, kde C je nejaká konštanta. Ak je táto podmienka splnená, dochádza v konkrétnych uzlových bodoch $\mathbf{r}_i^m$ a $\mathbf{r}_j^m$ k deleniu krivky.

Rovnice pre šírenie sa potom riešia pre každú krivku osobitne. Táto myšlienka je rozobraná v [6].

Nasledujúce obrázky demonštrujú šírenie krivky pre prípad bez algoritmu na delenie kriviek a s ním.



Obr. 6: Šírenie požiarov bez algoritmu pre delenie krivky.



Obr. 7: Šírenie požiarov s použitím algoritmu pre delenie krivky.

Spájanie viacerých kriviek

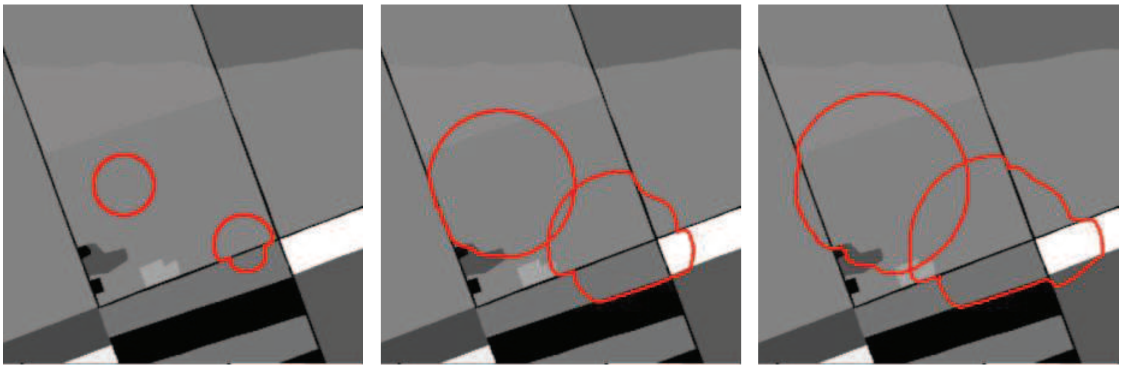
Pri šírení viacerých požiarov na pozorovanej oblasti dochádza k ich stretom a následnému zlučovaniu sa do jedného požiaru. Rovnako ako pri delení je nutné doprogramovať spájanie sa kriviek pre náš algoritmus.

Pre spájanie viacerých kriviek reprezentujúcich lesné požiare je podstatné aby sme vedeli určiť aká je ich vzájomá vzdialenosť. Označme si tieto krivky ako Γ^g a Γ^l, dané polohovými vektormi $\mathbf{r}^g$,$\mathbf{r}^l$, pričom v každom časovom kroku riešime nezávisle dve sústavy rovníc. Keďže časový krok pri spájaní nie je podstatný, budeme v tejto časti využívať horný index pre špecifikáciu krivky.

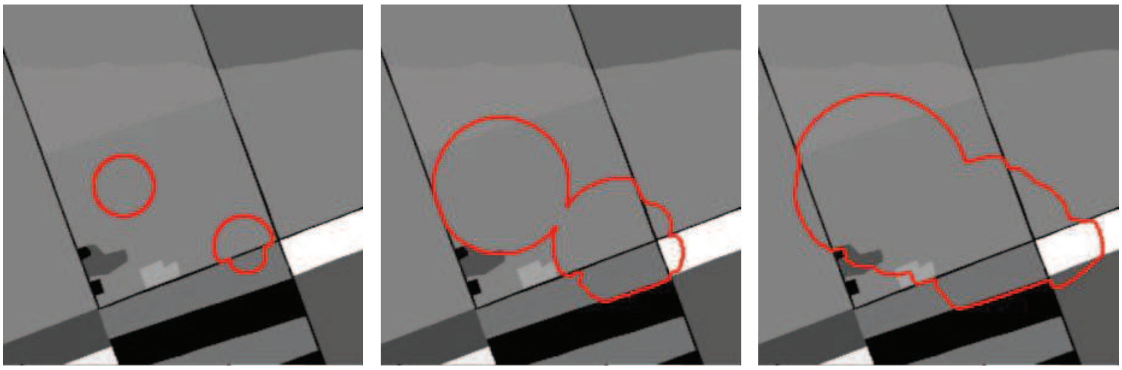
Akonáhe sa krivky priblížia k sebe dostatočne blízko, dva požiare splynú do jedného, čo algoritmicky ošetríme tak, že dve krivky spojíme nasledujúcim postupom.

