EDÍCIA SKRÍPT

ZBIERKA RIEŠENÝCH ÚLOH Z MATEMATIKY 2 PRE ODBOR GaK

Zuzana Minarechová
Marek Macák

STU SvF
SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
STAVEBNÁ FAKULTA

SPEKTRUM STU

ZBIERKA RIEŠENÝCH ÚLOH Z MATEMATIKY 2 PRE ODBOR GaK

Zuzana Minarechová
Marek Macák

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA V BRATISLAVE
2019

Všetky práva vyhradené. Nijaká časť textu nesmie byť použitá na ďalšie šírenie akoukoľvek formou bez predchádzajúceho súhlasu autorov alebo vydavateľstva.

© Ing. Zuzana Minarechová, PhD., Ing. Marek Macák, PhD.

Recenzenti: RNDr. Agneša Dallosová
Ing. Michal Šprlák, PhD.

ISBN 978-80-227-4967-1

Ing. Zuzana Minarechová, PhD., Ing. Marek Macák, PhD.

ZBIERKA RIEŠENÝCH ÚLOH Z MATEMATIKY 2 PRE ODBOR GaK

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve SPEKTRUM STU, Bratislava, Vazovova 5, v roku 2019.

Edícia skrípt

Rozsah 221 strán, 108 obrázkov, 8,385 AH, 8,717 VH, 1. vydanie,
edičné číslo 6031, vydané v elektronickej forme;
umiestnenie na http://www.svf.stuba.sk

Schválila Edičná rada Stavebnej fakulty STU v Bratislave.

85 – 228 – 2019

ISBN 978-80-227-4967-1

Obsah

Úvod

Milí čitatelia,

táto učebná pomôcka je napísaná ako doplňujúci učebný text k predmetu Matematika 2 pre študentov prvého ročníka bakalárskeho štúdia odboru Geodézia a Kartografia, Stavebnej Fakulty STU v Bratislave. Zbierka obsahuje štyri nosné kapitoly: Určitý integrál, Diferenciálny počet funkcií viac premenných, Diferenciálna geometria kriviek a plôch, Sférická trigonometria. V úvode každej kapitoly sú stručne vysvetlené pojmy a základné vzťahy potrebné na vyriešenie príslušných úloh. Potom sú podrobne vyriešené viaceré vzorové príklady. V závere každej kapitoly sú uvedené úlohy na samostatnú prácu spolu s výsledkami. Zbierka je písaná formou, ktorá by mohla byť prístupná študentom. Snažili sme sa o zrozumiteľnosť a aj keď by si jednotlivé kapitoly zaslúžili obsiahlejší teoretický úvod, táto učebná pomôcka je koncipovaná ako zbierka úloh, preto neobsahuje definície všetkých pojmov. Na konci zbierky je uvedená literatúra, kde si čitateľ môže hlbšie naštudovať spomínanú problematiku.

Na záver by sme sa chceli poďakovať Doc. Ing. Tomášovi Bacigálovi, PhD., RNDr. Agneše Dallosovej, Prof. RNDr. Magdaléne Komorníkovej, PhD. a Ing. Michalovi Šprlákovi, PhD. za starostlivé prečítanie celého textu a pripomienky, ktoré prispeli ku skvalitneniu tejto zbierky. Prajeme všetkým čitateľom príjemné (po)čítanie.

V Bratislave 1. 12. 2018

Marek Macák a Zuzana Minarechová

Kapitola 1

Určitý integrál

1.1 Pojem a metódy počítania určitého integrálu

Nech f je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b\rangle$ a F je funkcia primitívna k f v intervale $\langle a, b\rangle$. Určitý integrál funkcie f v intervale $\langle a, b\rangle$ je číslo $F(b) - F(a)$. Tento fakt zapisujeme

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

a nazývame **Newtonova-Leibnizova formula**.

Príklad 1 Vypočítajte $\int\limits_1^2 (3x^2 - 5x + 1)\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Výpočet môžeme uskutočniť priamo pomocou integračných vzorcov.

$$\begin{aligned}\int\limits_1^2 (3x^2 - 5x + 1)\,\mathrm{d}x &= \left[3\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 = \left(2^3 - 5\frac{2^2}{2} + 2\right) - \left(1^3 - 5\frac{1^2}{2} + 1\right) = \\ &= (8 - 10 + 2) - \left(1 - 5\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Príklad 2 Vypočítajte $\int\limits_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

Riešenie: Výraz v integráli upravíme do tvaru mocninovej funkcie a pri integrovaní aplikujeme integračný vzorec $\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$.

$$\begin{aligned}\int\limits_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x &= \int\limits_1^4 \left(x^{1/2} - x^{-1/2}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - 2x^{1/2}\right]_1^4 = \left(\frac{2}{3} \cdot 4^{3/2} - 2 \cdot 4^{1/2}\right) - \\ &- \left(\frac{2}{3} \cdot 1^{3/2} - 2 \cdot 1^{1/2}\right) = \left(\frac{16}{3} - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Príklad 3 Vypočítajte $\int\limits_0^\pi |\cos x| \, \mathrm{d}x$.

Riešenie: V integráli vystupuje funkcia absolútnej hodnoty a keďže funkcia $\cos x$ mení v bode $\frac{\pi}{2}$ intervalu integrácie znamienko, zadaný integrál vypočítame ako súčet dvoch integrálov.

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\pi |\cos x| \, \mathrm{d}x &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) \, \mathrm{d}x = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\ &= \left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) - \left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2.\end{aligned}$$

Príklad 4 Vypočítajte $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(2x)}{1+\cos(2x)} \, \mathrm{d}x$.

Riešenie: Čitateľa zlomku najskôr upravíme pomocou vzťahu $\sin^2(2x) + \cos^2(2x) = 1$ tak, že vyjadríme $\sin^2(2x) = 1 - \cos^2(2x)$. Potom ho rozložíme na súčin, vykrátime s menovateľom a ďalej integrujeme.

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(2x)}{1+\cos(2x)} \, \mathrm{d}x &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2(2x)}{1+\cos(2x)} \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-\cos(2x)) \cdot (1+\cos(2x))}{1+\cos(2x)} \, \mathrm{d}x = \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(2x)) \, \mathrm{d}x = \left[x - \frac{\sin(2x)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Substitučná metóda pre určitý integrál:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \left\{\begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\ t_1 = \varphi(a) \\ t_2 = \varphi(b) \end{array}\right\} = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt.$$

Tento vzťah platí, ak φ' je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b\rangle$ a f je spojitá funkcia v obore hodnôt funkcie φ.

Príklad 5 Vypočítajte $\int_0^6 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Integrál budeme riešiť substitučnou metódou. Za t zvolíme $t = 1 + x^2$, z čoho získame $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$. Keďže dolné ohraničenie $a = 0$, potom $t_1 = 1+a^2 = 1+0^2 = 1$. Podobne pre horné ohraničenie $b = 6$ získame $t_2 = 1 + b^2 = 1 + 6^2 = 37$.

$$\begin{aligned} \int_0^6 2x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left\{\begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ \mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x \\ t_1 = 1 \\ t_2 = 37 \end{array}\right\} = \int_1^{37} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_1^{37} = \frac{2}{3}\left[t\sqrt{t}\right]_1^{37} = \\ &= \frac{2}{3}\left(37\sqrt{37} - 1\right). \end{aligned}$$

Príklad 6 Vypočítajte $\int_1^9 \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Tento integrál budeme opäť riešiť substitučnou metódou. Za t zvolíme $t = \sqrt{x}$, z čoho dostávame $\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. Pre dolné ohraničenie $a = 1$ dostávame $t_1 = \sqrt{a} = \sqrt{1} = 1$, pre horné ohraničenie $b = 9$ dostávame $t_2 = \sqrt{b} = \sqrt{9} = 3$.

$$\begin{aligned} \int_1^9 \frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^9 2^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{array}\right\} = \int_1^3 2^t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2^t}{\ln 2}\right]_1^3 = \\ &= \left(\frac{2^3}{\ln 2}\right) - \left(\frac{2^1}{\ln 2}\right) = \frac{6}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Príklad 7 Substitučnou metódou vypočítajte $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan{}^3 x \, \mathrm{d}x$.

Riešenie: Funkciu $\tan x$ prepíšeme do tvaru $\frac{\sin x}{\cos x}$ a výraz v integráli upravíme

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cdot \sin^2 x}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cdot (1 - \cos^2 x)}{\cos^3 x} \, \mathrm{d}x.$$

Použijeme substitúciu $t = \cos x$. Vyjadríme $\mathrm{d}t$, t. j. $\mathrm{d}t = -\sin x \, \mathrm{d}x$, pre dolné ohraničenie a dostaneme $t_1 = \cos a = \cos 0 = 1$, pre horné ohraničenie b dostaneme $t_2 = \cos b = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Po dosadení substitúcie

$$\begin{aligned} \int\limits_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} -\frac{1 - t^2}{t^3} \, \mathrm{d}t &= \int\limits_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(-\frac{1}{t^3} + \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2t^2} + \ln t \right]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \left(1 + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) - \left(\frac{1}{2} + \ln 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right). \end{aligned}$$

Metóda per partes (integrovanie po častiach) pre určitý integrál:

Nech funkcie u a v majú spojité derivácie v intervale $\langle a, b \rangle$. Potom platí

$$\int\limits_a^b u^{'}(x) v(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int\limits_a^b u(x) v^{'}(x) \, dx.$$

Príklad 8 Vypočítajte určitý integrál $\int\limits_{-1}^{1} (x + 1)e^x \, \mathrm{d}x$.

Riešenie: Integrál budeme riešiť metódou per partes. Za funkciu v zvolíme $x + 1$ a za $u' = e^x$.

$$\begin{aligned} \int\limits_{-1}^{1} (x + 1)e^x \, \mathrm{d}x &= \left\{ \begin{array}{ll} u' = e^x & u = e^x \\ v = x + 1 & v' = 1 \end{array} \right\} = [(x + 1)e^x]_{-1}^1 - \int\limits_{-1}^{1} e^x .1 \, \mathrm{d}x = \\ &= [(x + 1)e^x]_{-1}^1 - [e^x]_{-1}^1 = 2e^1 - e^1 + e^{-1} = e + \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Príklad 9 Vypočítajte určitý integrál $\int\limits_1^2 x^2 \ln x \, \mathrm{d}x$.

Riešenie: Tento integrál budeme riešiť metódou per partes. Za funkciu v zvolíme $\ln x$ a za $u' = x^2$.

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2 \ln x \,\mathrm{d}x &= \left\{\begin{array}{ll} u' = x^2 & u = \frac{x^3}{3} \\ v = \ln x & v' = \frac{1}{x}\end{array}\right\} = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^2 = \\ &= \frac{2^3}{3}\ln 2 - \left(\frac{2^3}{9} - \frac{1^3}{9}\right) = \frac{24\ln 2 - 7}{9}.\end{aligned}$$

Príklad 10 Vypočítajte určitý integrál $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin x \,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Metódu per partes môžeme použiť aj vtedy, ak integrovaná funkcia nie je súčinom dvoch funkcií. Vtedy za druhý činiteľ považujeme konštantu 1.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \arcsin x \,\mathrm{d}x &= \left\{\begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \arcsin x & v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\end{array}\right\} = [x\arcsin x]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Teraz zavedieme substitúciu $t = 1 - x^2$ a pokračujeme ďalej vo výpočte.

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ \mathrm{d}t = -2x\,\mathrm{d}x \implies -x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2} \\ t_1 = 1 - 0^2 = 1 \\ t_2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\end{array}\right\} &= \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{1}{2}\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \left[\sqrt{t}\right]_1^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}(\pi+4)}{8} - 1.\end{aligned}$$

Príklad 11 Metódou per partes vypočítajte určitý integrál $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2+1)\sin x \,\mathrm{d}x$.

Riešenie: V tomto prípade použijeme metódu per partes dvakrát, pričom za v postupne zvolíme x^2+1, a v druhom kroku $v=2x$.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2+1)\sin x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u'=\sin x & u=-\cos x \\ v=x^2+1 & v'=2x \end{array}\right\} = \\
=\ & \left[-(x^2+1)\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\ \mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u'=\cos x & u=\sin x \\ v=x & v'=1 \end{array}\right\} = \\
=\ & \left[-(x^2+1)\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\mathrm{d}x = \\
=\ & \left[-(x^2+1)\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
=\ & (0+1) + 2\left(\frac{\pi}{2}-0\right) + 2\,(0-1) = \pi - 1.
\end{aligned}
$$

Príklad 12 Metódou per partes vypočítajte určitý integrál $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: V tomto príklade použijeme metódu per partes dvakrát, čo nám umožní vyjadriť hľadaný integrál pomocou neho samého.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u'=\sin x & u=-\cos x \\ v=e^{-x} & v'=-e^{-x} \end{array}\right\} = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\cos x = \\
=\ & \left\{\begin{array}{ll} u'=\cos x & u=\sin x \\ v=e^{-x} & v'=-e^{-x} \end{array}\right\} = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(\left[e^{-x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x\right) = \\
=\ & \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[e^{-x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Ak označíme hľadaný integrál symbolom $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$, tak sme dostali rovnicu

$$
I = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[e^{-x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I,
$$

z ktorej vypočítame

$$
I \;=\; -\frac{1}{2}\left[e^{-x}\cos x + e^{-x}\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2} + e^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right] = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}.
$$

1.1.1 Nevlastné integrály

- Ak je interval, v ktorom integrujeme, neohraničený, hovoríme o **nevlastnom integráli prvého druhu**. Ide o integrály

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx, \qquad \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

- Ak je integrovaná funkcia v intervale integrácie $\langle a, b\rangle$ neohraničená (a teda nespojitá), hovoríme o **nevlastnom integráli druhého druhu**.

Príklad 13 Vypočítajte nevlastný integrál $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Pretože daný integrál je nevlastný integrál prvého druhu, budeme postupovať tak, že hranicu ∞ nahradíme konečnou hodnotou b, pre ktorú platí $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{3}^{b} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\int_{3}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_{3}^{b} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_3^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \left(0 + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

Príklad 14 Vypočítajte nevlastný integrál $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Opäť budeme postupovať tak, že hranicu ∞ nahradíme konečnou hodnotou b, pre ktorú platí $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ a následne použijeme substitučnú metódu

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} t = \arctan x \\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x \\ t_1 = \arctan(0) = 0 \\ t_2 = \lim_{b\to\infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} =$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} - 0 = \frac{\pi^2}{8}.$$

Príklad 15 Vypočítajte nevlastný integrál $\int\limits_2^\infty \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie:

$$\begin{aligned}
\int\limits_2^\infty \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int\limits_2^b \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{l} t=\ln x \\ \mathrm{d}t=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ t_1=\ln 2 \\ t_2=\ln b \end{array}\right\} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_{\ln 2}^{\ln b} t\,\mathrm{d}t = \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{\ln 2}^{\ln b} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{\ln^2 b}{2}-\frac{\ln^2 2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Hľadaná limita je nevlastná, preto daný integrál diverguje.

Príklad 16 Vypočítajte nevlastný integrál $\int\limits_{-\infty}^0 4xe^{4x}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Aj tento integrál je nevlastný integrál prvého druhu, preto budeme postupovať rovnako ako v predchádzajúcich prípadoch. Hranicu $-\infty$ nahradíme konečnou hodnotou a, pre ktorú platí $\int\limits_{-\infty}^0 4xe^{4x}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 4xe^{4x}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^0 4xe^{4x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 4xe^{4x}\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{array}{ll} u'=e^{4x} & u=\frac{e^{4x}}{4} \\ v=4x & v'=4 \end{array}\right\} = \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left(\left[\frac{e^{4x}}{4}4x\right]_a^0 - \int\limits_a^0 \frac{e^{4x}}{4}4\,\mathrm{d}x\right) = \\
&= \lim_{a\to-\infty}\left[xe^{4x}\right]_a^0 - \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0 e^{4x}\,\mathrm{d}x = \\
&= (0-0) - \lim_{a\to-\infty}\left[\frac{e^{4x}}{4}\right]_a^0 = -\left(\frac{1}{4}-0\right) = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Príklad 17 Vypočítajte nevlastný integrál $\int\limits_{-2}^2 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Riešenie: Na prvý pohľad sa môže zdať, že tento integrál možno riešiť klasickým spôsobom. Pri bližšom skúmaní si ale uvedomíme, že funkcia $\frac{1}{1+x}$ nie je definovaná v bode $x=-1$, ktorý patrí do intervalu integrácie. Tento bod nazývame kritickým bodom, a preto aj daný integrál je nevlastný integrál druhého druhu a musíme ho riešiť nasledujúcim spôsobom.

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to -1^-} \int_{-2}^{b} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x + \lim_{a\to -1^+} \int_{a}^{2} \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{b\to -1^-} \left[\ln|1+x|\right]_{-2}^{b} + \lim_{a\to -1^+} \left[\ln|1+x|\right]_{a}^{2} = \\
&= \left(\lim_{b\to -1^-} \ln|1+b| - \ln 1\right) + \left(\ln 3 - \lim_{a\to -1^+} \ln|1+a|\right).
\end{aligned}$$

Obe limity sú nevlastné, preto daný integrál diverguje.

1.2 Použitie určitého integrálu v geometrii

1.2.1 Obsah rovinnej oblasti

- **Obsah rovinnej oblasti ohraničenej grafom funkcie** $f \geq 0$ (priamkami $x = a$, $x = b$) a osou o_x v intervale $\langle a, b\rangle$ vypočítame pomocou integrálu

$$P = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- **Obsah oblasti ohraničenej grafmi funkcií** $f \geq g$ (a priamkami $x = a$, $x = b$) v intervale $\langle a, b\rangle$ vypočítame pomocou integrálu

$$P = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

- Ak je **krivka daná parametrickými rovnicami**

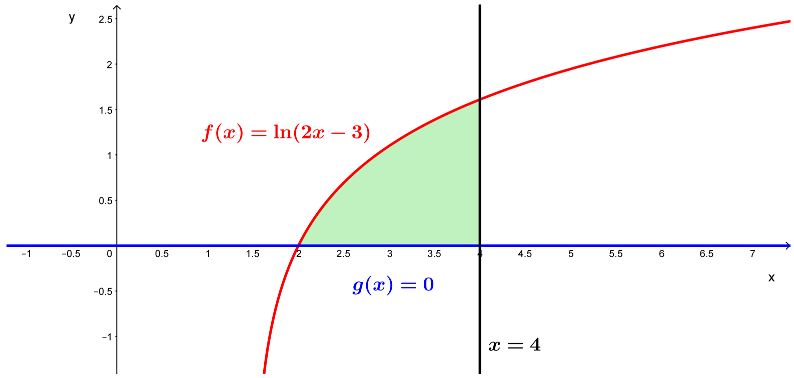
$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \qquad t \in \langle \alpha, \beta\rangle,$$

tak **obsah oblasti ohraničenej krivkou** vypočítame pomocou integrálu

$$P = \left| \int\limits_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \right|.$$

Príklad 18 Nájdite obsah oblasti ohraničenej grafom funkcie $f(x) = \ln(2x - 3)$, osou o_x a priamkou $x = 4$.

Riešenie: Najskôr nájdeme x-ovú súradnicu priesečníka krivky $f(x)$ s osou o_x. Porovnaním y-ových súradníc bodov obidvoch kriviek dostávame rovnicu $\ln(2x - 3) = 0$, resp. $\ln(2x - 3) = \ln 1$, z čoho dostávame $2x - 3 = 1$, a teda dolné ohraničenie $a = 2$. Horné ohraničenie b je dané priamkou $x = 4$, t. j. $b = 4$ (Obr. 1.2.1). Dosadíme do vzťahu $P = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a vypočítame.

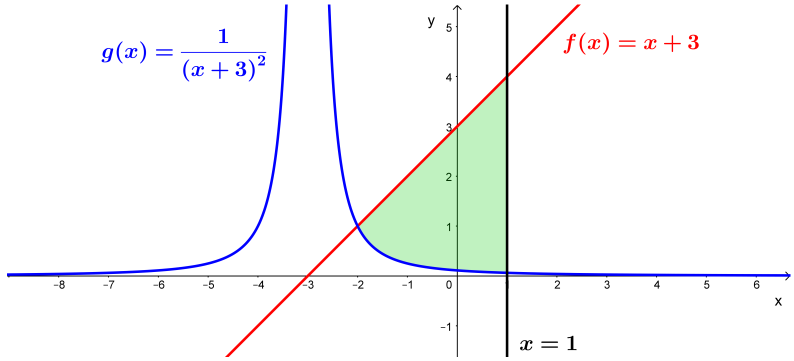


Obr. 1.2.1. Oblasť ohraničená grafom funkcie $f(x) = \ln(2x-3)$, osou o_x a priamkou $x = 4$.

$$
\begin{aligned}
P &= \int_2^4 \ln(2x-3)\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \ln(2x-3) & v' = \frac{2}{2x-3} \end{array} \right\} = \\
&= [x\ln(2x-3)]_2^4 - \int_2^4 \frac{2x}{2x-3}\,\mathrm{d}x = [x\ln(2x-3)]_2^4 - \int_2^4 \left(1 + \frac{3}{2x-3}\right)\mathrm{d}x = \\
&= [x\ln(2x-3)]_2^4 - [x]_2^4 - \frac{3}{2}\int_2^4 \frac{1}{x-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \\
&= [x\ln(2x-3)]_2^4 - [x]_2^4 - \frac{3}{2}\left[\ln\left|x - \frac{3}{2}\right|\right]_2^4 = \\
&= (4\ln 5 - 0) - (4-2) - \frac{3}{2}\left(\ln\left(\frac{5}{2}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \\
&= 4\ln 5 - 2 - \frac{3}{2}\ln 5 = \frac{5}{2}\ln 5 - 2.
\end{aligned}
$$

Príklad 19 Nájdite obsah oblasti ohraničenej grafmi funkcií $f(x) = x+3$, $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ a priamkou $x = 1$.

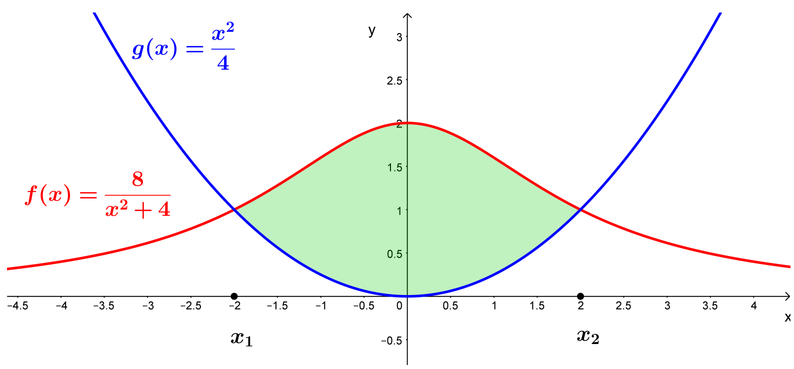
Riešenie: Najskôr nájdeme x-ovú súradnicu priesečníka priamky $f(x) = x+3$ s hyperbolou $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$, (Obr. 1.2.2). Porovnaním y-ových súradníc bodov obidvoch kriviek získame rovnicu $x+3 = \frac{1}{(x+3)^2}$, ktorá má jediné riešenie $x = -2$. Horné ohraničenie b je dané priamkou $x = 1$, t. j. $b = 1$. Dosadíme do vzťahu $P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ a vypočítame.



Obr. 1.2.2. Oblasť ohraničená grafmi funkcií $f(x) = x + 3$, $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ a priamkou $x = 1$.

$$\begin{aligned} P &= \int_{-2}^{1} \left(x + 3 - \frac{1}{(x+3)^3} \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2(x+3)^2} \right]_{-2}^{1} = \\ &= \left(\frac{1^2}{2} + 3 + \frac{1}{2(4)^2} \right) - \left(\frac{(-2)^2}{2} - 6 + \frac{1}{2(1)^2} \right) = \frac{225}{32}. \end{aligned}$$

Príklad 20 Nájdite obsah oblasti ohraničenej parabolou $x^2 = 4y$ a krivkou $y = \frac{8}{x^2+4}$.



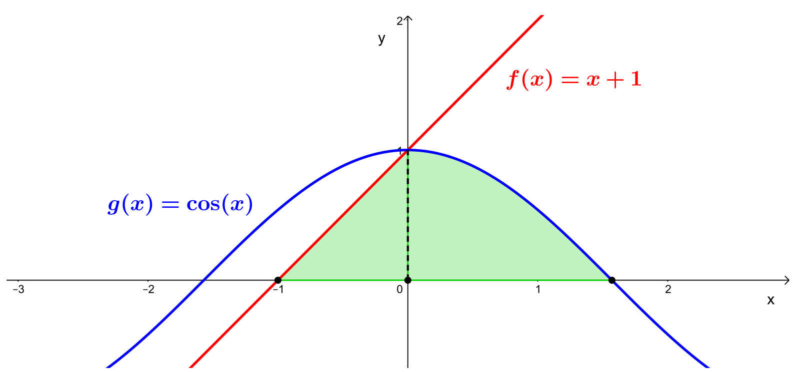
Obr. 1.2.3. Oblasť ohraničená parabolou $x^2 = 4y$ a krivkou $y = \frac{8}{x^2+4}$.

Riešenie: Najskôr nájdeme x-ové súradnice priesečníkov oboch kriviek, (Obr. 1.2.3). Porovnaním y-ových súradníc bodov obidvoch kriviek dostávame rovnicu $\frac{x^2}{4} = \frac{8}{x^2+4}$, ktorá po úprave vedie k rovnici $x^4 + 4x^2 - 32 = 0$. Túto rovnicu potom substitúciou $t = x^2$ prevedieme na kvadratickú, $t^2 + 4t - 32 = 0$, ktorú si upravíme na tvar $(t + 8)(t - 4) = 0$. Dostávame dva korene $t_1 = -8$ a $t_2 = 4$. Keď sa vrátime spätne k substitúcii $t = x^2$, dostaneme dve reálne riešenia $x_1 = -2$ a $x_2 = 2$. Pri výpočte využijeme to, že hľadaná plocha je symetrická podľa osi o_y, preto interval integrácie bude $\langle 0, 2\rangle$ a plochu vynásobíme 2.

$$\begin{aligned} P &= 2\int_0^2 \left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{x^2}{4}\right) \mathrm{d}x = 16\int_0^2 \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x - \int_0^2 \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \\ &= 8\left[\arctan\frac{x}{2}\right]_0^2 - \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 8(\arctan(1) - \arctan(0)) - \left(\frac{2^3}{6} - 0\right) = \\ &= 8\frac{\pi}{4} - \frac{8}{6} = 2\pi - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Príklad 21 Vypočítajte obsah oblasti ohraničenej priamkou $y = x+1$, grafom funkcie $y = \cos x$ a osou o_x v intervale $\left\langle -1, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Riešenie: Priamka $y = x+1$ pretína o_x v bode $[-1, 0]$. Graf funkcie $y = \cos x$ pretne os o_x v bode $\left[\frac{\pi}{2}, 0\right]$, (Obr. 1.2.4). Priamka a graf sa pritom pretínajú v bode $[0, 1]$. To znamená, že oblasť, ktorej obsah počítame je v intervale $\langle -1, 0\rangle$ zhora ohraničená grafom priamky $y = x + 1$ a v intervale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ grafom funkcie $y = \cos x$.

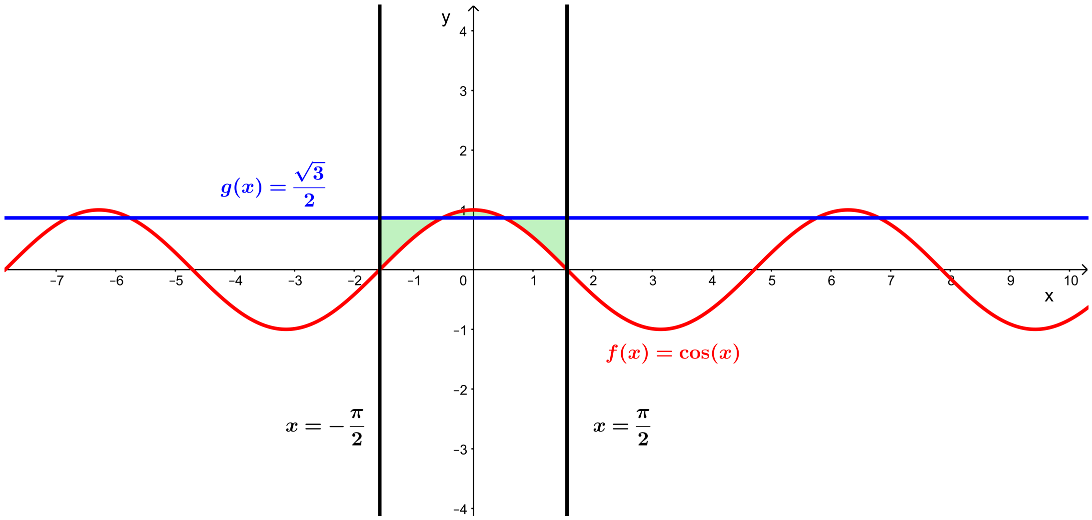


Obr. 1.2.4. Oblasť ohraničená priamkou $y = x+1$, grafom funkcie $y = \cos x$ a osou o_x.

Hľadaný obsah plochy potom počítame ako súčet dvoch integrálov

$$\begin{aligned} P &= \int_{-1}^0 (x+1)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^0 + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \left(0 - \frac{1}{2} + 1\right) + \left(\sin\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Príklad 22 Vypočítajte obsah oblasti ohraničenej kosínusoidou $f(x) = \cos x$ a priamkou $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ v intervale $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.



Obr. 1.2.5. Oblasť ohraničená kosínusoidou $f(x) = \cos x$ a priamkami $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

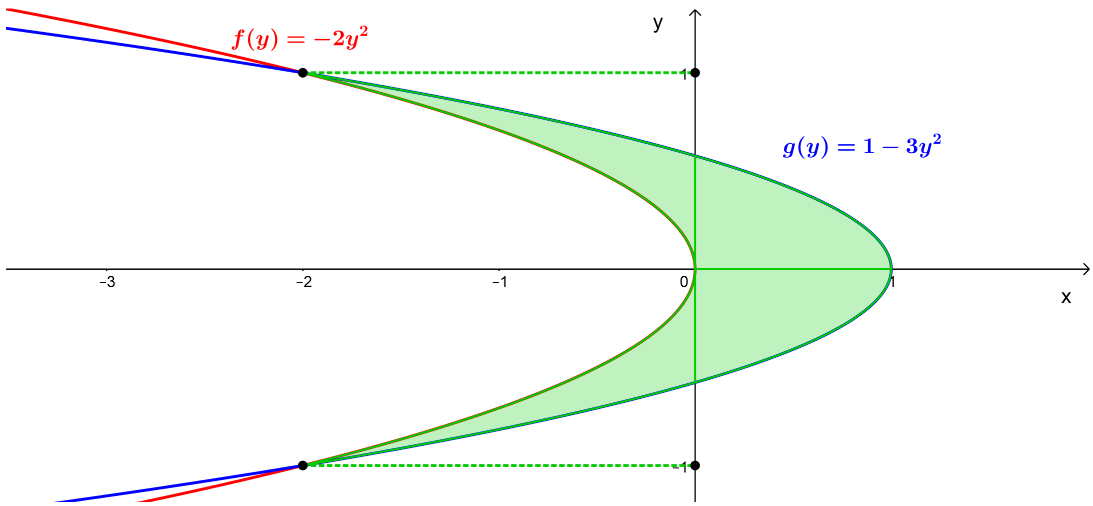
Riešenie: V intervale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ graf funkcie $f(x) = \cos x$ pretne priamku $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ v bodoch $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ a $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. Z Obr. 1.2.5 je zrejmé, že hľadaná plocha je symetrická podľa osi o_y, preto ju budeme počítať ako súčet dvoch integrálov a vynásobíme 2.

$$\begin{aligned} P &= 2\left(\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos x\right) \mathrm{d}x\right) = \\ &= 2\left(\left[\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[\frac{\sqrt{3}}{2}x - \sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \\ &= 2\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{6}\right) - 0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{2} - 1\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}. \end{aligned}$$

Príklad 23 Vypočítajte obsah oblasti ohraničenej dvojicou parabol $x = -2y^2$ a $x = 1 - 3y^2$.

Riešenie: V rovniciach obidvoch parabol je súradnica x funkciou súradnice y. Obidve paraboly sa pretínajú v bodoch $[-2, -1]$ a $[-2, 1]$ a ich osi sú rovnobežné s osou o_x. Nezávislá premenná y je ohraničená v intervale $\langle -1, 1 \rangle$. Opäť využijeme to, že plocha je symetrická (Obr. 1.2.6), tentokrát podľa o_x.

$$\begin{aligned} P &= 2\int_0^1 \left(\left(1-3y^2\right)-\left(-2y^2\right)\right)\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 \left(1-y^2\right)\,\mathrm{d}y = 2\left[y-\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \\ &= 2\left(1-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{4}{3}. \end{aligned}$$



Obr. 1.2.6. Oblasť ohraničená dvojicou parabol $x = -2y^2$ a $x = 1 - 3y^2$.

Rovnaký výsledok by sme dostali, aj ak by sme si z obidvoch rovníc vyjadrili y, ale pri porovnovaní obidvoch integrálov vidíme, že tento druhý výpočet

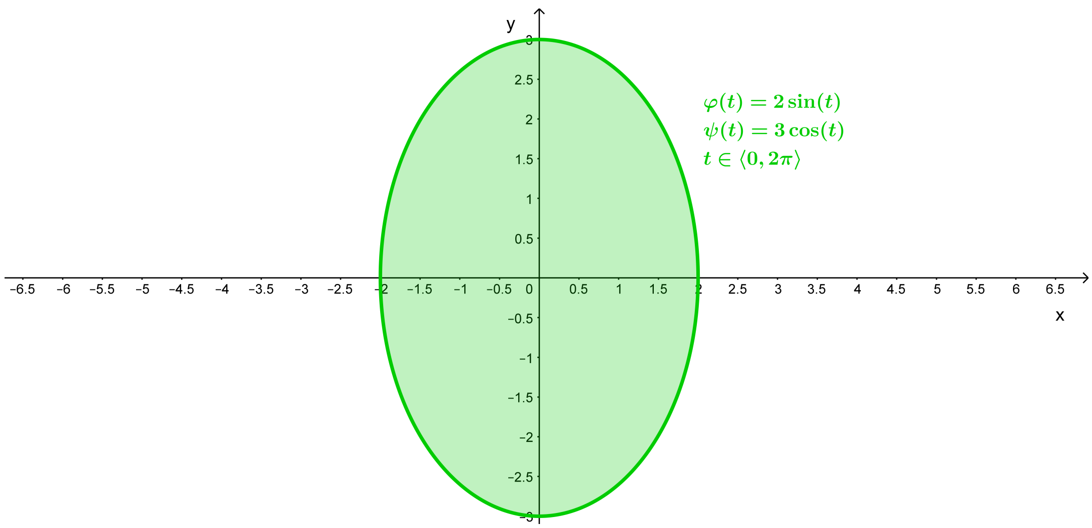
$$P = 2\left(\int_{-2}^{0}\left(\sqrt{\frac{1-x}{3}}-\sqrt{\frac{x}{-2}}\right)\,\mathrm{d}x+\int_0^1\sqrt{\frac{1-x}{3}}\,\mathrm{d}x\right)$$

by bol náročnejší.

Príklad 24 Vypočítajte obsah oblasti ohraničenej krivkou danou parametrickými rovnicami: $\varphi(t) = 2\sin t$, $\psi(t) = 3\cos t$, kde $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Riešenie: Začneme tým, že vypočítame deriváciu $\varphi'(t)$

$$\varphi'(t) = 2\cos t.$$



Obr. 1.2.7. Oblasť ohraničená krivkou danou parametrickými rovnicami:
$\varphi(t) = 2\sin t$, $\psi(t) = 3\cos t$, kde $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Keďže je výpočtová oblasť (Obr. 1.2.7) symetrická aj podľa osi o_x aj o_y, za hranice integrácie zvolíme interval $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ a vypočítanú plochu vynásobíme 4. Dosadíme do vzťahu na výpočet obsahu oblasti ohraničenej krivkou

$$\begin{aligned} P &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \right| = 4 \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \cdot 2\cos t\,\mathrm{d}t \right| = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \\ &= 12 \left[t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 12\frac{\pi}{2} = 6\pi. \end{aligned}$$

1.2.2 Objem rotačného telesa

- **Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej grafom funkcie** $f \geq 0$, (priamkami $x = a$, $x = b$) a osou o_x na intervale $\langle a, b\rangle$ **okolo osi** o_x vypočítame pomocou integrálu

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

- **Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií** $f \geq g \geq 0$ (a priamkami $x = a$, $x = b$) na intervale $\langle a, b\rangle$
  - **okolo osi** o_x vypočítame pomocou integrálu

$$V = \pi \int\limits_a^b (f^2(x) - g^2(x))\,\mathrm{d}x,$$

  - a všeobecne **okolo priamky** $y = \text{const}$ vypočítame ako

$$V = \pi \int\limits_a^b (f(x) - \text{const})^2 - (g(x) - \text{const})^2\,\mathrm{d}x.$$

- **Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou rovinnej oblasti ohraničenej grafmi funkcií** $f \geq 0$ (a priamkami $x = a$, $x = b$) na intervale $\langle a, b\rangle$ **okolo osi** o_y vypočítame pomocou integrálu

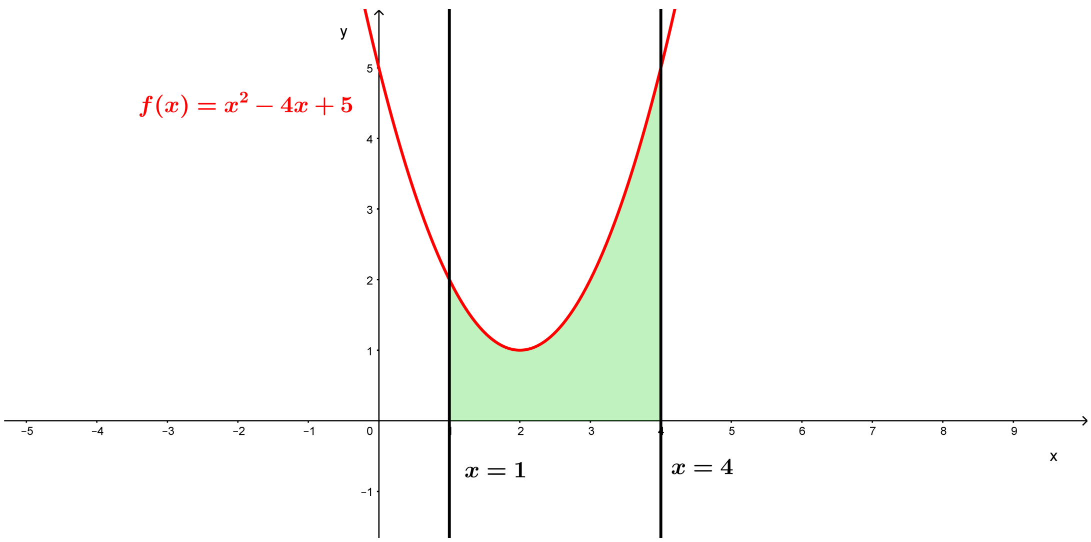
$$V = 2\pi \int\limits_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x.$$

- **Objem rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej uzavretou krivkou určenou parametrickými rovnicami** $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$, kde $\psi(t) \geq 0,\ t \in \langle \alpha, \beta\rangle$, **okolo osi** o_x vypočítame pomocou integrálu

$$V = \pi \left| \int\limits_\alpha^\beta \psi^2(t)\varphi'(t)\ \mathrm{d}t \right|.$$

Príklad 25 Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej parabolou $f(x) = x^2 - 4x + 5$ a priamkami $x = 1$ a $x = 4$ okolo osi o_x.

Riešenie: Ľavá strana rovnice definujúcej krivku je kladná pre všetky $x \in \langle 1, 4 \rangle$, preto objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti okolo osi o_x (Príloha č. 6, Obr. 6.6.1) vypočítame pomocou vzťahu $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$ a pri výpočte aplikujeme vzorec $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$.

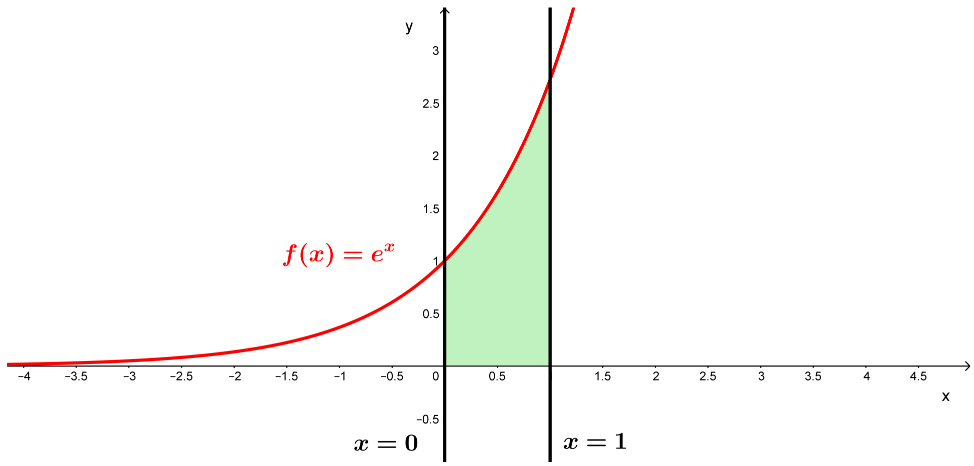


Obr. 1.2.8. Oblasť ohraničená grafom funkcie $f(x) = x^2 - 4x + 5$, osou o_x a priamkami $x = 1$ a $x = 4$.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int\limits_1^4 (x^2 - 4x + 5)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int\limits_1^4 (x^4 + 16x^2 + 25 - 8x^3 + 10x^2 - 40x)\mathrm{d}x = \\
&= \pi \int\limits_1^4 (x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25)\mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^5}{5} - 2x^4 + 26\frac{x^3}{3} - 20x^2 + 25x \right]_1^4 = \\
&= \pi \left[\left(\frac{4^5}{5} - 2 \cdot 4^4 + 26\frac{4^3}{3} - 20 \cdot 4^2 + 25 \cdot 4 \right) - \left(\frac{1}{5} - 2 + \frac{26}{3} - 20 + 25 \right) \right] = \\
&= \frac{78}{5}\pi.
\end{aligned}$$

Príklad 26 Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej krivkou $f(x) = e^x$ a priamkami $x = 0$ a $x = 1$ okolo osi o_x.

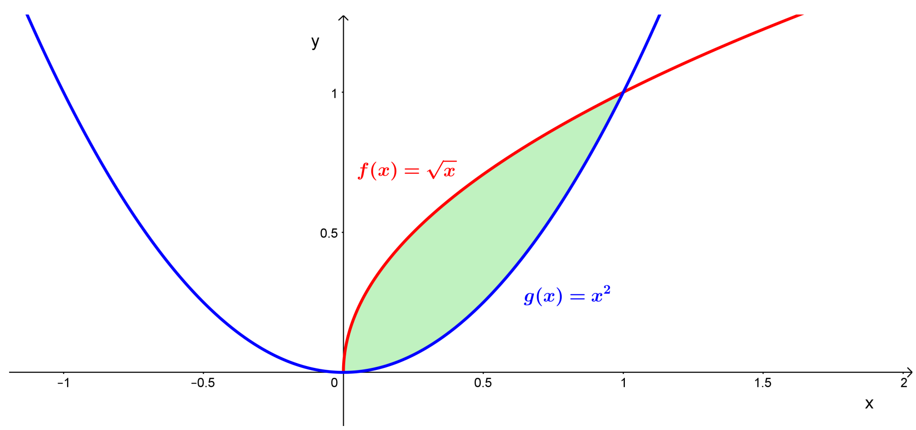
Riešenie: Pri výpočte objemu telesa (Príloha č. 6, Obr. 6.6.2), ktoré vznikne rotáciou danej oblasti (Obr. 1.2.9), použijeme substitučnú metódu.



Obr. 1.2.9. Oblasť ohraničená grafom funkcie $f(x) = e^x$, osou o_x a priamkami $x = 0$ a $x = 1$.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^1 (e^x)^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 e^x \cdot e^x\,\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} t = e^x \\ \mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x \\ t_1 = e^0 = 1 \\ t_2 = e^1 = e \end{array} \right\} = \pi \int_1^e t\,\mathrm{d}t = \pi \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^e = \\
&= \pi \frac{e^2 - 1}{2}.
\end{aligned}
$$

Príklad 27 Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej krivkami, ktoré sú dané predpismi $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = x^2$ okolo osi o_x.



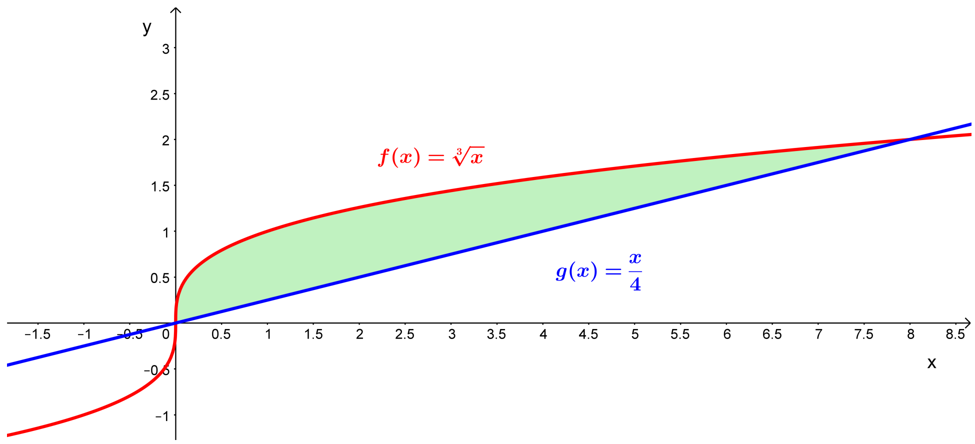
Obr. 1.2.10. Oblasť ohraničená grafmi funkcií $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = x^2$.

Riešenie: Vypočítame si hranice intervalu, na ktorom budeme integrovať. Porovnaním y-ových súradníc bodov obidvoch kriviek $\sqrt{x} = x^2$ a ďalšou úpravou získame rovnicu

$x\left(1-x^3\right) = 0$, ktorá má dve riešenia $x = 0$ a $x = 1$. Dosadíme do vzťahu $V = \pi\int\limits_a^b \left(f^2(x) - g^2(x)\right)\,\mathrm{d}x$ a integrujeme.

$$V = \pi\int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(x^2\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int\limits_0^1 \left(x - x^4\right)\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{10}\pi.$$

Príklad 28 Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej krivkami $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a $g(x) = \frac{x}{4}$ okolo osi o_x.

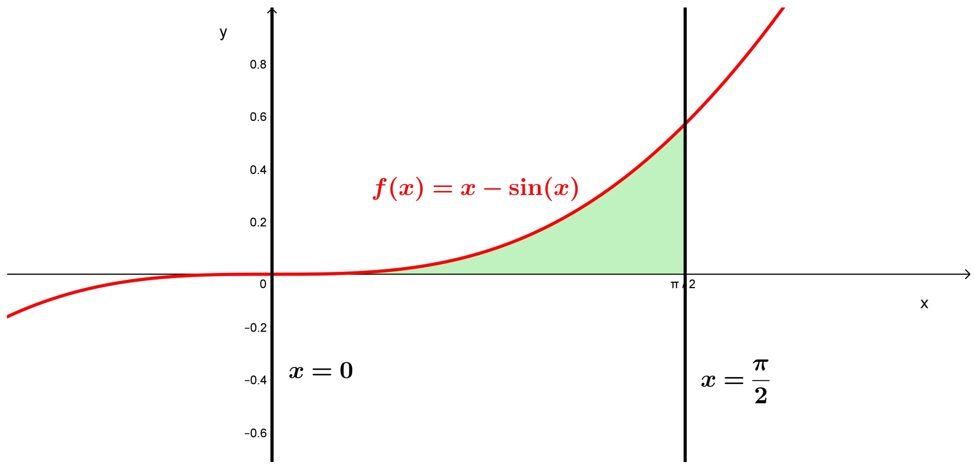


Obr. 1.2.11. Oblasť ohraničená grafmi funkcií $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a $g(x) = \frac{x}{4}$ pre $x \in \langle 0, 8\rangle$.

Riešenie: Najskôr vypočítame hranice intervalu, na ktorom budeme integrovať. Porovnaním y-ových súradníc bodov obidvoch kriviek $\sqrt[3]{x} = \frac{x}{4}$ a ďalšou úpravou získame rovnicu $x\left(1 - \frac{x^2}{64}\right) = 0$, ktorá má tri reálne riešenia $x = 0$, $x = -8$ a $x = 8$. Keďže zadaná oblasť (Obr. 1.2.11) je symetrická podľa počiatku súradnicovej sústavy, hľadaný objem telesa (Príloha č. 6, Obr. 6.6.4) budeme počítať na intervale $x \in \langle 0, 8\rangle$ a vynásobíme 2.

$$V = 2\pi\int\limits_0^8 \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 - \left(\frac{x}{4}\right)^2\,\mathrm{d}x = 2\pi\int\limits_0^8 \left(x^{\frac{2}{3}} - \frac{x^2}{16}\right)\,\mathrm{d}x = 2\pi\left[3\frac{x^{5/3}}{5} - \frac{x^3}{48}\right]_0^8 = \frac{256}{15}\pi.$$

Príklad 29 Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej krivkou $f(x) = x - \sin(x)$ a priamkou $y = 0$, v intervale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ okolo osi o_x a o_y.



Obr. 1.2.12. Oblasť ohraničená grafom funkcie $f(x) = x - \sin(x)$ a priamkami $y = 0$ v intervale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.

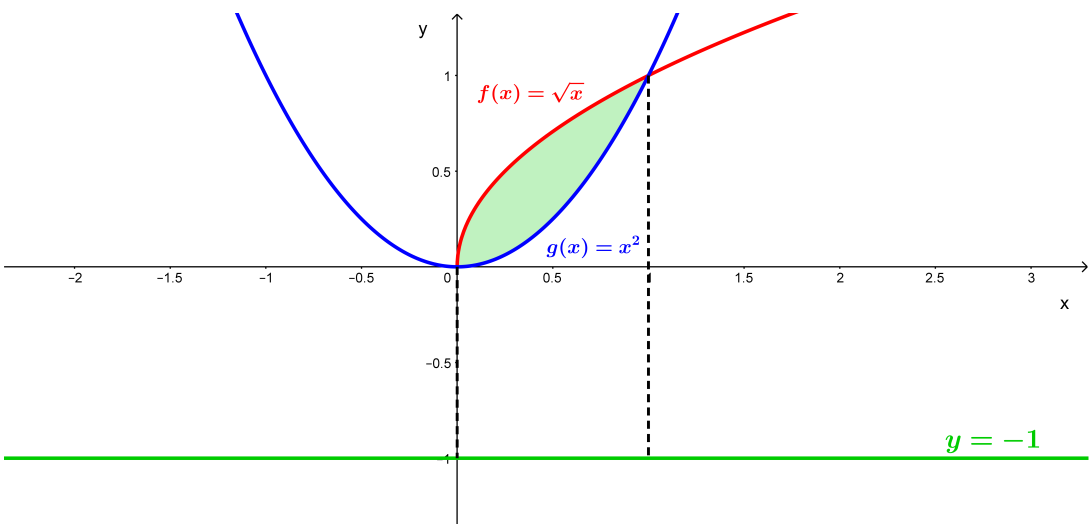
Riešenie: Najskôr vypočítame objem telesa (Príloha č. 6, Obr. 6.6.5), ktoré vznikne rotáciou okolo osi o_x. Integrál budeme riešiť takto. Funkciu $f(x)$ umocníme na druhú, t. j. $f^2(x) = (x - \sin(x))^2 = x^2 - 2x\sin(x) + \sin^2(x)$, čím získame tri členy, ktoré potrebujeme zintegrovať. Prvý člen zintegrujeme priamo, pri druhom člene aplikujeme metódu per partes, a tretí člen si upravíme podľa vzťahu $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ a zintegrujeme.

$$
\begin{aligned}
V_{o_x} &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \sin(x))^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 2x\sin(x) + \sin^2(x)) \,\mathrm{d}x = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} u' = \sin(x) & u = -\cos(x) \\ v = -2x & v' = -2 \end{array} \right\} = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi \left[2x\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \\
&- \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x \,\mathrm{d}x + \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2x)}{2} \,\mathrm{d}x = \\
&= \pi \left[\frac{x^3}{3} + 2x\cos x - 2\sin x + \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \pi \left(\frac{\pi^3}{24} + 0 - 2 + \frac{\pi}{4} + 0 \right) - 0 = \frac{\pi}{24} \left(\pi^3 + 6\pi - 48 \right).
\end{aligned}
$$

Pri výpočte objemu telesa, ktoré vznikne rotáciou okolo osi o_y, budeme dosadzovať do vzťahu $V = 2\pi \int\limits_a^b x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x$. Integrujeme podobne ako v predchádzajúcom prípade.

$$\begin{aligned}
V_{O_y} &= 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(x-\sin(x))\,\mathrm{d}x = 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - x\sin(x))\,\mathrm{d}x = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} u' = \sin(x) & u = -\cos(x) \\ v = -x & v' = -1 \end{array} \right\} = 2\pi \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\pi \left[x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \\
&- 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} + x\cos x - \sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \left(\frac{\pi^3}{24} + 0 - 1\right) - 0 = \\
&= 2\pi \left(\frac{\pi^3}{24} - 1\right).
\end{aligned}$$

Príklad 30 Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej krivkami, ktoré sú dané predpismi $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = x^2$ okolo priamky $y = -1$.



Obr. 1.2.13. Oblasť ohraničená grafmi funkcií $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = x^2$.

Riešenie: Vypočítame hranice intervalu, na ktorom budeme integrovať. Porovnaním y-ových súradníc bodov obidvoch kriviek $\sqrt{x} = x^2$ a ďalšou úpravou získame rovnicu $x\,(1 - x^3) = 0$, ktorá má dve reálne riešenia $x = 0$ a $x = 1$. Dosadzovať budeme do vzťahu $V = \pi \int\limits_a^b (f(x) - \mathrm{os\,rot.})^2 - (g(x) - \mathrm{os\,rot.})^2\,\mathrm{d}x$, kde os rot. označuje os rotácie, v našom prípade priamku $y = -1$.

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (\sqrt{x} - (-1))^2 - (x^2 - (-1))^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_0^1 (\sqrt{x} + 1)^2 - (x^2 + 1)^2 \, \mathrm{d}x = \\ &= \pi \int_0^1 (x + 2\sqrt{x} + 1 - x^4 - 2x^2 - 1) \, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^2}{2} + \frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} \right]_0^1 = \\ &= \pi \left(\frac{1^2}{2} + \frac{4 \cdot 1^{3/2}}{3} - \frac{1^5}{5} - \frac{2 \cdot 1^3}{3} \right) = \frac{29}{30}\pi. \end{aligned}$$

Teleso nájdete opäť zobrazené v Prílohe č. 6 na Obr. 6.6.6.

Príklad 31 Odvoďte vzťah pre výpočet objemu gule s polomerom $r > 0$.

Riešenie: Horná polkružnica so stredom v počiatku súradnicovej sústavy a polomerom $r > 0$ je daná parametrickými rovnicami

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= r \cos t, \\ \psi(t) &= r \sin t, \end{aligned}$$

kde $t \in \langle 0, \pi \rangle$. Vypočítame $\varphi'(t)$, t.j. $\varphi'(t) = -r \sin t$, a dosadíme do vzťahu pre výpočet objemu

$$\begin{aligned} V &= \pi \left| \int_\alpha^\beta \psi^2(t) \varphi'(t) \, \mathrm{d}t \right| = \pi \left| \int_0^\pi (r \sin t)^2 \cdot (-r \sin t) \, \mathrm{d}t \right| = \pi r^3 \int_0^\pi \sin^3 t \, \mathrm{d}t = \\ &= \pi r^3 \int_0^\pi (1 - \cos^2 t) \cdot \sin t \, \mathrm{d}t = \left\{ \begin{array}{l} s = \cos t \\ \mathrm{d}s = -\sin t \, \mathrm{d}t \\ s_1 = 1 \\ s_2 = -1 \end{array} \right\} = \pi r^3 \int_1^{-1} (1 - s^2) \cdot (-1) \, \mathrm{d}s = \\ &= \pi r^3 \int_1^{-1} (-1 + s^2) \, \mathrm{d}s = \pi r^3 \left[-s + \frac{s^3}{3} \right]_1^{-1} = \pi r^3 \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

1.2.3 Dĺžka krivky

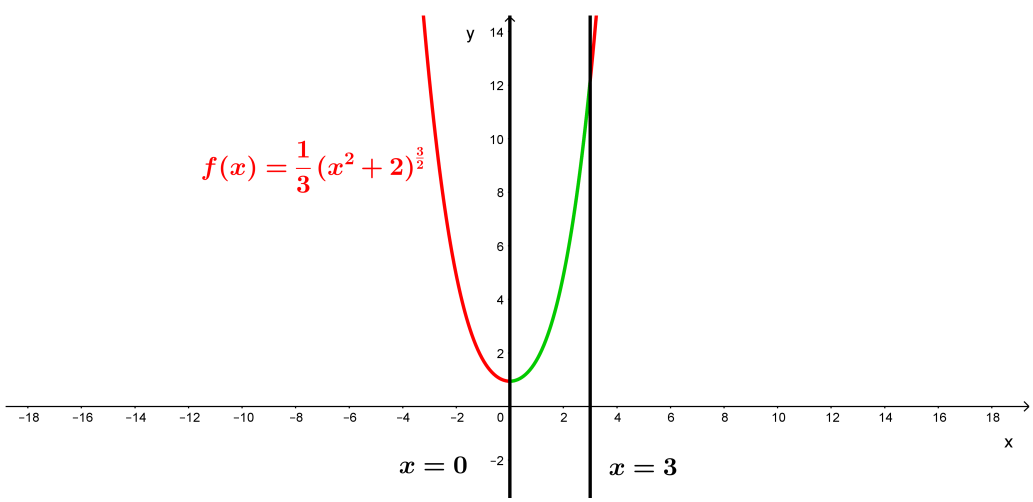
- **Dĺžku rovinnej krivky**, ktorá je grafom funkcie f, ktorá má spojitú deriváciu v intervale $\langle a, b\rangle$ vypočítame pomocou integrálu

$$D = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

- **Dĺžku rovinnej krivky, ktorá je určená parametrickými rovnicami**, ak derivácie $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ sú spojité v intervale $\langle \alpha, \beta\rangle$ vypočítame pomocou integrálu

$$D = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

Príklad 32 Vypočítajte dĺžku krivky $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$ v intervale $\langle 0, 3\rangle$.



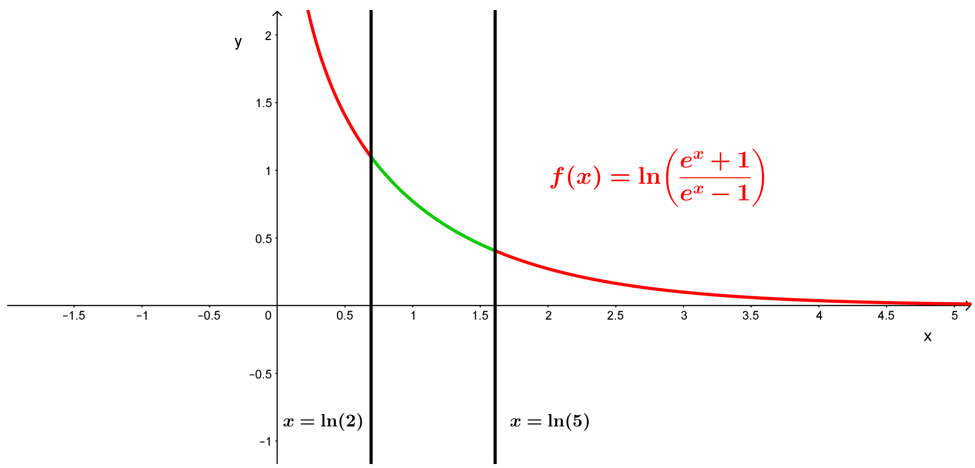
Obr. 1.2.14. Krivka $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$ v intervale $\langle 0, 3\rangle$.

Riešenie: Vypočítame deriváciu zadanej funkcie $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = x\sqrt{x^2+2}$

a dosadíme ju do vzťahu na výpočet dĺžky krivky $D = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned} D &= \int\limits_0^3 \sqrt{1 + (x^2+2)x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^3 \sqrt{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \\ &= \int\limits_0^3 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^3 \mathrm{d}x = 12\cdot \end{aligned}$$

Príklad 33 Na intervale $\langle \ln 2, \ln 5\rangle$ vypočítajte dĺžku krivky $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$.



Obr. 1.2.15. Krivka $y = \ln \frac{e^x+1}{e^x-1}$ v intervale $\langle \ln 2, \ln 5\rangle$.

Riešenie: Začneme tým, že vypočítame deriváciu zadanej funkcie

$$y' = \frac{1}{\frac{e^x+1}{e^x-1}} \cdot \frac{e^x(e^x-1) - (e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2}$$

a po úpravách dostaneme tvar

$$y' = \frac{-2e^x}{e^{2x}-1}.$$

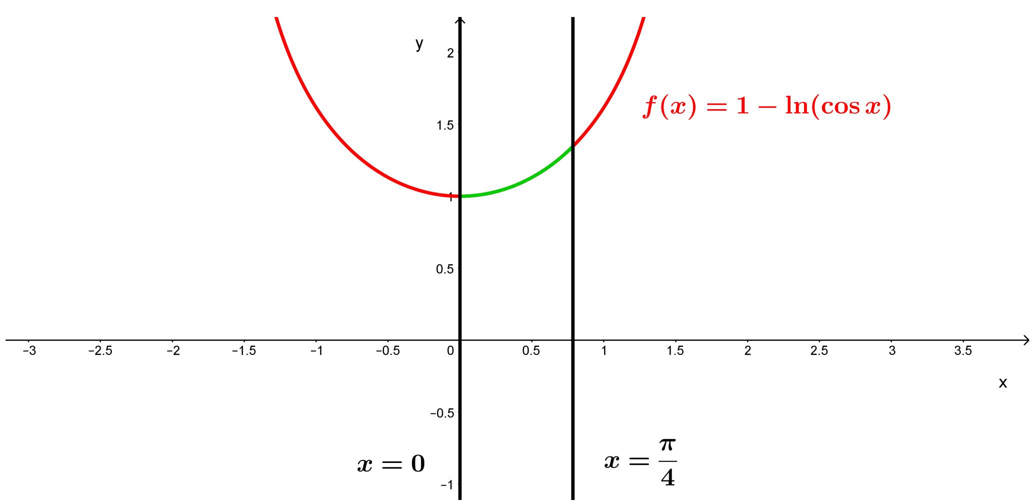
Dosadíme do pomocného vzťahu na výpočet dĺžky krivky a upravíme

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}} = \sqrt{\frac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1 + 4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}} = \sqrt{\frac{(e^{2x}+1)^2}{(e^{2x}-1)^2}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}.$$

Vypočítame dĺžku krivky

$$\begin{aligned}
D &= \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x}-1+2}{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{\ln 5} 1\,\mathrm{d}x + 2\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{1}{e^{2x}-1}\,\mathrm{d}x = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} t = e^x \\ \mathrm{d}t = e^x\,\mathrm{d}x \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{e^x} \\ t_1 = 2 \\ t_2 = 5 \end{array} \right\} = [x]_{\ln 2}^{\ln 5} + 2\int_2^5 \frac{1}{t(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = \\
&= [x]_{\ln 2}^{\ln 5} + 2\int_2^5 \frac{t^2-(t^2-1)}{t(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = \ln\frac{5}{2} + \int_2^5 \frac{2t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t - 2\int_2^5 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \\
&= \ln\frac{5}{2} + \left[\ln|t^2-1|\right]_2^5 - 2\left[\ln|t|\right]_2^5 = -\ln\frac{5}{2} + \ln 24 - \ln 3 = \\
&= \ln 8 - \ln\frac{5}{2} = \ln\frac{16}{5}.
\end{aligned}$$

Príklad 34 Vypočítajte dĺžku krivky $y = 1 - \ln(\cos x)$ v intervale $\left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

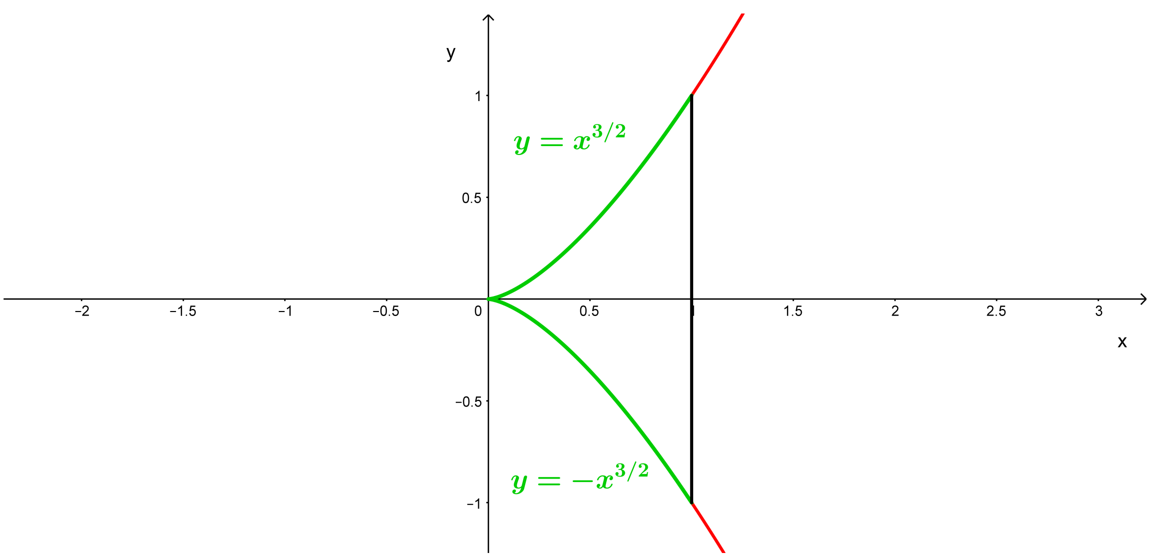


Obr. 1.2.16. Krivka $y = 1 - \ln(\cos x)$ v intervale $\left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$.

Riešenie: Vypočítame deriváciu zadanej funkcie $y' = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ a dosadíme do vzťahu na výpočet dĺžky krivky.

$$
\begin{aligned}
D &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\cos x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \\
&= \left\{\begin{array}{l} t=\sin x \\ \mathrm{d}t=\cos x\,\mathrm{d}x \\ t_1=0 \\ t_2=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \\
&= \left[-\frac{1}{2}\ln|1-t|+\frac{1}{2}\ln|1+t|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Príklad 35 Vypočítajte dĺžku polokubickej paraboly $y^2 = x^3$ v intervale $\langle 0,1\rangle$.



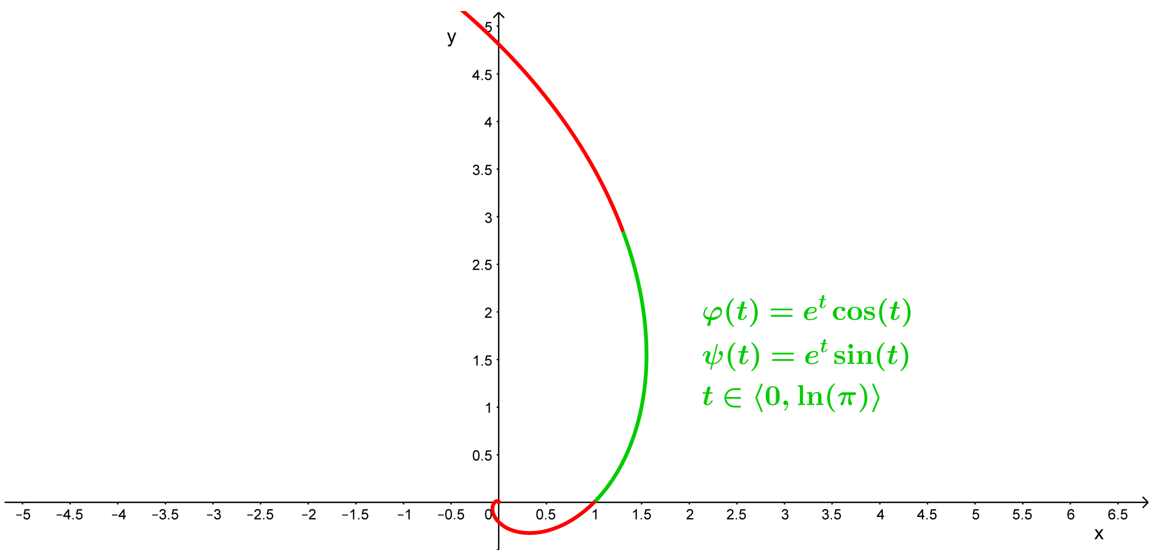
Obr. 1.2.17. Polokubická parabola $y^2 = x^3$ v intervale $\langle 0,1\rangle$.

Riešenie: Krivka sa skladá z dvoch častí $y = x^{\frac{3}{2}}$ a $y = -x^{\frac{3}{2}}$ symetrických podľa osi o_x.

Preto jej dĺžka bude dvojnásobkom dĺžky jednej z nich, pričom $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ a $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} D &= 2\int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \left(\frac{9}{4}\left(\frac{4}{9}+x\right)\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{3}{2}\int_0^1 \left(\frac{4}{9}+x\right)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \\ &= 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[\left(\frac{4}{9}+x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = 2\left[\left(\frac{4}{9}+1\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\right] = \\ &= 2\cdot\left[\frac{13}{9}\cdot\frac{\sqrt{13}}{3} - \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\right] = \frac{2}{27}\left(13\sqrt{13}-8\right). \end{aligned}$$

Príklad 36 Vypočítajte dĺžku krivky danej parametricky $\varphi(t) = e^t\cos t$, $\psi(t) = e^t\sin t$ na intervale $\langle 0, \ln\pi\rangle$.



Obr. 1.2.18. Krivka zadaná parametricky $\varphi(t) = e^t\cos t$, $\psi(t) = e^t\sin t$ na intervale $\langle 0, \ln\pi\rangle$.

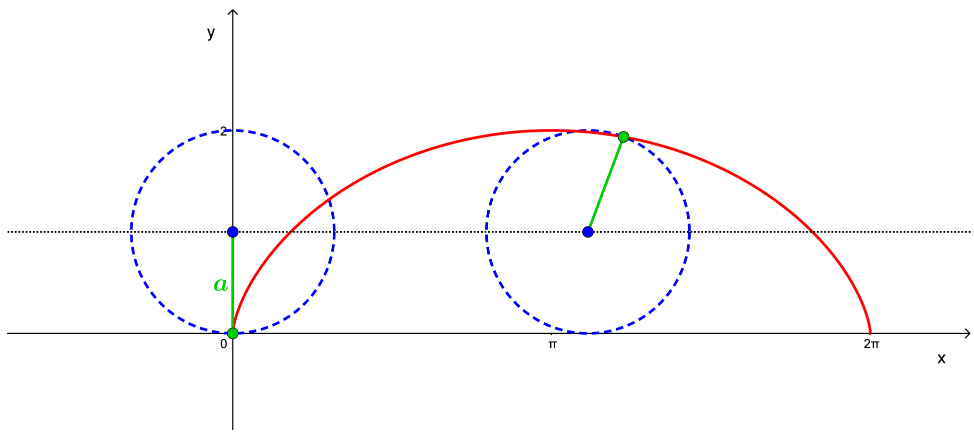
Riešenie: Začneme tým, že vypočítame deriváciu $\varphi'(t)$ a $\psi'(t)$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= e^t\cos t - e^t\sin t = e^t(\cos t - \sin t), \\ \psi'(t) &= e^t\sin t + e^t\cos t = e^t(\sin t + \cos t), \end{aligned}$$

a dosadíme do vzťahu na výpočet dĺžky krivky $D = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned} D &= \int\limits_0^{\ln\pi} \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int\limits_0^{\ln\pi} e^t \sqrt{\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int\limits_0^{\ln\pi} e^t\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{2}e^t\right]_0^{\ln\pi} = \sqrt{2}\left(e^{\ln\pi} - e^0\right) = \sqrt{2}(\pi - 1)\cdot \end{aligned}$$

Príklad 37 Vypočítajte dĺžku jedného oblúka cykloidy danej $\varphi(t) = a(t - \sin t)$, $\psi(t) = a(1 - \cos t)$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.



Obr. 1.2.19. Cykloida $\varphi(t) = a(t - \sin t),\ \psi(t) = a(1 - \cos t),\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Riešenie: Začneme tým, že vypočítame deriváciu $\varphi'(t)$ a $\psi'(t)$

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= a(1 - \cos t), \\ \psi'(t) &= a\sin t, \end{aligned}$$

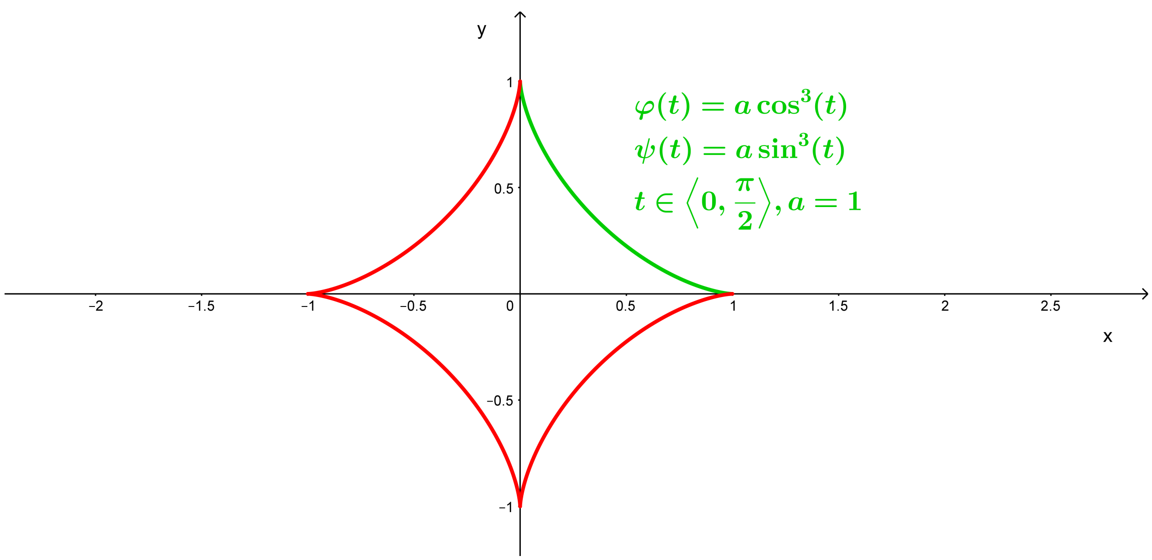
a dosadíme do vzťahu na výpočet dĺžky krivky $D = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned} D &= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \\ &= a\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = a\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Výraz $\sqrt{1-\cos t}$ si upravíme podľa vzťahu $\left|\sin\frac{t}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos t}{2}}$, t. j. $\sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ a dosadíme do integrálu

$$\begin{aligned} D &= a\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 2a\left[-2\cos\pi + 2\cos 0\right] = \\ &= 2a\left[-2(-1)+2\cdot 1\right] = 8a. \end{aligned}$$

Príklad 38 Vypočítajte dĺžku jednej časti asteroidy určenej parametrickými rovnicami $\varphi(t) = a\ \cos^3 t$, $\psi(t) = a\ \sin^3 t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.



Obr. 1.2.20. Asteroida $\varphi(t) = a\ \cos^3 t$, $\psi(t) = a\ \sin^3 t$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Riešenie: Derivácie parametrických rovníc

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -3a\cos^2 t\sin t, \\ \psi'(t) &= 3a\sin^2 t\cos t, \end{aligned}$$

dosadíme do vzťahu na výpočet dĺžky krivky

$$\begin{aligned}
D &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \\
&= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t)}\,\mathrm{d}t = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \\
&= 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sin t\,\mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{l} s = \sin t \\ \mathrm{d}s = \cos t\,\mathrm{d}t \\ s_1 = 0 \\ s_2 = 1 \end{array}\right\} = 3a\int_0^1 s\,\mathrm{d}s = 3a\left[\frac{s^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}a.
\end{aligned}$$

1.2.4 Obsah povrchu rotačnej plochy

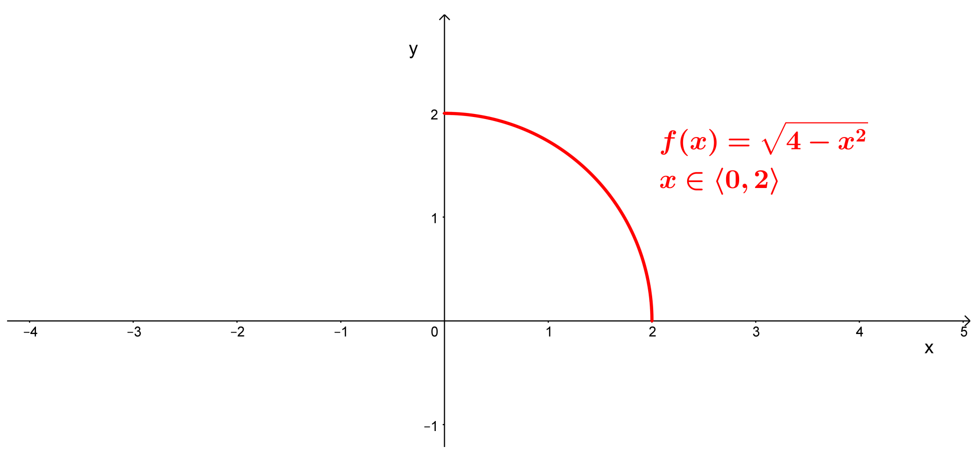
- **Obsah povrchu rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou grafu funkcie** f v intervale $\langle a, b\rangle$ okolo osi o_x vypočítame pomocou integrálu

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x.$$

- **Obsah povrchu rotačnej plochy, ktorá vznikne rotáciou uzavretej krivky určenej parametrickými rovnicami** okolo osi o_x vypočítame pomocou integrálu

$$S = 2\pi \int_\alpha^\beta |\psi(t)| \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, \mathrm{d}t.$$

Príklad 39 Vypočítajte veľkosť povrchu rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou grafu funkcie $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ na intervale $\langle 0, 2\rangle$ okolo osi o_x.



Obr. 1.2.21. Graf funkcie $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ na intervale $\langle 0, 2\rangle$.

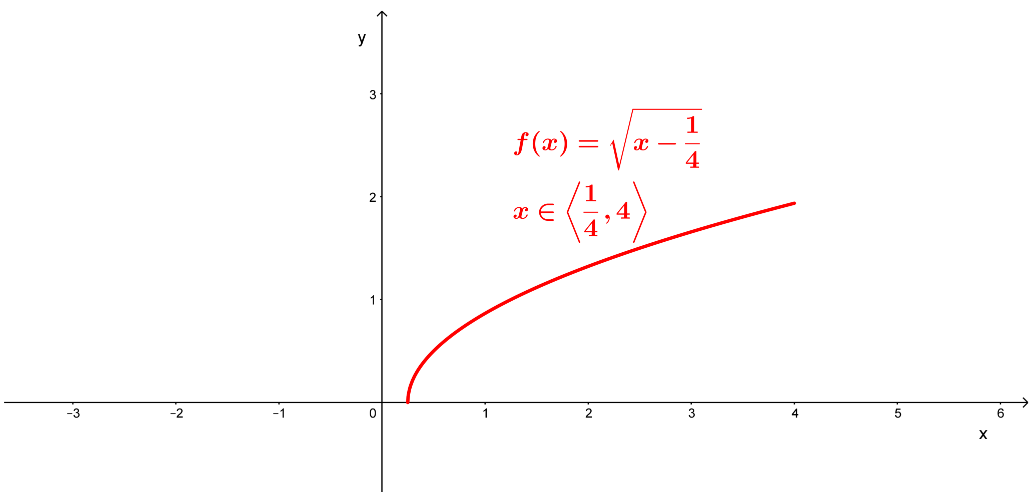
Riešenie: Začneme tým, že vypočítame deriváciu $f'(x)$

$$f'(x) \quad = \quad \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}},$$

a dosadíme ju do vzťahu na výpočet obsahu povrchu rotačnej plochy. Výraz v integráli upravíme a integrál vypočítame

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\int_0^2 |\sqrt{4-x^2}|\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \\ &= 2\pi\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\sqrt{\frac{4-x^2+x^2}{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \\ &= 2\pi\int_0^2 \sqrt{4}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^2 2\,\mathrm{d}x = 2\pi[2x]_0^2\,\mathrm{d}x = 8\pi\cdot \end{aligned}$$

Príklad 40 Vypočítajte veľkosť povrchu rotačného telesa, ktoré vznikne rotáciou grafu funkcie $f(x)=\sqrt{x-\frac{1}{4}}$ na intervale $\left\langle\frac{1}{4},4\right\rangle$ okolo osi o_x.



Obr. 1.2.22. Graf funkcie $f(x)=\sqrt{x-\frac{1}{4}}$ na intervale $\left\langle\frac{1}{4},4\right\rangle$.

Riešenie: Deriváciu $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-\frac{1}{4}}}$ dosadíme do vzťahu na výpočet obsahu povrchu rotačnej plochy

$$\begin{aligned} S &= 2\pi\int_{\frac{1}{4}}^4 \left|\sqrt{x-\frac{1}{4}}\right|\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x-\frac{1}{4}}}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{\frac{1}{4}}^4 \sqrt{x-\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{1}{4\left(x-\frac{1}{4}\right)}}\,\mathrm{d}x = \\ &= 2\pi\int_{\frac{1}{4}}^4 \sqrt{x-\frac{1}{4}}\sqrt{1+\frac{1}{4x-1}}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{\frac{1}{4}}^4 \sqrt{x-\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{4x}{4x-1}}\,\mathrm{d}x = \\ &= 2\pi\int_{\frac{1}{4}}^4 \sqrt{\frac{4x-1}{4}\cdot\frac{4x}{4x-1}}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{\frac{1}{4}}^4 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\pi\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{4}}^4 = \frac{21}{2}\pi\cdot \end{aligned}$$

Príklad 41 Vypočítajte obsah povrchu plochy, ktorá vznikne rotáciou asteroidy danej rovnicami $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t,\ t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$.

Riešenie: Derivácie parametrických rovníc

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= -3a\cos^2 t\sin t,\\
\psi'(t) &= 3a\sin^2 t\cos t,
\end{aligned}$$

dosadíme do vzťahu na výpočet obsahu povrchu rotačnej plochy

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)|\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t =\\
&= 2\pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\ \sin^3 t\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t =\\
&= 2\pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} a\ \sin^3 t\sqrt{9a^2\ \cos^2 t\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 3a^2\sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t =\\
&= 6\pi a^2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,\mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{l} s = \sin t\\ \mathrm{d}s = \cos t\,\mathrm{d}t\\ s_1 = 0\\ s_2 = 1\end{array}\right\} = 6\pi a^2\int\limits_{0}^{1} s^4\,\mathrm{d}s = 6\pi a^2\left[\frac{s^5}{5}\right]_0^1 =\\
&= \frac{6}{5}\pi a^2.
\end{aligned}$$

1.3 Úlohy na precvičenie

Úloha 1 Vypočítajte určitý integrál funkcie.

a) $\int\limits_1^3 (3x^2 + \frac{1}{x} + 5)\,\mathrm{d}x$ .... $[36 + \ln 3]$.

b) $\int\limits_0^2 \frac{2x^{1/2} + x^{3/2}}{6\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ .... $[1]$.

c) $\int\limits_0^1 x\cdot e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ .... $\left[\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\right]$.

d) $\int\limits_0^1 x\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$ .... $\left[1 - \frac{2}{e}\right]$.

e) $\int\limits_1^9 \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ .... $\left[\frac{48}{\ln 3}\right]$.

f) $\int\limits_0^\pi x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x$ .... $\left[\frac{\pi}{2}\right]$.

g) $\int\limits_0^\pi e^{2x}\cos(2x)\,\mathrm{d}x$ .... $\left[\frac{1}{4}(e^{2\pi}-1)\right]$.

h) $\int\limits_1^e x\cdot\ln(x)\,\mathrm{d}x$ .... $\left[\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}\right]$.

i) $\int\limits_1^e \ln(x)+1\,\mathrm{d}x$ .... $[e]$.

j) $\int\limits_1^e \frac{\ln(x)+1}{x}\,\mathrm{d}x$ .... $\left[\frac{3}{2}\right]$.

k) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$ .... $\left[\frac{1}{4}\right]$.

l) $\int\limits_{-1}^1 x\cdot\arctan(x)\,\mathrm{d}x$ .... $\left[\frac{\pi}{2}-1\right]$.

m) $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ .... [diverguje].

n) $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ .... $\left[\frac{1}{2}\right]$.

o) $\int\limits_{-2}^\infty \cos(x)\,\mathrm{d}x$ .... [diverguje].

p) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{5-x}}\,\mathrm{d}x$ .... [diverguje].

r) $\int\limits_0^5 \frac{1}{\sqrt{5-x}}\,\mathrm{d}x$ .... $\left[2\sqrt{5}\right]$.

s) $\int\limits_{-5}^5 \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x$ .... [diverguje].

Úloha 2 Vypočítajte obsah oblasti ohraničenej grafmi funkcií

a) $f(x)=\sin(x)$, $g(x)=\cos(x)$ a priamkami $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ .... $\left[\sqrt{2}-1\right]$.

b) $f(x)=4x-x^2$, $g(x)=0$ .... $\left[\frac{32}{3}\right]$.

c) $f(x)=x\cdot e^{-2x}$, $g(x)=1$ a priamkami $x=0$, $x=1$ .... $\left[\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{e^2}\right)\right]$.

d) $f(x)=x^2-4$, $g(x)=0$ a priamkou $x=4$ .... $\left[\frac{32}{3}\right]$.

e) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$ .... $\left[\frac{1}{3}\right]$.

f) $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2 - 1$ a priamkami $x = -1$, $x = 1$ .... $\left[\frac{4}{3} - \frac{1}{e} + e\right]$.

g) $f(x) = \arctan(x)$, $g(x) = 1$ a priamkou $x = 0$ .... $\left[\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)\right]$.

h) $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 6$ a priamkami $x = 0$, $x = 6$ .... $[45]$.

i) $y = x$, $x = y^2 - 2$ .... $\left[\frac{9}{2}\right]$.

j) $x = 2(t - \sin(t))$, $y = 2(1 - \cos(t))$ pre $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ .... $[12\pi]$.

k) $x = \sin(t)$, $y = \cos(t)$ pre $t \in \langle 0, \pi \rangle$ .... $\left[\frac{\pi}{2}\right]$.

Úloha 3 Vypočítajte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej grafmi funkcií

a) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$, $g(x) = 0$ a priamkami $x = 1$, $x = 3$ okolo osi o_x .... $[20\pi]$.

b) $f(x) = x - x^2$, $g(x) = 0$ okolo osi o_x .... $\left[\frac{\pi}{30}\right]$.

c) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ okolo osi o_x .... $\left[\frac{2}{15}\pi\right]$.

d) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x$ a priamkou $x = 2$ okolo osi o_x .... $[18\pi]$.

e) $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = 1$ a priamkami $x = 0$, $x = 1$ okolo osi o_x .... $\left[\frac{\pi}{4}(e^4 - 5)\right]$.

f) $f(x) = \tan(x)$, $g(x) = 0$ a priamkami $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ okolo osi o_x .... $\left[\pi - \frac{\pi^2}{4}\right]$.

g) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ okolo osi o_y .... $\left[\frac{\pi}{6}\right]$.

h) $f(x) = \frac{1}{x}$ a priamkami $x = 0$, $y = 1$, $y = 2$ okolo osi o_y .... $\left[\frac{\pi}{2}\right]$.

i) $f(x) = 1 - x^2$ a priamkami $y = 0$, $x = 0$ okolo osi o_y .... $\left[\frac{\pi}{2}\right]$.

j) $f(x) = 2x + 1$ a priamkami $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$ okolo osi o_y .... $[45\pi]$.

k) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$ okolo priamky $y = 4$ .... $\left[\frac{6\pi}{5}\right]$.

Úloha 4 Vypočítajte dĺžky daných kriviek.

a) $y = x^{\frac{3}{2}} + 5$ pre $x \in \langle 0, 1 \rangle$ .... $\left[\frac{13\sqrt{13}-8}{27}\right]$.

b) $y = \ln(\cos(x))$ pre $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$ .... $\left[\frac{1}{2} \ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right]$.

c) $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)$ pre $x \in \langle -1, 1 \rangle$ .... $[4]$.

d) $x = t^2 + 1$, $y = \frac{t^3}{3} - t$ pre $t \in \langle 0, 3 \rangle$ .... $[12]$.

e) $x = \cos^2(t)$, $y = \sin^2(t)$ pre $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ .... $\left[\sqrt{2}\right]$.

f) $x = t^3 - 3t$, $y = 3t^2 + 3$ pre $t \in \langle -2, 2 \rangle$ .... $[28]$.

Úloha 5 Vypočítajte plošný obsah plášťa telesa, ktoré vznikne rotáciou oblasti ohraničenej krivkami danými rovnicami.

a) $y = x$ pre $x \in \langle 0, 3 \rangle$ okolo osi o_x .... $\left[9\sqrt{2}\pi\right]$.

b) $y = x^3$ pre $x \in \langle 1, 2 \rangle$ okolo osi o_x .... $\left[\frac{\pi}{27}(145\sqrt{145} - 10\sqrt{10})\right]$.

c) $y = \sqrt{9-x^2}$ pre $x \in \langle -2, 2 \rangle$ okolo osi o_x .... $[24\pi]$.

d) $x = \cos(t)$, $y = 1 + \sin(t)$ pre $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$ okolo osi o_x .... $[4\pi^2]$.

e) $x = e^t \sin(t)$, $y = e^t \cos(t)$ pre $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ okolo osi o_x .... $\left[\frac{2}{5}\pi\sqrt{2}(e^{\pi} - 2)\right]$.

f) $x = \cos^3(t)$, $y = \sin^3(t)$ pre $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4} \right\rangle$ okolo osi o_x .... $\left[\frac{3\sqrt{2}\pi}{20}\right]$.

g) $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$ pre $t \in \left\langle 0, \sqrt{3} \right\rangle$ okolo osi o_x .... $[27\pi]$.

Kapitola 2

Diferenciálny počet funkcií viac premenných

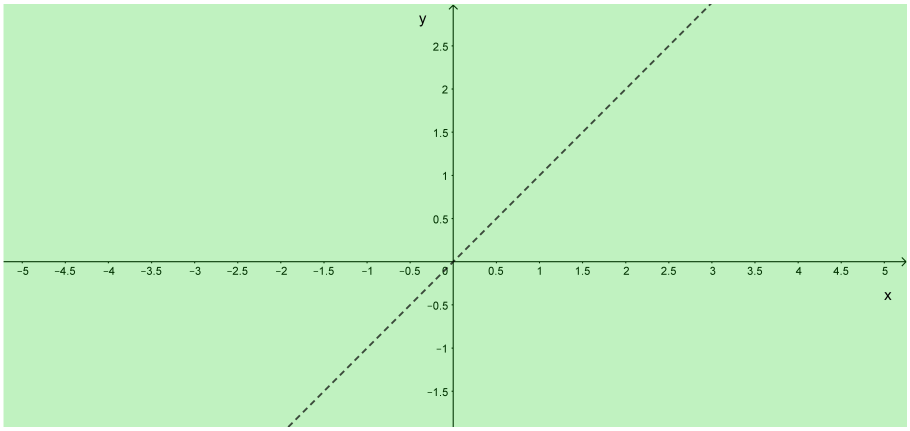
2.1 Základné pojmy

2.1.1 Funkcia viac premenných a jej definičný obor

- Nech je M neprázdna podmnožina n - rozmerného priestoru, $M \subset E_n$, $n \geq 1$. Pod **funkciou dvoch a viac premenných** rozumieme priradenie f, ktoré každému prvku $x \in M$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ priradí práve jedno reálne číslo $y \in E_1$.
- Množinu M nazývame **obor definície** alebo **definičný obor funkcie** f a zvyčajne označujeme $D(f)$ resp. D_f.

Príklad 42 Nájdite a znázornite definičný obor funkcie $f(x, y) = e^{\frac{x^2+5}{x-y}}$.

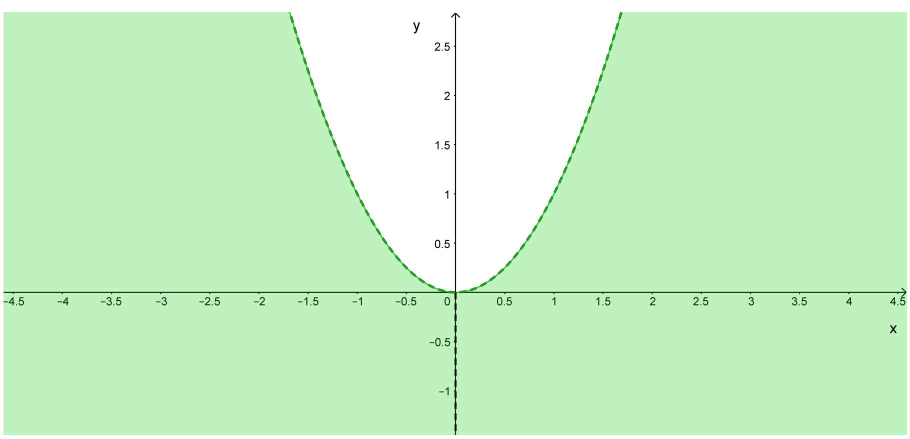
Riešenie: Uvedený výraz má zmysel len pre tie dvojice (x, y), pre ktoré je $x - y \neq 0$, a teda $y \neq x$. Definičný obor funkcie f je preto množina $D(f) = \{(x, y) \in R^2 : y \neq x\}$.



Obr. 2.1.1. Definičný obor funkcie $f(x,y) = e^{\frac{x^2+5}{x-y}}$.

Príklad 43 Nájdite a znázornite definičný obor funkcie $f(x,y) = \frac{y+4}{x}\ln(x^2-y)$.

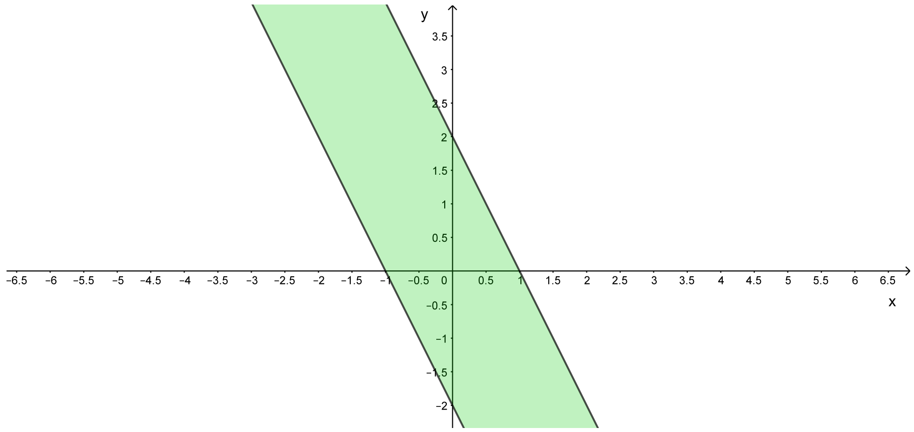
Riešenie: Keďže prirodzený logaritmus je definovaný len pre kladné čísla, daná funkcia je definovaná len pre všetky dvojice (x,y) také, že $x^2 - y > 0$, a keďže zároveň sa premenná x vyskytuje aj v menovateli, potom $x \neq 0$. Preto definičný obor funkcie f je $D(f) = \{(x,y) \in R^2 : y < x^2 \text{ a } x \neq 0\}$.



Obr. 2.1.2. Definičný obor funkcie $f(x,y) = \frac{y+4}{x}\ln(x^2-y)$.

Príklad 44 Nájdite a znázornite definičný obor funkcie $f(x,y) = (y+4)\arcsin\left(\frac{2x+y}{2}\right)$.

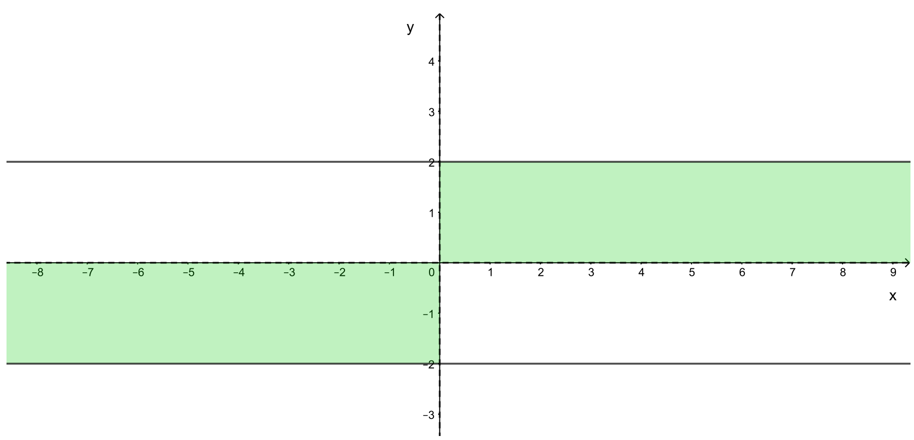
Riešenie: Cyklometrická funkcia $\arcsin\left(\frac{2x+y}{2}\right)$ je definovaná pre také dvojice (x,y), pre ktoré platí $-1 \leq \frac{2x+y}{2} \leq 1$, teda $-2 \leq 2x + y \leq 2$ a po úprave $-2 - 2x \leq y \leq 2 - 2x$, preto definičný obor funkcie f je $D(f) = \{(x,y) \in R^2 : -2 - 2x \leq y \leq 2 - 2x\}$.



Obr. 2.1.3. Definičný obor funkcie $f(x,y) = (y+4)\arcsin\left(\frac{2x+y}{2}\right)$.

Príklad 45 Nájdite a znázornite definičný obor funkcie $f(x,y) = x \arccos\frac{y}{2} + \ln\frac{y}{x}$.