Pôvodný algoritmus pre spájanie kriviek

1. Vypočítame najmenšiu vzdialenosť susedných bodov pre obe krivky, $m1 = min(min(h_i^p), min(h_j^q))$, $i = 1, ..., n_p$, $j = 1, ..., n_q$, kde n_p a n_q je počet uzlových bodov jednotlivej krivky Γ^p a Γ^q.
2. Hľadáme najmenšiu vzájomnú vzdialenosť kriviek Γ^p a Γ^q, označenú $m2 = min|\mathbf{r}_i^p - \mathbf{r}_j^q|$, $i = 1, ..., n_p$, $j = 1, ..., n_q$.
3. Následne testujeme či $m1 > C\,m2$. Ak je podmienka splnená, v bodoch $\mathbf{r}_i^p$, $\mathbf{r}_j^q$, pre ktoré máme vypočítanú hodnotu $m2$, spojíme krivky Γ^p a Γ^q do jednej, pre ktorú riešime samostatnú sústavu rovníc. Počet uzlových bodov novej krivky je $n = n_p + n_q - 2$, pretože body s minimálnou vzdialenosť z výpočtu vynecháme.



Obr. 8: Šírenie požiarov bez algoritmu pre spájanie kriviek.



Obr. 9: Šírenie požiarov s použitím algoritmu pre spájanie kriviek.

Nový spôsob riešenia topologických zmien

Predchádzajúci spôsob riešenia topologických zmien spočíval hľadaní najmenšej vzdialenosti tým, že sme počítali vzájomnú vzdialenosť všetkých existujúcich (okrem susedných) uzlových bodov. Pri simulácii požiaru sa však počet bodov, šíriacej sa krivky, pohybuje v tisíckach. Vyššie popísaný algoritmus je potom extrémne časovo náročný a zneefektívňuje to prvotnú výhodu Lagrangeovského prístupu. Preto je nutné nájsť spôsob, akým by sme riešenie topologických zmien urýchlili. Takáto myšlienka bola použitá pre delenie kriviek v článku [8].

Kým predtým sme sa pozerali na vzájomnú vzdialenosť charakteristickú pre krivky, tentokrát sa budeme pozerať na oblasť, na ktorej šírenie pozorujeme a budeme zaznamenávať jednotlivé topologické zmeny, ktoré sa v nej vyskytnú. Dôležitú úlohu tu zohráva pixel, ktorý predstavuje na mape 1 meter štvorcový. Ak sa v pixeli ocitnú dva nesusedné uzlové body, predpokládame, že v ňom nastáva nejaká topologická zmena.

Samotný algoritmus pozostáva z troch hlavných častí:

1. Detekcia topologických zmien na pozorovanej oblasti v danom časovom kroku.
2. Riešenie zozbieraných topologických zmien charakteristických pre **delenie** kriviek.
3. Riešenie zozbieraných topologických zmien charakteristických pre **spájanie** kriviek.

Detekcia topologických zmien na pozorovanej oblasti v danom časovom kroku

Pre potreby algoritmu si definujeme 3 dvojrozmerné polia A, G, R s rozmermi vstupného obrázka, pričom pole A je na začiatku tvorerné nulami. viacrozmerné polia D, S slúžiace ako zásobníky, do ktorých budeme zaznamenávať topologické zmeny (delenie, spájanie).