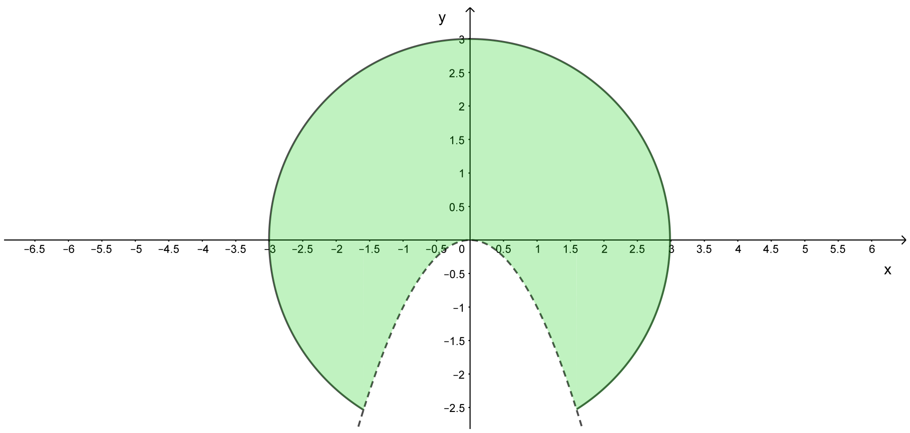
Riešenie: Uvedený výraz má zmysel len pre tie dvojice (x,y), pre ktoré platí $-1 \le \frac{y}{2} \le 1$ a zároveň $\frac{y}{x} > 0$. Z prvej nerovnice po úpravách dostávame $-2 \le y \le 2$ a z druhej $(y < 0 \wedge x < 0) \vee (y > 0 \wedge x > 0)$. Definičný obor preto je $D(f) = \{(x,y) \in R^2 : -2 \le y \le 2 \text{ a } \frac{y}{x} > 0\}$.



Obr. 2.1.4. Definičný obor funkcie $f(x,y) = x \arccos\frac{y}{2} + \ln\frac{y}{x}$.

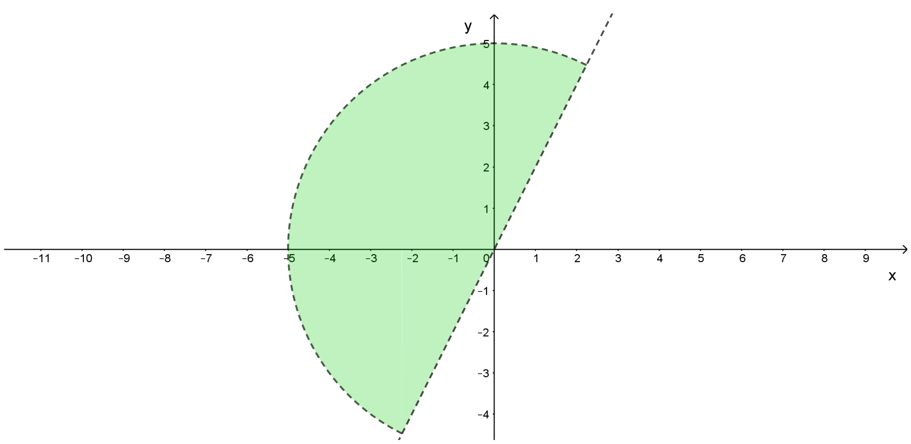
Príklad 46 Nájdite a znázornite definičný obor funkcie $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2} + \ln\frac{x^2+y}{5}$.

Riešenie: Pretože druhá odmocnina je definovaná len pre nezáporné čísla, daný výraz má zmysel len pre tie dvojice (x,y), pre ktoré platí $9 - x^2 - y^2 \ge 0$, t.j. $x^2 + y^2 \le 9$, a zároveň pretože funkcia ln je definovaná len pre kladné čísla, $\frac{x^2+y}{5} > 0$, t.j. $y > -x^2$. Definičný obor zadanej funkcie potom je $D(f) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 9 \text{ a } y > -x^2\}$.



Obr. 2.1.5. Definičný obor funkcie $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} + \ln \frac{x^2+y}{5}$.

Príklad 47 Nájdite a znázornite definičný obor funkcie $f(x, y) = \frac{8}{\sqrt{25-x^2-y^2}} + \ln(y - 2x)$.

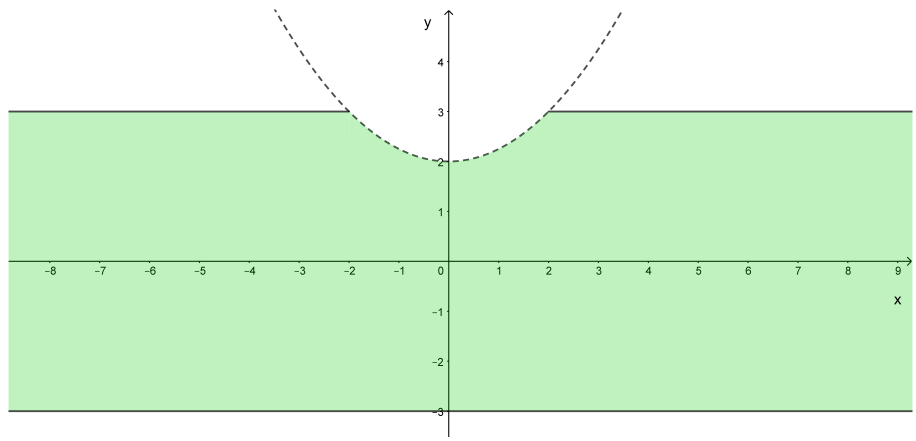


Obr. 2.1.6. Definičný obor funkcie $f(x, y) = \frac{8}{\sqrt{25-x^2-y^2}} + \ln(y - 2x)$.

Riešenie: Pretože druhá odmocnina, ktorá je definovaná len pre nezáporné čísla, sa vyskytuje v menovateli, musí platiť podmienka $25 - x^2 - y^2 > 0$, a zároveň $y - 2x > 0$. Definičný obor zadanej funkcie teda je $D(f) = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 25 \text{ a } y > 2x\}$.

Príklad 48 Nájdite a znázornite definičný obor funkcie $f(x, y) = 10y^2 \ln(x^2 - 4y + 8) + 10 \arccos \frac{y}{3}$.

Riešenie: Uvedený výraz má zmysel len pre tie dvojice (x, y), pre ktoré platí $x^2 - 4y + 8 > 0$ a $-1 \leq \frac{y}{3} \leq 1$. Po úpravách dostávame prvú nerovnosť v tvare $y < \frac{x^2}{4} + 2$ a druhú nerovnosť $-3 \leq y \leq 3$. Definičný obor danej funkcie je $D(f) = \{(x, y) \in R^2 : y < \frac{x^2}{4} + 2 \text{ a } -3 \leq y \leq 3\}$.



Obr. 2.1.7. Definičný obor funkcie $f(x, y) = 10y^2 \ln(x^2 - 4y + 8) + 10 \arccos \frac{y}{3}$.

2.2 Diferencovateľnosť

2.2.1 Parciálne derivácie

Pod **parciálnou deriváciou funkcie** $z = f(x_1, \dots, x_n)$ **v bode** $A = [a_1, \dots, a_n]$ vzhľadom na premennú $x_j,\ j = 1, \dots, n$ rozumieme obyčajnú deriváciu funkcie jednej premennej $f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_n)$ podľa x_j (inými slovami: *všetky ostatné premenné sa pri derivovaní považujú za konštanty*). Pre túto parciálnu deriváciu sa používajú nasledujúce označenia:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n), \quad \frac{\partial z}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n), \quad f_{x_j}(a_1, \dots, a_n), \quad z_{x_j}(a_1, \dots, a_n).$$

Príklad 49 Vypočítajte parciálne derivácie daných funkcií $f(x, y)$ podľa oboch premenných:

a) $f(x, y) = x^2 + y^3$,

b) $f(x, y) = y^3 \sin^2(x)$,

c) $f(x, y) = (\ln^2(x) + \arctan(y))^7$,

d) $f(x, y) = \arcsin\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$,

e) $f(x, y) = 4 \arctan \sqrt{xy}$,

f) $f(x, y) = 8ye^{2xy}$.

Riešenie: Pri derivovaní budeme postupovať tak, že všetky premenné, okrem premennej podľa ktorej práve derivujeme, budeme považovať za konštanty.

a)
$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 + y^3, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x + 0 = 2x, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 + 3y^2 = 3y^2, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
f(x,y) &= y^3\sin^2(x),\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= y^3\cdot 2\sin(x)\cdot\cos(x) = y^3\sin(2x),\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2\sin^2(x),
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (\ln^2(x)+\arctan(y))^7,\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 7(\ln^2(x)+\arctan(y))^6\cdot 2\ln(x)\cdot\frac{1}{x} = \frac{14(\ln^2(x)+\arctan(y))^6\ln(x)}{x},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 7(\ln^2(x)+\arctan(y))^6\cdot\frac{1}{1+y^2} = \frac{7(\ln^2(x)+\arctan(y))^6}{1+y^2},
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \arcsin\left(\frac{x-y}{x+y}\right),\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}}\cdot\frac{1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} =\\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)^2}}}\cdot\frac{x+y-x+y}{(x+y)^2} =\\
&= \frac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy+y^2-(x^2-2xy+y^2)}}\cdot\frac{2y}{(x+y)^2} =\\
&= \frac{1}{\sqrt{4xy}}\cdot\frac{2y}{x+y} =\\
&= \frac{1}{2\sqrt{xy}}\cdot\frac{2y}{x+y} =\\
&= \frac{y}{\sqrt{xy}(x+y)},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}}\cdot\frac{-1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} =\\
&= \frac{1}{\sqrt{\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)^2}}}\cdot\frac{-x-y-x+y}{(x+y)^2} =\\
&= \frac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy+y^2-(x^2-2xy+y^2)}}\cdot\frac{-2x}{(x+y)^2} =\\
&= \frac{1}{\sqrt{4xy}}\cdot\frac{-2x}{x+y} =\\
&= \frac{1}{2\sqrt{xy}}\cdot\frac{-2x}{x+y} =\\
&= -\frac{x}{\sqrt{xy}(x+y)},
\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 4\arctan\sqrt{xy},\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 4\cdot\frac{1}{1+xy}\cdot\frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}\cdot y =\\
&= \frac{2y}{(1+xy)\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{y}}{(1+xy)\sqrt{x}},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 4\cdot\frac{1}{1+xy}\cdot\frac{1}{2}(xy)^{-\frac{1}{2}}\cdot x =\\
&= \frac{2x}{(1+xy)\sqrt{xy}} = \frac{2\sqrt{x}}{(1+xy)\sqrt{y}},
\end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 8ye^{2xy},\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 8ye^{2xy}\cdot(2y) = 16y^2e^{2xy},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 8e^{2xy} + 8ye^{2xy}\cdot(2x) = 8e^{2xy}(1+2xy).
\end{aligned}$$

Príklad 50 Vypočítajte parciálne derivácie funkcie $f(x,y)$ podľa oboch premenných v bode $A=[x_0,y_0]$:

a) $f(x,y) = x + y^2 + \ln(xy), \quad A=[1,2]$,

b) $f(x,y) = \frac{x+\sin(x)}{y+\cos(y)}, \quad A=[\pi,0]$,

c) $f(x,y) = \arctan(x+y^2), \quad A=[2,1]$,

d) $f(x,y) = (x+y)e^{xy}, \quad A=[1,1]$,

e) $f(x,y) = e^{\frac{x^2+5}{x-y}}, \quad A=[0,1]$,

f) $f(x,y) = 10y^2\ln(x^2-4y+8) + 10\arccos\frac{y}{3}, \quad A=[0,0]$.

Riešenie:

a)
$$\begin{aligned}
f(x,y) &= x + y^2 + \ln(xy), \quad A=[1,2]\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 1 + 0 + \frac{1}{xy}\cdot y = 1+\frac{1}{x} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(A) = 1+\frac{1}{1} = 2,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 0 + 2y + \frac{1}{xy}\cdot x = 2y+\frac{1}{y} \implies \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 4+\frac{1}{2} = \frac{9}{2},
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{x+\sin(x)}{y+\cos(y)}, \quad A=[\pi,0],\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1+\cos(x)}{y+\cos(y)} \implies \frac{\partial f}{\partial x}(A)=\frac{1+\cos\pi}{0+\cos(0)}=0,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= (x+\sin(x))\cdot(-1)(y+\cos(y))^{-2}\cdot(1-\sin(y)) \implies\\
&\implies \frac{\partial f}{\partial y}(A)=(\pi+\sin(\pi))\cdot(-1)(0+\cos(0))^{-2}\cdot(1-\sin(0))=-\pi,
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \arctan(x+y^2), \quad A=[2,1],\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1+(x+y^2)^2}\cdot 1 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(A)=\frac{1}{1+(2+1)^2}=\frac{1}{10},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{1+(x+y^2)^2}\cdot 2y \implies \frac{\partial f}{\partial y}(A)=\frac{1}{1+(2+1)^2}\cdot 4=\frac{4}{10}=\frac{2}{5},
\end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
f(x,y) &= (x+y)e^{xy}, \quad A=[1,1],\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{xy}+(x+y)e^{xy}y \implies \frac{\partial f}{\partial x}(A)=e^1+(1+1)e^1\cdot 1=3e,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= e^{xy}+(x+y)e^{xy}x \implies \frac{\partial f}{\partial y}(A)=e^1+(1+1)e^1\cdot 1=3e,
\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}
f(x,y) &= e^{\frac{x^2+5}{x-y}}, \quad A=[0,1],\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= e^{\frac{x^2+5}{x-y}}\cdot\frac{2x(x-y)-(x^2+5)\cdot 1}{(x-y)^2} \implies\\
&\implies \frac{\partial f}{\partial x}(A)=e^{\frac{5}{-1}}\cdot\frac{0-5}{(-1)^2}=-5e^{-5},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= e^{\frac{x^2+5}{x-y}}\cdot(x^2+5)\cdot(-1)(x-y)^{-2}\cdot(-1) \implies\\
&\implies \frac{\partial f}{\partial y}(A)=e^{\frac{5}{-1}}\cdot(5)\cdot(-1)(-1)^{-2}\cdot(-1)=5e^{-5},
\end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 10y^2\ln(x^2-4y+8)+10\arccos\frac{y}{3}, \quad A=[1,-1],\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= 10y^2\frac{1}{x^2-4y+8}\cdot 2x \implies \frac{\partial f}{\partial x}(A)=10\frac{1}{13}\cdot 2=\frac{20}{13},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 20y\ln(x^2-4y+8)+\frac{10y^2}{x^2-4y+8}\cdot(-4)+\frac{-10}{\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}}\cdot\frac{1}{3} \implies\\
&\implies \frac{\partial f}{\partial y}(A)=-20\ln(13)+\frac{10}{13}\cdot(-4)+\frac{-10}{\sqrt{1-\frac{1}{9}}}\cdot\frac{1}{3}=\\
&\qquad = -20\ln(13)-\frac{40}{13}-\frac{10\cdot 3}{3\cdot 2\sqrt{2}}=-20\ln(13)-\frac{40}{13}-\frac{5}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Príklad 51 Vypočítajte parciálne derivácie daných funkcií f podľa všetkých premenných:

a) $f(x,y,z) = e^{xyz} + xyz$,

b) $f(p,q,r) = pqr^q$,

c) $f(x,y,z) = xy^2z^3 + 3yz$,

d) $f(a,b,c,d) = \cos(a)\cdot\sin(b)\cdot\ln(c)\cdot\arctan(d)$,

e) $f(r,s,t,u,v) = 3rs^{\frac{t}{u}}\ln v$,

f) $f(x,y,z) = e^x\cos^2(xz) + 3xy$.

Riešenie:

a)
$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= e^{xyz} + xyz, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= e^{xyz}yz + yz = yz(e^{xyz}+1), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= e^{xyz}xz + xz = xz(e^{xyz}+1), \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= e^{xyz}xy + xy = xy(e^{xyz}+1), \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f(p,q,r) &= pqr^q, \\ \frac{\partial f}{\partial p} &= qr^q, \\ \frac{\partial f}{\partial q} &= pr^q + pqr^q\ln(r) = pr^q(1+q\ln(r)), \\ \frac{\partial f}{\partial r} &= pq^2r^{q-1}, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xy^2z^3 + 3yz, \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= y^2z^3, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2xyz^3 + 3z, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 3xy^2z^2 + 3y, \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned}
f(a,b,c,d) &= \cos(a)\cdot\sin(b)\cdot\ln(c)\cdot\arctan(d),\\
\frac{\partial f}{\partial a} &= -\sin(a)\cdot\sin(b)\cdot\ln(c)\cdot\arctan(d),\\
\frac{\partial f}{\partial b} &= \cos(a)\cdot\cos(b)\cdot\ln(c)\cdot\arctan(d),\\
\frac{\partial f}{\partial c} &= \frac{\cos(a)\cdot\sin(b)\cdot\arctan(d)}{c},\\
\frac{\partial f}{\partial d} &= \frac{\cos(a)\cdot\sin(b)\cdot\ln(c)}{1+d^2},
\end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned}
f(r,s,t,u,v) &= 3rs^{\frac{t}{u}}\ln v,\\
\frac{\partial f}{\partial r} &= 3s^{\frac{t}{u}}\ln v,\\
\frac{\partial f}{\partial s} &= 3r\cdot\left(\frac{t}{u}\right)\cdot s^{\frac{t}{u}-1}\cdot\ln v,\\
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{3rs^{\frac{t}{u}}\ln s\ln v}{u},\\
\frac{\partial f}{\partial u} &= -\frac{3rs^{\frac{t}{u}}\ln s\ln v}{u^2},\\
\frac{\partial f}{\partial v} &= \frac{3rs^{\frac{t}{u}}}{v},
\end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= e^x\cos^2(xz)+3xy,\\
\frac{\partial f}{\partial x} &= e^x\cos^2(xz)-2ze^x\cos(xz)\sin(xz)+3y,\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 3x,\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= -2xe^x\cos(xz)\sin(xz).
\end{aligned}$$

2.2.2 Gradient a derivácia v smere

- **Gradient funkcie** $f(x_1, \ldots, x_n)$ je n -rozmerný vektor, ktorého súradnice sú parciálne derivácie funkcie f podľa $x_j, j = 1, \ldots, n$. Tento vektor označujeme symbolom ∇f resp. grad f a zapisujeme v tvare

$$\nabla f = (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{i_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\mathbf{i_n} = f_{x_1}\mathbf{i_1} + \cdots + f_{x_n}\mathbf{i_n}.$$

- **Derivácia funkcie** f v bode $A = [a_1, \ldots, a_n]$ v smere jednotkového vektora $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ je daná skalárnym súčinom gradientu v bode A s vektorom $\mathbf{u}$ a označujeme ju symbolom $D_{\mathbf{u}}f(A)$, teda:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(A) &= (\nabla f)_A \cdot \mathbf{u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_A \cdot u_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_A \cdot u_n = \\ &= f_{x_1}(A)u_1 + \cdots + f_{x_n}(A)u_n. \end{aligned}$$

Príklad 52 Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x, y) = x^2y$ v bode $A = [3, 2]$ v smere vektora $\mathbf{v} = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$.

Riešenie: Najskôr z vektora $\mathbf{v}$ vytvoríme príslušný jednotkový vektor $\mathbf{u}$, a to tak, že súradnice vektora $\mathbf{v}$ vynásobíme prevrátenou hodnotou jeho dĺžky. Keďže dĺžka vektora $\mathbf{v}$ je

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

príslušný jednotkový vektor je

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}.$$

Ďalej potrebujeme vypočítať hodnotu gradientu funkcie f v bode $A = [3, 2]$

$$\nabla f_A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_A \mathbf{j} = (2xy)_A\, \mathbf{i} + \left(x^2\right)_A \mathbf{j} = (2 \cdot 3 \cdot 2)\, \mathbf{i} + \left(3^2\right) \mathbf{j} = 12\mathbf{i} + 9\mathbf{j}.$$

Podľa vzorca pre výpočet derivácie v smere napokon dostaneme

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}\, f(3, 2) &= \nabla f_A \cdot \mathbf{u} = (12\mathbf{i} + 9\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}\right) = \\ &= 12 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 9 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} + \frac{18}{\sqrt{5}} = \frac{30}{\sqrt{5}} = 6\sqrt{5}\ . \end{aligned}$$

Príklad 53 Vypočítajte deriváciu funkcie $g(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ v bode $[1,1]$ v smere vektora $\mathbf{v} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$.

Riešenie: Z vektora $\mathbf{v}$ vytvoríme jednotkový vektor $\mathbf{u}$ tým, že súradnice vektora $\mathbf{v}$ vynásobíme prevrátenou hodnotou jeho dĺžky. Dĺžka vektora $\mathbf{v}$ je

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100} = 10,$$

a príslušný jednotkový vektor je

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{8}{10}\mathbf{i} + \frac{6}{10}\mathbf{j} = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}.$$

Teraz vypočítame hodnotu gradientu funkcie g v bode $A = [1,1]$

$$\begin{aligned}
\nabla g_A &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)_A \mathbf{i} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_A \mathbf{j} = \\
&= \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)_A \mathbf{i} + \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)_A \mathbf{j} = \\
&= \left(\frac{2}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{2}{2}\right)\mathbf{j} = \\
&= 1\mathbf{i} + 1\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Dosadíme do vzorca pre výpočet derivácie v smere

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}}\, g(1,1) &= \nabla g_A \cdot \mathbf{u} = (1\mathbf{i} + 1\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}\right) = \\
&= 1 \cdot \frac{4}{5} + 1 \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{5}\ .
\end{aligned}$$

Príklad 54 Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x,y) = \sqrt{25-x^2-y^2}$ v bode $[3,2]$ v smere vektora $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$.

Riešenie: Z vektora $\mathbf{v}$ vytvoríme jednotkový vektor $\mathbf{u}$. Pretože dĺžka vektora $\mathbf{v}$ je $|\mathbf{v}| = \sqrt{(-4)^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$ príslušný jednotkový vektor je

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{-4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}.$$

Vypočítame hodnotu gradientu funkcie f v bode $A = [3, 2]$

$$\begin{aligned}
\nabla f_A &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_A \mathbf{j} = \\
&= \left(\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2-y^2}}\right)_A \mathbf{i} + \left(\frac{-2y}{2\sqrt{25-x^2-y^2}}\right)_A \mathbf{j} = \\
&= \left(\frac{-x}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\right)_A \mathbf{i} + \left(\frac{-y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\right)_A \mathbf{j} = \\
&= \left(\frac{-3}{\sqrt{12}}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{-2}{\sqrt{12}}\right) \mathbf{j} = \left(\frac{-3}{2\sqrt{3}}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{-2}{2\sqrt{3}}\right) \mathbf{j} = \\
&= \left(\frac{-3\sqrt{3}}{2\cdot 3}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{-2\sqrt{3}}{2\cdot 3}\right) \mathbf{j} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{j}
\end{aligned}$$

a dosadíme do vzorca pre výpočet derivácie v smere

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{u}} f(1,1) &= \nabla f_A \cdot \mathbf{u} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{3}\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{-4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}\right) = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{5} - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5}.
\end{aligned}$$

Príklad 55 Vypočítajte deriváciu funkcie $f(x, y) = \arcsin(x - 2y)$ v bode $[2, 1]$ v smere vektora $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$.

Riešenie: Z vektora $\mathbf{v}$ vytvoríme jednotkový vektor $\mathbf{u}$. Pretože dĺžka vektora $\mathbf{v}$ je $|\mathbf{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, príslušný jednotkový vektor je

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j}).$$

Vypočítame hodnotu gradientu funkcie f v bode $A = [2, 1]$

$$\begin{aligned}
\nabla f_A &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_A \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_A \mathbf{j} = \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{1-(x-2y)^2}}\right)_A \mathbf{i} + \left(\frac{-2}{\sqrt{1-(x-2y)^2}}\right)_A \mathbf{j} = \\
&= \mathbf{i} - 2\mathbf{j}.
\end{aligned}$$

Podľa vzorca pre výpočet derivácie v smere dostávame

$$D_{\mathbf{u}} f(1,1) = \nabla f_A \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{j})\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

2.2.3 Prvý diferenciál funkcie

- Predpokladajme, že $f(x_1, \ldots, x_n)$ má spojité parciálne derivácie podľa všetkých n premenných v bode $A = [a_1, \ldots, a_n]$. Výraz

$$\begin{aligned} df(x_1, \ldots, x_n)_A &= f_{x_1}(a_1, \ldots, a_n) \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + \\ &\quad + \cdots + f_{x_n}(a_1, \ldots, a_n) \cdot (x_n - a_n) = \\ &= f_{x_1}(A) \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + f_{x_n}(A) \cdot (x_n - a_n) \end{aligned}$$

  nazývame **prvým (totálnym) diferenciálom funkcie** f v bode $A = [a_1, \ldots, a_n]$.

- Totálny diferenciál reprezentuje **približnú veľkosť zmeny** hodnoty funkcie f v bode $[x_1, \ldots, x_n]$ v porovnaní s hodnotou v bode $[a_1, \ldots, a_n]$, a používa sa na výpočet približných hodnôt

$$f(x_1, \ldots, x_n) \approx f(a_1, \ldots, a_n) + df(x_1, \ldots, x_n)_A.$$

Príklad 56 O koľko percent sa zmení objem kužeľa, ak sa jeho polomer zväčší o 3 percentá a výška o 6 percent?

Riešenie: Objem kužeľa je daný vzorcom

$$V = V(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

kde r je polomer a h je výška kužeľa. Veľkosť zmeny hodnôt funkcie V v nejakom bode $[r, h]$ v porovnaní s hodnotou v bode $A = [r_0, h_0]$ možno približne odhadnúť jej totálnym diferenciálom dV. Všeobecný vzťah pre totálny diferenciál

$$df(x, y)_A = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

nadobudne potom v našom označení tvar

$$dV(r, h)_A = V_r(r_0, h_0)dr + V_h(r_0, h_0)dh,$$

kde $dr = r - r_0$ a $dh = h - h_0$. Keďže nová hodnota r sa od pôvodnej hodnoty r_0 líši o plus 3 percentá, t. j. $r = 1,03r_0$, dostávame $dr = 0,03r_0$. Podobne dostávame, že $dh = 0,06h_0$.

Vypočítame hodnoty parciálnych derivácií

$$\begin{aligned} V_r(r_0,h_0) &= \frac{2}{3}\pi r_0 h_0, \\ V_h(r_0,h_0) &= \frac{1}{3}\pi r_0^2 \end{aligned}$$

a po dosadení do $dV(r,h)_A$ dostaneme

$$\begin{aligned} dV(r,h)_A &= \frac{2}{3}\pi r_0 h_0 \cdot 0,03 r_0 + \frac{1}{3}\pi r_0^2 \cdot 0,06 h_0 = \\ &= 0,02\pi r_0^2 h_0 + 0,02\pi r_0^2 h_0 = 0,04\pi r_0^2 h_0 = 0,04 \cdot V(r_0,h_0). \end{aligned}$$

Pretože $dV(r,h)_A \approx V(r,h) - V(r_0,h_0)$, vidíme, že uvedené zmeny v polomere a výške kužeľa vyvolajú zmenu objemu o približne 4 percentá.

Príklad 57 O koľko približne sa zmení uhlopriečka obdĺžnika so stranami $x = 8\,m$ a $y = 6\,m$, ak sa strana x zväčší o $2\,cm$ a strana y zmenší o $3\,cm$?

Riešenie: Veľkosť uhlopriečky vypočítame pomocou vzťahu

$$u = u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},$$

kde x a y sú dĺžky strán. Už vieme, že veľkosť zmeny hodnôt funkcie u v nejakom bode $[x,y]$ v porovnaní s hodnotou v bode $A = [x_0,y_0]$ možno približne odhadnúť jej totálnym diferenciálom. Všeobecný vzťah pre totálny diferenciál potom v našom označení nadobudne tvar

$$du(x,y)_A = u_x(A)dx + u_y(A)dy,$$

kde $dx = x - x_0$ a $dy = y - y_0$. Ak si za bod $A = [x_0,y_0]$ vyberieme napr. vrchol obdĺžnika $A = [8,6]$ dostaneme

$$\begin{aligned} u_x(A) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_A = \frac{8}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}, \\ u_y(A) &= \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_A = \frac{6}{\sqrt{8^2+6^2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

a pretože sa nová hodnota x od pôvodnej hodnoty x_0 líši o plus $2\,cm$, $dx = 0,02\,m$. Podobne dostaneme, že $dy = -0,03\,m$. Dosadíme do vzťahu pre totálny diferenciál a získame približnú hodnotu zmeny uhlopriečky

$$du(x,y)_A = \frac{4}{5}\cdot 0,02 + \frac{3}{5}\cdot(-0,03) = -\frac{0,01}{5} = -0,002\,m = -0,2\,cm\,.$$

Príklad 58 Pomocou totálneho diferenciálu približne vyčíslite $\sqrt{(12,03)^2+(8,98)^2}\,.$

Riešenie: Začneme tým, že si výraz prepíšeme do tvaru

$$\sqrt{(12,03)^2+(8,98)^2} = \sqrt{(12,00+0,03)^2+(9,00-0,02)^2}\,.$$

Na jeho približný výpočet použijeme totálny diferenciál funkcie

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

v bode $A = [x_0,y_0] = [12,9]$, pričom $dx = 0,03$ a $dy = -0,02$. Vypočítame si parciálne derivácie funkcie $f(x,y)$ podľa oboch premenných v bode A

$$\begin{aligned} f_x(A) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_A = \frac{12}{\sqrt{12^2+9^2}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}, \\ f_y(A) &= \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)_A = \frac{9}{\sqrt{12^2+9^2}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}, \end{aligned}$$

a dosadíme do vzťahu pre totálny diferenciál

$$df(x,y)_A = \frac{4}{5}\cdot 0,03 + \frac{3}{5}\cdot(-0,02) = \frac{0,06}{5} = 0,012\,.$$

Približná hodnota výrazu $\sqrt{(12,03)^2+(8,98)^2}$ potom bude

$$\begin{aligned} f(x,y) &\approx f(A) + df(x,y)_A \\ \sqrt{(12,03)^2+(8,98)^2} &\approx \sqrt{12^2+9^2} + 0,012 = 15 + 0,012 = 15,012\,. \end{aligned}$$

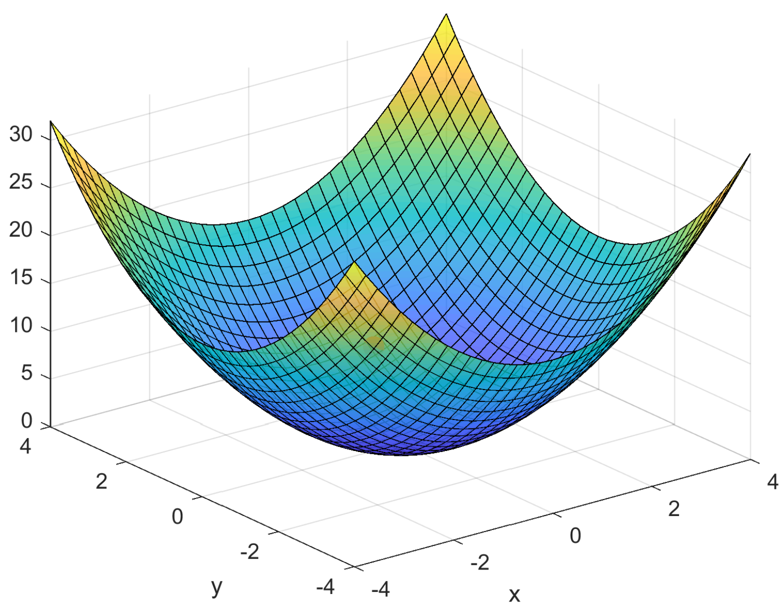
2.2.4 Dotyková rovina ku grafu funkcie

Dotyková rovina k ploche $z = f(x, y)$ v bode $A = [x_0, y_0]$ je daná rovnicou

$$\begin{aligned} z &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)\cdot(y - y_0) = \\ &= f(A) + f_x(A)\cdot(x - x_0) + f_y(A)\cdot(y - y_0) = \\ &= f(A) + df(x, y)_A, \end{aligned}$$

kde $f_x(A) = f_x(x_0, y_0)$ označuje parciálnu deriváciu funkcie $f(x, y)$ v bode $A = [x_0, y_0]$ vzhľadom na premennú x, $f_y(A) = f_y(x_0, y_0)$ parciálnu deriváciu funkcie $f(x, y)$ v bode $A = [x_0, y_0]$ vzhľadom na premennú y a $df(x, y)_A$ označuje prvý diferenciál funkcie $f(x, y)$ v bode $A = [x_0, y_0]$.

Príklad 59 Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche danej rovnicou $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bode $A = [1, 2]$.



Obr. 2.2.8. Plocha daná rovnicou $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Riešenie: Na dosadenie do rovnice dotykovej roviny ku ploche potrebujeme vypočítať hodnoty $f(A)$, $f_x(A)$ a $f_y(A)$ pre bod $A = [x_0, y_0] = [1, 2]$. Postupne dostávame:

$$\begin{aligned} f(A) &= (x^2+y^2)_A = 1^2+2^2 = 5, \\ f_x(A) &= (2x)_A = 2\cdot 1 = 2, \\ f_y(A) &= (2y)_A = 2\cdot 2 = 4. \end{aligned}$$

Dosadením do všeobecnej rovnice dotykovej roviny

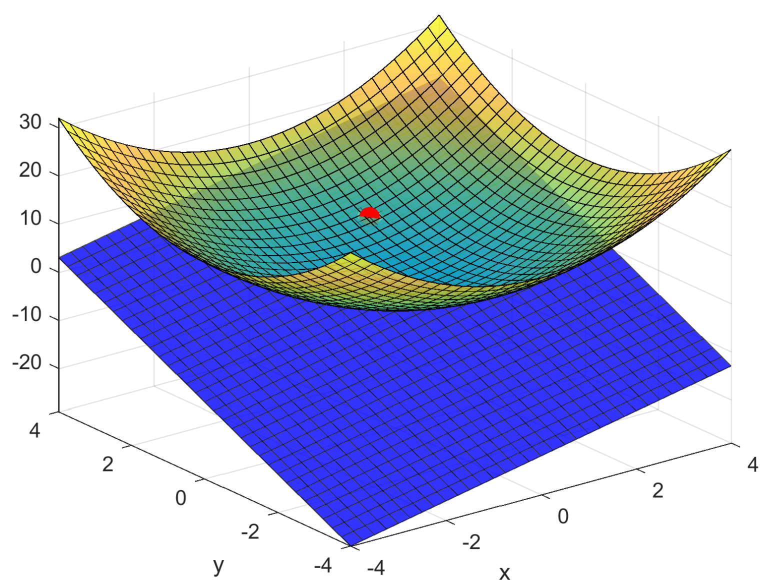
$$z = f(A) + f_x(A)\cdot(x - x_0) + f_y(A)\cdot(y - y_0)$$

vidíme, že hľadaná rovnica dotykovej roviny je

$$z = 5 + 2(x-1) + 4(y-2).$$

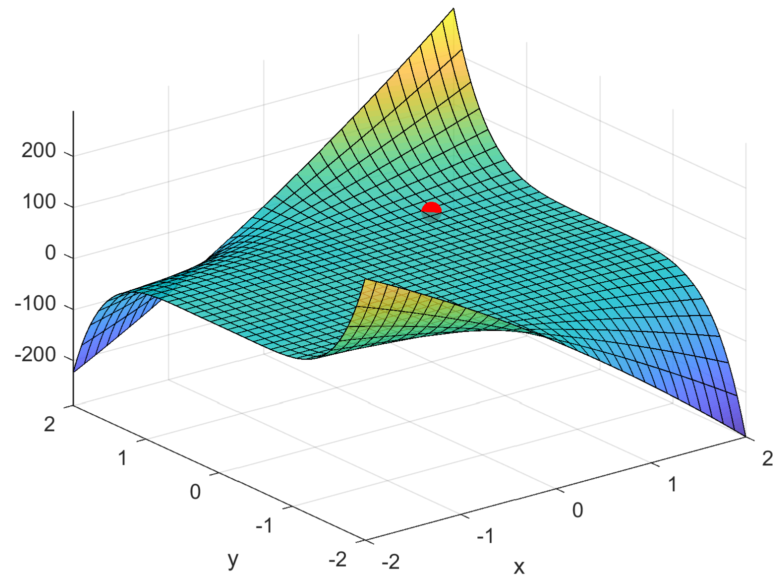
Po úprave máme všeobecnú rovnicu roviny

$$2x + 4y - z - 5 = 0.$$



Obr. 2.2.9. Plocha daná rovnicou $f(x,y) = x^2 + y^2$ s dotykovou rovinou v bode $A = [1, 2]$.

Príklad 60 Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche danej rovnicou $f(x, y) = x^2y^3 + 4xy^5$ v bode $A = [1, 1]$.



Obr. 2.2.10. Plocha daná rovnicou $f(x,y)=x^2y^3+4xy^5$ s vyznačeným bodom $A=[1,1]$.

Riešenie: Postupne vypočítame hodnoty $f(A)$, $f_x(A)$ a $f_y(A)$ pre bod $A=[x_0,y_0]=[1,1]$:

$$\begin{aligned}
f(A) &= (x^2y^3+4xy^5)_A = 1^2\cdot 1^3+4\cdot 1\cdot 1^5 = 5,\\
f_x(A) &= (2xy^3+4y^5)_A = 2\cdot 1\cdot 1^3+4\cdot 1^5 = 6,\\
f_y(A) &= (3x^2y^2+20xy^4)_A = 3\cdot 1^2\cdot 1^2+20\cdot 1\cdot 1^4 = 23,
\end{aligned}$$

dosadíme do všeobecnej rovnice dotykovej roviny

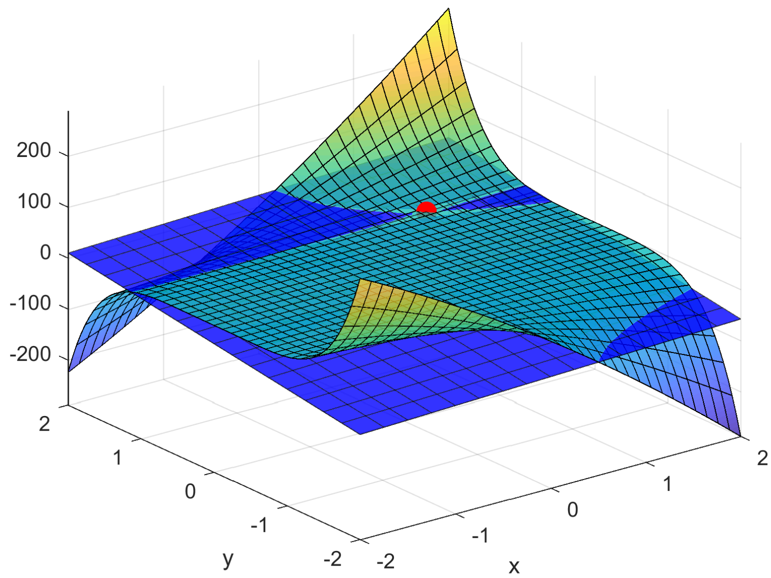
$$z = f(A)+f_x(A)\cdot(x-x_0)+f_y(A)\cdot(y-y_0)$$

a dostaneme

$$z = 5+6(x-1)+23(y-1).$$

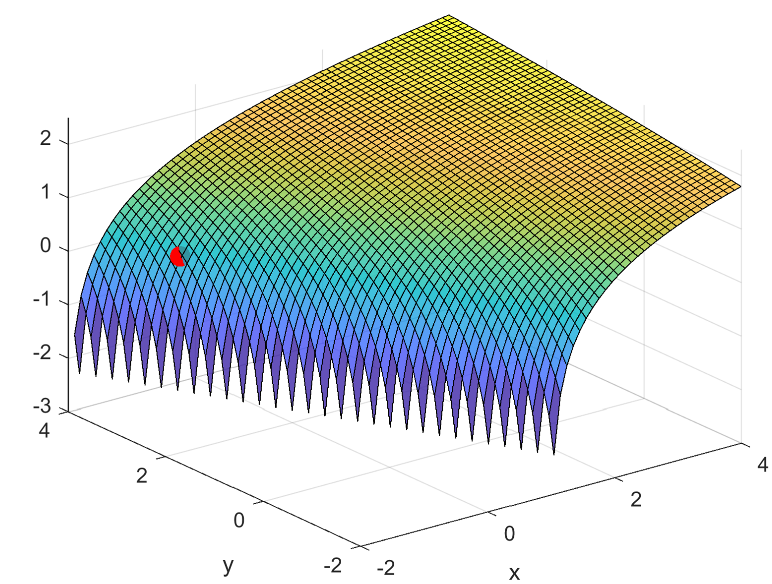
Po úprave sme získali všeobecnú rovnicu roviny

$$6x+23y-z-24=0.$$



Obr. 2.2.11. Plocha daná rovnicou $f(x, y) = x^2y^3 + 4xy^5$ s dotykovou rovinou v bode $A = [1, 1]$.

Príklad 61 Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche danej rovnicou $z = \ln(2x + y)$ v bode $A = [-1, 3]$.



Obr. 2.2.12. Plocha daná rovnicou $z = \ln(2x + y)$ s vyznačeným bodom $A = [-1, 3]$.

Riešenie: Vypočítame hodnoty $f(A)$, $f_x(A)$ a $f_y(A)$ pre bod $A = [x_0, y_0] = [-1, 3]$:

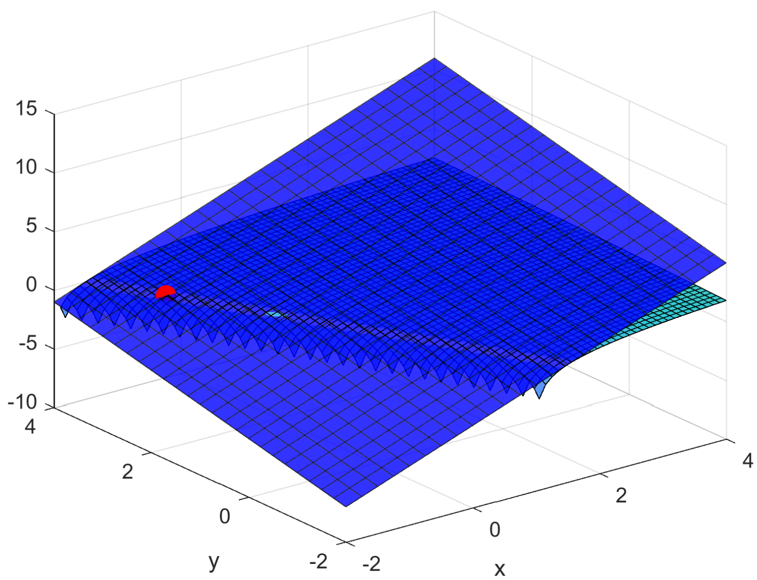
$$\begin{aligned}
f(A) &= \ln(2x+y)_A = \ln(2\cdot(-1)+3) = \ln 1 = 0,\\
f_x(A) &= \left(\frac{2}{2x+y}\right)_A = \frac{2}{2\cdot(-1)+3} = 2,\\
f_y(A) &= \left(\frac{1}{2x+y}\right)_A = \frac{1}{2\cdot(-1)+3} = 1,
\end{aligned}$$

dosadíme do všeobecnej rovnice dotykovej roviny a dostaneme

$$z = 0 + 2(x+1) + 1(y-3).$$

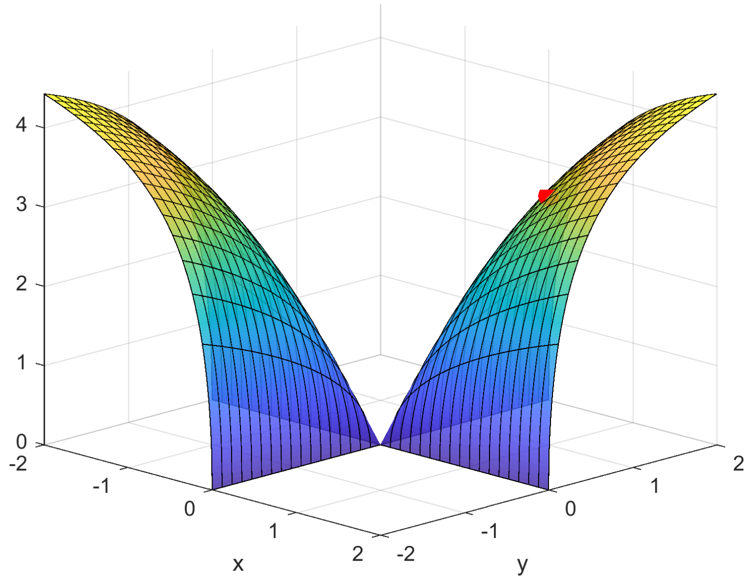
Ešte upravíme na tvar

$$2x + y - z - 1 = 0.$$



Obr. 2.2.13. Plocha daná rovnicou $z = \ln(2x+y)$ s dotykovou rovinou v bode $A = [-1, 3]$.

Príklad 62 Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche danej rovnicou $z = 4\arctan\sqrt{xy}$ v bode $A = [1, 1]$.



Obr. 2.2.14. Plocha daná rovnicou $z = 4\arctan\sqrt{xy}$ s vyznačeným bodom $A = [1, 1]$.

Riešenie: Vypočítame si hodnoty $f(A)$, $f_x(A)$ a $f_y(A)$ pre bod $A = [x_0, y_0] = [1, 1]$. Postupne dostávame:

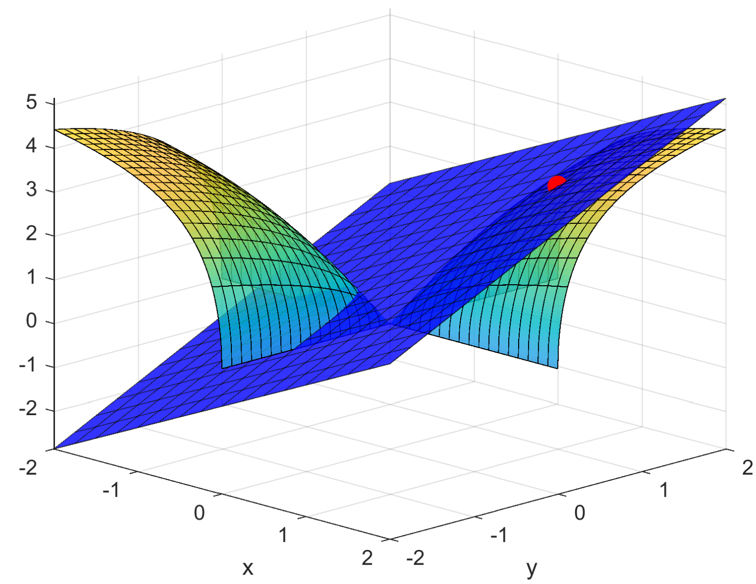
$$
\begin{aligned}
f(A) &= (4\arctan\sqrt{xy})_A = 4\arctan\sqrt{1\cdot 1} = 4\arctan 1 = 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi,\\
f_x(A) &= \left(4\cdot\frac{1}{1+xy}\cdot\frac{1}{2\sqrt{xy}}\cdot y\right)_A = 4\cdot\frac{1}{1+1}\cdot\frac{1}{2\cdot 1}\cdot 1 = 1,\\
f_y(A) &= \left(4\cdot\frac{1}{1+xy}\cdot\frac{1}{2\sqrt{xy}}\cdot x\right)_A = 4\cdot\frac{1}{1+1}\cdot\frac{1}{2\cdot 1}\cdot 1 = 1.
\end{aligned}
$$

Dosadením do rovnice dotykovej roviny získame rovnicu

$$z = \pi + (x-1)\cdot 1 + (y-1)\cdot 1,$$

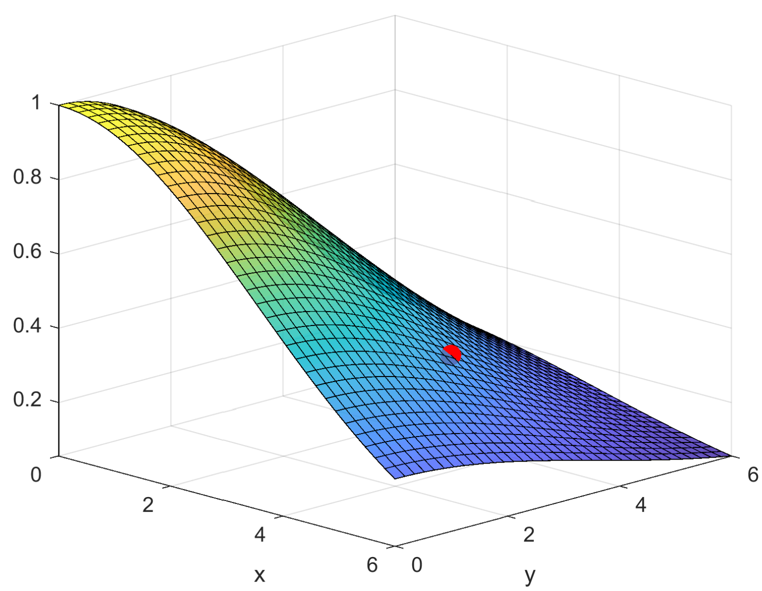
ktorú upravíme na všeobecný tvar

$$x + y - z + (\pi - 2) = 0.$$



Obr. 2.2.15. Plocha daná rovnicou $z = 4 \arctan \sqrt{xy}$ s dotykovou rovinou v bode $A = [1, 1]$.