Postup je nasledovný:

1. Prechádzame každým *i-tym* uzlom $\mathbf{r}_i^g$ krivky Γ^g, $i = 1, ..., n_g$, $g = 1, 2, ...$. Zakaždým zisťujeme jednotlivé zložky polohového vektora ako celočíselné hodnoty $\{k, l\} = (int)\mathbf{r}_i^g$ predstavujúce jeden pixel našej oblasti.

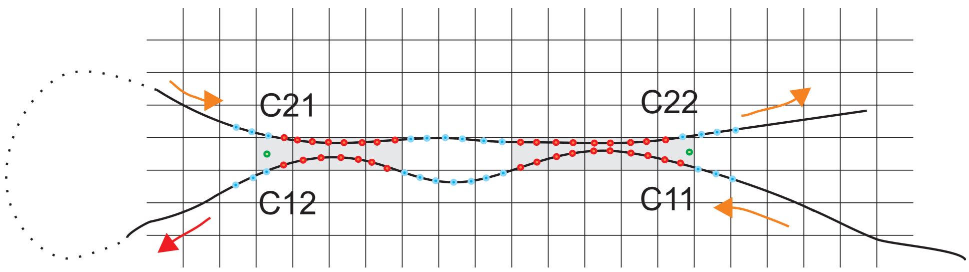
2. Testujeme, či $A[k][l] = 0$. Ak rovnosť platí, znamená to, že svoju polohu do daného pixelu ešte nezapísal žiaden uzlový bod. Potom pre daný bod $\mathbf{r}_i^g$ zaznamenáme $G[k][l] = g$ a $R[k][l] = i$. Hodnotu $A[k][l]$ nastavíme na 1.

3. Ak pre $\{k, l\} = (int)\mathbf{r}_i^g$ platí $A[k][l] = 1$, znamená to, že do daného pixelu už zapísal svoju polohu niektorý z predchádzajúcich uzlových bodov. Informácie o ňom už máme uložené pre tieto konkrétne k a l v poliach G a R. Následne pre aktuálny uzlový bod $\mathbf{r}_i^g$ zisťujeme, či $g = G[k][l]$. Ak to platí, vieme, že už zaznamenaný a aktuálny uzlový bod sa nachádzajú na tej istej krivke. Ak pomocou nerovnosti $(i - R[k][l]) > 3$ zistíme, že nie sú susedia, v tomto pixeli nastáva delenie. Následne informácie o krivke a uzlových bodoch zapíšeme do zásobníka pre delenie D ($D[][0] = g$, $D[][1] = R[k][l]$, $D[][2] = i$), pričom prvý index poľa iterujeme s narastajúcim počtom delení. Ak ide o susedov, nevykonáme žiadnu operáciu, čím dosiahneme že spomedzi susedných bodov sa do polí G a R zapíše ten s najmenším poradovým číslom i. Ak však rovnosť $g = G[k][l]$ neplatí, ide o dva uzlové body nachádzajúce sa na rozličných krivkách a teda nastáva v tomto pixeli spájanie. Podobne ako pri delení, potrebné informácie zaznamenáme do zásobníka pre spájanie S ($S[][0] = G[k][l]$, $S[][1] = R[k][l]$, $S[][2] = g$, $S[][3] = i$). V oboch prípadoch (delenie, spájanie) potom nastavíme $A[k][l] = 2$, aby sa už žiadna iná topologická zmena s inými (susednými, nachádzajucimi sa v rovnakom pixeli) uzlovými bodmi v tomto pixeli už nezaznamenala.

Takýmto spôsobom si namapujeme do zásobníkov D a S všetky pixely kde sa vyskytnú zmeny.

Riešnie zozbieraných topologických zmien charakteristických pre delenia a spájanie kriviek

Krivka sa môže spájať a deliť nielen v dvoch, ale aj vo viacerých bodoch naraz, ktoré sú pomerne blízko seba. Označme si takúto časť pod pojmom "kontakt". Či už pre spájanie alebo delenie, je potrebné vymedziť, kde sa kontakt začína a kde končí (Obr. 10).