Príklad 63 Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche danej rovnicou $f(x, y) = e^{\frac{-(x^2+y^2)}{25}}$ v bode $A = [4, 3]$.



Obr. 2.2.16. Plocha daná rovnicou $z = e^{\frac{-(x^2+y^2)}{25}}$ s vyznačeným bodom $A = [4, 3]$.

Riešenie: Opäť vypočítame najskôr hodnoty $f(A)$, $f_x(A)$ a $f_y(A)$ pre bod $A = [x_0, y_0] = [4, 3]$:

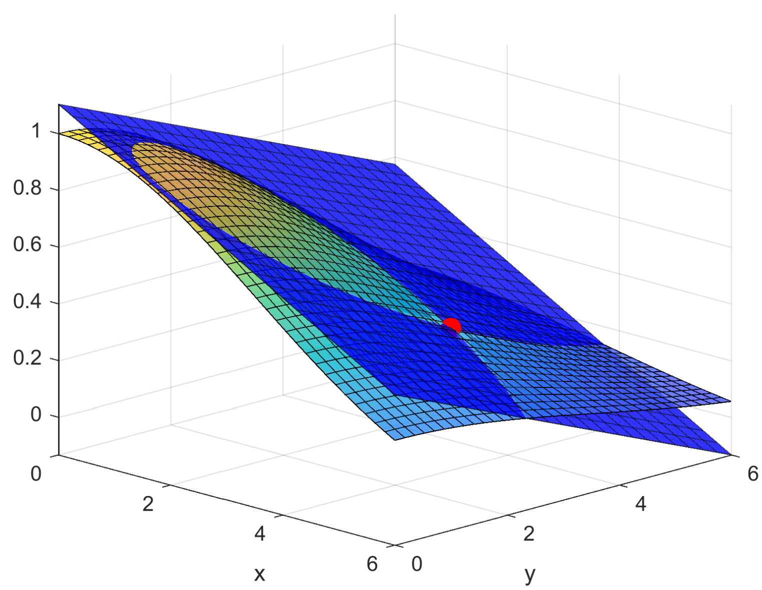
$$
\begin{aligned}
f(A) &= \left(e^{\frac{-(x^2+y^2)}{25}}\right)_A = e^{\frac{-(4^2+3^2)}{25}} = e^{\frac{-25}{25}} = e^{-1},\\
f_x(A) &= \left(e^{\frac{-(x^2+y^2)}{25}} \cdot \left(\frac{-2x}{25}\right)\right)_A = e^{\frac{-(4^2+3^2)}{25}} \cdot \left(\frac{-2\cdot 4}{25}\right) = -\frac{8}{25}e^{-1},\\
f_y(A) &= \left(e^{\frac{-(x^2+y^2)}{25}} \cdot \left(\frac{-2y}{25}\right)\right)_A = e^{\frac{-(4^2+3^2)}{25}} \cdot \left(\frac{-2\cdot 3}{25}\right) = -\frac{6}{25}e^{-1}
\end{aligned}
$$

a následne ich dosadíme do rovnice dotykovej roviny

$$z = e^{-1} - \frac{8e^{-1}}{25}(x-4) - \frac{6e^{-1}}{25}(y-3).$$

Po úprave dostávame

$$8x + 6y + 25ez - 75 = 0.$$



Obr. 2.2.17. Plocha daná rovnicou $z = e^{\frac{-(x^2+y^2)}{25}}$ s dotykovou rovinou v bode $A = [4, 3]$.

2.2.5 Taylorov rozvoj funkcie dvoch premenných

Parciálne derivácie parciálnych derivácií funkcie $f(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right), \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right),$$

sa nazývajú **druhé parciálne derivácie**, alebo **parciálne derivácie druhého rádu**. Obvykle sa s nimi stretneme v skrátenej forme v tvare

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2} = f_{x_1 x_1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = f_{x_1 x_2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = f_{x_2 x_1}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2} = f_{x_2 x_2}.$$

Taylorov rozvoj funkcie $f(x, y)$ stupňa $m = 2$ v bode $A[x_0, y_0]$ potom zapisujeme v tvare

$$\begin{aligned} T_2(f, A) &= f(A) + f_x(A)(x - x_0) + f_y(A)(y - y_0) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(A)(x - x_0)^2 + 2 f_{xy}(A)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(A)(y - y_0)^2\right], \end{aligned}$$

respektíve prehľadnejšie pomocou prvého $df(x, y)_A$ a druhého $d^2 f(x, y)_A$ diferenciálu

$$T_2(f, A) = f(A) + df(x, y)_A + \frac{1}{2!} d^2 f(x, y)_A.$$

Príklad 64 Zostrojte Taylorov rozvoj funkcie $f(x, y) = e^x \sin y$ stupňa $m = 2$ so stredom v bode $A = [0, 0]$.

Postupne vypočítame všetky potrebné parciálne derivácie

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= e^x \sin y, \\ f_y(x, y) &= e^x \cos y, \\ f_{xx}(x, y) &= e^x \sin y, \\ f_{xy}(x, y) &= e^x \cos y, \\ f_{yy}(x, y) &= -e^x \sin y \end{aligned}$$

v bode $A = [0, 0]$

$$f(A) = e^0 \sin 0 = 0,$$

$$\begin{aligned}
f_x(A) &= e^0 \sin 0 = 0, \\
f_y(A) &= e^0 \cos 0 = 1, \\
f_{xx}(A) &= e^0 \sin 0 = 0, \\
f_{xy}(A) &= e^0 \cos 0 = 1, \\
f_{yy}(A) &= -e^0 \sin 0 = 0.
\end{aligned}$$

Teraz ich dosadíme do všeobecného vzťahu pre Taylorov rozvoj druhého stupňa

$$\begin{aligned}
T_2(f, A) &= f(A) + f_x(A)(x - x_0) + f_y(A)(y - y_0) + \\
&+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(A)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(A)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(A)(y - y_0)^2\right],
\end{aligned}$$

čím získame

$$T_2(f, A) = 0 + 0(x - 0) + 1(y - 0) + \frac{1}{2}\left[0(x - 0)^2 + 2 \cdot 1(x - 0)(y - 0) + 0(y - 0)^2\right]$$

a upravíme na tvar

$$T_2(f, A) = y + xy\cdot$$

Príklad 65 Zostrojte Taylorov polynóm druhého stupňa $T_2(x, y)$ so stredom v bode $A = [0, 0]$ pre funkciu $f(x, y) = e^{xy+2x+y^2}$.

Postupne vypočítame všetky potrebné hodnoty

$$\begin{aligned}
f(0, 0) &= e^0 = 1, \\
f_x(x, y) &= e^{xy+2x+y^2} \cdot (y + 2) \implies f_x(A) = e^0 \cdot (0 + 2) = 2, \\
f_y(x, y) &= e^{xy+2x+y^2}(x + 2y) \implies f_y(A) = e^0(0 + 2 \cdot 0) = 0, \\
f_{xx}(x, y) &= (y + 2)^2 e^{xy+2x+y^2} \implies f_{xx}(A) = (0 + 2)^2 e^0 = 4, \\
f_{xy}(x, y) &= (y + 2)e^{xy+2x+y^2}(x + 2y) + e^{xy+2x+y^2} \implies f_{xy}(A) = 2 \cdot e^0 \cdot 0 + e^0 = 1, \\
f_{yy}(x, y) &= e^{xy+2x+y^2}(x + 2y)^2 + 2e^{xy+2x+y^2} \implies f_{yy}(A) = e^0(0 + 2 \cdot 0)^2 + 2e^0 = 2,
\end{aligned}$$

ktoré dosadíme do všeobecného vzťahu pre Taylorov polynóm druhého stupňa

$$\begin{aligned}
T_2(f, A) &= f(A) + f_x(A)(x - x_0) + f_y(A)(y - y_0) + \\
&+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(A)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(A)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(A)(y - y_0)^2\right],
\end{aligned}$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} T_2(f,A) &= 1+2(x-0)+0(y-0)+\frac{1}{2}\left[4(x-0)^2+2\cdot 1(x-0)(y-0)+2(y-0)^2\right] \\ &= 1+2x+2x^2+xy+y^2\cdot \end{aligned}$$

Príklad 66 Zostrojte Taylorov polynóm druhého stupňa $T_2(x,y)$ so stredom v bode $A=[1,1]$ pre funkciu $f(x,y)=x^y$.

Riešenie: Začneme tým, že si vypočítame $f(A)$

$$f(A)=f(A)=1^1=1,$$

a potom postupne vypočítame všetky parciálne derivácie potrebných stupňov funkcie $f(x,y)$ v bode A:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= yx^{y-1} \implies f_x(A)=1\cdot 1^0=1, \\ f_y(x,y) &= x^y\ln x \implies f_y(A)=1^1\ln 1=0, \\ f_{xx}(x,y) &= y(y-1)x^{y-2} \implies f_{xx}(A)=1\cdot 0\cdot 1^{-1}=0, \\ f_{xy}(x,y) &= 1\cdot x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x \implies f_{xy}(A)=1^0+1\cdot 1^0\ln 1=1, \\ f_{yy}(x,y) &= x^y\ln^2 x \implies f_{yy}(A)=1^1\ln^2 1=0. \end{aligned}$$

Dosadíme ich do všeobecného vzťahu pre Taylorov polynóm druhého stupňa

$$\begin{aligned} T_2(f,A) &= f(A)+f_x(A)(x-x_0)+f_y(A)(y-y_0)+ \\ &+ \frac{1}{2}\left[f_{xx}(A)(x-x_0)^2+2f_{xy}(A)(x-x_0)(y-y_0)+f_{yy}(A)(y-y_0)^2\right], \end{aligned}$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} T_2(f,A) &= 1+1(x-1)+0(y-1)+\frac{1}{2}\left[0(x-1)^2+2(x-1)(y-1)+0(y-1)^2\right] \\ &= 1+1(x-1)+(x-1)(y-1)\cdot \end{aligned}$$

Po úprave máme

$$T_2(f,A) = 1+y+xy\cdot$$

2.3 Extrémy funkcií dvoch premenných

2.3.1 Lokálne extrémy

D-test pre lokálne extrémy funkcie dvoch premenných. Nech bod $A = [x_0, y_0]$ je stacionárnym bodom funkcie $f = f(x, y)$, t. j. bodom, v ktorom má funkcia f prvé parciálne derivácie podľa všetkých premenných nulové. Ďalej nech f má v nejakom okolí bodu A spojité druhé parciálne derivácie f_{xx}, f_{yy} a f_{xy}, a nech

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx}(A) & f_{xy}(A) \\ f_{xy}(A) & f_{yy}(A) \end{vmatrix} = f_{xx}(A) \cdot f_{yy}(A) - (f_{xy}(A))^2.$$

Potom platí:

a) Ak $D > 0$ a $f_{xx}(A) < 0$, tak funkcia f má v bode A **lokálne maximum**.

b) Ak $D > 0$ a $f_{xx}(A) > 0$, tak funkcia f má v bode A **lokálne minimum**.

c) Ak $D < 0$, tak A je **sedlovým bodom funkcie** f.

d) Ak $D = 0$, tak touto metódou nevieme rozhodnúť, ako sa funkcia f správa v stacionárnom bode A.

Príklad 67 Nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$.

Riešenie: Daná funkcia je definovaná v každom bode roviny R^2 a má tam aj spojité parciálne derivácie (preto nemá kritické body). Začneme teda tým, že určíme stacionárne body. Pre parciálne derivácie funkcie $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3$ prvého rádu dostávame

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 + 3y, \\ f_y &= 3x + 3y^2. \end{aligned}$$

Stacionárne body sú určené rovnicami $f_x = f_y = 0$, t.j.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 3y &= 0, \\ 3x + 3y^2 &= 0, \end{aligned}$$

Po úprave dostaneme

$$\begin{aligned} x^2 + y &= 0, \\ x + y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvej rovnice vyjadríme $y = -x^2$, dosadíme do druhej rovnice $x+(-x^2)^2 = 0$ a upravíme na $x + x^4 = 0$, respektíve $x(1 + x^3) = 0$. Táto rovnica má dve riešenia $x_1 = 0$ a $x_2 = -1$, ktorým zodpovedajú $y_1 = 0$ a $y_2 = -1$. Získali sme teda dva stacionárne body: $A_1 = [0, 0]$ a $A_2 = [-1, -1]$.
Teraz vypočítame všetky parciálne derivácie druhého rádu, ktoré sú potrebné pre D-test

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6x, \\ f_{yy} &= 6y, \\ f_{xy} &= 3 \end{aligned}$$

a potom otestujeme obidva stacionárne body.

- Pre bod $A_1 = [0, 0]$ dostávame

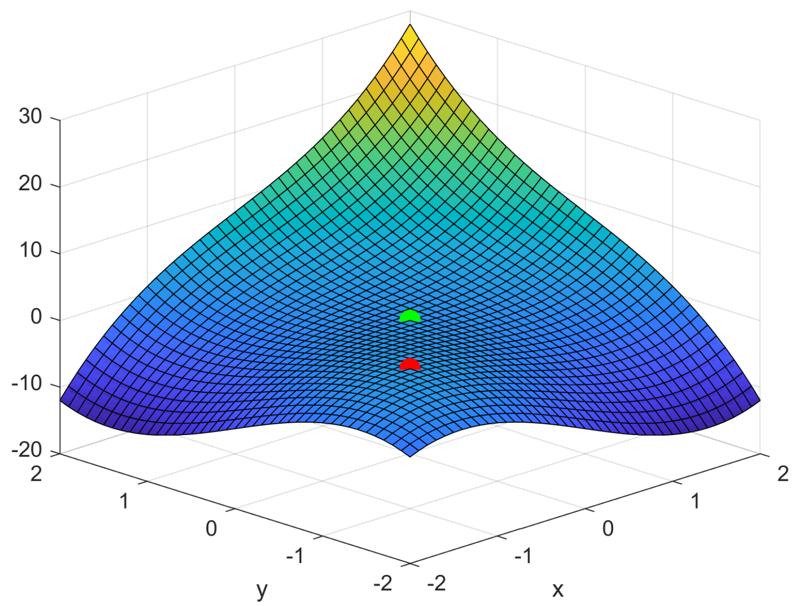
  $$\begin{aligned} f_{xx}(A_1) &= 6 \cdot 0 = 0, \\ D(A_1) &= f_{xx}(A_1) \cdot f_{yy}(A_1) - (f_{xy}(A_1))^2 = 0 \cdot 0 - 3^2 = -9 \implies D(A_1) < 0. \end{aligned}$$

  Z časti (3) formulácie D-testu vidíme, že bod A_1 je sedlovým bodom našej funkcie.

- Pre bod $A_2 = [-1, -1]$ dostávame

  $$\begin{aligned} f_{xx}(A_2) &= 6 \cdot (-1) = -6 \implies f_{xx}(A_2) < 0, \\ D(A_2) &= f_{xx}(A_2) \cdot f_{yy}(A_2) - (f_{xy}(A_2))^2 = (-6)^2 - 3^2 = 27 \implies D(A_2) > 0. \end{aligned}$$

Z časti (1) formulácie D-testu vidieť, že v bode A_2 má funkcia lokálne maximum. Hodnota tohoto lokálneho maxima je $f(A_2) = f(-1,-1) = (-1)^3 + 3\cdot(-1)\cdot(-1) + (-1)^3 = 1$, (Obr. 2.3.18).



Obr. 2.3.18. Plocha daná rovnicou $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$. Funkcia $f(x,y)$ nadobúda lokálne maximum v bode $A_2 = [-1,-1]$, ktoré je znázornené červenou značkou, s hodnotou $f(A_2) = 1$. Sedlový bod $A_1 = [0,0]$ je znázornený zelenou značkou.

Príklad 68 Nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4 - 1$.

Riešenie: Funkcia má spojité parciálne derivácie na celom definičnom obore, do ktorého patria všetky body roviny R^2, a preto nemá kritické body. Vypočítame parciálne derivácie prvého rádu podľa oboch premenných potrebné pre určenie stacionárnych bodov

$$\begin{aligned} f_x &= 4x^3 - 4y, \\ f_y &= -4x + 4y^3 \end{aligned}$$

a dosadíme do rovníc $f_x = f_y = 0$ na výpočet stacionárnych bodov, teda

$$\begin{aligned} 4x^3 - 4y &= 0, \\ -4x + 4y^3 &= 0. \end{aligned}$$

Ešte upravíme na tvar

$$\begin{aligned} x^3 - y &= 0, \\ -x + y^3 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvej rovnice vyjadríme $y = x^3$, a po dosadení do druhej rovnice $-x + (x^3)^3 = 0$ a úprave získame rovnicu $x(-1 + x^8) = 0$. Táto rovnica má tri riešenia $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ a $x_3 = -1$, ktorým prislúchajú $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ a $y_3 = -1$. Získali sme teda tri stacionárne body: $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [1, 1]$ a $A_3 = [-1, -1]$.
Teraz vypočítame parciálne derivácie druhého rádu potrebné pre D-test

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 12x^2, \\ f_{yy} &= 12y^2, \\ f_{xy} &= -4 \end{aligned}$$

a postupne otestujeme všetky tri stacionárne body.

- Pre bod $A_1 = [0, 0]$ dostávame

$$\begin{aligned} f_{xx}(A_1) &= 12 \cdot 0^2 = 0, \\ D(A_1) &= f_{xx}(A_1) \cdot f_{yy}(A_1) - (f_{xy}(A_1))^2 = 0^2 - (-4)^2 = -16 \implies D(A_1) < 0. \end{aligned}$$

  Na základe časti (3) D-testu máme, že bod A_1 je sedlovým bodom danej funkcie.

- Pre bod $A_2 = [1, 1]$ dostávame

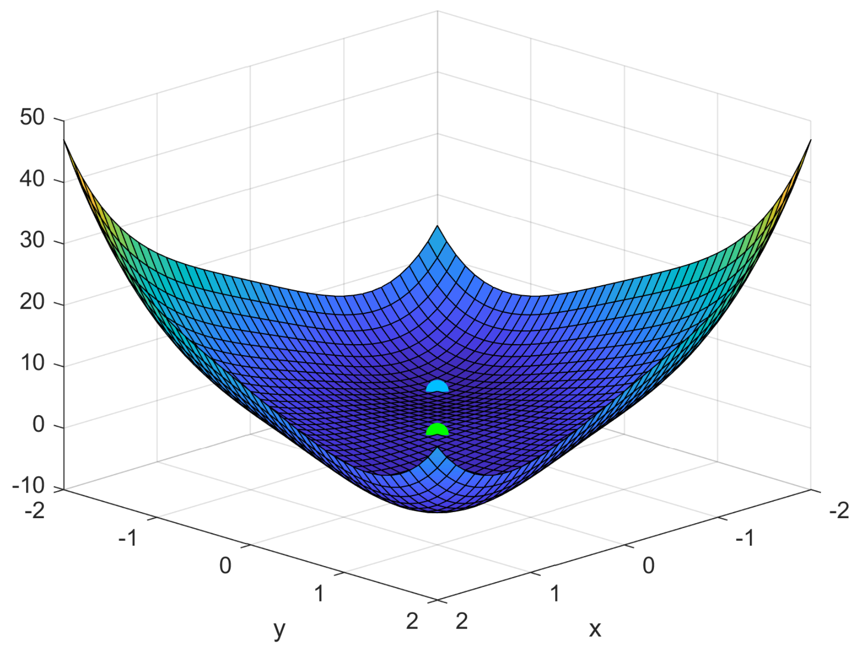
$$\begin{aligned} f_{xx}(A_2) &= 12 \cdot 1^2 = 12 \implies f_{xx}(A_2) > 0, \\ D(A_2) &= f_{xx}(A_2) \cdot f_{yy}(A_2) - (f_{xy}(A_2))^2 = 12^2 - (-4)^2 = 128 \implies D(A_2) > 0. \end{aligned}$$

  Z časti (2) formulácie D-testu vidieť, že v bode A_2 má funkcia lokálne minimum. Hodnota tohoto lokálneho minima je $f(A_2) = f(1, 1) = 1^4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 + 1^4 - 1 = -3$.

- Pre bod $A_3 = [-1, -1]$ dostávame

$$\begin{aligned} f_{xx}(A_3) &= 12 \cdot (-1)^2 = 12 \implies f_{xx}(A_3) > 0, \\ D(A_3) &= f_{xx}(A_3) \cdot f_{yy}(A_3) - (f_{xy}(A_3))^2 = 144 - 16 = 128 \implies D(A_3) > 0. \end{aligned}$$

Z časti (2) formulácie D-testu máme, že v bode A_3 je lokálne minimum a jeho hodnota je $f(A_3) = f(-1,-1) = (-1)^4 - 4\cdot(-1)\cdot(-1) + (-1)^4 - 1 = -3$, (Obr. 2.3.19).



Obr. 2.3.19. Plocha daná rovnicou $f(x,y) = x^4 - 4xy + y^4 - 1$. Lokálne minimum $f(A_2) = f(A_3) = -3$, ktoré nadobúda funkcia v bodoch $A_2 = [1,1]$ a $A_3 = [-1,-1]$, je znázornené modrou farbou. Sedlový bod $A_0 = [0,0]$ je znázornený zelenou.

Príklad 69 Nájdite lokálne extrémy funkcie $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 + 19$.

Riešenie: Opäť je daná funkcia definovaná v každom bode roviny R^2 a má tam aj spojité parciálne derivácie. Po dosadení parciálnych derivácií prvého rádu

$$\begin{aligned} f_x &= 3x^2 - 6x, \\ f_y &= 3y^2 + 6y \end{aligned}$$

do rovníc $f_x = f_y = 0$ dostávame

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x &= 0, \\ 3y^2 + 6y &= 0 \end{aligned}$$

a po úprave

$$\begin{aligned} x(x-2) &= 0, \\ y(y+2) &= 0. \end{aligned}$$

Prvá rovnica má dve riešenia $x_1 = 0$ a $x_2 = 2$, druhá $y_1 = 0$ a $y_2 = -2$. Získali sme teda štyri stacionárne body: $A_1 = [0,0]$, $A_2 = [0,-2]$, $A_3 = [2,0]$ a $A_4 = [2,-2]$.
Teraz vypočítame parciálne derivácie druhého rádu

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 6x-6, \\ f_{yy} &= 6y+6, \\ f_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

a otestujeme všetky štyri stacionárne body.

- Pre bod $A_1 = [0,0]$ dostávame

$$\begin{aligned} f_{xx}(A_1) &= 6\cdot 0-6 = -6 \implies f_{xx}(A_1) < 0, \\ D(A_1) &= f_{xx}(A_1)\cdot f_{yy}(A_1) - (f_{xy}(A_1))^2 = \\ &= -6\cdot 6 - 0^2 = -36 \implies D(A_1) < 0. \end{aligned}$$

  Z formulácie D-testu vidieť, že bod A_1 je sedlovým bodom našej funkcie.

- Pre bod $A_2 = [0,-2]$ dostávame

$$\begin{aligned} f_{xx}(A_2) &= 6\cdot 0-6 = -6 \implies f_{xx}(A_2) < 0, \\ D(A_2) &= f_{xx}(A_2)\cdot f_{yy}(A_2) - (f_{xy}(A_2))^2 = \\ &= -6\cdot(6\cdot(-2)+6) - 0^2 = -6\cdot(-6) = 36 \implies D(A_2) > 0. \end{aligned}$$

  Z časti (1) formulácie D-testu vidieť, že v bode A_2 má funkcia lokálne maximum. Hodnota lokálneho maxima je $f(A_2) = f(0,-2) = 0^3+(-2)^3-3\cdot 0^2+3\cdot(-2)^2+19 = -8+12+19 = 23$.

- Pre bod $A_3 = [2, 0]$ dostávame

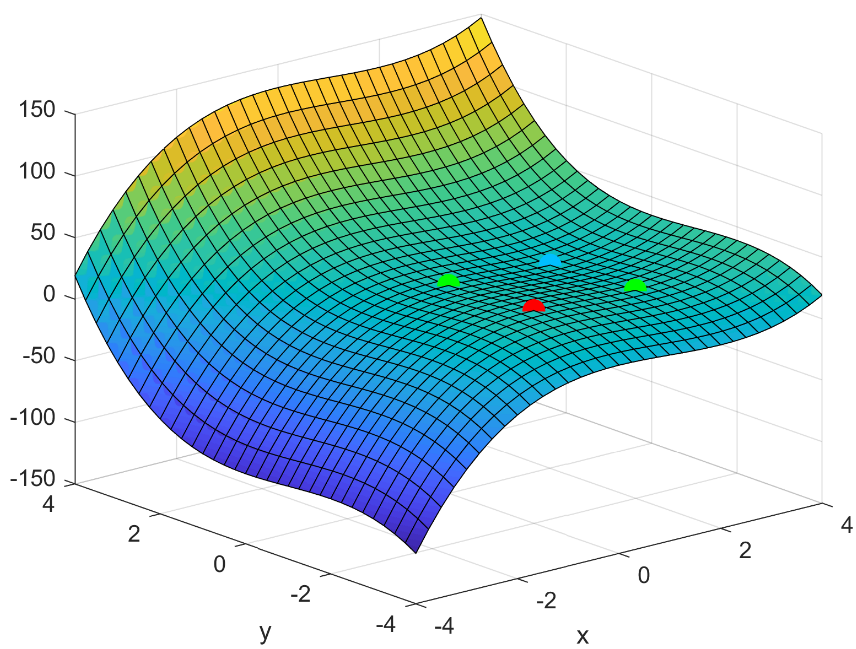
$$\begin{aligned} f_{xx}(A_3) &= 6 \cdot 2 - 6 = 6 \implies f_{xx}(A_3) > 0, \\ D(A_3) &= f_{xx}(A_3) \cdot f_{yy}(A_3) - (f_{xy}(A_3))^2 = \\ &= 6 \cdot 6 - 0^2 = 36 \implies D(A_3) > 0. \end{aligned}$$

Z časti (2) formulácie D-testu vidieť, že v A_3 je lokálne minimum a jeho hodnota je $f(A_3) = f(2, 0) = 2^3 + 0^3 - 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 0^2 + 19 = 8 - 12 + 19 = 15$.

- Pre bod $A_4 = [2, -2]$ dostávame

$$\begin{aligned} f_{xx}(A_4) &= 6 \cdot 2 - 6 = 6 \implies f_{xx}(A_4) > 0, \\ D(A_4) &= f_{xx}(A_4) \cdot f_{yy}(A_4) - (f_{xy}(A_4))^2 = \\ &= 6 \cdot (-6) - 0^2 = -36 \implies D(A_4) < 0. \end{aligned}$$

Z časti (3) D-testu máme, že bod A_4 je sedlovým bodom danej funkcie.



Obr. 2.3.20. Plocha daná rovnicou $f(x, y) = f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 3y^2 + 19$. Lokálne maximum $f(A_2) = 23$ (znázornené červenou farbou) má funkcia v bode $A_2 = [0, -2]$, lokálne minimum $f(A_3) = 15$ (znázornené modrou farbou) v bode $A_3 = [2, 0]$. Body $A_1 = [0, 0]$ a $A_4 = [2, -2]$ sú sedlovými bodmi funkcie.

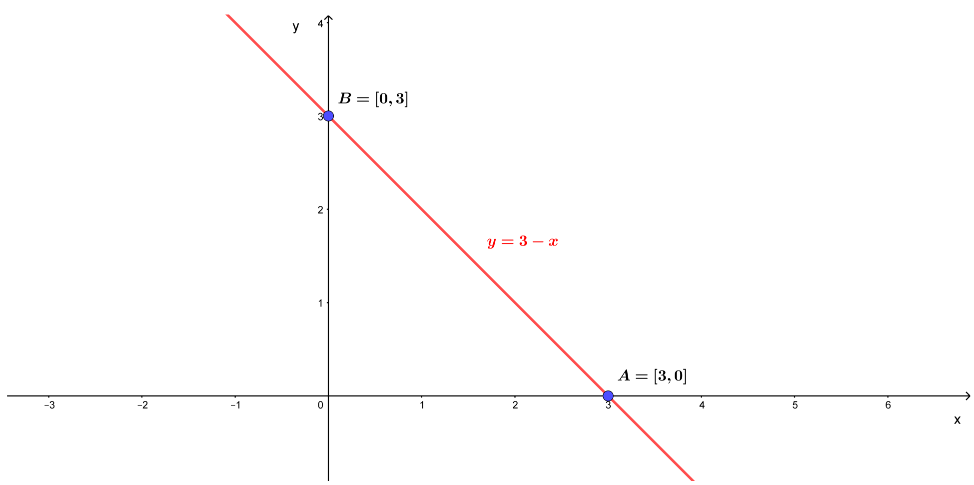
2.3.2 Viazané extrémy

Úloha o viazaných extrémoch, čiže extrémoch na hranici, v rovine znamená nájsť najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie $z = f(x, y)$ pre tie body (x, y), ktoré ležia na krivke K určenej rovnicou $g(x, y) = b$ (ohraničenie je dané „rovnosťou“). Budeme používať dve metódy výpočtu:

a) **Dosadzovacia metóda:** Ak je rovnica $g(x, y) = b$ „rozumne jednoduchá“, tak z nej vyjadríme jednu z premenných x alebo y, dosadíme ju do funkcie $z = f(x, y)$, a tým prevedieme úlohu na výpočet extrému funkcie jednej premennej, ktorú už vieme riešiť.

b) **Metóda Lagrangeových multiplikátorov:** Ak nie je rovnica $g(x, y) = b$ „rozumne jednoduchá“, vytvoríme si tzv. Lagrangeovu funkciu $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(b - g(x, y))$, kde λ označuje Lagrangeove multiplikátory, a ďalej budeme postupovať rovnako ako pri hľadaní lokálnych extrémov.

Príklad 70 Nájdite najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie $f(x, y) = x + y - xy + 1$ na priamke danej rovnicou $x + y = 3$.



Obr. 2.3.21. Priamka daná rovnicou $x + y = 3$.

Riešenie: Túto úlohu môžeme riešiť jednoducho dosadzovacou metódou. Z rovnice priamky vyjadríme y, teda $y = 3 - x$ a dosadíme do rovnice funkcie $f(x,y) = x + y - xy + 1$. Dostaneme

$$\begin{aligned} f(x, 3-x) &= x + (3-x) - x(3-x) + 1 = \\ &= x + 3 - x - 3x + x^2 + 1 = \\ &= x^2 - 3x + 4. \end{aligned}$$

Zderivujeme

$$f'(x) = 2x - 3$$

a položíme rovné nule

$$2x - 3 = 0.$$

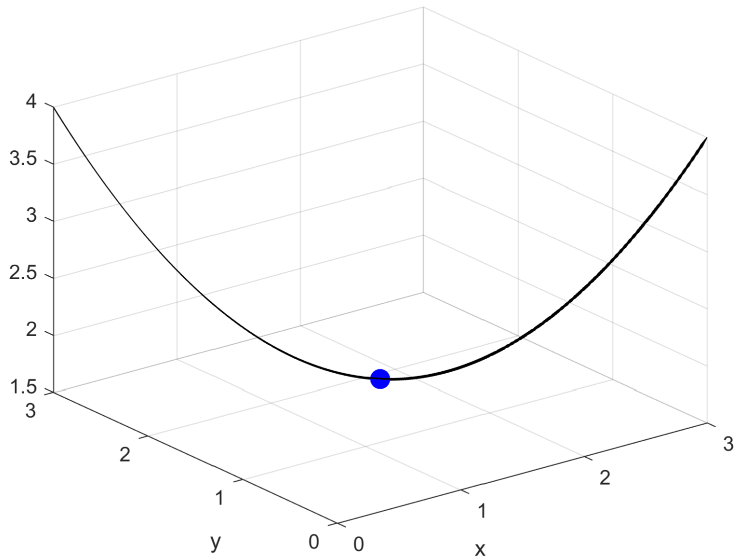
Táto rovnica má jedno riešenie $x_1 = \frac{3}{2}$, ktorému prislúcha $y_1 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. Získali sme stacionárny bod $A_1 = \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Teraz vypočítame druhú deriváciu

$$f''(x) = (2x-3)' = 2.$$

Keďže $f''\left(\frac{3}{2}\right) = 2 > 0$, v bode $A_1 = \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ má funkcia viazané minimum. Jeho hodnota je

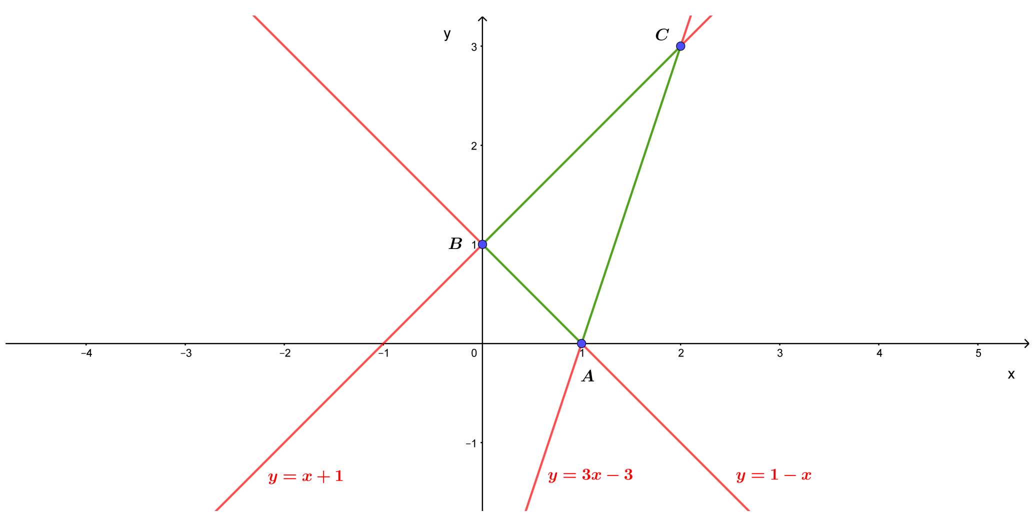
$$f(A_1) = (x + y - xy + 1)_{A_1} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{4}.$$

Záver: Najmenšia hodnota funkcie $f(x,y) = x + y - xy + 1$ na priamke danej rovnicou $x + y = 3$ je v bode $A_1 = \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $f(A_1) = \frac{7}{4}$. Najväčšiu hodnotu funkcia nemá, (Obr. 2.3.22).



Obr. 2.3.22. Najmenšia hodnota funkcie $f(x,y)=x+y-xy+1$ na priamke danej rovnicou $x+y=3$ je v bode $f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{7}{4}$. Najväčšiu hodnotu funkcia nemá.

Príklad 71 Vypočítajte najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ na hranici trojuholníka s vrcholmi $A=[1,0]$, $B=[0,1]$, $C=[2,3]$.



Obr. 2.3.23. Trojuholník s vrcholmi $A=[1,0]$, $B=[0,1]$, $C=[2,3]$.

Riešenie: Hranica trojuholníka pozostáva z troch úsečiek AB, BC a CA (Obr. 2.3.23), preto budeme postupovať tak, že postupne každú z troch úsečiek vyjadríme samostatnou rovnicou a potom budeme riešiť úlohu dosadzovacou metódou.

1) Úsečka **AB** určená rovnicou $y = 1 - x$ pre $0 \leq x \leq 1$.

   Na tejto úsečke má funkcia f tvar

$$f(x, y) = f(x, 1 - x) = x^2 - x(1 - x) + (1 - x)^2.$$

   Bude nás teda zaujímať funkcia

$$\begin{aligned} h_{AB}(x) &= f(x, 1 - x) = x^2 - x(1 - x) + (1 - x)^2 = \\ &= x^2 - x + x^2 + 1 - 2x + x^2 = 3x^2 - 3x + 1. \end{aligned}$$

   Po zderivovaní dostávame

$$h'_{AB}(x) = 6x - 3,$$

   a teda x-ová súradnica stacionárneho bodu je $x_1 = \frac{1}{2}$. Jeho y-ovú súradnicu dostaneme dosadením do rovnice priamky, t. j. $y_1 = 1 - x_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Vypočítame druhú deriváciu

$$h''_{AB}(x) = (6x - 3)' = 6 \implies h''_{AB}(x) = 6 > 0,$$

   a vidíme, že v bode $A_1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ má funkcia viazané minimum. Jeho hodnota je

$$f(A_1) = \left(x^2 - xy + y^2\right)_{A_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

2) Úsečka **BC** je daná rovnicou $y = x + 1$ pre $0 \leq x \leq 2$.

   Na tejto úsečke má funkcia f tvar

$$f(x, y) = f(x, x + 1) = x^2 - x(x + 1) + (x + 1)^2.$$

   Bude nás teda zaujímať funkcia

$$\begin{aligned} h_{BC}(x) &= f(x, x + 1) = x^2 - x(x + 1) + (x + 1)^2 = \\ &= x^2 - x^2 - x + x^2 + 2x + 1 = x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

Po zderivovaní dostávame

$$h'_{BC}(x) = 2x + 1,$$

a po vyriešení $2x+1 = 0$ máme $x = -\frac{1}{2}$. Tento bod je ale mimo intervalu $0 \leq x \leq 2$, preto ho už ďalej nebudeme uvažovať.

3) Posledná z úsečiek, úsečka **AC**, je zadaná rovnicou $y = 3x - 3$ pre $1 \leq x \leq 2$. Na tejto úsečke má funkcia f tvar

$$f(x, y) = f(x, 3x - 3) = x^2 - x(3x - 3) + (3x - 3)^2,$$

preto nás bude zaujímať funkcia

$$\begin{aligned} h_{AC}(x) &= f(x, 3x - 3) = x^2 - x(3x - 3) + (3x - 3)^2 = \\ &= x^2 - 3x^2 + 3x + 9x^2 - 18x + 9 = 7x^2 - 15x + 9. \end{aligned}$$

Po zderivovaní dostávame

$$h'_{AC}(x) = 14x - 15,$$

takže x-ová súradnica $x_2 = \frac{15}{14}$. Po dosadení do rovnice priamky

$$y_2 = 3x_2 - 3 = 3 \cdot \frac{15}{14} - 3 = \frac{3}{14}$$

získame súradnice stacionárneho bodu $A_2 = \left[\frac{15}{14}, \frac{3}{14}\right]$. Vypočítame druhú deriváciu

$$h''_{AC}(x) = (14x - 15)' = 14 \implies h''_{AC}(x) = 14 > 0,$$

preto v bode $\left[\frac{15}{14}, \frac{3}{14}\right]$ má funkcia viazané minimum a jeho hodnota je

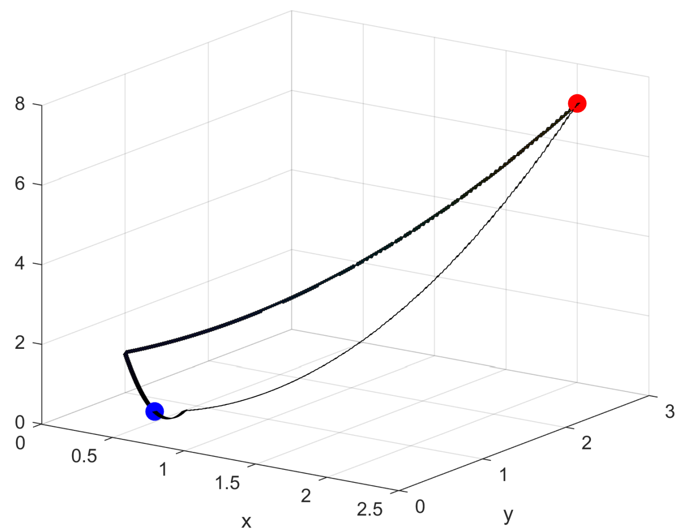
$$f(A_2) = \left(x^2 - xy + y^2\right)_{A_2} = \left(\frac{15}{14}\right)^2 - \frac{15}{14} \cdot \frac{3}{14} + \left(\frac{3}{14}\right)^2 = \frac{189}{14^2} = \frac{27}{28}.$$

Teraz ešte vypočítame funkčné hodnoty vo vrcholoch trojuholníka

$$\begin{aligned} f(A) &= \left(x^2 - xy + y^2\right)_A = 1^2 - 0 + 0^2 = 1, \\ f(B) &= \left(x^2 - xy + y^2\right)_B = 0^2 - 0 + 1^2 = 1, \\ f(C) &= \left(x^2 - xy + y^2\right)_C = 2^2 - 2 \cdot 3 + 3^2 = 7. \end{aligned}$$

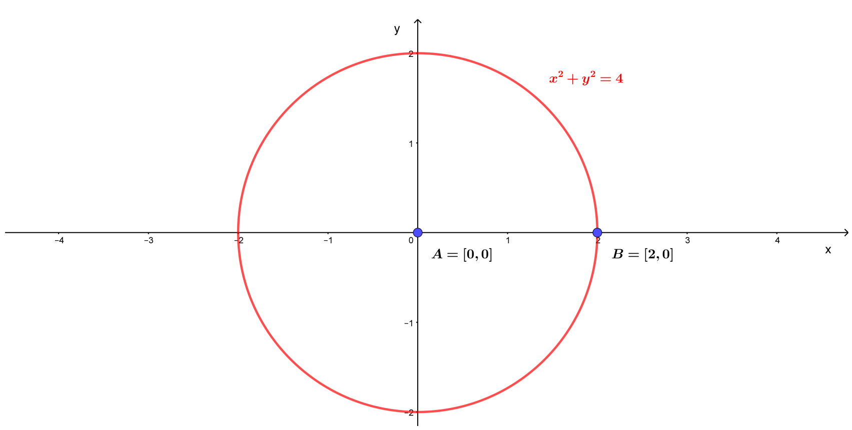
Na záver porovnáme všetky funkčné hodnoty a urobíme záver.

Záver: Najmenšia hodnota funkcie $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na hranici trojuholníka s vrcholmi $A = [1,0]$, $B = [0,1]$, $C = [2,3]$ je v bode $A_1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $f(A_1) = \frac{1}{4}$. Najväčšia hodnota je vo vrchole $C = [2,3]$, $f(C) = 7$, (Obr. 2.3.24).



Obr. 2.3.24. Najmenšia a najväčšia hodnota funkcie $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ na hranici trojuholníka s vrcholmi $A = [1,0]$, $B = [0,1]$, $C = [2,3]$ je v bode $A_1 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $f(A_1) = \frac{1}{4}$. Najväčšia hodnota je vo vrchole $C = [2,3]$, $f(C) = 7$.

Príklad 72 Nájdite viazané extrémy funkcie $f(x,y) = x + y$ pri väzbe $x^2 + y^2 = 4$.



Obr. 2.3.25. Kružnica daná rovnicou $x^2 + y^2 = 4$.

Riešenie: Túto úlohu budeme riešiť metódou Lagrangeových multiplikátorov. Lagrangeova funkcia je určená predpisom

$$L(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(4 - x^2 - y^2).$$

Vypočítame parciálne derivácie funkcie $L(x, y, \lambda)$ podľa všetkých troch premenných

$$\begin{aligned} L_x &= 1 - 2\lambda x, \\ L_y &= 1 - 2\lambda y, \\ L_\lambda &= 4 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

a položíme rovné nule

$$\begin{aligned} 1 - 2\lambda x &= 0, \\ 1 - 2\lambda y &= 0, \\ 4 - x^2 - y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvej rovnice vyjadríme premennú x

$$x = \frac{1}{2\lambda},$$

z druhej rovnice premennú y

$$y = \frac{1}{2\lambda},$$

a obe dosadíme do tretej rovnice

$$4 - \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 - \left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2 = 0.$$

Upravíme

$$\begin{aligned} 4 - \frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} &= 0 \\ 4 - \frac{1}{2\lambda^2} &= 0 \\ 8\lambda^2 - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Táto rovnica má dve riešenia

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}},\\ \lambda_2 &= -\frac{1}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Dosadíme ich do rovníc pre x a y

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{1}{2\lambda_1} = \sqrt{2},\\ y_1 &= \frac{1}{2\lambda_1} = \sqrt{2},\\ x_2 &= \frac{1}{2\lambda_2} = -\sqrt{2},\\ y_2 &= \frac{1}{2\lambda_2} = -\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Body $A_1^* = [x_1, y_1, \lambda_1] = \left[\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$ a $A_2^* = [x_2, y_2, \lambda_2] = \left[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$ sú kandidátmi na tie body, kde funkcia $f(x, y) = x + y$ dosahuje najväčšiu, resp. najmenšiu hodnotu na krivke $x^2 + y^2 = 4$. Vypočítame druhé parciálne derivácie funkcie $L(x, y, \lambda)$ podľa x a y

$$\begin{aligned}L_{xx} &= (1 - 2\lambda x)_x = -2\lambda,\\ L_{yy} &= (1 - 2\lambda y)_y = -2\lambda,\\ L_{xy} &= (1 - 2\lambda x)_y = 0\end{aligned}$$

a otestujeme obidva stacionárne body.

- Pre bod $A_1^* = \left[\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$ dostávame

$$\begin{aligned}L_{xx}(A_1^*) &= (-2) \cdot \lambda_1 = (-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \implies L_{xx}(A_1^*) < 0,\\ D(A_1^*) &= L_{xx}(A_1^*) \cdot L_{yy}(A_1^*) - (L_{xy}(A_1^*))^2 =\\ &= (-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} - 0^2 = \frac{1}{2} \implies D(A_1^*) > 0.\end{aligned}$$

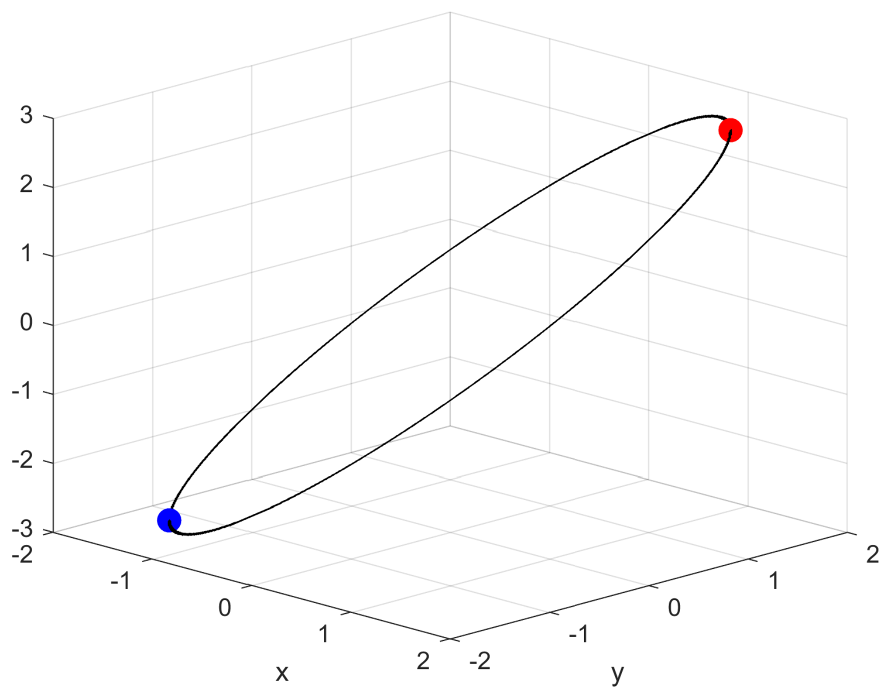
  Z formulácie D-testu vidieť, že v bode $A_1 = \left[\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ má funkcia $f(x, y)$ viazané maximum a jeho hodnota je $f(A_1) = f\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

- Pre bod $A_2^* = \left[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$ dostávame

$$\begin{aligned} L_{xx}(A_2^*) &= (-2)\cdot\lambda_2 = (-2)\cdot\frac{-1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \implies L_{xx}(A_2^*) > 0, \\ D(A_2^*) &= L_{xx}(A_2^*)\cdot L_{yy}(A_2^*) - (L_{xy}(A_2^*))^2 = \\ &= (-2)\cdot\frac{-1}{2\sqrt{2}}\cdot(-2)\cdot\frac{-1}{2\sqrt{2}} - 0^2 = \frac{1}{2} \implies D(A_2^*) > 0. \end{aligned}$$

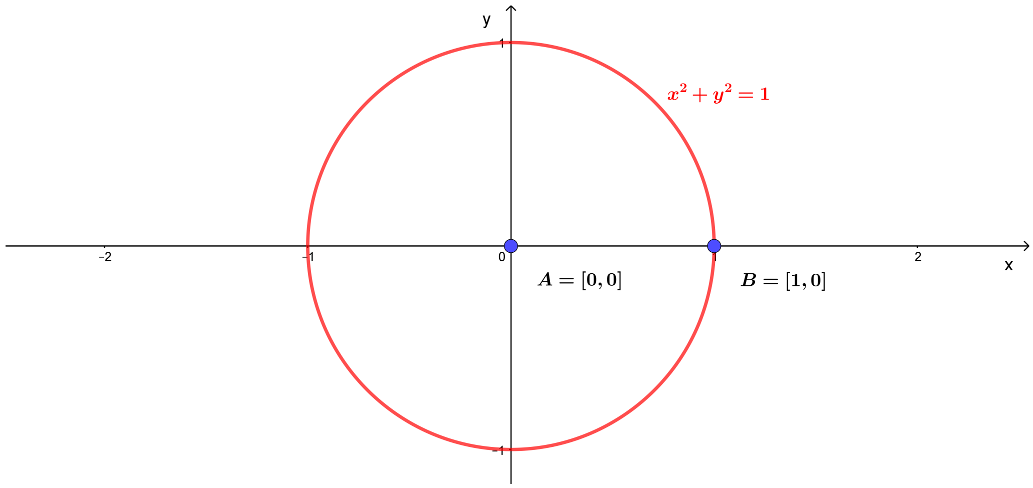
Z formulácie D-testu vidieť, že v bode $A_2 = \left[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right]$ má funkcia $f(x,y)$ viazané minimum. Hodnota viazaného minima je $f(A_2) = f\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}$.