Obr. 10:

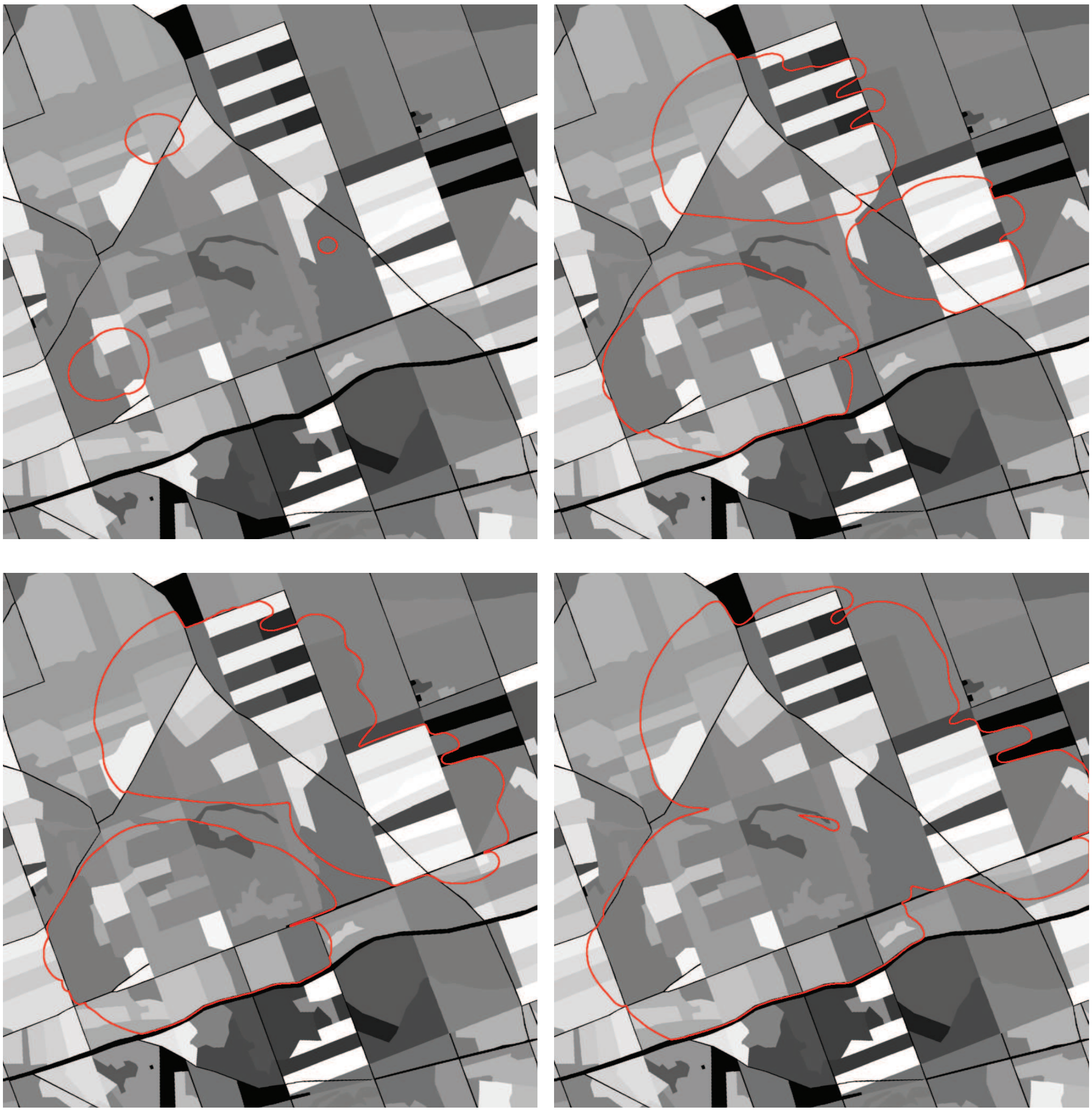
Keďže uzlové body prechádzame po krivke postupne, prvú dvojica tohoto kontaktu v zásobníku budú tvoriť uzly s poradovým číslom C12 a C21. Postupne prechádzame zaznamenanými deleniami, či spojmi tak, aby sme sa dostali na koniec jedného kontaktu a nastavili hodnoty C11 a C22.