Záver: Najväčšia hodnota funkcie $f(x,y) = x + y$ nad kružnicou s rovnicou $x^2 + y^2 = 4$ je v bode $A_1 = \left[\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, $f(A_1) = 2\sqrt{2}$. Najmenšia hodnota je v bode $A_2 = \left[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right]$, $f(A_2) = -2\sqrt{2}$, (Obr. 2.3.26).



Obr. 2.3.26. Najväčšia hodnota funkcie $f(x,y) = x+y$ pri ohraničení $x^2+y^2 = 4$ je v bode $A_1 = \left[\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, $f(A_1) = 2\sqrt{2}$ a najmenšia v bode $A_2 = \left[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right]$, $f(A_2) = -2\sqrt{2}$.

Príklad 73 Nájdite viazané extrémy funkcie $f(x,y) = y^2 - x$ pri väzbe $x^2 + y^2 = 1$.



Obr. 2.3.27. Kružnica daná rovnicou $x^2 + y^2 = 1$.

Riešenie: Túto úlohu budeme riešiť opäť Lagrangeovou metódou. Lagrangeova funkcia je daná predpisom

$$L(x, y, \lambda) = y^2 - x + \lambda(1 - x^2 - y^2).$$

Vypočítame parciálne derivácie funkcie $L(x, y, \lambda)$ podľa všetkých troch premenných

$$\begin{aligned} L_x &= -1 - 2\lambda x, \\ L_y &= 2y - 2\lambda y, \\ L_\lambda &= 1 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

a položíme ich rovné nule

$$\begin{aligned} -1 - 2\lambda x &= 0, \\ 2y - 2\lambda y &= 0, \\ 1 - x^2 - y^2 &= 0. \end{aligned}$$

Z prvej rovnice vieme vyjadriť

$$x = -\frac{1}{2\lambda},$$

respektíve

$$\lambda = -\frac{1}{2x}.$$

Druhú rovnicu vydelíme 2 a upravíme na tvar

$$y(1-\lambda)=0.$$

Táto rovnica má dve riešenia

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ \lambda &= 1. \end{aligned}$$

Do tretej rovnice najskôr dosadíme $y=0$, ktoré sme si vyjadrili z druhej rovnice

$$1-x^2=0.$$

Táto rovnica má dve riešenia $x_1=1$ a $x_2=-1$, ktorým prislúchajú $\lambda_1=-\frac{1}{2x_1}=-\frac{1}{2}$ a $\lambda_2=-\frac{1}{2x_2}=\frac{1}{2}$. Dostali sme teda dva stacionárne body $A_1^*=[x_1,y_1,\lambda_1]=\left[1,0,-\frac{1}{2}\right]$ a $A_2^*=[x_2,y_2,\lambda_2]=\left[-1,0,\frac{1}{2}\right]$.

Teraz do tretej rovnice dosadíme z prvej rovnice $x=-\frac{1}{2\lambda}$

$$1-\left(\frac{1}{2\lambda}\right)^2-y^2=0,$$

a potom z druhej rovnice $\lambda=1$,

$$1-\left(\frac{1}{2}\right)^2-y^2=0.$$

Upravíme

$$\frac{3}{4}-y^2=0.$$

Táto rovnica má opäť dve riešenia $y_3=\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $y_4=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, ktorým prislúchajú $\lambda_3=\lambda_4=1$ a $x_3=x_4=-\frac{1}{2}$. Dostali sme ďalšie dva stacionárne body $A_3^*=[x_3,y_3,\lambda_3]=\left[-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$ a $A_4^*=[x_4,y_4,\lambda_4]=\left[-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$.

Teraz vypočítame druhé parciálne derivácie funkcie $L(x,y,\lambda)$ podľa x a y

$$\begin{aligned} L_{xx} &= (-1-2\lambda x)_x=-2\lambda, \\ L_{yy} &= (2y-2\lambda y)_y=2-2\lambda, \\ L_{xy} &= (-1-2\lambda x)_y=0 \end{aligned}$$

a postupne otestujeme všetky štyri stacionárne body.

- Pre bod $A_1^* = [x_1, y_1, \lambda_1] = \left[1, 0, -\frac{1}{2}\right]$ dostávame

$$\begin{aligned} L_{xx}(A_1^*) &= -2 \cdot \lambda_1 = -2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) = 1 \implies L_{xx}(A_1^*) > 0, \\ D(A_1^*) &= L_{xx}(A_1^*) \cdot L_{yy}(A_1^*) - (L_{xy}(A_1^*))^2 = \\ &= -2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \left(2 - 2 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)\right) - 0^2 = 3 \implies D(A_1^*) > 0. \end{aligned}$$

Z formulácie D-testu vidieť, že v bode $A_1 = [1, 0]$ má funkcia viazané minimum a jeho hodnota je $f(A_1) = (y^2 - x)_{A_1} = 0^2 - 1 = -1$.

- Pre bod $A_2^* = [x_2, y_2, \lambda_2] = \left[-1, 0, \frac{1}{2}\right]$ dostávame

$$\begin{aligned} L_{xx}(A_2^*) &= -2 \cdot \lambda_2 = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1 \implies L_{xx}(A_2^*) < 0, \\ D(A_2^*) &= L_{xx}(A_2^*) \cdot L_{yy}(A_2^*) - (L_{xy}(A_2^*))^2 = \\ &= -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2 - 2 \cdot \frac{1}{2}\right) - 0^2 = -1 \implies D(A_2^*) < 0. \end{aligned}$$

Z formulácie D-testu vidíme, že bod $A_2 = (-1, 0)$ je sedlovým bodom funkcie.

- Pre bod $A_3^* = [x_3, y_3, \lambda_3] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ dostávame

$$\begin{aligned} L_{xx}(A_3^*) &= -2 \cdot \lambda_3 = -2 \cdot 1 = -2 \implies L_{xx}(A_3^*) < 0, \\ D(A_3^*) &= L_{xx}(A_3^*) \cdot L_{yy}(A_3^*) - (L_{xy}(A_3^*))^2 = \\ &= -2 \cdot 1 \cdot (2 - 2 \cdot 1) - 0^2 = 0. \end{aligned}$$

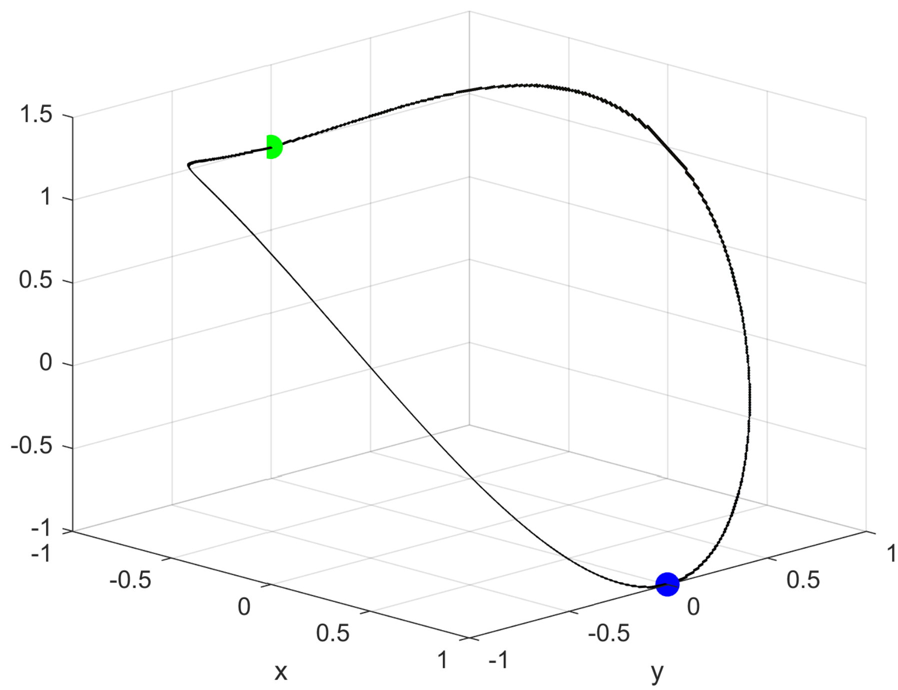
Z časti (4) formulácie D-testu vidieť, že na základe tohto testu nevieme rozhodnúť ako sa funkcia správa v bode A_3.

- Pre bod $A_4^* = [x_4, y_4, \lambda_4] = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ dostávame

$$\begin{aligned} L_{xx}(A_4^*) &= -2 \cdot \lambda_4 = -2 \cdot 1 = -2 \implies L_{xx}(A_4^*) < 0, \\ D(A_4^*) &= L_{xx}(A_4^*) \cdot L_{yy}(A_4^*) - (L_{xy}(A_4^*))^2 = \\ &= -2 \cdot 1 \cdot (2 - 2 \cdot 1) - 0^2 = 0. \end{aligned}$$

Z časti (4) formulácie D-testu vidieť, že na základe tohto testu nevieme rozhodnúť ako sa funkcia správa v bode A_4.

Záver: Najmenšia hodnota funkcie $f(x, y) = y^2 - x$ pri ohraničení danom rovnicou $x^2 + y^2 = 1$ je v bode $A_1 = [1, 0]$, $f(A_1) = -1$, (Obr. 2.3.28).



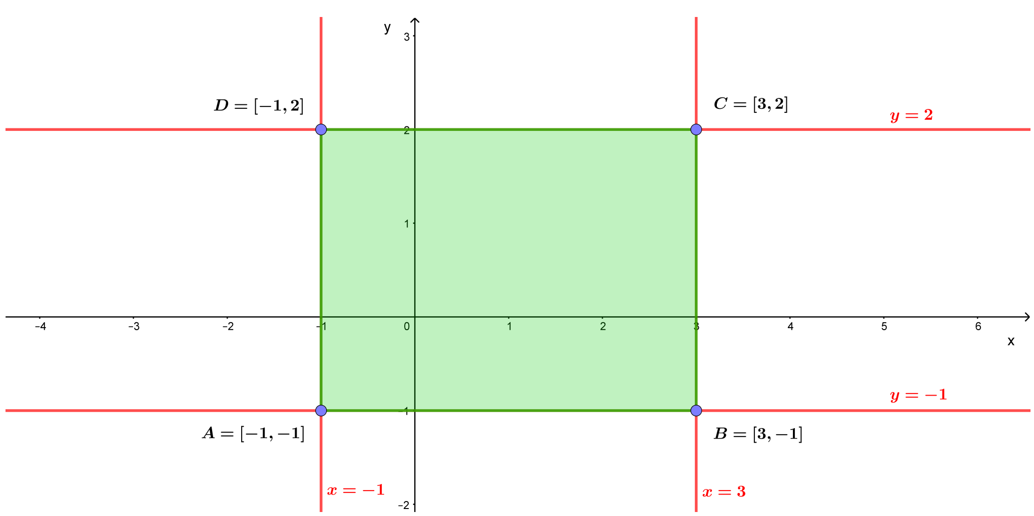
Obr. 2.3.28. Najmenšia hodnota funkcie $f(x, y) = y^2 - x$ pri väzbe $x^2 + y^2 = 1$ je v bode $A_1 = [1, 0]$, $f(A_1) = -1$ znázornená modrou farbou. Zelenou farbou je znázornený sedlový bod so súradnicami $[-1, 0]$.

2.3.3 Absolútne extrémy

Nech M je nejaká podmnožina definičného oboru funkcie $f = f(x, y)$. Hovoríme, že funkcia f má v bode $(x_0, y_0) \in M$ **absolútne maximum** na M (resp. **absolútne minimum** na M), ak $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$) pre každý bod $(x, y) \in M$.
Pri určovaní absolútnych extrémov funkcie $f = f(x, y)$ na M ohraničenej krivkou K postupujeme takto:

1. Určíme najprv tie **lokálne extrémy** funkcie f, ktoré patria do vnútra množiny M.
2. Potom vypočítame **viazané extrémy** funkcie f na hranici množiny M, ktorá je tvorená krivkou K.
3. Napokon z takto stanovených hodnôt určíme **absolútne extrémy** funkcie f na množine M porovnaním funkčných hodnôt.

Príklad 74 Vypočítajte absolútne extrémy funkcie $f(x, y) = x^2+y^2-xy+3y$ na množine M, ktorou je obdĺžnik v rovine xy s vrcholmi $A = [-1, -1]$, $B = [3, -1]$, $C = [3, 2]$ a $D = [-1, 2]$.



Obr. 2.3.29. Obdĺžnik s vrcholmi $A = [-1, -1]$, $B = [3, -1]$, $C = [3, 2]$ a $D = [-1, 2]$.

Riešenie: Budeme postupovať podľa schémy na určenie absolútnych extrémov.

1. Najprv určíme **lokálne extrémy** funkcie $f(x, y)$ patriace do vnútra obdĺžnika.
   Po dosadení parciálnych derivácií prvého rádu

   $$\begin{aligned} f_x &= 2x - y, \\ f_y &= 2y - x + 3 \end{aligned}$$

   do rovníc $f_x = 0$ a $f_y = 0$ dostávame

   $$\begin{aligned} 2x - y &= 0, \\ 2y - x + 3 &= 0. \end{aligned}$$

   Z prvej rovnice vyjadríme $y = 2x$ a dosadíme do druhej rovnice $2y - x + 3 = 0$, t.j. $2 \cdot (2x) - x + 3 = 0$. Po úpravách dostaneme $x = -1$, a teda $y = 2 \cdot (-1) = -2$. Získali sme bod so súradnicami $A_0 = [-1, -2]$, tento bod však nepatrí do našej oblasti, preto ho už ďalej nebudeme uvažovať.

2. Teraz vypočítame najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie f **na hranici** obdĺžnika. Hranica obdĺžnika pozostáva zo štyroch úsečiek AB, BC, CD a DA (Obr. 2.3.29), preto budeme postupovať tak, že postupne každú z úsečiek vyjadríme samostatnou rovnicou a budeme riešiť dosadzovacou metódou.

   - Úsečka **AB**: $y = -1$ pre $-1 \leq x \leq 3$.
     Na tejto úsečke má funkcia f tvar

     $$f(x, y) = f(x, -1) = x^2 + (-1)^2 - x \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) = x^2 + x - 2.$$

     Bude nás teda zaujímať funkcia

     $$h_{AB}(x) = x^2 + x - 2.$$

     Po zderivovaní dostávame

     $$h'_{AB}(x) = 2x + 1.$$

Stacionárny bod je $x_1 = -\frac{1}{2}$. Jeho y-ová súradnica je $y_1 = -1$. Vypočítame druhú deriváciu

$$h''_{AB}(x) = (2x+1)' = 2 \implies h''_{AB}(x) = 2 > 0.$$

Vidíme, že v bode $A_1 = \left[-\frac{1}{2}, -1\right]$ má funkcia viazané minimum. Jeho hodnota je

$$\begin{aligned} f\left(A_1\right) &= \left(x^2+y^2-xy+3y\right)_{A_1} = \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1) + 3\cdot(-1) = \\ &= \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 3 = -\frac{9}{4} = -2.25. \end{aligned}$$

- Úsečka **BC**: $x = 3$ pre $-1 \le y \le 2$.

  Na tejto úsečke má funkcia f tvar

  $$f(x,y) = f(3,y) = 3^2 + y^2 - 3\cdot y + 3y = 9 + y^2 - 3y + 3y = y^2 + 9.$$

  Bude nás teda zaujímať funkcia

  $$h_{BC}(y) = y^2 + 9.$$

  Po zderivovaní dostávame

  $$h'_{BC}(y) = 2y.$$

  Stacionárny bod je $A_2 = [3, 0]$. Vypočítame druhú deriváciu

  $$h''_{BC}(y) = (2y)' = 2 \implies h''_{BC}(y) = 2 > 0.$$

  Vidíme, že v bode $A_2 = [3, 0]$ má funkcia viazané minimum. Jeho hodnota je

  $$f(A_2) = \left(x^2+y^2-xy+3y\right)_{A_2} = 3^2 + 0^2 - 3\cdot 0 + 3\cdot 0 = 9.$$

- Úsečka **CD**: $y = 2$ pre $-1 \le x \le 3$.

  Na tejto úsečke má funkcia f tvar

  $$f(x,y) = f(x,2) = x^2 + (2)^2 - x\cdot 2 + 3\cdot 2 = x^2 - 2x + 10.$$

  Bude nás teda zaujímať funkcia

  $$h_{CD}(x) = x^2 - 2x + 10.$$

Po zderivovaní dostávame

$$h'_{CD}(x) = 2x - 2.$$

Stacionárny bod je v $x_3 = 1$ a jeho y-ová súradnica je $y_3 = 2$. Vypočítame druhú deriváciu

$$h''_{CD}(x) = (2x-2)' = 2 \implies h''_{CD}(x) = 2 > 0.$$

Vidíme, že v $A_3 = [1,2]$ má funkcia viazané minimum, ktorého hodnota je

$$\begin{aligned} f\left(A_3\right) &= \left(x^2+y^2-xy+3y\right)_{A_3} = \\ &= 1^2+2^2-1\cdot 2+3\cdot 2 = 9. \end{aligned}$$

- Úsečka **DA**: $x = -1$ pre $-1 \le y \le 2$.

  Na tejto úsečke má funkcia f tvar

  $$f(x,y) = f(-1,y) = (-1)^2+y^2-(-1)\cdot y+3y = 1+y^2+y+3y = y^2+4y+1.$$

  Bude nás teda zaujímať funkcia

  $$h_{DA}(y) = y^2+4y+1.$$

  Po zderivovaní dostávame

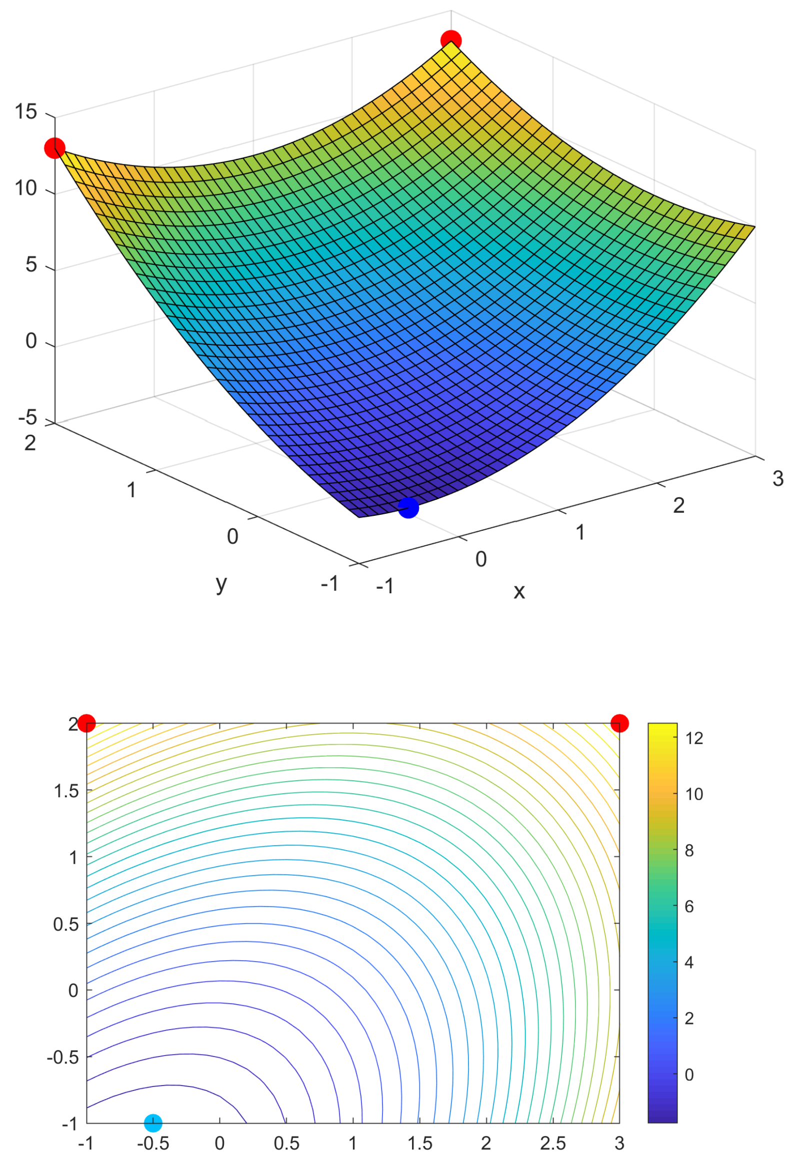
  $$h'_{DA}(y) = 2y+4.$$

  Stacionárny bod je $y_4 = -2$. Tento bod ale nepatrí do intervalu $-1 \le y \le 2$, preto ho ďalej nebudeme uvažovať.

Teraz vypočítame funkčné hodnoty v jednotlivých vrcholoch obdĺžnika:

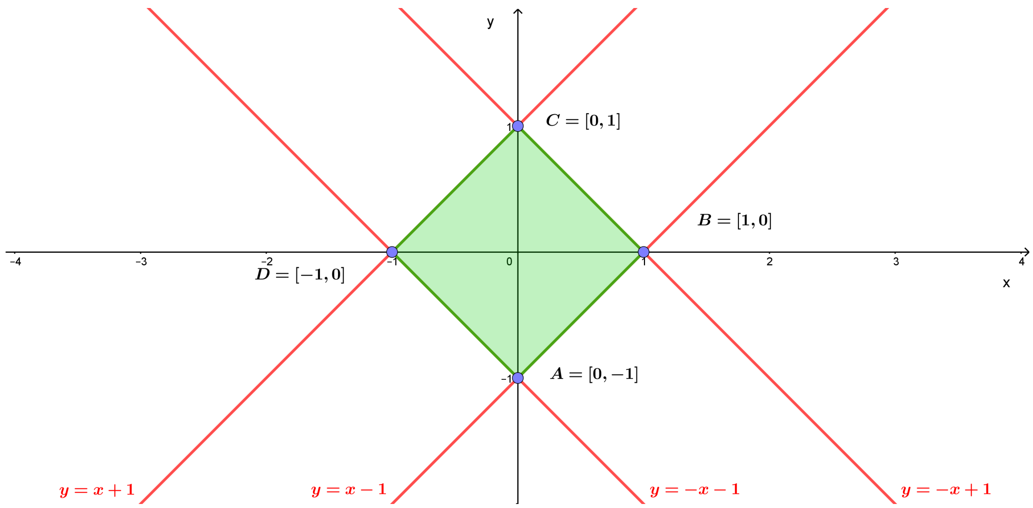
$$\begin{aligned} f(A) &= \left(x^2+y^2-xy+3y\right)_A = (-1)^2+(-1)^2-(-1)\cdot(-1)+3\cdot(-1) = -2, \\ f(B) &= \left(x^2+y^2-xy+3y\right)_B = 3^2+(-1)^2-3\cdot(-1)+3\cdot(-1) = 10, \\ f(C) &= \left(x^2+y^2-xy+3y\right)_C = 3^2+2^2-3\cdot 2+3\cdot 2 = 13, \\ f(D) &= \left(x^2+y^2-xy+3y\right)_D = (-1)^2+2^2-(-1)\cdot 2+3\cdot 2 = 13. \end{aligned}$$

3. Na záver určíme **absolútne extrémy** funkcie porovnaním všetkých funkčných hodnôt. Dostali sme, že v bode $A_1 = \left[-\frac{1}{2}, -1\right]$ nadobúda funkcia absolútne minimum s hodnotou $f(A_1) = -2.25$, a vo vrcholoch $C = [3,2]$ a $D = [-1,2]$ absolútne maximum s hodnotou $f(C) = f(D) = 13$, (Obr. 2.3.30).



Obr. 2.3.30. Absolútne extrémy funkcie $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 3y$ na množine M, ktorou je obdĺžnik s vrcholmi $A = [-1,-1]$, $B = [3,-1]$, $C = [3,2]$ a $D = [-1,2]$.

Príklad 75 Vypočítajte absolútne extrémy funkcie $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy$ na množine M, ktorou je štvorec s vrcholmi $A = [0,-1]$, $B = [1,0]$, $C = [0,1]$ a $D = [-1,0]$.



Obr. 2.3.31. Štvorec s vrcholmi $A = [0,-1]$, $B = [1,0]$, $C = [0,1]$ a $D = [-1,0]$.

Riešenie: Budeme postupovať podľa rovnakej schémy ako v predchádzajúcom príklade.

1. Najprv si určíme **lokálne extrémy** funkcie $f(x,y)$ patriace do vnútra štvorca ABCD. Vypočítame si parciálne derivácie prvého rádu

$$\begin{aligned} f_x &= 4x - 2y, \\ f_y &= 2y - 2x \end{aligned}$$

a dosadíme do rovníc $f_x = 0$ a $f_y = 0$

$$\begin{aligned} 4x - 2y &= 0, \\ 2y - 2x &= 0. \end{aligned}$$

Z prvej rovnice si vyjadríme $y = 2x$ a dosadíme do druhej rovnice $2y - 2x = 0$, t. j. $2 \cdot (2x) - 2x = 0$ a dostaneme $x = 0$, a teda aj $y = 0$. Získali sme bod so súradnicami $A_0 = [0,0]$, ktorý leží vo vnútri štvorca ABCD. Vypočítame druhé parciálne derivácie potrebné pre D-test:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 4, \\ f_{yy} &= 2, \\ f_{xy} &= -2. \end{aligned}$$

Pre bod $A_0 = [0,0]$ dostávame

$$\begin{aligned} f_{xx}(A_0) &= 4 \implies f_{xx}(A_0) > 0, \\ D(A_0) &= f_{xx}(A_0) \cdot f_{yy}(A_0) - (f_{xy}(A_0))^2 = \\ &= 4 \cdot 2 - (-2)^2 = 4 \implies D(0,0) > 0. \end{aligned}$$

Na základe D-testu sme zistili, že v bode $A_0 = [0,0]$ má funkcia $f(x,y)$ lokálne minimum a jeho funkčná hodnota je $f(A_0) = 0$.

2. Teraz vypočítame najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie f **na hranici** štvorca. Hranica štvorca pozostáva zo štyroch úsečiek AB, BC, CD a DA (Obr. 2.3.31), preto si opäť každú z úsečiek vyjadríme samostatnou rovnicou a úlohu budeme riešiť dosadzovacou metódou.

   - Úsečka **AB**: $y = x - 1$ pre $0 \leq x \leq 1$.

     Na tejto úsečke má funkcia f tvar

     $$f(x,y) = f(x, x-1) = 2x^2 + (x-1)^2 - 2x \cdot (x-1) = x^2 + 1.$$

     Bude nás teda zaujímať funkcia

     $$h_{AB}(x) = x^2 + 1.$$

     Po zderivovaní dostávame

     $$h'_{AB}(x) = 2x,$$

     preto $A_1 = [0, -1]$. Vypočítame druhú deriváciu

     $$h''_{AB}(x) = 2 \implies h''_{AB}(x) = 2 > 0,$$

     a vidíme, že v $A_1 = [0,-1]$ má funkcia viazané minimum, ktorého hodnota je

     $$\begin{aligned} f(A_1) &= \left(2x^2 + y^2 - 2xy\right)_{A_1} = \\ &= 2 \cdot 0^2 + (-1)^2 - 2 \cdot 0 \cdot (-1) = 1. \end{aligned}$$

- Úsečka **BC**: $y = 1 - x$ pre $0 \leq x \leq 1$.

  Na tejto úsečke má funkcia f tvar

  $$f(x,y) = f(x, 1-x) = 2x^2 + (1-x)^2 - 2x \cdot (1-x) = 5x^2 - 4x + 1.$$

  Bude nás teda zaujímať funkcia

  $$h_{BC}(x) = 5x^2 - 4x + 1.$$

  Po zderivovaní dostávame

  $$h'_{BC}(x) = 10x - 4,$$

  takže $A_2 = \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$. Vypočítame druhú deriváciu

  $$h''_{BC}(x) = 10 \implies h''_{BC}(x) = 10 > 0,$$

  a vidíme, že v $A_2 = \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$ má funkcia viazané minimum. Jeho hodnota je

  $$\begin{aligned} f(A_2) &= \left(2x^2 + y^2 - 2xy\right)_{A_2} = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

- Úsečka **CD**: $y = x + 1$ pre $-1 \leq x \leq 0$.

  Na tejto úsečke má funkcia f tvar

  $$f(x,y) = f(x, x+1) = 2x^2 + (x+1)^2 - 2x \cdot (x+1) = x^2 + 1.$$

  Bude nás teda zaujímať funkcia

  $$h_{CD}(x) = x^2 + 1.$$

  Po zderivovaní dostávame

  $$h'_{CD}(x) = 2x,$$

  potom stacionárny bod má x-ovú súradnicu $x_3 = 0$, a jeho y-ová súradnica je $y_3 = 1$. Vypočítame druhú deriváciu

  $$h''_{CD}(x) = 2 \implies h''_{CD}(x) = 2 > 0,$$

  a dostali sme, že v bode $A_3 = [0, 1]$ má funkcia $f(x,y)$ viazané minimum. Jeho hodnota je

  $$f(A_3) = \left(2x^2 + y^2 - 2xy\right)_{A_3} = 2 \cdot 0^2 + 1^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 = 1.$$

- Úsečka **DA**: $y = -x - 1$ pre $-1 \leq x \leq 0$.

  Na tejto úsečke má funkcia f tvar

  $$f(x, y) = f(x, -x-1) = 2x^2 + (-x-1)^2 - 2x(-x-1) = 5x^2 + 4x + 1.$$

  Bude nás teda zaujímať funkcia

  $$h_{DA}(x) = 5x^2 + 4x + 1.$$

  Po zderivovaní dostávame

  $$h'_{DA}(x) = 10x + 4.$$

  Potom stacionárny bod má x-ovú súradnicu $x_4 = -\frac{2}{5}$, a potom $y_4 = -\frac{3}{5}$. Vypočítame druhú deriváciu

  $$h''_{DA}(y) = 10 \implies h''_{DA}(x) = 10 > 0.$$

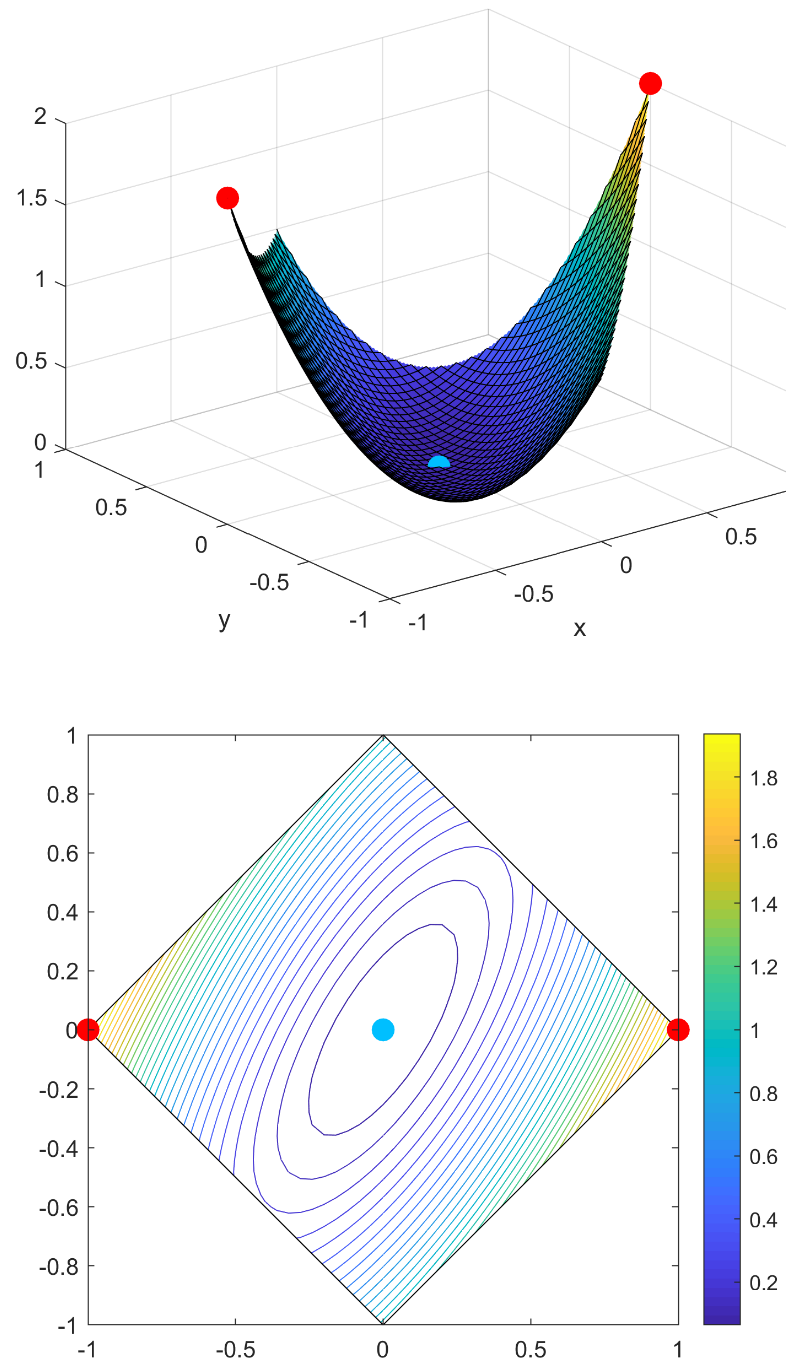
  Zistili sme, že v bode $A_4 = \left[-\frac{2}{5}, -\frac{3}{5}\right]$ má funkcia $f(x, y)$ viazané minimum. Jeho hodnota je

  $$\begin{aligned} f(A_4) &= \left(2x^2 + y^2 - 2xy\right)_{A_4} = \\ &= 2\left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Nakoniec si vypočítame funkčné hodnoty vo všetkých vrcholoch štvorca:

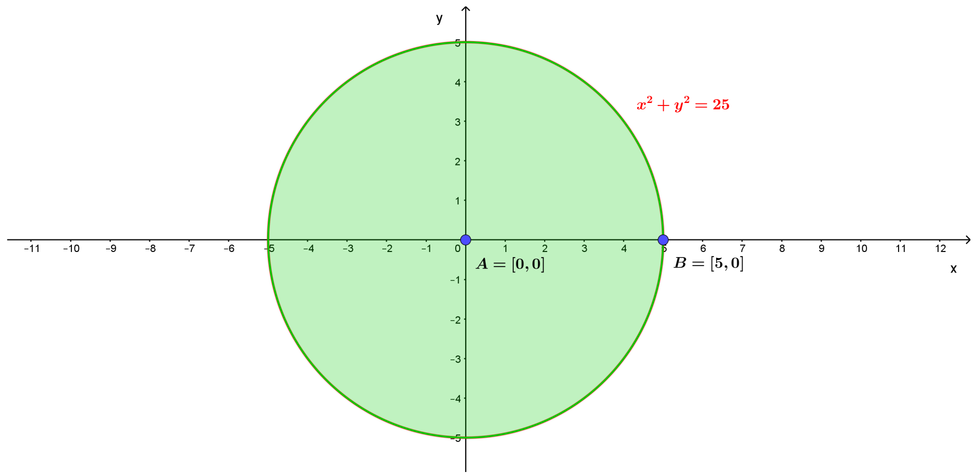
$$\begin{aligned} f(A) &= \left(2x^2 + y^2 - 2xy\right)_A = 2 \cdot 0^2 + (-1)^2 - 2 \cdot 0 \cdot (-1) = 1, \\ f(B) &= \left(2x^2 + y^2 - 2xy\right)_B = 2 \cdot 1^2 + 0^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 = 2, \\ f(C) &= \left(2x^2 + y^2 - 2xy\right)_C = 2 \cdot 0^2 + 1^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 = 1, \\ f(D) &= \left(2x^2 + y^2 - 2xy\right)_D = 2 \cdot (-1)^2 + 0^2 - 2 \cdot (-1) \cdot 0 = 2. \end{aligned}$$

3. Určíme **absolútne extrémy** funkcie. Porovnaním všetkých funkčných hodnôt vidíme, že vo vrcholoch $B = [1, 0]$ a $D = [-1, 0]$ má funkcia absolútne maximum s hodnotou $f(B) = f(D) = 2$, a v bode $A_0 = [0, 0]$ nadobúda absolútne minimum, ktorého hodnota je $f(A_0) = 0$, (Obr. 2.3.32).



Obr. 2.3.32. Absolútne extrémy funkcie $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy$ na množine M, ktorou je štvorec s vrcholmi $A = [0,-1]$, $B = [1,0]$, $C = [0,1]$ a $D = [-1,0]$. Funkcia nadobúda v bodoch $B = [1,0]$ a $D = [-1,0]$ absolútne maximum s hodnotou $f(B) = f(D) = 2$ a v bode $A_0 = [0,0]$ absolútne minimum, ktorého hodnota je $f(A_0) = 0$.

Príklad 76 Vypočítajte absolútne extrémy funkcie $f(x,y) = x^2 - y^2$ na množine M, danej predpisom $M = \{[x,y] \in E^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}$.



Obr. 2.3.33. Kruh daný rovnicou $x^2 + y^2 \leq 25$.

Riešenie:

1. Najprv určíme **lokálne extrémy** funkcie $f(x,y)$ patriace do vnútra oblasti M. Parciálne derivácie prvého rádu funkcie $f(x,y)$ položíme rovné 0

$$\begin{aligned} 2x &= 0, \\ -2y &= 0. \end{aligned}$$

Získali sme stacionárny bod so súradnicami $A_0 = [0,0]$. Vypočítame druhé parciálne derivácie funkcie $f(x,y)$ potrebné pre D-test:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2, \\ f_{yy} &= -2, \\ f_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Pre bod $A_0 = [0,0]$ dostávame

$$\begin{aligned} f_{xx}(A_0) &= 2 \implies f_{xx}(A_0) > 0, \\ D(A_0) &= f_{xx}(A_0) \cdot f_{yy}(A_0) - (f_{xy}(A_0))^2 = \\ &= 2 \cdot (-2) - 0^2 = -4 \implies D(A_0) < 0. \end{aligned}$$

Zistili sme, že bod so súradnicami $A_0 = [0, 0]$ je sedlovým bodom funkcie f.

2. Teraz vypočítame viazané extrémy f **na hranici** oblasti M. Hranicou oblasti M je kružnica $x^2 + y^2 = 25$. Z rovnice kružnice si vyjadríme

$$y^2 = 25 - x^2.$$

a dosadíme do funkcie $f(x, y) = x^2 - y^2$,

$$h_1(x) = x^2 - (25 - x^2) = 2x^2 - 25.$$

Zderivujeme

$$h_1'(x) = 4x$$

a dáme $4x = 0$. Dostali sme súradnicu $x = 0$, ktorú dosadíme do rovnice $y^2 = 25-x^2$, ktorej riešením sú $y_1 = 5$ a $y_2 = -5$. Dostali sme dva stacionárne body $A_1 = [0, 5]$ a $A_2 = [0, -5]$. Vypočítame druhú deriváciu

$$h_1^{''}(x) = 4 \implies h_1''(x) = 4 > 0.$$

Zistili sme, že v bodoch $A_1 = [0, 5]$ a $A_2 = [0, -5]$ má funkcia viazané minimum, ktorého hodnota je $f(A_1) = f(A_2) = -25$.
Teraz z rovnice kružnice $x^2 + y^2 = 25$ vyjadríme

$$x^2 = 25 - y^2.$$

a dosadíme do funkcie $f(x, y) = x^2 - y^2$

$$h_2(y) = 25 - y^2 - y^2 = 25 - 2y^2.$$

Zderivujeme

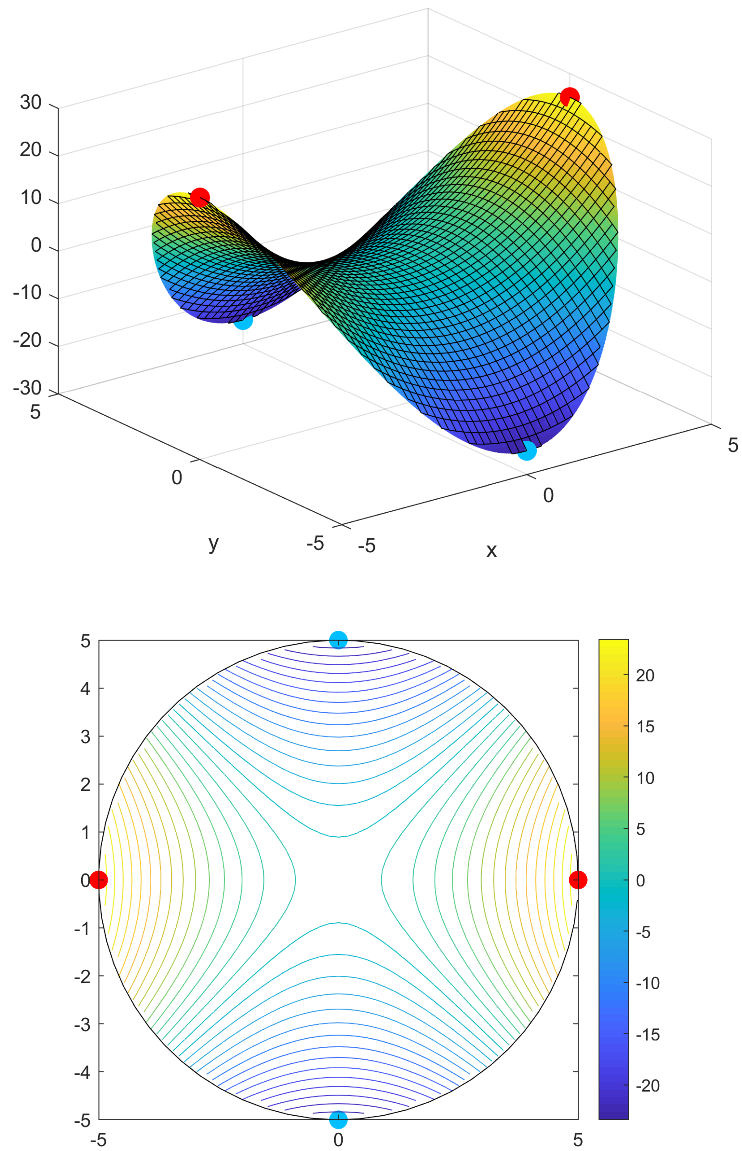
$$h_2'(y) = -4y.$$

Ak $-4y = 0$, potom $y = 0$. Dosadíme do rovnice $x^2 = 25 - y^2$, ktorej riešením sú $x_3 = 5$ a $x_4 = -5$. Dostali sme ďalšie dva stacionárne body $A_3 = [5, 0]$ a $A_4 = [-5, 0]$. Vypočítame si druhú deriváciu

$$h_2''(y) = -4 \implies h_2''(y) = -4 < 0.$$

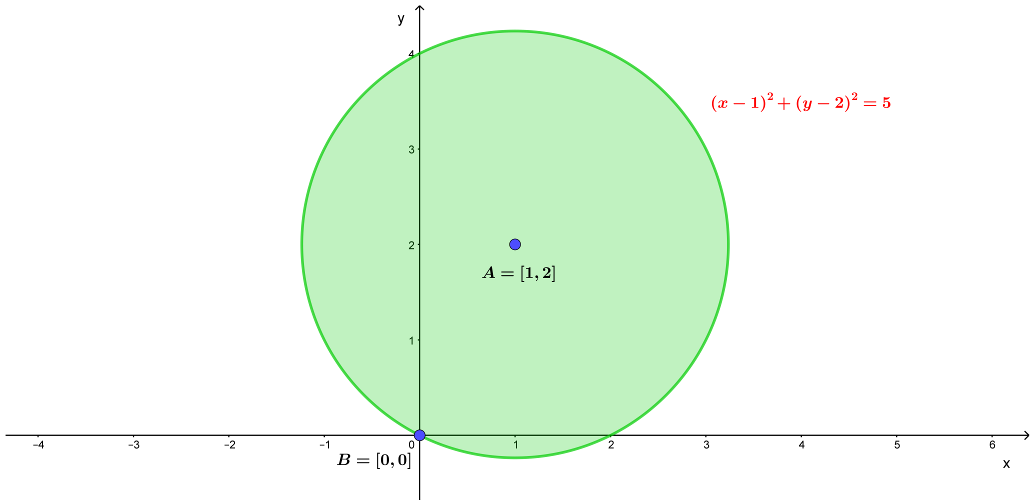
Zistili sme, že v bodoch $A_3 = [5, 0]$ a $A_4 = [5, 0]$ má funkcia viazané maximum, ktorého hodnota je $f(A_3) = f(A_4) = 25$.

3. Porovnaním všetkých hodnôt vidíme, že funkcia $f(x, y) = x^2 - y^2$ má na množine $M = \{[x, y] \in E^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}$ absolútne maximum v bodoch $A_3 = [5, 0]$ a $A_4 = [5, 0]$, s hodnotou $f(A_3) = f(A_4) = 25$, a absolútne minimum v bodoch $A_1 = [0, 5]$ a $A_2 = [0, -5]$, ktorého hodnota je $f(A_1) = f(A_2) = -25$, (Obr. 2.3.34).



Obr. 2.3.34. Absolútne extrémy funkcie $f(x, y) = x^2 - y^2$ na množine M, danej predpisom $M = \{[x, y] \in E^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}$.

Príklad 77 Vypočítajte absolútne extrémy funkcie $f(x,y) = x^2 + y^2$ na množine M, danej predpisom $M = \{[x,y] \in E^2 : x^2 - 2x + y^2 - 4y \leq 0\}$.



Obr. 2.3.35. Kruh daný rovnicou $x^2-2x+y^2-4y \leq 0$, resp. po úprave $(x-1)^2+(y-2)^2 = 5$.

Riešenie:

1. Určíme **lokálne extrémy** funkcie f patriace do vnútra oblasti M. Parciálne derivácie prvého rádu funkcie f položíme rovné 0

$$\begin{aligned} 2x &= 0, \\ 2y &= 0. \end{aligned}$$

Získali sme stacionárny bod $A_0 = [0,0]$. Vypočítame si druhé parciálne derivácie potrebné pre D-test:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2, \\ f_{yy} &= 2, \\ f_{xy} &= 0. \end{aligned}$$

Pre bod $A_0 = [0,0]$ dostávame

$$\begin{aligned} f_{xx}(A_0) &= 2 \implies f_{xx}(A_0) > 0, \\ D(A_0) &= f_{xx}(A_0) \cdot f_{yy}(A_0) - (f_{xy}(A_0))^2 = \\ &= 2 \cdot 2 - 0^2 = 4 \implies D(A_0) > 0. \end{aligned}$$

Zistili sme, že bod so súradnicami $A_0 = [0, 0]$ je lokálnym minimom funkcie f. Jeho funkčná hodnota je $f(A_0) = 0$.

2. Teraz vypočítame lokálne viazané extrémy f **na hranici** oblasti M. Hranicou oblasti M je kružnica $x^2 - 2x + y^2 - 4y \leq 0$. Túto úlohu budeme riešiť Lagrangeovou metódou. Lagrangeova funkcia je daná predpisom

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 - 2x + y^2 - 4y).$$

Vypočítame parciálne derivácie funkcie $L(x, y, \lambda)$ podľa všetkých troch premenných a položíme rovné nule

$$\begin{aligned} 2x + 2\lambda x - 2\lambda &= 0, \\ 2y + 2\lambda y - 4\lambda &= 0, \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y &= 0. \end{aligned}$$

Z prvej rovnice si vyjadríme

$$x = \frac{\lambda}{1 + \lambda},$$

z druhej

$$y = \frac{2\lambda}{1 + \lambda},$$

a obe premenné dosadíme do tretej rovnice

$$\left(\frac{\lambda}{1 + \lambda}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda}\right) + \left(\frac{2\lambda}{1 + \lambda}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{2\lambda}{1 + \lambda}\right) = 0.$$

Upravíme

$$\lambda^2 - 2\lambda(1 + \lambda) + 4\lambda^2 - 8\lambda(1 + \lambda) = 0,$$

a roznásobíme

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2\lambda^2 + 4\lambda^2 - 8\lambda - 8\lambda^2 = 0.$$

Po sčítaní dostaneme rovnicu

$$-5\lambda^2 - 10\lambda = 0,$$

resp.

$$\lambda(\lambda + 2) = 0,$$

ktorá má dve riešenia $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -2$. Po dosadení do rovníc pre x a y dostaneme

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\lambda_1}{1+\lambda_1} = \frac{0}{1+0} = 0,\\
y_1 &= \frac{2\lambda_1}{1+\lambda_1} = \frac{2\cdot 0}{1+0} = 0,\\
x_2 &= \frac{\lambda_2}{1+\lambda_2} = \frac{-2}{1+(-2)} = 2,\\
y_2 &= \frac{2\lambda_2}{1+\lambda_2} = \frac{2\cdot(-2)}{1+(-2)} = 4.
\end{aligned}$$

Získali sme dva body $A_1^* = [0,0,0]$ a $A_2^* = [2,4,-2]$. Teraz vypočítame druhé parciálne derivácie funkcie $L(x,y,\lambda)$ podľa x a y

$$\begin{aligned}
L_{xx} &= (2x + 2\lambda x - 2\lambda)_x = 2 + 2\lambda,\\
L_{yy} &= (2y + 2\lambda y - 4\lambda)_y = 2 + 2\lambda,\\
L_{xy} &= (2x + 2\lambda x - 2\lambda)_y = 0
\end{aligned}$$

a otestujeme oba body.

- Pre bod $A_1^* = [x_1, y_1, \lambda_1] = [0,0,0]$ dostávame

$$\begin{aligned}
L_{xx}(A_1^*) &= (2 + 2\cdot\lambda_1)_{A_1^*} = 2 + 2\cdot 0 = 2 \implies L_{xx}(A_1^*) > 0,\\
D(A_1^*) &= L_{xx}(A_1^*)\cdot L_{yy}(A_1^*) - (L_{xy}(A_1^*))^2 =\\
&= (2 + 2\cdot\lambda_1)_{A_1^*}\cdot(2 + 2\cdot\lambda_1)_{A_1^*} - 0^2 =\\
&= (2 + 2\cdot 0)\cdot(2 + 2\cdot 0) = 4 \implies D(A_1^*) > 0.
\end{aligned}$$

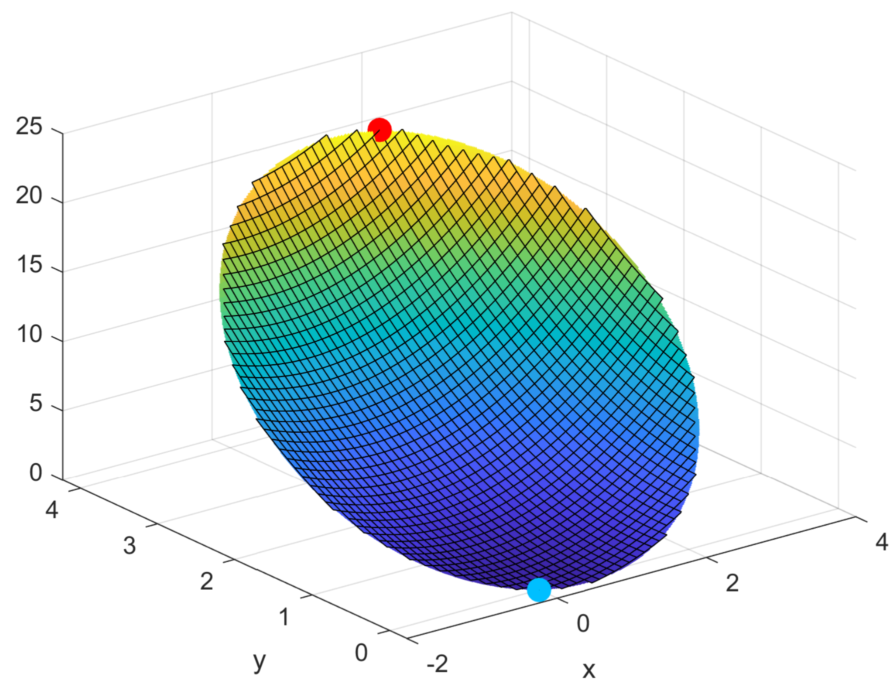
  Z formulácie D-testu vidieť, že v bode $A_1 = (0,0)$ dosahuje funkcia $f(x,y)$ viazané minimum a jeho hodnota je $f(A_1) = 0$.

- Pre bod $A_2^* = [x_2, y_2, \lambda_2] = [2,4,-2]$ dostávame

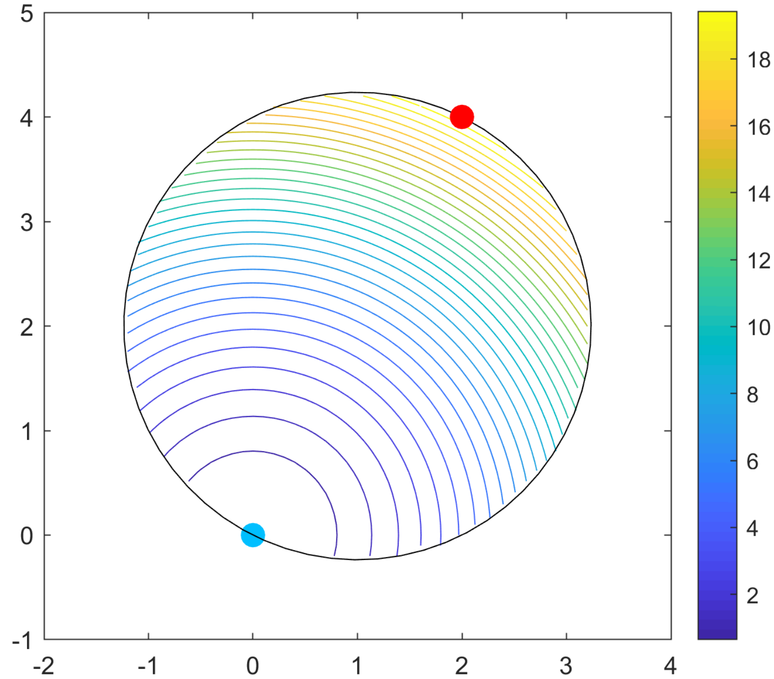
$$\begin{aligned}
L_{xx}(A_2^*) &= (2 + 2\cdot\lambda_2)_{A_2^*} = 2 + 2\cdot(-2) = -2 \implies L_{xx}(A_2^*) < 0,\\
D(A_2^*) &= L_{xx}(A_2^*)\cdot L_{yy}(A_2^*) - (L_{xy}(A_2^*))^2 =\\
&= (2 + 2\cdot\lambda_2)_{A_2^*}\cdot(2 + 2\cdot\lambda_2)_{A_2^*} - 0^2 =\\
&= (2 + 2\cdot(-2))\cdot(2 + 2\cdot(-2)) = 4 \implies D(A_2^*) > 0.
\end{aligned}$$

Z formulácie D-testu vidíme, že v bode $A_2 = (2,4)$ má funkcia $f(x,y)$ viazané maximum funkcie a jeho hodnota je $f(A_2) = 2^2 + 4^2 = 20$.

3. Porovnaním všetkých hodnôt sme zistili, že funkcia $f(x,y) = x^2+y^2$ má na množine $M = \{[x,y] \in E^2 : x^2 - 2x + y^2 - 4y \leq 0\}$ absolútne maximum v bode $A_2 = [2,4]$, s hodnotou $f(A_2) = 0$, a absolútne minimum v bode $A_1 = [0,0]$, ktorého hodnota je $f(A_1) = 0$, (Obr. 2.3.37).



Obr. 2.3.36. Absolútne extrémy funkcie $f(x,y) = x^2+y^2$ na množine M, danej predpisom $M = \{[x,y] \in E^2 : x^2 - 2x + y^2 - 4y \leq 0\}$ (3D graf).



Obr. 2.3.37. Absolútne extrémy funkcie $f(x,y) = x^2 + y^2$ na množine M, danej predpisom $M = \{[x,y] \in E^2 : x^2 - 2x + y^2 - 4y \leq 0\}$ (zobrazenie pomocou vrstevníc).

2.4 Úlohy na precvičenie

Úloha 6 Nájdite a znázornite definičný obor funkcie.

a) $f(x,y)=\frac{x+y}{\ln(y-x^2)}$ .... $[D=\{(x,y)\in R^2 : y\neq 1+x^2 \text{ a } y>x^2\}]$.

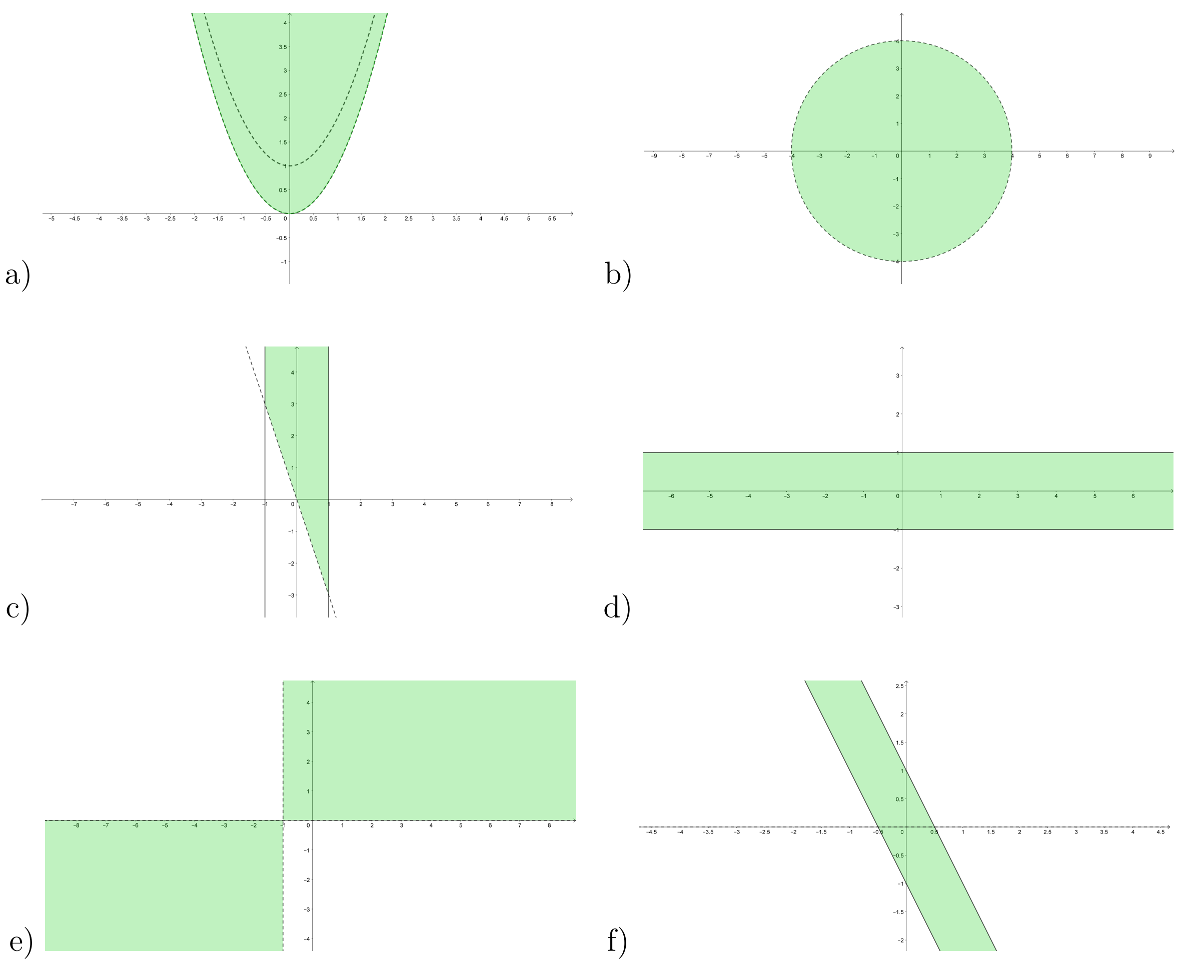
b) $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$ .... $[D=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2<16\}]$.

c) $f(x,y)=\ln(y+3x)+\arcsin(x)$ .... $[D=\{(x,y)\in R^2 : y>-3x \text{ a } -1\leq x\leq 1\}]$.

d) $f(x,y)=\arccos(y)+\sqrt{9+x^2}$ .... $[D=\{(x,y)\in R^2 : -1\leq y\leq 1\}]$.

e) $f(x,y)=\ln\left(\frac{x+1}{y}\right)$ .... $\left[D=\{(x,y)\in R^2 : \frac{x+1}{y}>0\}\right]$.

f) $f(x,y)=\arcsin(2x+y)+e^{\frac{x}{y}}$ .. $[D=\{(x,y)\in R^2 : -1-2x\leq y\leq 1-2x, y\neq 0\}]$.



Obr. 2.4.38. Znázornené definičné obory z Úlohy 6.

Úloha 7 Vypočítajte parciálne derivácie daných funkcií $f(x, y)$ podľa oboch premenných.

a) $f(x, y) = \frac{x^4y^3}{12}$ .... $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^3y^3}{3}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^4y^2}{4}\right]$.

b) $f(x, y) = y \arctan(x)$ .... $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{1+x^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \arctan(x)\right]$.

c) $f(x, y) = \ln(x^2 + 3y)$ .... $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+3y}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3}{x^2+3y}\right]$.

d) $f(x, y) = \arctan(xy)$ .... $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{1+(xy)^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{1+(xy)^2}\right]$.

e) $f(x, y) = \arcsin(x^2 + y)$ .... $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2+y)^2}}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2+y)^2}}\right]$.

f) $f(x, y) = xe^{xy}$ .... $\left[\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy}(1 + xy), \frac{\partial f}{\partial y} = x^2e^{xy}\right]$.

Úloha 8 Vypočítajte parciálne derivácie funkcie $f(x, y)$ podľa oboch premenných v bode $A = [x_0, y_0]$.

a) $f(x, y) = x^2 + 2xy, \quad A = [2, 1]$ .... $[f_x(A) = 6, f_y(A) = 4]$.

b) $f(x, y) = \frac{\cos(x)}{\sin(y)}, \quad A = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ .... $[f_x(A) = -1, f_y(A) = -1]$.

c) $f(x, y) = \ln(x + y), \quad A = [1, 0]$ .... $[f_x(A) = 1, f_y(A) = 1]$.

d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + \ln(5x - 2y)}, \quad A = [1, 2]$ .... $\left[f_x(A) = \frac{7}{2}, f_y(A) = -1\right]$.

e) $f(x, y) = (x - 2)e^{\cos(y)}, \quad A = [3, 0]$ .... $[f_x(A) = e, f_y(A) = 0]$.

f) $f(x, y) = \arctan(3x + y), \quad A = [0, 0]$ .... $[f_x(A) = 3, f_y(A) = 1]$.

Úloha 9 Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku ploche danej rovnicou:

a) $f(x, y) = 2xy^2 - x^2y$ v bode $A = [1, 2]$ .... $[z = 4x + 7y - 12]$.

b) $f(x, y) = x^2y^2 + 5xy$ v bode $A = [3, 1]$ .... $[z = 11x + 33y - 42]$.

c) $f(x, y) = e^{xy}$ v bode $A = [3, 2]$ .... $[z = e^6(2x + 3y - 11)]$.

d) $f(x, y) = \tan(xy)$ v bode $A = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .... $\left[z = \frac{\pi x}{4}\right]$.

e) $f(x, y) = \ln(x^2y)$ v bode $A = [1, 1]$ .... $[z = 2x + y - 3]$.

f) $f(x,y) = x^2 + xy + \ln(y)$ v bode $A = [2,1]$ .... $[z = 5x + 3y - 7]$.

Úloha 10 Zostrojte Taylorov polynóm druhého rádu pre funkciu $f(x,y)$ so stredom v bode $A = [x_0, y_0]$.

a) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^4,\ A = [1,1]$ .... $[T_2(f,A) = 3x^2 + 3y^2 - 6xy - 2y + 1]$.

b) $f(x,y) = e^{xy},\ A = [1,1]$ .... $\left[T_2(f,A) = e\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xy - x - y + 1\right)\right]$.

c) $f(x,y) = \frac{1}{1-x-y+xy},\ A = [0,0]$ .... $[T_2(f,A) = 1 + x + y + x^2 + xy + y^2]$.

d) $f(x,y) = x^3 + 2y^3 - 2xy,\ A = [1,1]$.... $[T_2(f,A) = 3x^2 + 6y^2 - 2xy - 3x - 6y + 3]$.

e) $f(x,y) = x \cdot \ln(y),\ A = [2,1]$ .... $[T_2(f,A) = 2y - y^2 + xy - x - 1]$.

f) $f(x,y) = \sin(x) \cdot \cos(y),\ A = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ....

.... $\left[T_2(f,A) = -\frac{1}{4}\left(x^2 + y^2 + 2xy - (2+\pi)x + (2-\pi)y + \frac{\pi^2}{4} - 2\right)\right]$.

Úloha 11 Nájdite stacionárne body grafov nasledujúcich funkcií.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x + y$ .... $\left[A_1 = \left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]\right]$.

b) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 2x$ .... $\left[A_1 = \left[-\frac{4}{7}, -\frac{2}{7}\right]\right]$.

c) $f(x,y) = x^2 - xy^2 + y^3$ .... $\left[A_1 = \left[\frac{9}{2}, 3\right],\ A_2 = [0,0]\right]$.

d) $f(x,y) = 5 - x^3 + 2xy + y^3$ .... $\left[A_1 = \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right],\ A_2 = [0,0]\right]$.

e) $f(x,y) = x^3 - xy^2 + y^4$ .... $\left[A_{1,2} = \left[\frac{1}{6}, \pm\frac{\sqrt{3}}{6}\right],\ A_3 = [0,0]\right]$.

f) $f(x,y) = x^3 - 3x - 3y + y^3$ .... $[A_{1,2} = [\pm 1, 1],\ A_{3,4} = [\pm 1, -1]]$.

Úloha 12 Nájdite lokálne minimum a maximum funkcie $f(x,y)$ (ak existuje).

a) $f(x,y) = 3 + (x^2 + y)e^y$ .... $\left[\text{Lok. min. v } A_1 = [0,-1],\ f(A_1) = 3 - \frac{1}{e}\right]$.

b) $f(x,y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$ .... $\left[\text{Lok. min. v } A_1 = \left[\frac{1}{2}, -1\right],\ f(A_1) = -\frac{e}{2}\right]$.

c) $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 6x$ .... $[\text{Lok. max. v } A_1 = [-4,-2],\ f(A_1) = 12]$.

d) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-y}$ .... [Lok. min. v $A_1 = [0,0]$, $f(A_1) = 0$].

e) $f(x,y) = x^3 - x^2 - y^3 + y^2$ ....

...... $\left[\text{Lok. max. v } A_1 = \left[0, \frac{2}{3}\right], \, f(A_1) = \frac{4}{27}, \text{ Lok. min. v } A_2 = \left[\frac{2}{3}, 0\right], \, f(A_2) = -\frac{4}{27}\right]$.

f) $f(x,y) = 2x^3 + 9xy^2 + 15x^2 + 27y^2$ ....

.... [Lok. max. v $A_1 = [-5,0]$, $f(A_1) = 125$, Lok. min. v $A_2 = [0,0]$, $f(A_2) = 0$].

Úloha 13 Nájdite viazané extrémy funkcie $f(x,y)$ na danej hranici.

a) $f(x,y) = xy + x - y + 5$ na priamke: $x + y = 1$. ....

.... $\left[\text{Viaz. max. v } A_1 = \left[\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right], f(A_1) = \frac{25}{4}\right]$.

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1$ na hranici trojuholníka s vrcholmi $A = [0,0]$,

$B = [3,0]$, $C = [0,6]$. ....

...... $\left[\text{Viaz. max. v } C = [0,6], f(C) = 13, \text{ Viaz. min. v } A_1 = \left[\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right], f(A_1) = -3.2\right]$.

c) $f(x,y) = x^2 - y^2$ na kružnici s rovnicou $x^2 + y^2 = 4$. ....

.... [Viaz. min. v $A_1 = [0,2]$, $A_2 = [0,-2]$, $f(A_1) = f(A_2) = -4$]

[Viaz. max. v $A_3 = [2,0]$, $A_4 = [-2,0]$, $f(A_3) = f(A_4) = 4$].

d) $f(x,y) = x^2 + y^2$ na krivke s rovnicou $x^2 + 2x + y^2 + 4y = 0$. ....

.... [Viaz. min. v $A_1 = [0,0]$, $f(A_1) = 0$].

e) $f(x,y) = x + y$ na kružnici, ktorá je daná vzťahom $x^2 + y^2 = 1$. ....

$\left[\text{Viaz. min. v } A_1 = \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right], f(A_1) = \frac{-2}{\sqrt{2}}, \text{ Viaz. max. v } A_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right], f(A_2) = \frac{2}{\sqrt{2}}\right]$.

Úloha 14 Vypočítajte absolútne extrémy funkcie $f(x,y)$ na oblasti Ω.

a) $f(x,y) = -2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$, Ω : polrovina daná rovnicou $3x + y \leq 15$. ...

.... $\left[\text{Abs. max. v } A_1 = \left[\frac{19}{7}, \frac{20}{7}\right], f(A_1) = \frac{106}{7}\right]$.

b) $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - 2x$, Ω : obdĺžnik daný vrcholmi $A = [0,-2]$, $B = [3,-2]$, $C = [3,1]$, $D = [0,1]$. . . . . [Abs. min. v $B = [3,-2], f(B) = -5$].

c) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, Ω : štvorec daný rovnicou $|x| + |y| \leq 1$. . . . .

. . . . [Abs. min. v $A_1 = [0,0], f(A_1) = 0$]

[Abs. max. v $A_{2,3} = [0,\pm 1], A_{4,5} = [\pm 1, 0],\ f(A_{2,3}) = f(A_{4,5}) = 1$].

d) $f(x,y) = 4x^2 + y^2 - 4xy$, Ω : je uzatvorená a ohraničená krivkami $y = x^2$, $y = 4$, $x = 4$. . . . . [Abs. min. v $A_i = [x, 2x], x \in \langle 0, 2\rangle, f(A_i) = 0$].

e) $f(x,y) = x^2 + 2x + y^2 - 2y + 3$, Ω : kruh so stredom v bode $[0,0]$ a polomerom $2\sqrt{2}$.

. . . . [Abs. min. v $A_1 = [-1,1], f(A_1) = 1$, Abs. max. v $A_2 = [2,-2], f(A_2) = 19$].

f) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x + 2y$, Ω : kruh daný rovnicou $x^2 + y^2 \leq 2$. . . . .

. . . . [Abs. min. v $A_1 = [-1,-1], f(A_1) = -2$, Abs. max. v $A_2 = [1,1], f(A_2) = 6$].

Kapitola 3

Diferenciálna geometria kriviek

3.1 Krivka K a jej vlastnosti

Krivka K je:

- **prostá**, ak sa nepretína v žiadnom bode: $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \mathbf{P}(t_1) \neq \mathbf{P}(t_2)$,

- **regulárna**, ak $\dot{\mathbf{P}}(t) \neq 0$ pre $t \in R$.

Pre prirodzenú parametrizáciu krivky K platí: $|\dot{\mathbf{P}}(s)| = 1$

kde $s(t) = \int\limits_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{P}}(t)| \, \mathrm{d}t$ a $\dot{\mathbf{P}}(t) = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$.

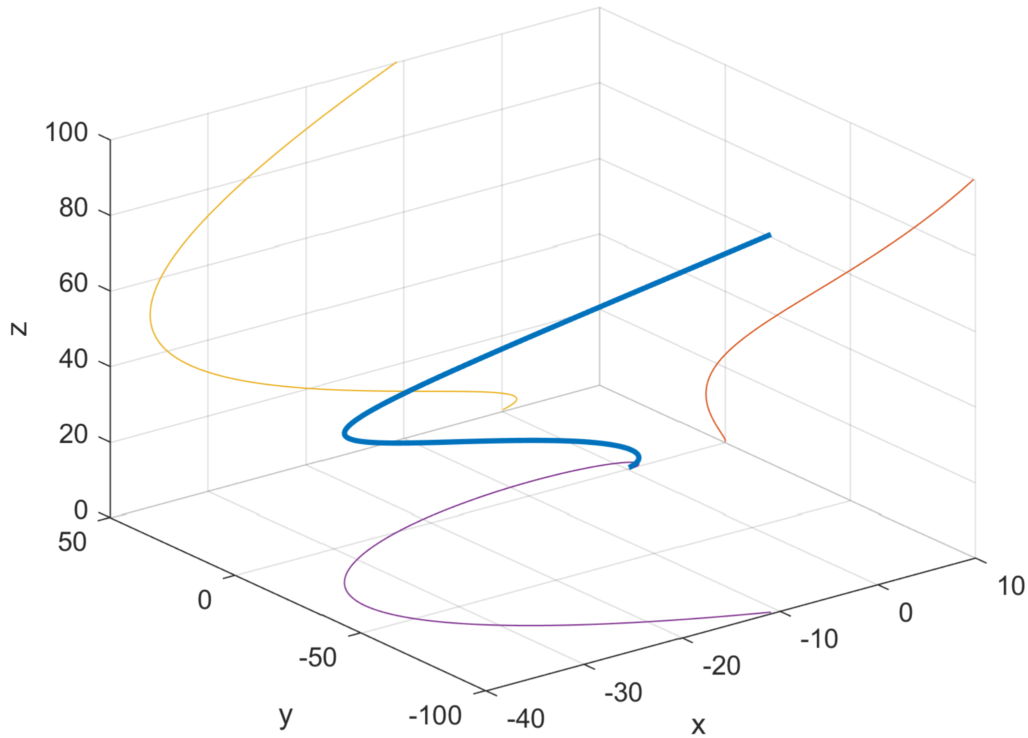
Príklad 78 Vyšetrite krivku K: $\mathbf{P}(t) = (t\cos(\ln(t)), t\sin(\ln(t)), t)$, $t \in (0, \infty)$ a nájdite jej prirodzenú parametrizáciu.

Riešenie: Vyšetriť krivku K znamená, že potrebujeme zistiť, či je krivka K prostá a či je regulárna. Pre zistenie, či je krivka K prostá, nie je potrebné vykonávať zložité výpočty. Podmienka $t_1 \neq t_2 \Rightarrow \mathbf{P}(t_1) \neq \mathbf{P}(t_2)$ bude platiť, ak aspoň jeden z členov krivky K je prostá funkcia, $z(t) = t \Rightarrow$ krivka K je prostá.

K určeniu, či je funkcia regulárna, potrebujeme vypočítať deriváciu

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}(t) &= \left(\cos(\ln(t)) + t(-\sin(\ln(t)))\frac{1}{t}, \sin(\ln(t)) + t\cos(\ln(t))\frac{1}{t}, 1\right) = \\
&= (\cos(\ln(t)) - \sin(\ln(t)), \sin(\ln(t)) + \cos(\ln(t)), 1)\,.
\end{aligned}
$$

Krivka K je regulárna, pretože $\dot{\mathbf{P}}(t) \neq 0$.



Obr. 3.1.1. Krivka $K : \mathbf{P}(t) = (t\cos(\ln(t)), t\sin(\ln(t)), t)$ a jej pôdorys (fialová), nárys (žltá) a bokorys (červená), pre $t \in (0, 100)$.

Na určenie prirodzenej parametrizácie spočítame integrál $s(t) = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{P}(t)|\,\mathrm{d}t$. Deriváciu $\dot{\mathbf{P}}(t)$ sme už počítali pri určení, či je krivka K regulárna.

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\cos(\ln(t)) - \sin(\ln(t)))^2 + (\sin(\ln(t)) + \cos(\ln(t)))^2 + 1^2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\cos^2(\ln(t)) - 2\cos(\ln(t))\sin(\ln(t)) + (-\sin(\ln(t)))^2 +} \\
&\qquad \overline{+\sin^2(\ln(t)) + 2\sin(\ln(t))\cos(\ln(t)) + \cos^2(\ln(t)) + 1}\,\mathrm{d}t = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{3}\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}(t_2 - t_1).
\end{aligned}
$$

Aby sme mohli parameter t vyjadriť pomocou s, nahradíme vo výsledku $t_1 = 1$ a $t_2 = t$

$$s = \sqrt{3}(t-1) \Rightarrow t = 1 + \frac{s}{\sqrt{3}}$$

a dostávame

$$\mathbf{P}(s) = \left(\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\cos\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right), \left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\sin\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right), \frac{s}{\sqrt{3}}\right).$$

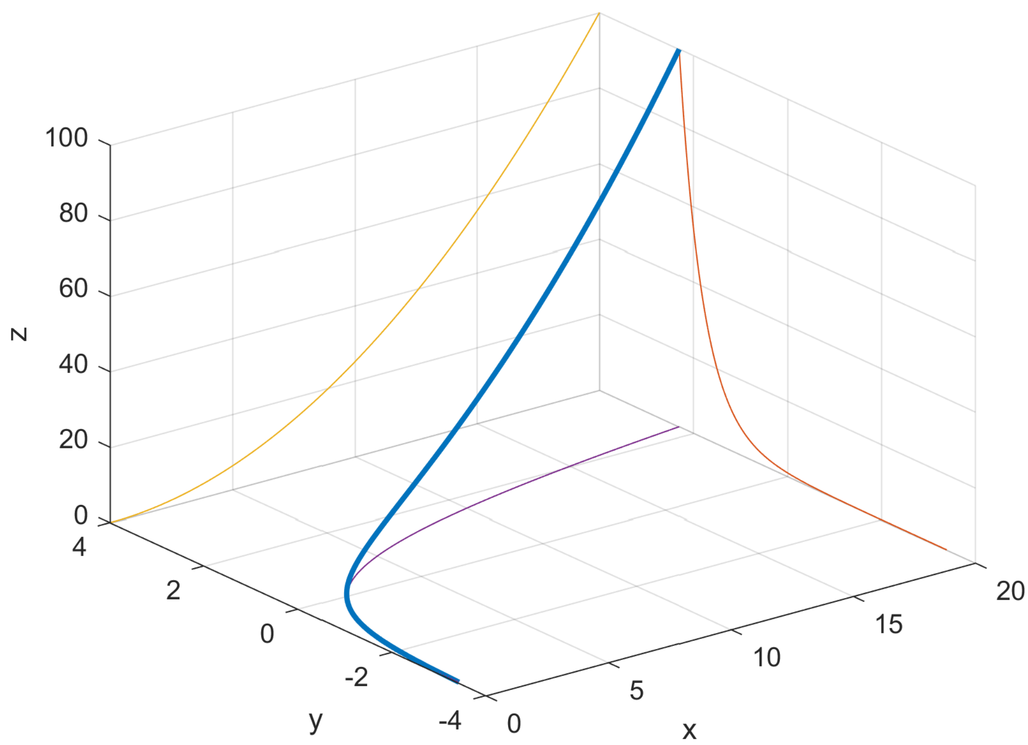
Pre overenie, či sme našli prirodzenú parametrizáciu krivky K, urobíme kontrolu pomocou $|\dot{\mathbf{P}}(s)| = 1$. Začneme výpočtom derivácie

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}(s) &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right) + \left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\left(-\sin\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right)\right)\frac{1}{1+\frac{s}{\sqrt{3}}}\frac{1}{\sqrt{3}},\right.\\
&\quad \left.\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right) + \left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\cos\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right)\frac{1}{1+\frac{s}{\sqrt{3}}}\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) =\\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right),\right.\\
&\quad \left.\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right), \frac{1}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

Ako ďalšie spočítame veľkosť takto parametrizovanej krivky

$$\begin{aligned}
|\dot{\mathbf{P}}(s)| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right)\right)^2 +}\\
&\quad \overline{+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\left(\ln\left(1+\frac{s}{\sqrt{3}}\right)\right)\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} =\\
&= \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}} = \sqrt{1} = 1.
\end{aligned}$$

Príklad 79 Vyšetrite krivku $K : \mathbf{P}(t) = (2t, \ln(t), t^2)$, $t \in (0, \infty)$ a nájdite jej prirodzenú parametrizáciu.



Obr. 3.1.2. Krivka $K : \mathbf{P}(t) = (2t, \ln(t), t^2)$ a jej pôdorys (fialová), nárys (žltá) a bokorys (červená), pre $t \in (0, 10)$.

Riešenie: V tomto príklade máme podobne lineárny člen ako v predchádzajúcom príklade, tak môžeme hneď povedať, že krivka K je prostá, pretože $x(t) = 2t \Rightarrow$ je prostá funkcia. Spočítame teraz v tomto prípade jednoduchú deriváciu

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \left(2, \frac{1}{t}, 2t\right)$$

a môžeme povedať že krivka K je regulárna, pretože $\dot{\mathbf{P}}(t) \neq 0$. Ako ďalšie spočítame prirodzenú parametrizáciu krivky K. Začneme s výpočtom integrálu

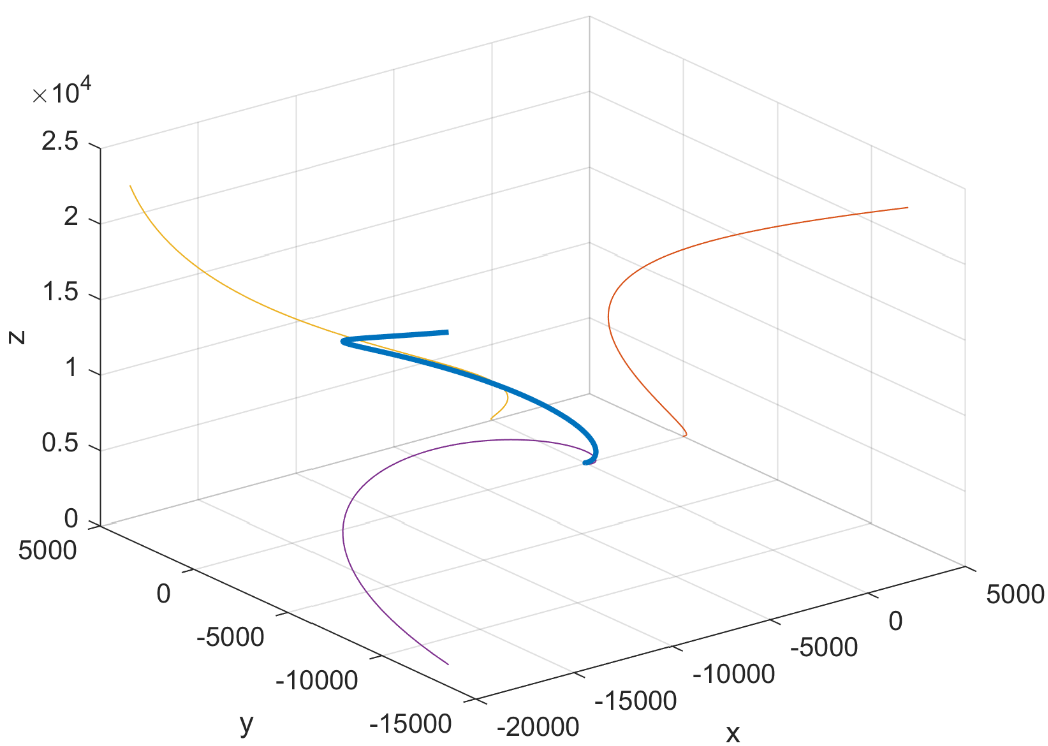
$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_{t_1}^{t_2} |\dot{P}(t)| \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 + (2t)^2} \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{4 + \frac{1}{t^2} + 4t^2} \,\mathrm{d}t = \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{4t^2 + 1 + 4t^4}{t^2}} \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\frac{(2t^2+1)^2}{t^2}} \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2t^2+1}{t} \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} 2t + \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t = \\
&= \left[t^2 + \ln t\right]_{t_1}^{t_2} = t_2^2 + \ln t_2 - \left(t_1^2 + \ln t_1\right).
\end{aligned}$$

Rovnako ako v predchádzajúcom príklade, aby sme mohli parameter t vyjadriť pomocou s, nahradíme vo výsledku $t_1 = 1$ a $t_2 = t$ a dostávame

$$s = t^2 + \ln t - \left(1^2 + \ln 1\right) = -1 + t^2 + \ln t.$$

Z tohoto výrazu nevieme vyjadriť parameter t, preto nie je možné krivku vyjadriť v prirodzenej parametrizácii. Aj toto je jeden z možných výsledkov, preto sa nezľaknite, ak neviete prísť k výsledku. Nie vždy je to možné.

Príklad 80 Vyšetrite krivku K: $\mathbf{P}(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)$, $t \in (0, \infty)$ a nájdite jej prirodzenú parametrizáciu.



Obr. 3.1.3. Krivka K : $\mathbf{P}(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)$ a jej pôdorys (fialová), nárys (žltá) a bokorys (červená), pre $t \in (0, 10)$.

Riešenie: Funkcia e^t je prostá funkcia, preto aj krivka K je prostá. Vypočítame si deriváciu pre určenie, či je funkcia regulárna

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}(t) &= \Big(e^t\cos(t) + e^t(-\sin(t)), e^t\sin(t) + e^t\cos(t), e^t\Big) = \\ &= \Big(e^t(\cos(t) - \sin(t)), e^t(\sin(t) + \cos(t)), e^t\Big)\end{aligned}$$

a môžeme povedať, že krivka K je regulárna, pretože $\dot{P}(t) \neq 0$. Spočítame integrál

$$\begin{aligned}s(t) &= \int_0^t |\dot{\mathbf{P}}(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^t \sqrt{(e^t(\cos(t)-\sin(t)))^2 + (e^t(\sin(t)+\cos(t)))^2 + (e^t)^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^t \sqrt{3e^{2t}}\,\mathrm{d}t = \Big[\sqrt{3}e^t\Big]_0^t = \sqrt{3}e^t - \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Dostali sme parameter s, z ktorého chceme vyjadriť t

$$\begin{aligned}s &= \sqrt{3}e^t - \sqrt{3}, \\ s + \sqrt{3} &= \sqrt{3}e^t, \\ \frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} &= e^t \Rightarrow t = \ln\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

Nájdený parameter dosadíme do formulácie krivky K a dostávame

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(s) &= \left(e^{\ln\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)}\cos\left(\ln\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right), e^{\ln\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)}\sin\left(\ln\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right),\right. \\ &\qquad \left. e^{\ln\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)}\right) = \\ &= \left(\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\cos\left(\ln\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right), \left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\sin\left(\ln\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right),\right. \\ &\qquad \left.\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right).\end{aligned}$$

3.2 Sprievodný trojhran krivky K

Sprievodný trojhran krivky K pozostáva z troch rovín:

Oskulačná rovina krivky K: $\tau : (X - \mathbf{P}(t)) \cdot (\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) = 0$,

Normálová rovina krivky K: $\nu : (X - \mathbf{P}(t)) \cdot \dot{\mathbf{P}}(t) = 0$,

Rektifikačná rovina krivky K:

$\mu : (X - \mathbf{P}(t)) \cdot ((\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) \times \dot{\mathbf{P}}(t)) = 0$,

kde $X = [x, y, z]$ je bod na krivke K, a z troch priamok:

Dotyčnica krivky K: d: $X = \mathbf{P}(t) + \lambda\dot{\mathbf{P}}(t)$, $\lambda \in R$,

Hlavná normála krivky K: n: $X = \mathbf{P}(t) + \lambda((\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) \times \dot{\mathbf{P}}(t))$,

Binormála krivky K: d: $X = \mathbf{P}(t) + \lambda(\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t))$.

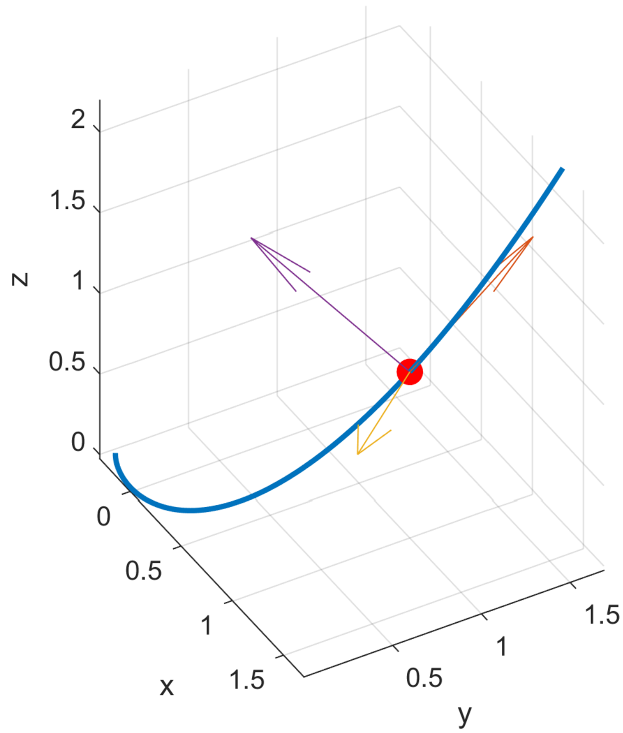
Príklad 81 Nájdite rovnice dotyčnice, hlavnej normály, binormály, normálovej roviny, oskulačnej roviny a rektifikačnej roviny krivky K: $\mathbf{P}(t) = (t, t^2, t^3)$ v jej ľubovoľnom bode t a potom pre $t = 1$.

Riešenie: Budeme postupovať tak, že postupne vypočítame potrebné parametre, ktoré dosadíme do vzorcov pre sprievodný trojhran. Začneme s vyčíslením hodnoty v zadanom bode t a dostávame $\mathbf{P}(1) = (1, 1, 1)$. Pokračujeme s výpočtom parciálnych derivácií zadanej krivky K a vyčíslením derivácií v zadanom bode t

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) &= (1, 2t, 3t^2) &\Rightarrow\quad \dot{\mathbf{P}}(1) &= (1, 2, 3)\,, \\ \ddot{\mathbf{P}}(t) &= (0, 2, 6t) &\Rightarrow\quad \ddot{\mathbf{P}}(1) &= (0, 2, 6)\,. \end{aligned}$$

Výpočet vektorových súčinov $\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)$ a $(\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) \times \dot{\mathbf{P}}(t)$ budeme robiť postupne. Je potrebné si zapamätať, že pri výpočte používame vždy iba vyčíslené hodnoty v danom bode t. Začneme tým jednoduchším

$$\dot{\mathbf{P}}(1) \times \ddot{\mathbf{P}}(1) = (1, 2, 3) \times (0, 2, 6) = (2 \cdot 6 - 3 \cdot 2, 3 \cdot 0 - 1 \cdot 6, 1 \cdot 2 - 2 \cdot 0) = (6, -6, 2).$$



Obr. 3.2.4. Krivka K: $\mathbf{P}(t) = (t, t^2, t^3)$ pre $t \in (-0.3, 1.3)$ a bod $t = 1$ s vyobrazením dotyčnice (červená), normály (fialová) a binormály (žltá).

Aby sme pri ďalšom výpočte nemuseli počítať s vysokými číslami, je vhodné, ak je to možné, predeliť vektor. V našom prípade $(6, -6, 2) = 2 \cdot (3, -3, 1)$. Druhý vektorový súčin spočítame s využitím nami vypočítanej hodnoty

$$\begin{aligned}(\dot{\mathbf{P}}(1) \times \ddot{\mathbf{P}}(1)) \times \dot{\mathbf{P}}(1) &= (3, -3, 1) \times (1, 2, 3) = \\ &= (-3 \cdot 3 - 1 \cdot 2, 1 \cdot 1 - 3 \cdot 3, 3 \cdot 2 - (-3) \cdot 1) = \\ &= (-11, -8, 9).\end{aligned}$$

Teraz môžeme napísať rovnice rovín sprievodného trojhranu. Ako prvú napíšeme rovnicu *Normálovej roviny krivky* K v bode $\mathbf{P}(t)$ kde $t = 1$

$$\nu : (X - \mathbf{P}(t)) \cdot \dot{\mathbf{P}}(t) = 0.$$

Do rovnice dosadíme známe hodnoty $\Rightarrow (X - \mathbf{P}(1)) \cdot \dot{\mathbf{P}}(1) = 0$ a dostávame

$$([x, y, z] - (1, 1, 1)) \cdot (1, 2, 3) = 0,$$

odčítame jednotlivé členy

$$(x - 1, y - 1, z - 1) \cdot (1, 2, 3) = 0$$

a urobíme skalárny súčin

$$1(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0.$$

Jednotlivé členy sčítame, usporiadame a dostávame výsledný tvar rovnice *Normálovej roviny krivky* K v bode $\mathbf{P}(t)$ kde $t = 1$

$$\begin{aligned} x - 1 + 2y - 2 + 3z - 3 &= 0 \\ x + 2y + 3z - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Rovnakým spôsobom budeme postupovať i pri *Oskulačnej rovine krivky* K v bode $\mathbf{P}(t)$ kde $t = 1$

$$\tau : (X - \mathbf{P}(t)) \cdot (\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) = 0.$$

Dosadíme vypočítané hodnoty

$$([x, y, z] - (1, 1, 1)) \cdot ((1, 2, 3) \times (0, 2, 6)) = 0,$$

výrazy odčítame a spravíme skalárne násobenie

$$\begin{aligned} (x - 1, y - 1, z - 1) \cdot (3, -3, 1) &= 0 \\ 3(x - 1) - 3(y - 1) + 1(z - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Na záver sčítame a usporiadame jednotlivé členy a môžeme napísať rovnicu *Oskulačnej roviny krivky* K v bode $\mathbf{P}(t)$ kde $t = 1$

$$\begin{aligned} 3x - 3 - 3y + 3 + z - 1 &= 0 \\ 3x - 3y + z - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Ako poslednú napíšeme rovnicu *Rektifikačnej roviny krivky* K v bode $\mathbf{P}(t)$ kde $t = 1$

$$\mu : (X - \mathbf{P}(t)) \cdot ((\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) \times \dot{\mathbf{P}}(t)) = 0,$$

dosadíme vopred vypočítané hodnoty

$$([x, y, z] - (1, 1, 1)) \cdot (((1, 2, 3) \times (0, 2, 6)) \times (1, 2, 3)) = 0$$

a postupujeme rovnako. Odčítame členy z prvej zátvorky a urobíme skalárny súčin

$$\begin{aligned} (x - 1, y - 1, z - 1) \cdot (-11, -8, 9) &= 0 \\ -11(x - 1) - 8(y - 1) + 9(z - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Usporiadame členy a dostávame rovnicu *Rektifikačnej roviny krivky* K v bode $\mathbf{P}(t)$ kde $t = 1$

$$\begin{aligned} -11x + 11 - 8y + 8 + 9z - 9 &= 0, \\ -11x - 8y + 9z + 10 &= 0. \end{aligned}$$

Sprievodný trojhran je popísaný aj tromi priamkami. Prvou je *Dotyčnica krivky* K v bode $\mathbf{P}(t)$ kde $t = 1$

$$d: \ X = \mathbf{P}(t) + \lambda \dot{\mathbf{P}}(t) = (1, 1, 1) + \lambda\,(1, 2, 3)$$

a rovnicu dotyčnice rozpíšeme po súradniciach

$$\begin{aligned} d : x &= 1 + \lambda, \\ y &= 1 + 2\lambda, \\ z &= 1 + 3\lambda,\ \lambda \in R. \end{aligned}$$

Druhou priamkou, ktorú si vyjadríme, je *Hlavná normála krivky* K v bode $\mathbf{P}(t)$ kde $t = 1$

$$n: \ X = \mathbf{P}(t) + \lambda((\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) \times \dot{\mathbf{P}}(t)) = (1, 1, 1) + \lambda\,(-11, -8, 9)$$

a rozpíšeme ju po zložkách

$$\begin{aligned} n: x &= 1 - 11\lambda, \\ y &= 1 - 8\lambda. \\ z &= 1 + 9\lambda,\ \lambda \in R. \end{aligned}$$

Musí platiť, že normála a dotyčnica sú na seba kolmé. Môžeme si to jednoducho overiť tak, že skalárny súčin ich vektorov je rovný nule

$$(1, 2, 3) \cdot (-11, -8, 9) = -11 + 2 \cdot (-8) + 3 \cdot 9 = -11 - 16 + 27 = 0.$$

Na záver vyjadríme *Binormálu krivky* K v bode $\mathbf{P}(t)$ kde $t = 1$

$$b:\ X = \mathbf{P}(t) + \lambda((\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) \times \dot{\mathbf{P}}(t)) = (1, 1, 1) + \lambda\,(3, -3, 1)$$

a rozpíšeme po súradniciach

$$\begin{aligned} b: x &= 1 + 3\lambda, \\ y &= 1 - 3\lambda, \\ z &= 1 + \lambda,\ \lambda \in R. \end{aligned}$$

Aj tu si môžeme overiť, že normála a binormála sú navzájom kolmé

$$(-11, -8, 9) \cdot (3, -3, 1) = -11 \cdot 3 + (-8) \cdot (-3) + 9 = -33 + 24 + 9 = 0,$$

a tiež musí platiť, že binormála je kolmá na dotyčnicu

$$(-11, -8, 9) \cdot (1, 2, 3) = -11 + (-8) \cdot 2 + 9 \cdot 3 = -11 - 16 + 27 = 0.$$

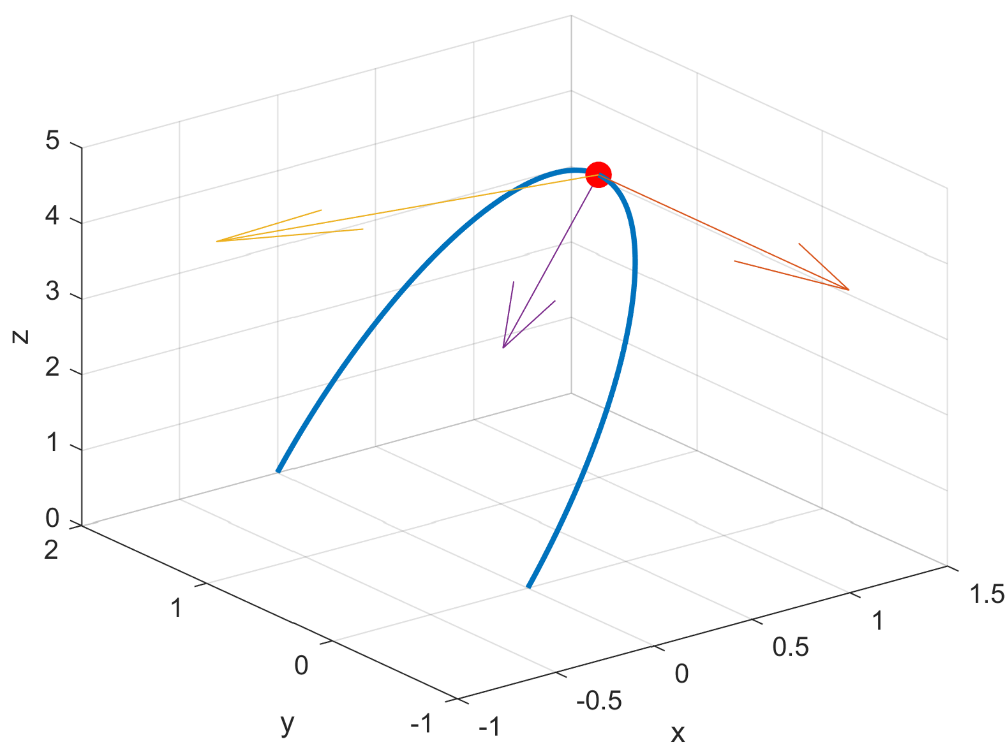
Príklad 82 Nájdite rovnice dotyčnice, hlavnej normály, binormály, normálovej roviny, oskulačnej roviny a rektifikačnej roviny krivky K: $\mathbf{P}(t) = (\sin(t), 1 - \cos(t), 4\sin(t))$ v bode $P = [1, 1, 4]$.