Ak sa chceme vytvoriť kontakt pre delenie, na začiatku nastavíme $g = D[0][0]$, $C12 = D[0][1]$, $C21 = D[0][2]$. Potom prechádzame poľom D dovtedy kým nebudú pre $i = 1, 2, ...$ súčasne platiť vzťahy $g = D[i][0]$, $D[i][1] < C12$, $((D[i-1][1] - D[i][1]) + (D[i][2] - D[i-1][2])) < 20$ (malé útržky krivky medzi detekovanými deleniami zanedbávame). Pri poslednom i, pre ktoré budú predchádzajúce vzťahy platiť, nastavíme hodnoty$C11 = D[i][1]$, $C22 = D[i][2]$. Následne je potrebné body $C12$ a $C22$ inkrementovať, pokým sa stále budú nachádzať vo svojich pixeloch. Pre body $C11$, $C21$ to nie je kvôli implementácii detekcii zmien potrebné. Takto maximalizujeme veľkosť kontaktu.

Veľmi podobným spôsobom nastavujeme okraje kontaktu pri riešení spájania kriviek. Nastavíme $g1 = S[0][0]$, $C12 = S[0][1]$, $g2 = S[0][2]$,$C21 = S[0][3]$. Prechádzame poľom S pokým platí $g1 = S[i][0]$,$g2 = S[i][2], S[i][1] < C12$, $((S[i-1][1] - S[i][1]) + (S[i][3] - S[i-1][3])) < 20$.

Po špecifikovaní jedného kontaktu, už len potrebné úseky, rozdelené týmto kontaktom, pospájame správnym spôsobom, pričom všetky body kontaktu zaniknú. Polia A, G, R, D, S nulujeme, a ak krivky iterujeme od nuly nastavíme $D[][0] = S[][0] = S[][2] = -1$. Celý cyklus opakujeme, pokým neeliminujeme všetky kontakty.

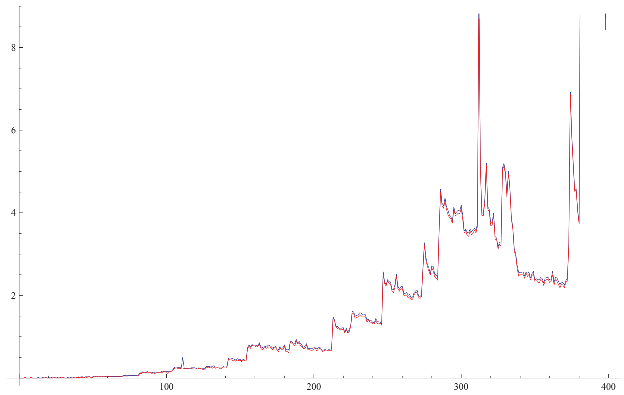
Funkčnosť algoritmu demonštrujeme na nasledovných obrázkoch.



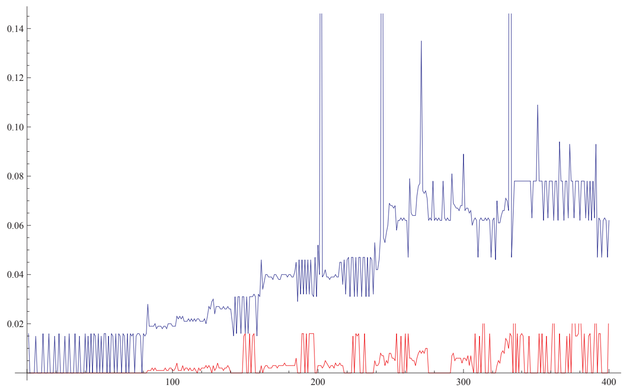
Obr. 11: Šírenie viacerých lesných požiarov v nehomogénnom prostredí. 1000, 3000, 3500 a 4000 časových krokov.