Riešenie: Budeme postupovať rovnako ako v predchádzajúcom príklade, ale najskôr si prevedieme súradnice bodu P na parameter t tak, že musí pre každú súradnicu platiť

$$\sin(t) = 1 \ \wedge \ 1 - \cos(t) = 1 \ \wedge \ 4\sin(t) = 4 \Rightarrow \sin(t) = 1 \ \wedge \ \cos(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

Pokračujeme s výpočtom parciálnych derivácií zadanej krivky K a vyčíslením derivácií v zadanom bode t

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) &= (\cos(t), \sin(t), 4\cos(t)) &&\Rightarrow \ \dot{\mathbf{P}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = (0, 1, 0)\,, \\ \ddot{\mathbf{P}}(t) &= (-\sin(t), \cos(t), -4\sin(t)) &&\Rightarrow \ \ddot{\mathbf{P}}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = (-1, 0, -4)\,. \end{aligned}$$



Obr. 3.2.5. Krivka K: $\mathbf{P}(t) = (\sin(t), t, \cos(t))$ pre $t \in (0, \pi)$ a bod $P = [1, 1, 4]$ s vyobrazením dotyčnice (červená), normály (fialová) a binormály (žltá).

Ako ďalšie si pripravíme čiastkové výpočty, ktoré sa používajú pri výsledných rovniciach. I tu pripomíname, že pri výpočte vektorových súčinov používame vždy iba vyčíslené hodnoty v danom bode t. Ako prvý spočítame vektorový súčin

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \ddot{\mathbf{P}}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= (0,1,0) \times (-1,0,-4) = \\ &= (1\cdot(-4) - 0\cdot 0, 0\cdot(-4) - 0\cdot(-1), 0\cdot 0 - 1\cdot(-1)) = \\ &= (-4,0,1).\end{aligned}$$

Druhý vektorový súčin spočítame s využitím už vypočítaného vektorového súčinu

$$\begin{aligned}\left(\dot{\mathbf{P}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \times \ddot{\mathbf{P}}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \times \dot{\mathbf{P}}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= (-4,0,1) \times (0,1,0) = \\ &= (0\cdot 0 - 1\cdot 1, 1\cdot 0 - (-4)\cdot 0, (-4)\cdot 1 - 0\cdot 0) \\ &= (-1,0,-4).\end{aligned}$$

Čiastkové výpočty máme hotové, stačí ich dosadiť do rovníc rovín sprievodného trojhranu. Ako prvú napíšeme rovnicu *Normálovej roviny krivky* K v bode $P = [1,1,4]$

$$\nu : (X - \mathbf{P}(t)) \cdot \dot{\mathbf{P}}(t) = 0.$$

Do rovnice dosadíme známe hodnoty

$$([x,y,z] - (1,1,4)) \cdot (0,1,0) = 0,$$

a postupujeme tak, aby sme odstránili zátvorky a čo najviac zjednodušili celý výraz. Začneme s odčítaním členov

$$(x-1, y-1, z-4) \cdot (0,1,0) = 0$$

a pokračujeme spočítaním skalárneho súčinu

$$0(x-1) + 1(y-1) + 0(z-4) = 0.$$

Ako vidíme, zostal nám iba jeden člen, a tak môžeme rovno napísať výsledný tvar rovnice *Normálovej roviny krivky* K v bode $P = [1,1,4]$

$$\nu : y - 1 = 0.$$

Rovnakým spôsobom postupujeme i pri napísaní tvaru *Oskulačnej rovine krivky* K v bode $P = [1,1,4]$. Do rovnice dosadíme vypočítané hodnoty

$$\begin{aligned}\tau : (X - \mathbf{P}(t)) \cdot (\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) &= 0. \\ ([x,y,z] - (1,1,4)) \cdot ((0,1,0) \times (-1,0,-4)) &= 0,\end{aligned}$$

výrazy odčítame, dosadíme pred vypočítaný vektorový súčin a v druhom kroku urobíme skalárne násobenie

$$\begin{aligned} (x-1, y-1, z-4)\cdot(-4,0,1) &= 0 \\ -4(x-1)+0(y-1)+1(z-4) &= 0. \end{aligned}$$

Sčítame, usporiadame jednotlivé členy a napíšeme rovnicu *Oskulačnej roviny krivky* K v bode $P=[1,1,4]$

$$\begin{aligned} -4x+4+z-4 &= 0 \\ \tau : -4x+z &= 0. \end{aligned}$$

Ako poslednú napíšeme rovnicu *Rektifikačnej roviny krivky* K v bode $P=[1,1,4]$

$$\mu : (X-\mathbf{P}(t))\cdot((\dot{\mathbf{P}}(t)\times\ddot{\mathbf{P}}(t))\times\dot{\mathbf{P}}(t)) = 0.$$

Do zadanej rovnice dosadíme vopred vypočítané hodnoty

$$([x,y,z]-(1,1,4))\cdot(((0,1,0)\times(-1,0,-4))\times(0,1,0)) = 0$$

a postupujeme rovnako. Odčítame členy z prvej zátvorky a urobíme skalárny súčin

$$\begin{aligned} (x-1, y-1, z-4)\cdot(-1,0,-4) &= 0 \\ -1(x-1)+0(y-1)-4(z-4) &= 0. \end{aligned}$$

Usporiadame členy a dostávame rovnicu *Rektifikačnej roviny krivky* K v bode $P=[1,1,4]$

$$\begin{aligned} -x+1-4z+16 &= 0, \\ \mu : -x-4z+17 &= 0. \end{aligned}$$

Napísali sme už tri roviny sprievodného trojhranu, ale je potrebné napísať i tri priamky, ktoré ho tiež tvoria. Prvou je *Dotyčnica krivky* K v bode $P=[1,1,4]$

$$d:\ X=\mathbf{P}(t)+\lambda\dot{\mathbf{P}}(t)=(1,1,4)+\lambda\,(0,1,0)\,.$$

Rovnicu je potrebné vždy rozpísať i po súradniciach

$$\begin{aligned} d: x &= 1 \\ y &= 1+\lambda \\ z &= 4,\ \lambda \in R. \end{aligned}$$

Druhú priamku, ktorou je *Hlavná normála krivky* K v bode $P = [1,1,4]$

$$n:\ X = \mathbf{P}(t) + \lambda((\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) \times \dot{\mathbf{P}}(t)) = (1,1,4) + \lambda\,(-1,0,-4)\,,$$

rozpíšeme tiež po zložkách

$$\begin{aligned} n: x &= 1-\lambda, \\ y &= 1, \\ z &= 4-4\lambda,\ \lambda \in R. \end{aligned}$$

Musí platiť, že normála a dotyčnica sú na seba kolmé. Urobíme jednoduchú skúšku tak, že skalárny súčin musí byť rovný nule

$$(0,1,0)\cdot(-1,0,-4) = 0\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 0\cdot(-4) = 0.$$

Na záver vyjadríme *Binormálu krivky* K v bode $P = [1,1,4]$

$$b:\ X = \mathbf{P}(t) + \lambda(\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) = (1,1,4) + \lambda\,(-4,0,1)$$

a rozpíšeme ju po zložkách

$$\begin{aligned} b: x &= 1-4\lambda, \\ y &= 1, \\ z &= 4+\lambda,\ \lambda \in R. \end{aligned}$$

Aj tu môžeme overiť, že normála a binormála sú navzájom kolmé

$$(-1,0,-4)\cdot(-4,0,1) = -1\cdot(-4) + 0\cdot 0 - 4\cdot 1 = 4-4 = 0,$$

a tiež musí platiť, že binormála je kolmá na dotyčnicu

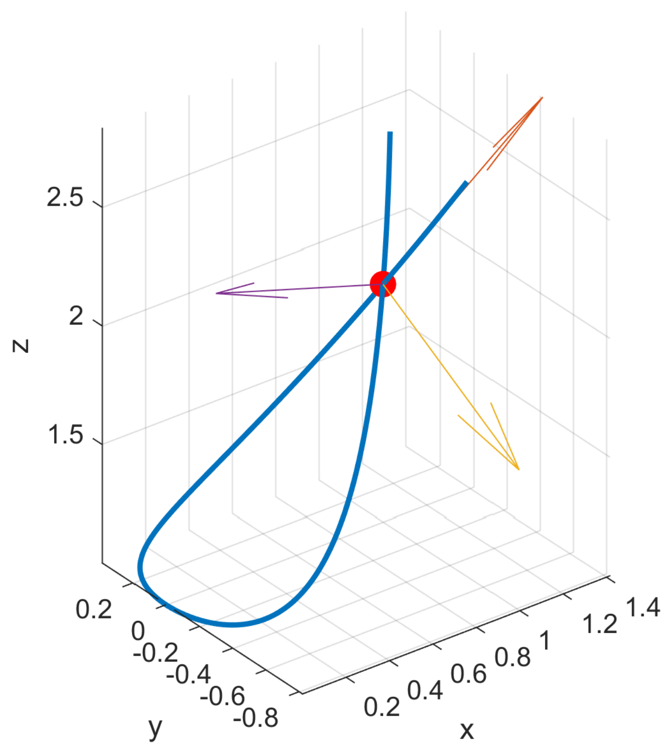
$$(-4,0,1)\cdot(0,1,0) = 0.$$

Príklad 83 Nájdite rovnice dotyčnice, hlavnej normály, binormály, normálovej roviny, oskulačnej roviny a rektifikačnej roviny krivky K: $\mathbf{P}(t) = (t^2, t - t^3, t^4 + 1)$ v bode $P = [1, 0, 2]$.

Riešenie: Budeme postupovať tak, že si postupne vypočítame potrebné vektorové súčiny, ktoré dosadíme do vzorcov pre sprievodný trojhran krivky K. Ako prvé si prevedieme súradnice bodu P na parameter t tak, že pre každú súradnicu musí platiť

$$t^2 = 1 \ \wedge \ t - t^3 = 0 \ \wedge \ t^4 + 1 = 2 \ \Rightarrow \ t = 1.$$

.



Obr. 3.2.6. Krivka K: $\mathbf{P}(t) = (t^2, t - t^3, t^4 + 1)$ pre $t \in (-1.1, 1.1)$ a bod $P = [1, 0, 2]$ so zobrazením dotyčnice (červená), normály (fialová) a binormály (žltá).

Vypočítame si parciálne derivácie zadanej krivky K a vyčíslime ich v zadanom bode t

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = (2t, 1 - 3t^2, 4t^3) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{P}}(1) = (2 - 2, 4)\,,$$
$$\ddot{\mathbf{P}}(t) = (2, -6t, 12t) \qquad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{P}}(1) = (2, -6, 12)\,.$$

Ako vidíme, možno zjednodušiť ďalšie výpočty predelením oboch vypočítaných vektorov dvojkou, ale vektory zjednodušíme až po výpočte skalárnych súčinov. I tu pripomíname, že pri výpočte vektorových súčinov používame vždy iba vyčíslené hodnoty v danom bode t. Ako prvý spočítame vektorový súčin

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}(1) \times \ddot{\mathbf{P}}(1) &= (2,-2,4) \times (2,-6,12) = \\
&= (-2 \cdot 12 - 4 \cdot (-6), 4 \cdot 2 - 2 \cdot 12, 2 \cdot (-6) - (-2) \cdot 2) = \\
&= (0,-16,-8) = 8 \cdot (0,-2,-1).
\end{aligned}$$

Na záver sme vektor zjednodušili predelením číslom osem. Druhý vektorový súčin spočítame rovnakým spôsobom

$$\begin{aligned}
\left(\dot{\mathbf{P}}(1) \times \ddot{\mathbf{P}}(1)\right) \times \dot{\mathbf{P}}(1) &= (0,-2,-1) \times (2,-2,4) = \\
&= (-2 \cdot 4 - (-1) \cdot (-2), -1 \cdot 2 - 0 \cdot 4, 0 \cdot (-2) - (-2) \cdot 2) \\
&= (-10,-2,4) = 2 \cdot (-5,-1,2).
\end{aligned}$$

Tu sme výsledný vektor zjednodušili predelením dvojkou. Čiastkové výpočty máme hotové, stačí ich dosadiť do rovníc rovín sprievodného trojhranu. Ako prvú napíšeme rovnicu *Normálovej roviny krivky* K v bode $P = [1,0,2]$

$$\nu : (X - \mathbf{P}(t)) \cdot \dot{\mathbf{P}}(t) = 0.$$

Do rovnice dosadíme známe hodnoty

$$([x,y,z] - (1,0,2)) \cdot (2,-2,4) = 0,$$

odčítame členy v zátvorke

$$(x-1, y-0, z-2) \cdot (2,-2,4) = 0$$

a pokračujeme spočítaním skalárneho súčinu

$$2(x-1) + (-2)y + 4(z-2) = 0.$$

Členy roznásobíme, sčítame a môžeme napísať výsledný tvar rovnice *Normálovej roviny krivky* K v bode $P = [1,0,2]$

$$\begin{aligned}
2x - 2 - 2y + 4z - 8 &= 0 \\
\nu : 2x - 2y + 4z - 10 &= 0.
\end{aligned}$$

Rovnakým spôsobom postupujeme i pri napísaní tvaru *Oskulačnej rovine krivky* K v bode $P = [1, 0, 2]$. Do rovnice dosadíme vypočítané hodnoty

$$\begin{aligned} \tau : (X - \mathbf{P}(t)) \cdot (\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) &= 0. \\ ([x, y, z] - (1, 0, 2)) \cdot ((2, -2, 4) \times (2, -6, 16)) &= 0, \end{aligned}$$

výrazy odčítame, dosadíme pred vypočítaný vektorový súčin a v druhom kroku urobíme skalárne násobenie

$$\begin{aligned} (x - 1, y - 0, z - 2) \cdot (0, -2, -1) &= 0 \\ 0(x - 1) + (-2)y + (-1)(z - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Pre jednoduchosť výsledného tvaru napíšeme rovno rovnicu *Oksulačnej roviny krivky* K v bode $P = [1, 0, 2]$

$$\tau : -2y - z + 2 = 0.$$

Ako poslednú napíšeme rovnicu *Rektifikačnej roviny krivky* K v bode $P = [1, 0, 2]$

$$\mu : (X - \mathbf{P}(t)) \cdot ((\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) \times \dot{\mathbf{P}}(t)) = 0,$$

Do zadanej rovnice dosadíme vopred vypočítané hodnoty

$$([x, y, z] - (1, 0, 2)) \cdot (((2, -2, 4) \times (2, -6, 12)) \times (2, -2, 4)) = 0$$

a postupujeme rovnako. Odčítame členy z prvej zátvorky a urobíme skalárny súčin

$$\begin{aligned} (x - 1, y - 0, z - 2) \cdot (-5, -1, 2) &= 0 \\ -5(x - 1) + (-1)y + 2(z - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Usporiadame členy a dostávame rovnicu *Rektifikačnej roviny krivky* K v bode $P = [1, 0, 2]$

$$\begin{aligned} -5x + 5 - y + 2z - 4 &= 0, \\ \mu : -5x - y + 2z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Tri roviny sme už napísali, ale je potrebné napísať aj tri priamky, ktoré tiež tvoria sprievodný trojhran. Ako prvú napíšeme *Dotyčnicu krivky* K v bode $P = [1, 0, 2]$

$$d: \; X = \mathbf{P}(t) + \lambda \dot{\mathbf{P}}(t) = (1, 0, 2) + \lambda \, (2, -2, 4) \, .$$

Rovnicu je potrebné rozpísať po súradniciach

$$\begin{aligned} d: x &= 1 + 2\lambda, \\ y &= -2\lambda, \\ z &= 2 + 4\lambda, \; \lambda \in R. \end{aligned}$$

Druhou priamkou je *Hlavná normála krivky* K v bode $P = [1, 0, 2]$

$$n: \; X = \mathbf{P}(t) + \lambda((\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) \times \dot{\mathbf{P}}(t)) = (1, 0, 2) + \lambda \, (-5, -1, 2) \, ,$$

rozpíšeme ju tiež po zložkách

$$\begin{aligned} n: x &= 1 - 5\lambda, \\ y &= -\lambda, \\ z &= 2 + 2\lambda, \; \lambda \in R. \end{aligned}$$

Musí platiť, že normála a dotyčnica sú na seba kolmé. Urobíme jednoduchú skúšku či skalárny súčin je rovný nule

$$(-5, -1, 2) \cdot (2, -2, 4) = -5 \cdot 2 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = -10 + 2 + 8 = 0.$$

Na záver vyjadríme *Binormálu krivky* K v bode $P = [1, 0, 2]$

$$b: \; X = \mathbf{P}(t) + \lambda(\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) = (1, 0, 2) + \lambda \, (0, -2, -1)$$

a rozpíšeme ju po zložkách

$$\begin{aligned} b: x &= 1, \\ y &= -2\lambda, \\ z &= 2 - \lambda, \; \lambda \in R. \end{aligned}$$

Overíme, že normála a binormála sú navzájom kolmé

$$(-5,-1,2)\cdot(0,-2,-1) = -5\cdot 0 + (-1)\cdot(-2) + 2\cdot(-1) = 0.$$

Tiež musí platiť, že binormála je kolmá na dotyčnicu

$$(0,-2,-1)\cdot(2,-2,4) = 0\cdot 2 + (-2)\cdot(-2) + (-1)\cdot 4 = 4 - 4 = 0.$$

3.3 Krivosť krivky K

Prvá krivosť krivky K (flexia):

$$\kappa^2(t) = \frac{|\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)|^2}{(\dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}(t))^3}.$$

Druhá krivosť krivky K (torzia):

$$\tau(t) = \frac{(\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) \cdot \dddot{\mathbf{P}}(t)}{|\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)|^2}.$$

Polomer krivosti krivky K:

$$R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}.$$

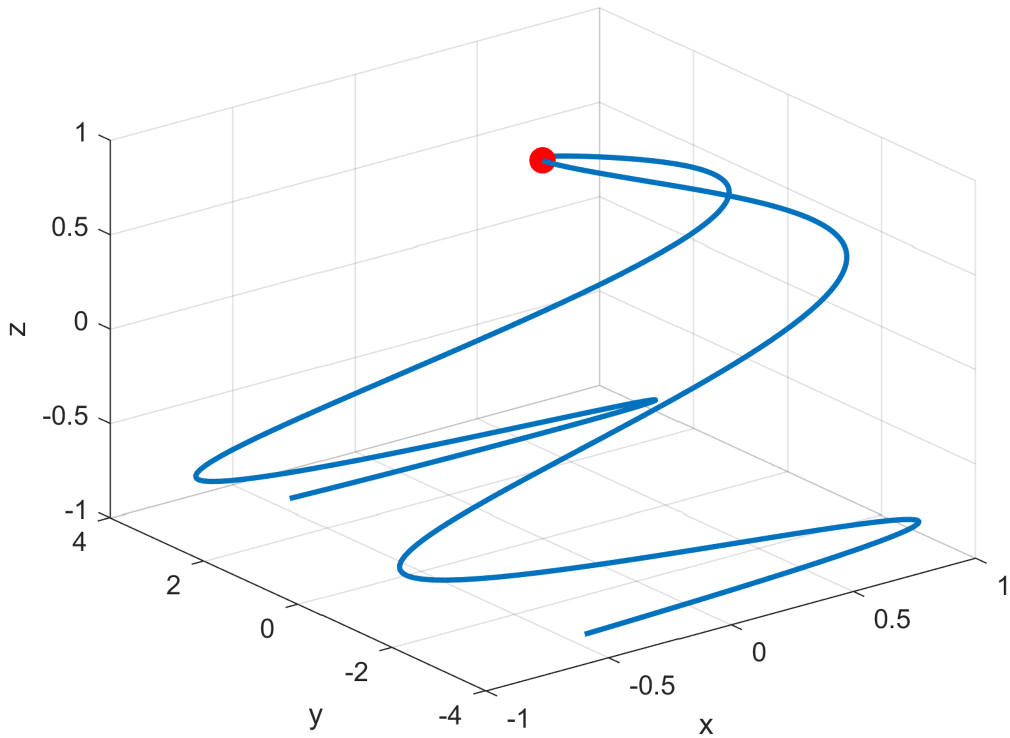
Príklad 84 Vypočítajte krivosti krivky K danej parametrickými rovnicami $x = \sin(t^2)$, $y = t$ a $z = \cos(t)$ pre parameter $t = 0$.

Riešenie: Ako sme videli v predchádzajúcom type príkladov, výpočet či už sprievodného trojhranu alebo v tomto prípade krivosti krivky bude pozostávať z prípravy všetkých vektorových násobení, ktoré potom dosadíme do výsledného vzorca. Nato, aby sme mohli dosadzovať do vzorcov, musíme previesť parametricky zadanú krivku do vektorového tvaru. Prevedieme to veľmi jednoducho spojením zadaných členov K: $\mathbf{P}(t) = (\sin(t^2), t, \cos(t))$. Teraz môžeme vypočítať súradnicu bodu P a všetky parciálne derivácie (v tomto prípade i tretiu) a vyčísliť pre zadanu hodnotu parametra $t = 0$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) &= (\sin(t^2), t, \cos(t)) && \Rightarrow \ \mathbf{P}(0) = (0, 0, 1)\,, \\
\dot{\mathbf{P}}(t) &= (2t\cos(t^2), 1, -\sin(t)) && \Rightarrow \ \dot{\mathbf{P}}(0) = (0, 1, 0)\,, \\
\ddot{\mathbf{P}}(t) &= (2\cos(t^2) - 4t^2\sin(t^2), 0, -\cos(t)) && \Rightarrow \ \ddot{\mathbf{P}}(0) = (2, 0, -1)\,, \\
\dddot{\mathbf{P}}(t) &= (-8t^3\cos(t^2) - 12t\sin(t^2), 0, \sin(t)) && \Rightarrow \ \dddot{\mathbf{P}}(0) = (0, 0, 0)\,.
\end{aligned}$$

I tu pripomíname, že pri výpočte vektorových súčinov i skalárnych súčinov používame vždy iba vyčíslené hodnoty v danom bode t. Ako prvý spočítame skalárny súčin

$$\dot{\mathbf{P}}(0) \cdot \dot{\mathbf{P}}(0) = (0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0) = 1.$$



Obr. 3.3.7. Krivka $K : \mathbf{P}(t) = (\sin(t^2), t, \cos(t))$ pre $t \in (-\pi, \pi)$ a bod $P = [0, 0, 1]$.

Ďalej spočítame vektorový súčin

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}\,(0) \times \ddot{\mathbf{P}}\,(0) &= (0,1,0) \times (2,0,-1) = \\ &= (1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0, 0 \cdot 2 - 0 \cdot (-1), 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2) = \\ &= (-1, 0, -2)\end{aligned}$$

a spočítame dĺžku tohto vektorového súčinu

$$|\dot{\mathbf{P}}\,(0) \times \ddot{\mathbf{P}}\,(0)\,| = |(-1,0,-2)| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Zostáva nám ešte spočítať jeden člen, ktorý potom dosadíme do vzorcov

$$\left(\dot{\mathbf{P}}\,(0) \times \ddot{\mathbf{P}}\,(0)\right) \cdot \dddot{\mathbf{P}}\,(0) = (-1,0,-2) \cdot (0,0,0) = 0.$$

Prvú krivosť krivky K (flexiu) spočítame dosadením do vzorca

$$\kappa(0) = \sqrt{\frac{|\dot{\mathbf{P}}(0) \times \ddot{\mathbf{P}}(0)|^2}{(\dot{\mathbf{P}}(0) \cdot \dot{\mathbf{P}}(0))^3}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{5})^2}{1^3}} = \sqrt{5},$$

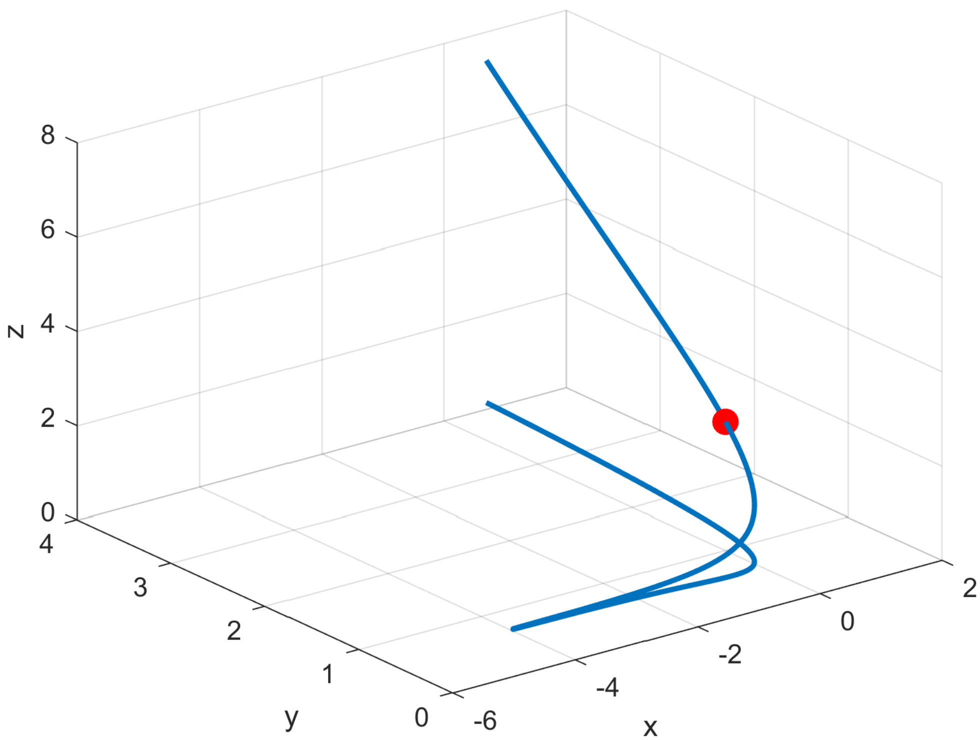
druhú krivosť krivky K (torziu) napíšeme rovnakým spôsobom

$$\tau(0) = \frac{(\dot{\mathbf{P}}(0) \times \ddot{\mathbf{P}}(0)) \cdot \dddot{\mathbf{P}}(0)}{|\dot{\mathbf{P}}(0) \times \ddot{\mathbf{P}}(0)|^2} = \frac{0}{(\sqrt{5})^2} = 0.$$

Ako posledné už len napíšeme polomer krivosti krivky K v bode $P = [0, 0, 1]$

$$R(0) = \frac{0}{\kappa(0)} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Príklad 85 Vypočítajte krivosti krivky K danej parametrickými rovnicami $x = \ln(t)$, $y = t^2$ a $z = e^t$ v zadanom bode $P = [0, 1, e]$.



Obr. 3.3.8. Krivka $K : \mathbf{P}(t) = (\ln(t), t^2, e^t)$ pre $t \in (-2, 2)$ a bod $P = [0, 1, e]$.

Riešenie: Postupovať budeme rovnako ako v predchádzajúcom príklade. Ako prvé prevedieme zadané súradnice bodu P na parameter t tak, že musí pre každdú súradnicu platiť

$$\ln(t) = 0 \ \wedge \ t^2 = 1 \ \wedge \ e^t = e \ \Rightarrow \ t = 1.$$

Teraz spočítame všetky parciálne derivácie a vyčíslime ich v zadanom bode t

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}(t) &= \left(\tfrac{1}{t}, 2t, e^t\right) &&\Rightarrow \quad \dot{\mathbf{P}}\,(1) = (1, 2, e)\,,\\
\ddot{\mathbf{P}}(t) &= \left(-\tfrac{2}{t^2}, 2, e^t\right) &&\Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{P}}\,(1) = (-1, 2, e)\,,\\
\dddot{\mathbf{P}}(t) &= \left(\tfrac{2}{t^3}, 0, e^t\right) &&\Rightarrow \quad \dddot{\mathbf{P}}\,(1) = (2, 0, e)\,.
\end{aligned}$$

Pripomíname, že pri výpočte vektorových a skalárnych súčinov používame vždy iba vyčíslené hodnoty v danom bode t. Ako prvý spočítame skalárny súčin

$$\dot{\mathbf{P}}\,(1) \cdot \dot{\mathbf{P}}\,(1) = (1, 2, e) \cdot (1, 2, e) = 5 + e^2.$$

Ďalej spočítame vektorový súčin

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{P}}\,(1) \times \ddot{\mathbf{P}}\,(1) &= (1, 2, e) \times (-1, 2, e) =\\
&= (2 \cdot e - e \cdot 2, e \cdot (-1) - 1 \cdot e, 1 \cdot 2 - 2 \cdot (-1)) =\\
&= (0, -2e, 4)
\end{aligned}$$

a spočítame dĺžku tohto vektorového súčinu

$$|\dot{\mathbf{P}}\,(1) \times \ddot{\mathbf{P}}\,(1)\,| = |(0, -2e, 4)| = \sqrt{0^2 + (-2e)^2 + 4^2} = \sqrt{4e^2 + 16} = 2\sqrt{e^2 + 4}.$$

Zostáva nám ešte spočítať jeden člen, ktorý potom dosadíme do vzorcov

$$\left(\dot{\mathbf{P}}\,(1) \times \ddot{\mathbf{P}}\,(1)\right) \cdot \dddot{\mathbf{P}}\,(1) = (0, -2e, 4) \cdot (2, 0, e) = 0 \cdot 2 + (-2e) \cdot 0 + 4 \cdot e = 4e.$$

Prvú krivosť krivky K (flexiu) spočítame dosadením do vzorca

$$\kappa(1) = \sqrt{\frac{|\dot{\mathbf{P}}(1) \times \ddot{\mathbf{P}}(1)|^2}{(\dot{\mathbf{P}}(1) \cdot \dot{\mathbf{P}}(1))^3}} = \sqrt{\frac{(2\sqrt{e^2+4})^2}{(5+e^2)^3}} = \frac{2\sqrt{e^2+4}}{(5+e^2)^{\frac{3}{2}}},$$

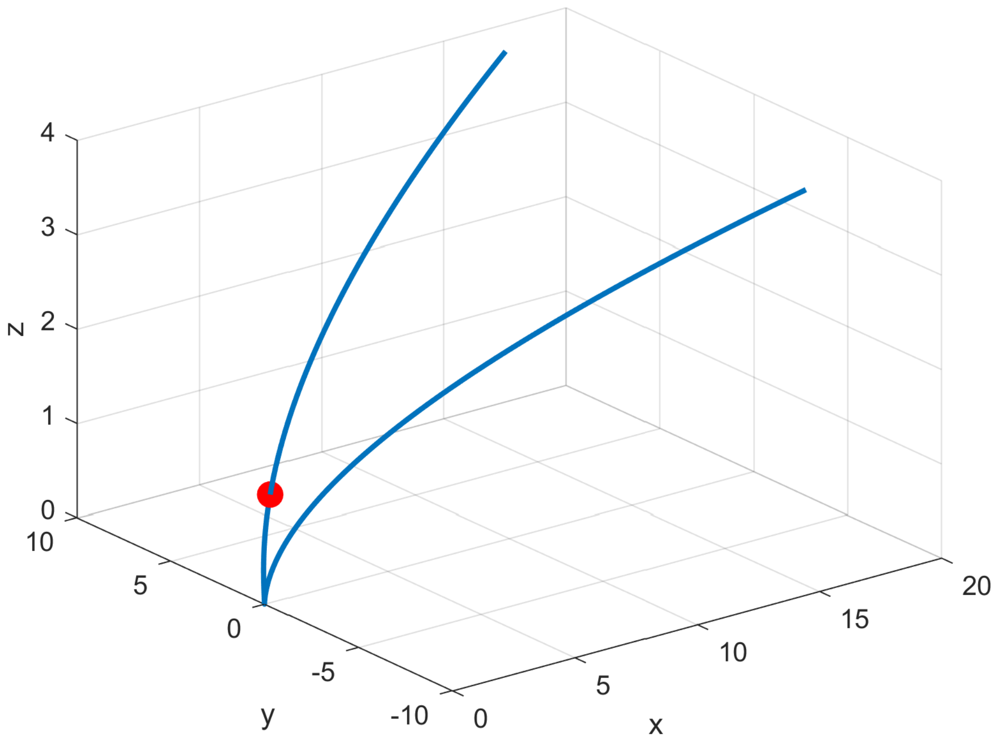
a druhú krivosť krivky K (torziu) získame rovnakým spôsobom

$$\tau(1) = \frac{(\dot{\mathbf{P}}(1) \times \ddot{\mathbf{P}}(1)) \cdot \dddot{\mathbf{P}}(1)}{|\dot{\mathbf{P}}(1) \times \ddot{\mathbf{P}}(1)|^2} = \frac{4e}{(2\sqrt{e^2+4})^2} = \frac{e}{e^2+4}.$$

Nakoniec už len napíšeme polomer krivosti krivky K

$$R(1) = \frac{1}{\kappa(1)} = \frac{1}{\frac{2\sqrt{e^2+4}}{(5+e^2)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{(5+e^2)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{e^2+4}}.$$

Príklad 86 Vypočítajte krivosti danej krivky K: $\mathbf{P}(t) = (t^4, t^3, t^2)$ pre parameter $t = 1$.



Obr. 3.3.9. Krivka K: $\mathbf{P}(t) = (t^4, t^3, t^2)$ pre $t \in (-2, 2)$ a bod $P = [1, 1, 1]$.

Riešenie: Začneme tým, že vypočítame súradnicu bodu P, všetky parciálne derivácie a vyčíslime ich pre zadaný parameter $t = 1$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) &= (t^4, t^3, t^2) &&\Rightarrow \quad \mathbf{P}\,(1) = (1, 1, 1)\,,\\
\dot{\mathbf{P}}(t) &= (4t^3, 3t^2, 2t) &&\Rightarrow \quad \dot{\mathbf{P}}\,(1) = (4, 3, 2)\,,\\
\ddot{\mathbf{P}}(t) &= (12t^2, 6t, 2) &&\Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{P}}\,(1) = (12, 6, 2) = 2 \cdot (6, 3, 1),\\
\dddot{\mathbf{P}}(t) &= (24t, 6, 0) &&\Rightarrow \quad \dddot{\mathbf{P}}\,(1) = (24, 6, 0) = 6 \cdot (4, 1, 0).
\end{aligned}$$

Ako ste si všimli, vektory sme zjednodušili, aby sme nemuseli počítať s veľkými číslami. Naposledy pripomíname, že pri výpočte vektorových súčinov i skalárnych súčinov používame vždy iba vyčíslené hodnoty v danom bode t. Ako prvý spočítame skalárny súčin

$$\dot{\mathbf{P}}\,(1) \cdot \dot{\mathbf{P}}\,(1) = (4, 3, 2) \cdot (4, 3, 2) = 16 + 9 + 4 = 29.$$

Ďalej spočítame vektorový súčin

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}(1) \times \ddot{\mathbf{P}}(1) &= (4,3,2) \times (6,3,1) = \\ &= (3 \cdot 1 - 2 \cdot 3, 2 \cdot 6 - 4 \cdot 1, 4 \cdot 3 - 3 \cdot 6) = \\ &= (-3, 8, -6)\end{aligned}$$

a spočítame dĺžku tohto vektorového súčinu

$$|\dot{\mathbf{P}}(1) \times \ddot{\mathbf{P}}(1)| = |(-3,8,-6)| = \sqrt{(-3)^2 + 8^2 + (-6)^2} = \sqrt{9+64+36} = \sqrt{109}.$$

Zostáva nám ešte spočítať jeden člen, ktorý potom dosadíme do vzorcov

$$\left(\dot{\mathbf{P}}(1) \times \ddot{\mathbf{P}}(1)\right) \cdot \dddot{\mathbf{P}}(1) = (-3,8,-6) \cdot (4,1,0) = (-3) \cdot 4 + 8 \cdot 1 + (-6) \cdot 0 = -4.$$

Prvá krivosť krivky K (flexia) potom bude

$$\kappa(1) = \sqrt{\frac{|\dot{\mathbf{P}}(1) \times \ddot{\mathbf{P}}(1)|^2}{(\dot{\mathbf{P}}(1) \cdot \dot{\mathbf{P}}(1))^3}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{109})^2}{(29)^3}} = \frac{\sqrt{109}}{(29)^{\frac{3}{2}}},$$

a druhá krivosť krivky K (torzia)

$$\tau(1) = \frac{(\dot{\mathbf{P}}(1) \times \ddot{\mathbf{P}}(1)) \cdot \dddot{\mathbf{P}}(1)}{|\dot{\mathbf{P}}(1) \times \ddot{\mathbf{P}}(1)|^2} = \frac{-4}{(\sqrt{109})^2} = \frac{-4}{109}.$$

Na záver už len napíšeme polomer krivosti krivky K

$$R(1) = \frac{1}{\kappa(1)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{109}}{(29)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{(29)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{109}} = \frac{29\sqrt{29}}{\sqrt{109}}.$$

3.4 Úlohy na precvičenie

Úloha 15 Vypočítajte rovnice sprievodného trojhranu ku krivke danej parametrickými rovnicami:

a) $x = \sin(t)$, $y = \cos(t)$ a $z = 4\sin\left(\frac{t}{2}\right)$ v bode bode $P = [0, -1, 4]$. . . . . $[\nu : -x = 0., \tau : -y - z + 5 = 0, \mu : y - z + 5 = 0,$

$$\begin{aligned} d:\quad & x = -\lambda, & n:\quad & x = 0, & b:\quad & x = 0,\\ & y = -1, & & y = -1 - \lambda, & & y = -1 - \lambda,\\ & z = 4, & & z = 4 + \lambda, & & z = 4 - \lambda,\ \lambda \in R.] \end{aligned}$$

b) $x = t$, $y = \frac{t}{2}$ a $z = \frac{t^2}{2}$ v bode bode $P = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. . . . . $[\nu : 4x + 2y + 4z - 7 = 0., \tau : x - 2y = 0, \mu : 8x + 4y - 10z + 5 = 0,$

$$\begin{aligned} d:\quad & x = 1 + \lambda, & n:\quad & x = 1 - \lambda, & b:\quad & x = 1 + \tfrac{1}{2}\lambda,\\ & y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\lambda, & & y = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\lambda, & & y = \tfrac{1}{2} - \lambda,\\ & z = \tfrac{1}{2} + \lambda, & & z = \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{4}\lambda, & & z = \tfrac{1}{2},\ \lambda \in R.] \end{aligned}$$

c) $x = \frac{t^4}{4}$, $y = \frac{t^3}{3}$ a $z = \frac{t^2}{2}$ v bode bode $P = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. . . . . $[\nu : x + y + z - \frac{13}{12} = 0., \tau : -x + 2y - z + \frac{1}{12} = 0, \mu : x - z + \frac{1}{4} = 0,$

$$\begin{aligned} d:\quad & x = \tfrac{1}{4} + \lambda, & n:\quad & x = \tfrac{1}{4} + 3\lambda, & b:\quad & x = \tfrac{1}{4} - \lambda,\\ & y = \tfrac{1}{3} + \lambda, & & y = \tfrac{1}{3}, & & y = \tfrac{1}{3} + 2\lambda,\\ & z = \tfrac{1}{2} + \lambda, & & z = \tfrac{1}{2} - 3\lambda, & & z = \tfrac{1}{2} - \lambda,\ \lambda \in R.] \end{aligned}$$

d) $x = t$, $y = t^2$ a $z = t + 1$ v bode bode $P = [1, 1, 2]$. . . . . $[\nu : x + 2y + z - 5 = 0., \tau : -2x + 2z - 2 = 0, \mu : -4x + 4y - 4z + 8 = 0,$

$$\begin{aligned} d:\quad & x = 1 + \lambda, & n:\quad & x = 1 - 4\lambda, & b:\quad & x = 1 - 2\lambda,\\ & y = 1 + 2\lambda, & & y == 1 + 4\lambda, & & y = 1,\\ & z = 2 + \lambda, & & z = 2 - 4\lambda, & & z = 2 + 2\lambda,\ \lambda \in R.] \end{aligned}$$

e) $x = 3\cos(t)$, $y = 3\sin(t)$ a $z = 2 - 3\sin(t)$ v bode bode $P = [3, 0, 2]$. . . . . $[\nu : 3y - 3z + 6 = 0., \tau : 9y + 9z - 18 = 0, \mu : -54x + 162 = 0,$

$$\begin{aligned} d:\quad & x = 3, & n:\quad & x = 3 - 54\lambda, & b:\quad & x = 3,\\ & y = 3\lambda, & & y = 0, & & y = 9\lambda,\\ & z = 2 - 3\lambda, & & z = 2, & & z = 2 + 9\lambda,\ \lambda \in R.] \end{aligned}$$

f) $x = e^t \cos(t)$, $y = e^t \sin(t)$ a $z = e^t$ v bode bode $P = [1, 0, 1]$. . . . .
. . . . [$\nu : x + y + z - 2 = 0.$, $\tau : -x - y + 2z - 1 = 0$, $\mu : -3x + 3y + 3 = 0$,

$$\begin{array}{llllll} d: & x = 1 + \lambda, & n: & x = 1 - 3\lambda, & b: & x = 1 - \lambda, \\ & y = \lambda, & & y = 3\lambda, & & y = -\lambda, \\ & z = 1 + \lambda, & & z = 1, & & z = 1 + 2\lambda,\ \lambda \in R.] \end{array}$$

Kapitola 4

Diferenciálna geometria plôch

4.1 Dotyková rovina ku ploche σ

Plochu si môžeme predstaviť ako dráhu krivky pohybujúcej sa v priestore, kde sa každý bod krivky môže pohybovať inou rýchlosťou.

Rovnice na definovanie plochy σ:

Vektorová rovnica plochy σ: $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$,

Explicitná rovnica plochy σ: $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$,

Implicitná rovnica plochy σ: $F(x,y,z) = 0$.

Dotyková rovina plochy σ v bode P:

pre vektorovú rovnicu plochy: $(X - P) \cdot (\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)) = 0$,

pre implicitnú rovnicu plochy: $(X - P) \cdot \nabla F(P) = 0$,

kde $X = [x,y,z]$ je bod na ploche σ, $\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$ a $\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$,

$\nabla F = \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\right)$.

Normálová rovina plochy σ v bode P:

pre vektorovú rovnicu plochy: $X = P + \lambda(\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)), \quad \lambda \in R$,

pre implicitnú rovnicu plochy: $X = P + \lambda \nabla F(P)$.

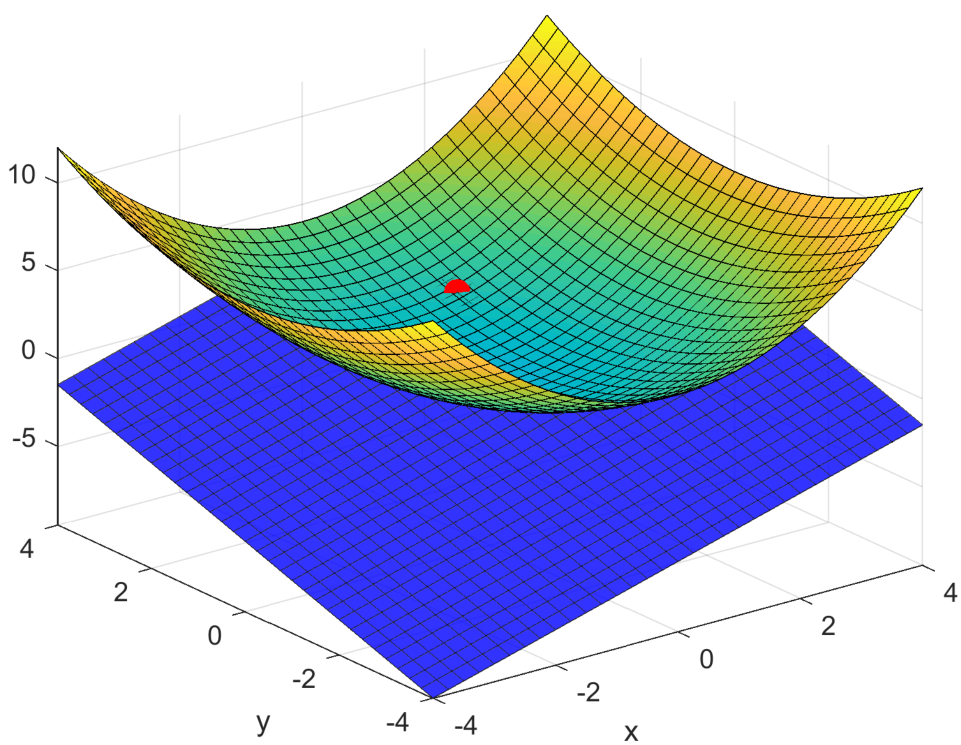
Príklad 87 Napíšte rovnicu dotykovej roviny a normály plochy
$\sigma : \mathbf{r}(u,v) = \left(u, v, \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{4}\right)$ v bode $P = \left[1, 1, \frac{3}{4}\right]$.

Riešenie: Začneme s výpočtom hodnôt parametrov u a v pre zadaný bod P tak, že dáme do rovnosti rovnice plochy a súradnice bodu P

$$\begin{aligned} u &= 1, \\ v &= 1, \\ \frac{u^2}{2}+\frac{v^2}{4} &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

K napísaniu rovnice pre dotykovú rovinu a normálu potrebujeme poznať prvé parciálne derivácie $\mathbf{r}(u,v)$ podľa u a v vyčíslené v bode $P=\mathbf{r}(1,1)$

$$\mathbf{r}_u = (1,0,u) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_u(P) = (1,0,1)\,,$$
$$\mathbf{r}_v = \left(0,1,\tfrac{v}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}_v(P) = \left(0,1,\tfrac{1}{2}\right).$$



Obr. 4.1.1. Plocha $\sigma : \mathbf{r}(u,v) = \left(u, v, \frac{u^2}{2}+\frac{v^2}{4}\right)$ a jej dotyková rovina v bode $P=\left[1,1,\frac{3}{4}\right]$.

Dosadíme do rovnice dotykovej roviny pre vektorovo zadanú plochu

$$(X-P)\cdot(\mathbf{r}_u(P)\times\mathbf{r}_v(P))=0$$

a dostávame

$$\left([x,y,z]-\left[1,1,\frac{3}{4}\right]\right)\cdot\left((1,0,1)\times\left(0,1,\frac{1}{2}\right)\right)=0.$$

Spočítame vektorový súčin

$$(1,0,1)\times\left(0,1,\frac{1}{2}\right)=\left(0\cdot\frac{1}{2}-1\cdot 1, 1\cdot 0-1\cdot\frac{1}{2}, 1\cdot 1-0\cdot 0\right)=\left(-1,-\frac{1}{2},1\right),$$

dosadíme ho do rovnice

$$\left(x-1,y-1,z-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-1,-\frac{1}{2},1\right)=0$$

a urobíme skálarny súčin

$$-1(x-1)-\frac{1}{2}(y-1)+\left(z-\frac{3}{4}\right)=0.$$

Zátvorky roznásobíme

$$-x+1-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}+z-\frac{3}{4}=0.$$

Aby sme odstránili zlomky, rovnicu vynásobíme 4

$$-4x+4-2y+2+4z-3=0,$$

jednotlivé členy sčítame a dostávame rovnicu dotykovej roviny v tvare

$$-4x-2y+4z-3=0.$$

Rovnicu normály napíšeme rovnakým spôsobom

$$\begin{aligned}X &= P+\lambda(\mathbf{r}_u(P)\times\mathbf{r}_v(P))\\ [x,y,z] &= \left[1,1,\frac{3}{4}\right]+\lambda\left((1,0,1)\times\left(0,1,\frac{1}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

Vektorový súčin sme už počítali, preto môžeme rovno napísať

$$[x,y,z]=\left[1,1,\frac{3}{4}\right]+\lambda\left(-1,-\frac{1}{2},1\right).$$

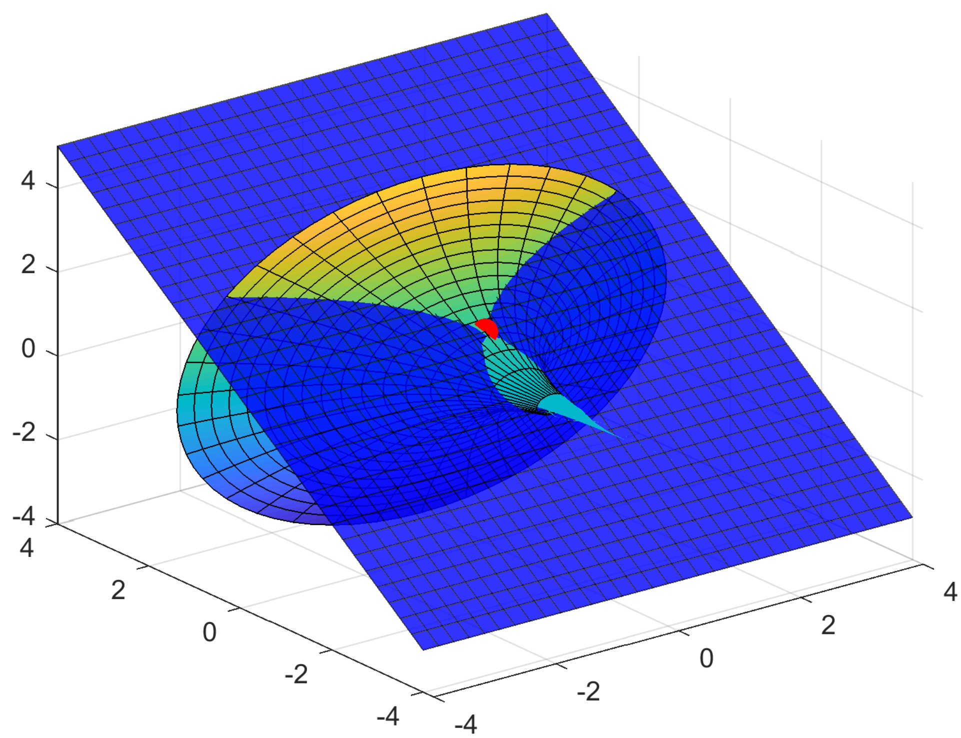
Nakoniec rovnicu rozpíšeme po zložkách

$$\begin{aligned}x &= 1-\lambda,\\ y &= 1-\frac{1}{2}\lambda,\\ z &= \frac{3}{4}+\lambda, \quad \lambda\in R.\end{aligned}$$

Príklad 88 Napíšte rovnicu dotykovej roviny a normály plochy
$\sigma : \mathbf{r}(u,v) = (u\sin(v), \ln(u), u\cos(v))$ v bode $P = [0,0,1]$.