Výsledky - porovnanie algoritmov na riešenie topologických zmien

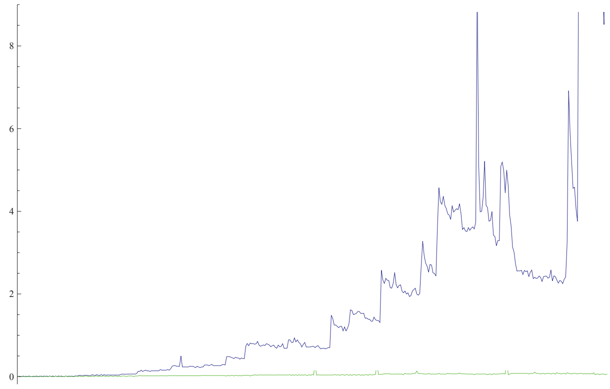
Výsledky si dovolíme prezentovať na nasledujúcich obrázkoch. Simulovali sme vývoj kriviek z viacerých miest po dobu 4000 časových krokov, s použitím starého aj nového algoritmu na riešenie topologických zmien. Každý bod grafu predstavuje súčet uplynutého času počas celého časového kroku, alebo počas riešenia topologických zmien, za vykonania 10-tich časových krokov.



Obr. 12: Použitie starého algoritmu. modrá - celkový čas, červená - čas využitý pre riešenie topologických zmien.



Obr. 13: Použitie nového algoritmu. modrá - celkový čas, červená - čas využitý pre riešenie topologických zmien.



Obr. 14: Porovnanie časovej náročnosti starého (modrá) a nového (zelená) algoritmu.

Z obrázku (12) je zrejmé že časová náročnosť starého algoritmu markantne narastá s rastúcim počtom uzlových bodov a kriviek, pričom samotný algoritmus predstavuje väčšinu tohoto času. Na druhej strane nový algoritmus ovplyvňuje celkový čas len malým podielom. Porovnaním starého aj nového algoritmu (Obr. 14) môžme jednoznačne určiť, že nový algorimus je mnohonásobne rýchlejší, než ten pôvodný.

Záver

V našej práci sme sa snažili vyvinúť efektívny algoritmus pre riešenie topologických zmien charakteristických pre Lagrangeovský model simulácie šírenia lesných požiarov. Podarilo sa nám podstatne znížiť časovú náročnosť a vytvorili sme efektívny systém umožňujúci simulovať šírenie lesných požiarov.

Literatúra

[1] K. Mikula, M. Ohlberger, *Inflow-Implicit/Outflow-Explicit Scheme for Solving Advec-tion Equations*, Accepted for the proceedings of FVCA6 Conference, Prague, June 6-10, 2011, Springer-Verlag, Berlin, 2011

[2] K. Mikula, D. Ševčovič, *Solution of nonlinearly curvature driven evolution of plane curves*, Applied Numerical Mathematics, 31 (1999), pp. 191-207.

[3] K. Mikula, D. Ševčovič, *Evolution of plane curves driven by a nonlinear function of curvature and anisotropy*, SIAM J. Appl. Math., 61 (2001), pp. 1473-1501.

[4] K.Mikula, D.Ševčovič, *A direct method for solving an anisotropic mean curvature flow of planar curve with an external force*, Mathematical Methods in Applied Sciences, Vol. 27, No. 13 (2004) pp. 1545-1565

[5] K. Mikula, D. Ševčovič, M.Balažovjech, *A simple, fast and stabilized flowing finite volume method for solving general curve evolution equations*, Communications in Computational Physics, Vol. 7, No. 1 (2010), pp. 195-211.

[6] P. Paus M. Beneš, *Algorithm for topological changes of parametrically described curves*, Proceedings of ALGORITMY(2009), pp. 176-184.

[7] Richards, GD. 1995. *A general mathematical framework for modeling two-dimensional wildland fire spread,* Int. J. Wildl. Fire. 5(2): pp 63-72.

[8] J. Urbán, *Modelovanie lesných požiarov pomocou evolúcie rovinných kriviek,* ŠVK 2011 STU Bratislava , s 8-11.