Riešenie: Najskôr si vypočítame parametre u, v pomocou súradníc bodu P. Budeme riešit sústavu troch rovníc o dvoch neznámych

$$\begin{aligned} u\sin(v) &= 0, \\ \ln(u) &= 0, \\ u\cos(v) &= 1. \end{aligned}$$



Obr. 4.1.2. Plocha $\sigma : \mathbf{r}(u,v) = (u\sin(v), \ln(u), u\cos(v))$ a jej dotyková rovina v bode $P = [0,0,1]$.

Z druhej rovnice priamo dostávame

$\ln(u) = 0 \;\Rightarrow\; u = 1.$

Parameter v vypočítame

$$1\cos(v) = 1 \;\wedge\; 1\sin(v) = 0 \;\Rightarrow\; v = 0,$$

a potom dostávame $P = \mathbf{r}(1,0)$. Na napísanie rovnice pre dotykovú rovinu a normálu potrebujeme poznať prvé parciálne derivácie $\mathbf{r}(u,v)$ podľa u a v vyčíslené v bode P

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= \left(\sin(v), \tfrac{1}{u}, \cos(v)\right) && \Rightarrow \;\; \mathbf{r}_u(P) = (0,1,1)\,, \\ \mathbf{r}_v &= (u\cos(v), 0, -u\sin(v)) && \Rightarrow \;\; \mathbf{r}_v(P) = (1,0,0)\,. \end{aligned}$$

Dosadíme do rovnice dotykovej roviny pre vektorovo zadanú plochu

$$(X - P)\cdot(\mathbf{r}_u(P)\times\mathbf{r}_v(P)) = 0$$

a dostávame

$$([x,y,z] - [0,0,1])\cdot((0,1,1)\times(1,0,0)) = 0.$$

Spočítame najskôr vektorový súčin

$$((0,1,1)\times(1,0,0)) = (1\cdot 0 - 1\cdot 0, 1\cdot 1 - 0\cdot 0, 0\cdot 0 - 1\cdot 1) = (0,1,-1)\,,$$

dosadíme ho do rovnice

$$(x, y, z-1)\cdot(0,1,-1) = 0$$

a spočítame skalárny súčin

$$0x + 1y - 1(z-1) = 0.$$

Členy sčítame a dostávame rovnicu dotykovej roviny v tvare

$$y - z + 1 = 0.$$

Zostáva nám už iba dosadiť do rovnice normály

$$\begin{aligned} X &= P + \lambda(\mathbf{r}_u(P)\times\mathbf{r}_v(P)) \\ [x,y,z] &= [0,0,1] + \lambda((0,1,1)\times(1,0,0)) \end{aligned}$$

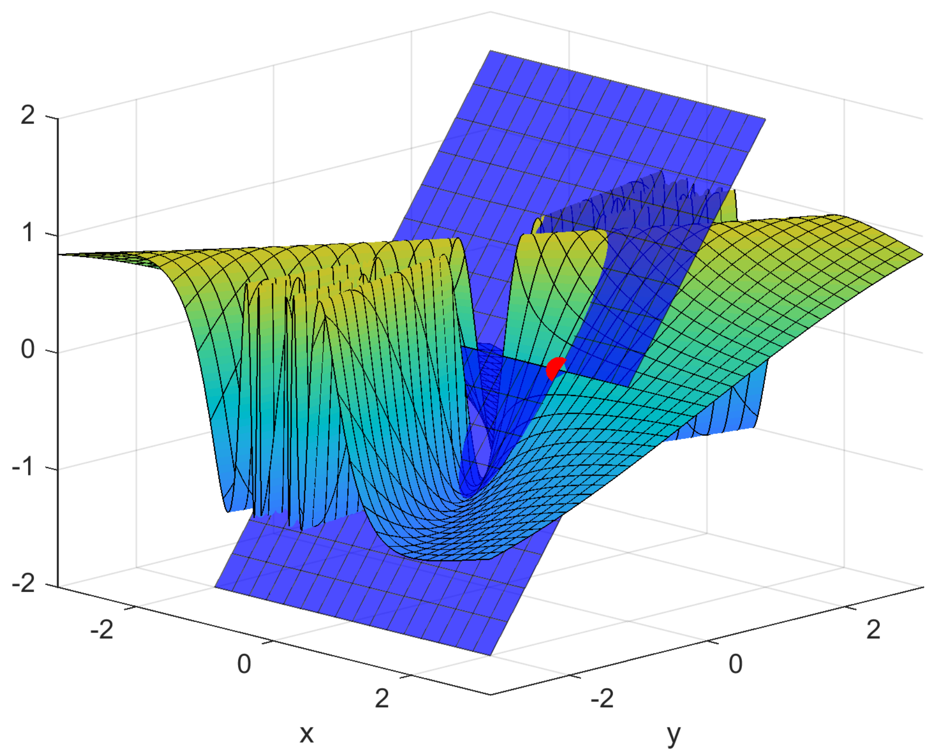
a dostávame

$$[x,y,z] \;=\; [0,0,1] + \lambda\,(0,1,-1)\,.$$

Rovnicu normály rozpíšeme ešte po zložkách

$$\begin{aligned} x &= 0 + 0\lambda, \\ y &= 0 + \lambda, \\ z &= 1 - \lambda, \quad \lambda \in R. \end{aligned}$$

Príklad 89 Napíšte rovnicu dotykovej roviny a normály plochy $\sigma : z = \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ v bode $P = [1, 0, 0]$.



Obr. 4.1.3. Plocha $\sigma : z = \sin\left(\frac{y}{x}\right)$ a jej dotyková rovina v bode $P = [1, 0, 0]$.

V tomto príklade si ukážeme dva spôsoby riešenia:

Riešenie A: Pretože rovnica plochy je zadaná v explicitnom tvare, tak ju najskôr prepíšeme do implicitného tvaru

$$F(x, y, z) = \sin\left(\frac{y}{x}\right) - z,$$

spočítame gradient funkcie F

$$\nabla F = \left(\cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right), \cos\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}, -1\right) = \left(-\frac{y\cdot\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2}, \frac{\cos\left(\frac{y}{x}\right)}{x}, -1\right)$$

a vyjadríme si jeho hodnotu v bode P

$$\nabla F(P) = \left(-\frac{0\cdot\cos\left(\frac{0}{1}\right)}{1^2}, \frac{1}{1}, -1\right) = (0,1,-1)\,.$$

Dosadíme do rovnice dotykovej roviny pre implicitnú rovnicu plochy

$$\begin{aligned} (X-P)\cdot\nabla F(P) &= 0, \\ ([x,y,z]-[1,0,0])\cdot(0,1,-1) &= 0. \end{aligned}$$

Vektory odčítame

$$(x-1,y,z)\cdot(0,1,-1) = 0$$

a urobíme skalárny súčin

$$(x-1)\cdot 0 + y\cdot 1 + z\cdot(-1) = 0.$$

Členy sčítame a dostávame rovnicu dotykovej roviny v implicitnom tvare

$$y - z = 0,$$

alebo po úprave v explicitnom tvare

$$z = y.$$

Rovnica normály bude mať tvar

$$\begin{aligned} X &= P + \lambda\nabla F(P) \\ [x,y,z] &= [1,0,0] + \lambda\,(0,1,-1) \end{aligned}$$

respektíve po zložkách

$$\begin{aligned} x &= 1 + 0 \cdot \lambda, \\ y &= 0 + \lambda, \\ z &= 0 - \lambda, \quad \lambda \in R. \end{aligned}$$

Riešenie B: Rovnicu plochy si prepíšeme do vektorového tvaru. Premenné x a y nahradíme u a v a dostaneme: σ: $\mathbf{r}(u,v) = \left(u, v, \sin\left(\frac{v}{u}\right)\right)$. Rovnakým spôsobom dostaneme súradnice bodu $P = \mathbf{r}(1,0)$. Teraz rovnicu $\mathbf{r}(u,v) = \left(u, v, \sin\left(\frac{v}{u}\right)\right)$ zderivujeme podľa u, v a vyjadríme hodnoty derivácií v bode P

$$\begin{array}{lll} \mathbf{r}_u = \left(1, 0 - \frac{v\cos(\frac{v}{u})}{u^2}\right) & \Rightarrow & \mathbf{r}_u(P) = (1,0,0)\,, \\ \mathbf{r}_v = \left(0, 1, \frac{\cos(\frac{v}{u})}{u}\right) & \Rightarrow & \mathbf{r}_v(P) = (0,1,1)\,. \end{array}$$

Dosadíme do rovnice dotykovej roviny a dostávame

$$\begin{aligned} (X - P) \cdot (\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)) &= 0 \\ ([x,y,z] - [1,0,0]) \cdot ((1,0,0) \times (0,1,1)) &= 0. \end{aligned}$$

Spočítame najskôr vektorový súčin

$$((1,0,0) \times (0,1,1)) = (0 \cdot 1 - 0 \cdot 1, 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = (0,-1,1)\,,$$

dosadíme ho do rovnice

$$(x-1, y, z) \cdot (0,-1,1) = 0$$

a urobíme skalárny súčin

$$(x-1) \cdot 0 + y \cdot (-1) + z \cdot (1) = 0.$$

Dostávame rovnicu dotykovej roviny v implicitnom tvare

$$-y + z = 0,$$

alebo po úprave v explicitnom tvare

$$z = y.$$

Ako vidíme, dostali sme rovnakú rovinu ako pri prvom spôsobe riešenia, a preto rovnice normály znovu počítať nebudeme.

4.2 Prvá a druhá základná forma plochy σ

Prvá základná forma plochy σ: $\varphi_1 = E(\mathrm{d}u)^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(\mathrm{d}v)^2$,

kde $E = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u$, $F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v$,
$G = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v$.

Vektor $\mathbf{n}_\sigma(u,v) = \frac{\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)}{|\mathbf{r}_u(u,v) \times \mathbf{r}_v(u,v)|} \neq 0$ sa nazýva jednotkovým vektorom normály plochy σ v bode $P(u,v)$.

Druhá základná forma plochy σ: $\varphi_2 = L(\mathrm{d}u)^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N(\mathrm{d}v)^2$,

kde $L = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2} \cdot \mathbf{n}_\sigma = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n}_\sigma$, $M = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v} = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n}_\sigma$,
$N = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2} = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n}_\sigma$.

Normálová krivosť krivky K **na ploche** σ: $\kappa_n = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$.

Príklad 90 Napíšte prvú a druhú základnú formu plochy σ: $\mathbf{r}(u,v) = \left(u, v, \arctan\left(\frac{v}{u}\right)\right)$.

Riešenie: Budeme postupovať tak, že si postupne vypočítame potrebné parametre, ktoré dosadíme do vzorcov pre základné formy plochy. Začneme s výpočtom parciálnych derivácií $r(u,v)$ podľa u a v

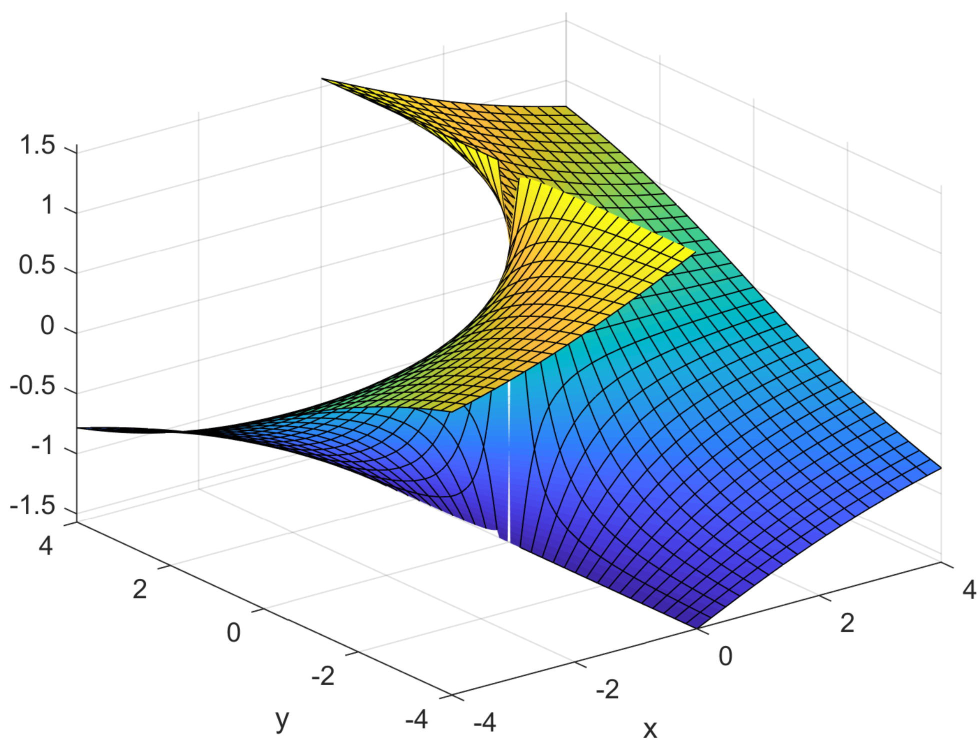
$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u &= \left(1, 0, \frac{1}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2} \cdot \left(-\frac{v}{u^2}\right)\right) = \left(1, 0, \frac{-v}{u^2+v^2}\right), \\
\mathbf{r}_v &= \left(1, 0, \frac{1}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2} \cdot \frac{1}{u}\right) = \left(0, 1, \frac{u}{u^2+v^2}\right),
\end{aligned}$$

ktoré použijeme pri výpočte koeficientov E, F a G

$$
\begin{aligned}
E &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = \left(1, 0, \tfrac{-v}{u^2+v^2}\right) \cdot \left(1, 0, \tfrac{-v}{u^2+v^2}\right) = 1 + \tfrac{v^2}{(u^2+v^2)^2},\\
F &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = \left(1, 0, \tfrac{-v}{u^2+v^2}\right) \cdot \left(0, 1, \tfrac{u}{u^2+v^2}\right) = -\tfrac{uv}{(u^2+v^2)^2},\\
G &= \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = \left(0, 1, \tfrac{u}{u^2+v^2}\right) \cdot \left(0, 1, \tfrac{u}{u^2+v^2}\right) = 1 + \tfrac{u^2}{(u^2+v^2)^2}.
\end{aligned}
$$

Teraz už môžeme napísať prvú základnú formu plochy σ v tvare

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= E(\mathrm{d}u)^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(\mathrm{d}v)^2 =\\
&= \left(1 + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\right)(\mathrm{d}u)^2 + 2\left(-\frac{uv}{(u^2+v^2)^2}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \left(1 + \frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}\right)(\mathrm{d}v)^2.
\end{aligned}
$$



Obr. 4.2.4. Plocha σ: $\mathbf{r}(u,v) = \left(u, v, \arctan\left(\frac{v}{u}\right)\right)$.

Na výpočet druhej základnej formy plochy potrebujeme aj normálu $\mathbf{n}_\sigma$. Pre lepšiu prehľadnosť výpočtu vektorové násobenie $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ a veľkosť vektora $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ vypočítame skôr

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \left(1, 0, \frac{-v}{u^2+v^2}\right) \times \left(0, 1, \frac{u}{u^2+v^2}\right) = \left(\frac{v}{u^2+v^2}, \frac{-u}{u^2+v^2}, 1\right) = \\
&= \frac{1}{u^2+v^2}\left(v, -u, u^2+v^2\right), \\
|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| &= \sqrt{\frac{1}{(u^2+v^2)^2}\left(v^2+u^2+(u^2+v^2)^2\right)} = \frac{1}{u^2+v^2}\sqrt{v^2+u^2+(u^2+v^2)^2}.
\end{aligned}$$

Normála bude mať tvar

$$\mathbf{n}_\sigma = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{\frac{1}{u^2+v^2}\left(v, -u, u^2+v^2\right)}{\frac{1}{u^2+v^2}\sqrt{v^2+u^2+(u^2+v^2)^2}} = \frac{\left(v, -u, u^2+v^2\right)}{\sqrt{v^2+u^2+(u^2+v^2)^2}}.$$

Spočítame teraz druhé parciálne derivácie $r(u, v)$ podľa u a v

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{uu} &= \left(0, 0, \frac{2uv}{(u^2+v^2)^2}\right), \\
\mathbf{r}_{uv} &= \mathbf{r}_{vu} = \left(0, 0, \frac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}\right), \\
\mathbf{r}_{vv} &= \left(0, 1, \frac{(-u)2v}{(u^2+v^2)^2}\right),
\end{aligned}$$

ktoré použijeme k výpočtu koeficientov L, M a N

$$\begin{aligned}
L = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n}_\sigma &= \left(0, 0, \tfrac{2uv}{(u^2+v^2)^2}\right) \cdot \tfrac{\left(v, -u, u^2+v^2\right)}{\sqrt{v^2+u^2+(u^2+v^2)^2}} = \tfrac{2uv}{(u^2+v^2)\sqrt{v^2+u^2+(u^2+v^2)^2}}, \\
M = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n}_\sigma &= \left(0, 0, \tfrac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)^2}\right) \cdot \tfrac{\left(v, -u, u^2+v^2\right)}{\sqrt{v^2+u^2+(u^2+v^2)^2}} = \tfrac{v^2-u^2}{(u^2+v^2)\sqrt{v^2+u^2+(u^2+v^2)^2}} \\
N = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n}_\sigma &= \left(0, 1, \tfrac{(-u)2v}{(u^2+v^2)^2}\right) \cdot \tfrac{\left(v, -u, u^2+v^2\right)}{\sqrt{v^2+u^2+(u^2+v^2)^2}} = \tfrac{-2uv}{(u^2+v^2)\sqrt{v^2+u^2+(u^2+v^2)^2}}.
\end{aligned}$$

Nakoniec napíšeme druhú základnú formu plochy σ v tvare

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= L(\mathrm{d}u)^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N(\mathrm{d}v)^2 = \\
&= \frac{2uv(\mathrm{d}u)^2 + 2(v^2-u^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v - 2uv(\mathrm{d}v)^2}{(u^2+v^2)\sqrt{v^2+u^2+(u^2+v^2)^2}}.
\end{aligned}$$

Príklad 91 Napíšte prvú a druhú základnú formu plochy σ pre $a, b, c > 0$ (trojosí elipsoid): $\mathbf{r}(u, v) = (a\cos(u)\cos(v), b\sin(u)\cos(v), c\sin(v))$ a vypočítajte normálovú krivosť krivky na ploche σ v bode $P = [a, 0, 0]$.

Riešenie: Postupovať budeme rovnako ako v predošlom príklade. Začneme tým, že vypočítame parciálne derivácie $r(u, v)$ podľa u, v

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_u &= (-a\sin(u)\cos(v), b\cos(u)\cos(v), 0)\,,\\
\mathbf{r}_v &= (-a\cos(u)\sin(v), -b\sin(u)\sin(v), c\cos(v))\,,
\end{aligned}
$$

a vyjadríme v bode P. Súradnice bodu P najskôr prevedieme na parametre u a v tak, že vyriešime sústavu rovníc

$$
\begin{aligned}
a\cos(u)\cos(v) &= a,\\
b\sin(u)\cos(v) &= 0,\\
c\sin(v) &= 0.
\end{aligned}
$$

Z tretej rovnice priamo dostávame

$$c\sin(v) = 0 \;\Rightarrow\; \sin(v) = 0 \;\Rightarrow\; v = k\pi,\ k \in Z.$$

Parameter u potom vypočítame

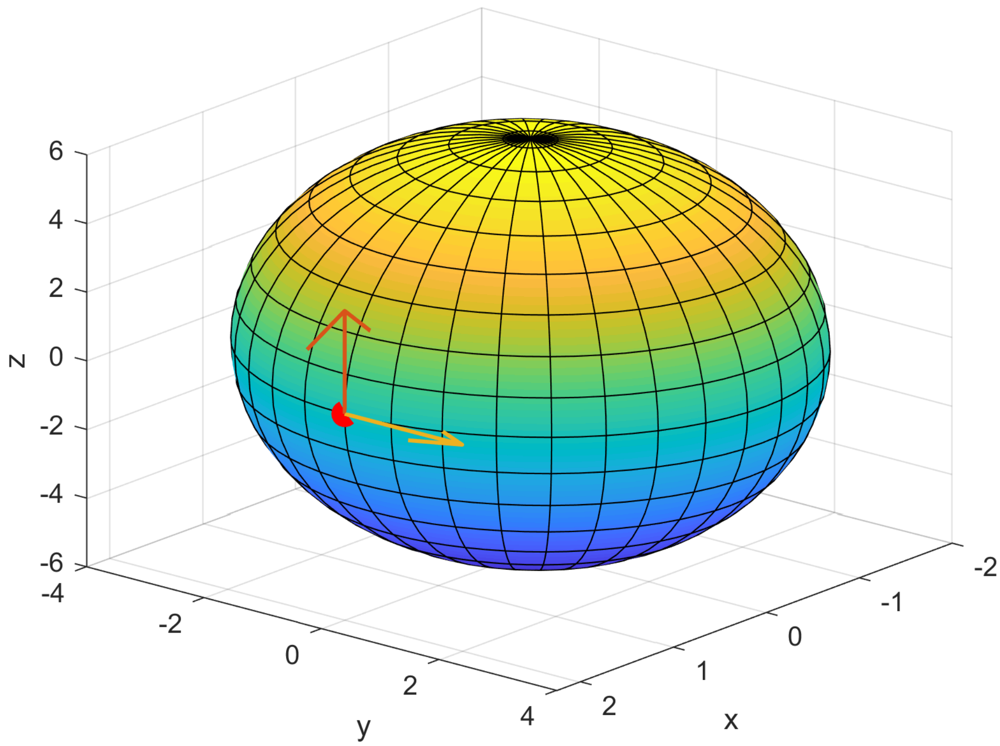
$$a\cos(u)1 = a \;\wedge\; b\sin(u)1 = 0 \;\Rightarrow\; u = k\pi,\ k \in Z$$

a dostávame $P = \mathbf{r}(0, 0)$. Potom $\mathbf{r}_u(P)$ a $\mathbf{r}_v(P)$ bude mať tvar

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_u(P) &= (0, b, 0)\,,\\
\mathbf{r}_v(P) &= (0, 0, c)\,.
\end{aligned}
$$

Koeficienty E, F a G vyjadríme vo všeobecnom bode aj v bode P. V tomto prípade pre komplikovaný tvar vektorov $\mathbf{r}_u$ a $\mathbf{r}_u$ uvedieme rovno výsledný tvar koeficientov

$$
\begin{aligned}
E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u &= a^2\sin^2(u)\cos^2(v) + b^2\cos^2(u)\cos^2(v) &&\Rightarrow\; E(P) = b^2,\\
F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v &= (a^2 - b^2)\sin(u)\cos(u)\sin(v)\cos(v) &&\Rightarrow\; F(P) = 0,\\
G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v &= a^2\cos^2(u)\sin^2(v) + b^2\sin^2(u)\sin^2(v) + c^2\cos^2(v) &&\Rightarrow\; G(P) = c^2.
\end{aligned}
$$



Obr. 4.2.5. Plocha σ: $\mathbf{r}(u,v) = (a\cos(u)\cos(v), b\sin(u)\cos(v), c\sin(v))$ a bod $P = [a,0,0]$ s $\mathbf{r}_u$ (červená) a $\mathbf{r}_v$(žltá) pre $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$.

Prvú základnú formu plochy σ napíšeme už v trochu zjednodušenom tvare

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= E(\mathrm{d}u)^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(\mathrm{d}v)^2 = \\ &= \cos^2(v)\left(a^2\sin^2(u)(\mathrm{d}u)^2 + b^2\cos^2(u)(\mathrm{d}u)^2 + c^2(\mathrm{d}v)^2\right) + \\ &+ (a^2-b^2)\sin(2u)\sin(v)\cos(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \sin^2(v)(a^2\cos^2(u) + b^2\sin^2(u))(\mathrm{d}v)^2.\end{aligned}$$

Potom prvá základná forma plochy σ v bode P bude mať tvar

$$\varphi_1(P) = E(P)(\mathrm{d}u)^2 + 2F(P)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(P)(\mathrm{d}v)^2 = b^2(\mathrm{d}u)^2 + c^2(\mathrm{d}v)^2.$$

Rovnako ako pri koeficientoch E, F a G, aj tu budeme písať už upravený tvar koeficientov L, M, N a normály $\mathbf{n}_\sigma$. Pre všeobecný bod u a v môžeme napísať rovnicu normály

$$\mathbf{n}_\sigma = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{(bc\cos(u)\cos^2(v), ac\sin(u)\cos^2(v), ab\sin(v)\cos(v))}{\sqrt{b^2c^2\cos^2(u)cos^4(v) + a^2\cos^2(v)(b^2\sin^2(v) + c^2\sin^2(v)\cos^2(v))}}$$

a jej tvar v bode P bude

$$\mathbf{n}_\sigma(P) = \frac{\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)}{|\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)|} = \frac{(0,b,0) \times (0,0,c)}{|(0,b,0) \times (0,0,c)|} = \frac{bc(1,0,0)}{bc} = (1,0,0).$$

Teraz si spočítame druhé derivácie $r(u,v)$ podľa u a v a vyjadríme ich hodnoty v bode P

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{uu} &= (-a\cos(u)\cos(v), -b\sin(u)\cos(v), 0) & \Rightarrow\ & \mathbf{r}_{uu}(P) = (-a, 0, 0)\,, \\
\mathbf{r}_{uv} = \mathbf{r}_{vu} &= (a\sin(u)\sin(v), -b\cos(u)\sin(v), 0) & \Rightarrow\ & \mathbf{r}_{uv}(P) = \mathbf{r}_{vu}(P) = (0,0,0)\,, \\
\mathbf{r}_{vv} &= (-a\cos(u)\cos(v), -b\sin(u)\cos(v), -c\sin(v)) & \Rightarrow\ & \mathbf{r}_{vv}(P) = (-a, 0, 0)\,.
\end{aligned}$$

Spočítame už iba koeficienty L, M a N

$$\begin{aligned}
L = \mathbf{r}_{uu} \cdot \mathbf{n}_\sigma &= \tfrac{-(abc\cos^3(v))}{\sqrt{b^2c^2\cos^2(u)cos^4(v) + a^2\cos^2(v)(b^2\sin^2(v) + c^2\sin^2(v)\cos^2(v))}} & \Rightarrow\ & L(P) = -a, \\
M = \mathbf{r}_{uv} \cdot \mathbf{n}_\sigma &= 0 & \Rightarrow\ & M(P) = 0, \\
N = \mathbf{r}_{vv} \cdot \mathbf{n}_\sigma &= \tfrac{-(abc\cos(v))}{\sqrt{b^2c^2\cos^2(u)cos^4(v) + a^2\cos^2(v)(b^2\sin^2(v) + c^2\sin^2(v)\cos^2(v))}} & \Rightarrow\ & L(P) = -a.
\end{aligned}$$

a môžeme napísať druhú základnú formu plochy σ v už upravenom tvare

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &= L(\mathrm{d}u)^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N(\mathrm{d}v)^2 = \\
&= -\frac{(abc\cos(v)((1+\cos(2v))(\mathrm{d}u)^2 + 2(\mathrm{d}v)^2)}{2\sqrt{b^2c^2\cos^2(u)cos^4(v) + a^2\cos^2(v)(b^2\sin^2(v) + c^2\sin^2(v)\cos^2(v))}}.
\end{aligned}$$

Rovnicu si vyjadríme ešte v bode P

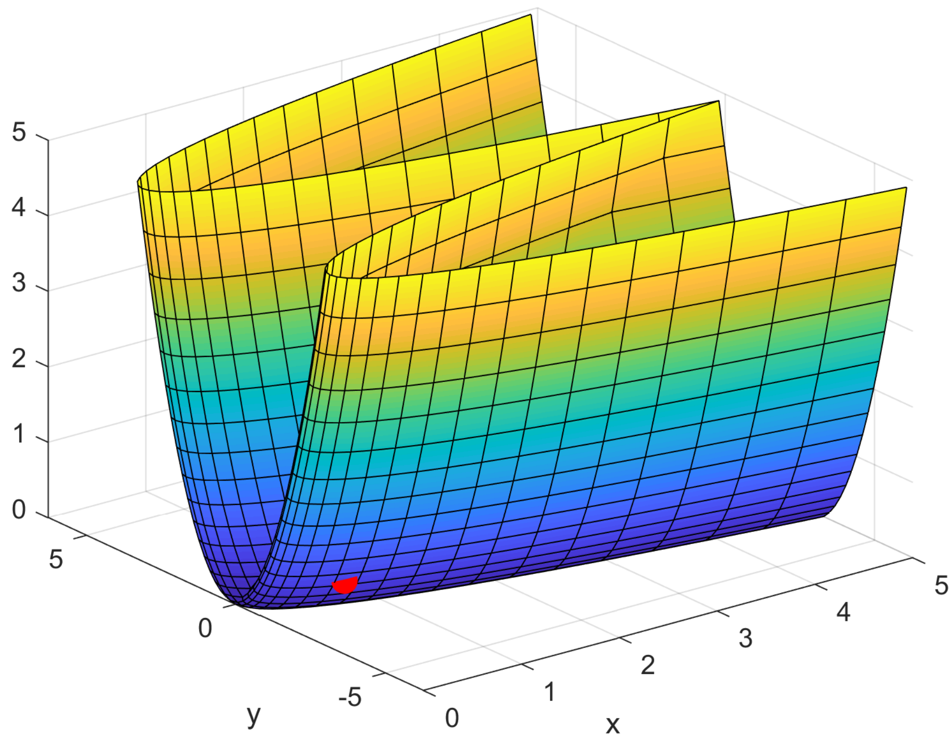
$$\varphi_2(P) = L(P)(\mathrm{d}u)^2 + 2M(P)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N(P)(\mathrm{d}v)^2 = -a((\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2)$$

a vyjadríme normálovú krivosť v tomto bode

$$\kappa_n(P) = \frac{\varphi_2(P)}{\varphi_1(P)} = \frac{-a((\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2)}{b^2(\mathrm{d}u)^2 + c^2(\mathrm{d}v)^2}.$$

Ako sme mohli na tomto príklade vidieť, napísať prvú a druhú základnú formu plochy pre goniometrické funkcie môže byť veľmi zdĺhavé a náročné, ak chceme rovnice napísať vo všeobecnom bode. Po dosadení súradnice bodu P sa výpočet a samotné výrazy zjednodušili.

Príklad 92 Napíšte prvú a druhú základnú formu plochy a normálovú krivosť plochy σ: $\mathbf{r}(u,v) = (\frac{u^2}{2}, u+v, \frac{v^2}{2})$ v bode $P = \left[\frac{1}{2}, -2, \frac{1}{2}\right]$.



Obr. 4.2.6. Plocha σ: $\mathbf{r}(u,v) = (\frac{u^2}{2}, u+v, \frac{v^2}{2})$ a bod $P = \left[\frac{1}{2}, -2, \frac{1}{2}\right]$.

Riešenie: Najskôr si prevedieme súradnice bodu P na parametre u a v tak, že vyriešime sústavu rovníc

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{2} &= \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; u = \pm 1, \\ \frac{v^2}{2} &= \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; u = \pm 1, \\ u + v &= -2 \;\Rightarrow\; u = -1 \;\wedge\; v = -1 \end{aligned}$$

a dostávame $P = \mathbf{r}(-1,-1)$. Ďalej budeme postupovať tak, že vypočítame parciálne derivácie $r(u,v)$ podľa u, v a vyjadríme ich hodnoty v bode P

$$\mathbf{r}_u = (u, 1, 0) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{r}_u(P) = (-1, 1, 0)\,,$$
$$\mathbf{r}_v = (0, 1, v) \quad\Rightarrow\quad \mathbf{r}_v(P) = (0, 1, -1)\,.$$

Koeficienty E, F a G vyjadríme všeobecne aj v bode P

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u = (u,1,0)\cdot(u,1,0) = 1+u^2 &&\Rightarrow\quad E(P) = 2,\\ F &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = (u,1,0)\cdot(0,1,v) = 1 &&\Rightarrow\quad F(P) = 1,\\ G &= \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v = (0,1,v)\cdot(0,1,v) = 1+v^2 &&\Rightarrow\quad G(P) = 2. \end{aligned}$$

Potom už vieme napísať prvú základnú formu plochy σ v tvare

$$\varphi_1 \;=\; E(\mathrm{d}u)^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(\mathrm{d}v)^2 = (1+u^2)(\mathrm{d}u)^2 + 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + (1+v^2)(\mathrm{d}v)^2.$$

V bode P bude mať tvar

$$\varphi_1(P) = E(P)(\mathrm{d}u)^2 + 2F(P)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(P)(\mathrm{d}v)^2 = 2(\mathrm{d}u)^2 + 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + 2(\mathrm{d}v)^2.$$

Ďalej si spočítame normálu $\mathbf{n}_\sigma$ a koeficienty L, M, N najskôr všeobecne a potom v bode P

$$\mathbf{n}_\sigma = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = \frac{(u,1,0)\times(0,1,v)}{|(u,1,0)\times(0,1,v)|} = \frac{(v,-uv,u)}{|(v,-uv,u)|} = \frac{(v,-uv,u)}{\sqrt{v^2+u^2(1+v^2)}},$$

$$\mathbf{n}_\sigma(P) = \frac{\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)}{|\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)|} = \frac{(-1,1,0)\times(0,1,-1)}{|(-1,1,0)\times(0,1,-1)|} = \frac{(-1,-1,-1)}{\sqrt{3}}.$$

Spočítame druhé derivácie $r(u,v)$ podľa u a v a vyjadríme ich hodnoty v bode P

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{uu} &= \mathbf{r}_{uu}(P) = (1,0,0)\,,\\ \mathbf{r}_{uv} &= \mathbf{r}_{vu} = \mathbf{r}_{uv}(P) = \mathbf{r}_{vu}(P) = (0,0,0)\,,\\ \mathbf{r}_{vv} &= \mathbf{r}_{vv}(P) = (0,0,1)\,. \end{aligned}$$

Teraz spočítame koeficienty L, M a N najskôr všeobecne a potom v bode P

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{r}_{uu}\cdot\mathbf{n}_\sigma = (1,0,0)\cdot\tfrac{(v,-uv,u)}{\sqrt{v^2+u^2(1+v^2)}} = \tfrac{v}{\sqrt{v^2+u^2(1+v^2)}} &&\Rightarrow\quad L(P) = -\tfrac{1}{\sqrt{3}},\\ M &= \mathbf{r}_{uv}\cdot\mathbf{n}_\sigma = (0,0,0)\cdot\tfrac{(v,-uv,u)}{\sqrt{v^2+u^2(1+v^2)}} = \tfrac{0}{\sqrt{v^2+u^2(1+v^2)}} = 0 &&\Rightarrow\quad M(P) = 0,\\ N &= \mathbf{r}_{vv}\cdot\mathbf{n}_\sigma = (0,0,1)\cdot\tfrac{(v,-uv,u)}{\sqrt{v^2+u^2(1+v^2)}} = \tfrac{u}{\sqrt{v^2+u^2(1+v^2)}} &&\Rightarrow\quad L(P) = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Nakoniec môžeme napísať druhú základnú formu plochy σ v tvare

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= L(\mathrm{d}u)^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N(\mathrm{d}v)^2 = \\ &+ \frac{v}{\sqrt{v^2+u^2(1+v^2)}}(\mathrm{d}u)^2 + 2\cdot 0\mathrm{d}u\mathrm{d}v + \frac{u}{\sqrt{v^2+u^2(1+v^2)}}(\mathrm{d}v)^2 = \\ &= \frac{v(\mathrm{d}u)^2 + u(\mathrm{d}v)^2}{\sqrt{v^2+u^2(1+v^2)}} \end{aligned}$$

a pre bod P ju prepíšeme do tvaru

$$\varphi_2(P) = L(P)(\mathrm{d}u)^2 + 2M(P)\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N(P)(\mathrm{d}v)^2 = -\frac{(\mathrm{d}v)^2 + (\mathrm{d}u)^2}{\sqrt{3}}.$$

Ako posledné vyjadríme normálovú krivosť krivky

$$\kappa_n = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\frac{u(\mathrm{d}v)^2 + v(\mathrm{d}u)^2}{\sqrt{v^2+u^2(1+v^2)}}}{(1+u^2)(\mathrm{d}u)^2 + 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v + (1+v^2)(\mathrm{d}v)^2}$$

a prepíšeme jej tvar v bode P

$$\kappa_n(P) = \frac{\varphi_2(P)}{\varphi_1(P)} = -\frac{(\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2}{2\sqrt{3}((\mathrm{d}u)^2 + \mathrm{d}u\mathrm{d}v + (\mathrm{d}v)^2)}.$$

4.3 Krivosti a hlavné smery plochy σ

Krivosti plochy σ:

Hlavné krivosti: $\kappa_1 = H + \sqrt{H^2 - K}$ a $\kappa_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$,

kde $H = \frac{EN-2FM+LG}{2(EG-F^2)}$, $K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$.

Úplná alebo Gaussova krivosť: $\kappa_t = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = K$,

Stredná krivosť: $\kappa_s = \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} = \frac{NE-2MF+LG}{2(EG-F^2)} = H$,

Absolútna krivosť: $\kappa_{abs} = |\kappa_t| + |\kappa_s|$.

Rovnica pre hlavné smery plochy σ:

$(LF - ME)(u')^2 + (LG - NE)u'v' + (MG - NF)(v')^2 = 0.$

Podmienka prirodzenej parametrizácie σ: $|\mathbf{r}_u u' + \mathbf{r}_v v'| = 1$.

Hlavné smery plochy σ **sú vektory**:

$\mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_u u_1' + \mathbf{r}_v v_1'$ a $\mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_u u_2' + \mathbf{r}_v v_2'$.

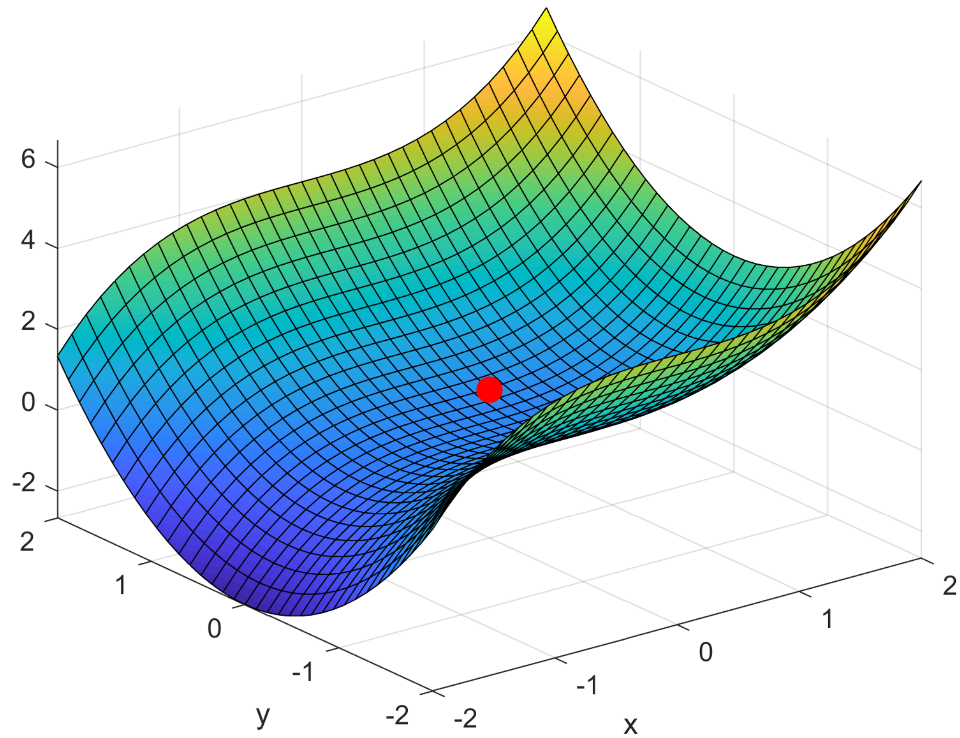
Príklad 93 Vypočítajte hlavné krivosti, úplnú a strednú krivosť a hlavné smery plochy $\sigma : z = \frac{x^3}{3} + y^2$ v bode $P = \left[1, 1, \frac{4}{3}\right]$ (ak predpokladáme pravotočivý súradnicový systém).

Riešenie: Najskôr prepíšeme explicitne zadané vyjadrenie plochy použitím vektorového (parametrického) zápisu. Premenné x a y nahradíme u a v a dostaneme:

σ: $\mathbf{r}(u, v) = (u, v, \frac{u^3}{3} + v^2)$.

Rovnakým spôsobom dostaneme súradnice bodu $P = \mathbf{r}(1, 1)$. Chceme spočítať krivosti v danom bode P, a preto musíme spočítať prvé i druhé parciálne derivácie vektorovej funkcie $\mathbf{r}(u, v)$ podľa u, v a vyjadriť ich hodnoty v danom bode P

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_u &= (1, 0, u^2) &&\Rightarrow \quad \mathbf{r}_u(P) = (1, 0, 1)\,,\\
\mathbf{r}_v &= (0, 1, 2v) &&\Rightarrow \quad \mathbf{r}_v(P) = (0, 1, 2)\,,\\
\mathbf{r}_{uu} &= (0, 0, 2u) &&\Rightarrow \quad \mathbf{r}_{uu}(P) = (0, 0, 2)\,,\\
\mathbf{r}_{uv} &= \mathbf{r}_{vu} = (0, 0, 0) &&\Rightarrow \quad \mathbf{r}_{uv}(P) = \mathbf{r}_{vu}(P) = (0, 0, 0)\,,\\
\mathbf{r}_{vv} &= (0, 0, 2) &&\Rightarrow \quad \mathbf{r}_{vv}(P) = (0, 0, 2)\,.
\end{aligned}
$$



Obr. 4.3.7. Plocha $\sigma : z = \frac{x^3}{3} + y^2$ a bod $P = \left[1, 1, \frac{4}{3}\right]$.

Na výpočet potrebujeme normálu $\mathbf{n}_\sigma(P)$, ktorú spočítame podľa

$$\mathbf{n}_\sigma(P) = \frac{\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)}{|\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)|} = \frac{(1,0,1) \times (0,1,2)}{|(1,0,1) \times (0,1,2)|} = \frac{(-1,-2,1)}{|(-1,-2,1)|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Pri výpočte samotných krivostí potrebujeme ešte poznať hodnoty E, F, G, L, M, N koeficientov v bode P.

$$\begin{aligned}
E(P) &= \mathbf{r}_u(P) \cdot \mathbf{r}_u(P) = (1,0,1) \cdot (1,0,1) = 2, \\
F(P) &= \mathbf{r}_u(P) \cdot \mathbf{r}_v(P) = (1,0,1) \cdot (0,1,2) = 2, \\
G(P) &= \mathbf{r}_v(P) \cdot \mathbf{r}_v(P) = (0,1,2) \cdot (0,1,2) = 5, \\
L(P) &= \mathbf{r}_{uu}(P) \cdot \mathbf{n}_\sigma(P) = (0,0,2) \cdot \left(-\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = \tfrac{2}{\sqrt{6}}, \\
M(P) &= \mathbf{r}_{uv}(P) \cdot \mathbf{n}_\sigma(P) = (0,0,0) \cdot \left(-\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = 0, \\
N(P) &= \mathbf{r}_{vv}(P) \cdot \mathbf{n}_\sigma(P) = (0,0,2) \cdot \left(-\tfrac{1}{\sqrt{6}}, -\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\right) = \tfrac{2}{\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

Pred výpočtom hlavných krivostí ešte spočítame pomocné parametre H a K

$$
\begin{aligned}
H(P) &= \frac{E(P)\cdot N(P)+L(P)\cdot G(P)-2F(P)\cdot M(P)}{2(E(P)\cdot G(P)-F(P)^2)} = \frac{2\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{6}}5-2\cdot 2\cdot 0}{2(2\cdot 5-2^2)} = \\
&= \frac{7}{6\sqrt{6}}, \\
K(P) &= \frac{L(P)\cdot N(P)-M(P)^2}{E(P)\cdot G(P)-F(P)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}-0^2}{2\cdot 5-2^2} = \frac{1}{9}.
\end{aligned}
$$

Hlavné krivosti v bode P budú mať tvar

$$
\begin{aligned}
\kappa_1(P) &= H(P)+\sqrt{H(P)^2-K(P)} = \frac{7}{6\sqrt{6}}+\sqrt{\left(\frac{7}{6\sqrt{6}}\right)^2-\frac{1}{9}} = \frac{2}{\sqrt{6}}, \\
\kappa_2(P) &= H(P)-\sqrt{H(P)^2-K(P)} = \frac{7}{6\sqrt{6}}-\sqrt{\left(\frac{7}{6\sqrt{6}}\right)^2-\frac{1}{9}} = \frac{1}{3\sqrt{6}}.
\end{aligned}
$$

Nakoniec spočítame ostatné krivosti v bode P v tomto prípade bez použitia H a K

$$
\begin{aligned}
\kappa_t(P) &= \frac{L(P)\cdot N(P)-M(P)^2}{E(P)\cdot G(P)-F(P)^2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}-0^2}{2.5-2^2} = \frac{1}{9}, \\
\kappa_s(P) &= \frac{N(P)\cdot E(P)-2M(P)\cdot F(P)+L(P)\cdot G(P)}{2(E(P)\cdot G(P)-F(P)^2)} = \\
&= \frac{\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot 2-2\cdot 0\cdot 2+\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot 5}{2(2\cdot 5-2^2)} = \frac{7}{6\sqrt{6}}, \\
\kappa_{abs}(P) &= |\kappa_t(P)|+|\kappa_s(P)| = \frac{1}{9}+\frac{7}{6\sqrt{6}} = \frac{1}{36}\left(4+7\sqrt{6}\right).
\end{aligned}
$$

Potom vypočítame hlavné smery. Na to využijeme rovnicu pre hlavné smery plochy a dosadíme už známe hodnoty v bode P

$$
\begin{aligned}
(L(P)\cdot F(P)-M(P)\cdot E(P))(u')^2+(L(P)\cdot G(P)-N(P)\cdot E(P))u'v' &+ \\
+(M(P)\cdot G(P)-N(P)\cdot F(P))(v')^2 &= 0 \\
\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot 2-0\cdot 2\right)(u')^2+\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot 5-\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot 2\right)u'v'+\left(0\cdot 5-\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot 2\right)(v')^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Jednotlivé výrazy sčítame

$$
2\frac{2}{\sqrt{6}}(u')^2+3\sqrt{\frac{2}{\sqrt{6}}}u'v'-2\frac{2}{\sqrt{6}}(v')^2=0
$$

a pre jednoduchosť zápisu predelíme $\frac{2}{\sqrt{6}}$ a dostávame

$$\mathbf{I} : 2(u')^2 + 3u'v' - 2(v')^2 = 0.$$

Ako vidíme, máme jednu rovnicu, ale dve neznáme u' a v'. Potrebujeme teda ešte jednu rovnicu, aby bola táto úloha riešiteľná. Použijeme rovnicu podmienky prirodzenej parametrizácie plochy, ktorú vyjadríme v bode P

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}_u(P)u' + \mathbf{r}_v(P)v'| &= 1 \\
|\,(1,0,1)\,u' + (0,1,2)\,v'| &= 1 \\
|\,(u', v', u' + 2v')\,| &= 1 \\
\sqrt{(u')^2 + (v')^2 + (u' + 2v')^2} &= 1 \\
\mathbf{II} : 2(u')^2 + 4u'v' + 5(v')^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Máme sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych, ktorú vieme riešiť

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} : 2(u')^2 + 3u'v' - 2(v')^2 &= 0 \\
\mathbf{II} : 2(u')^2 + 4u'v' + 5(v')^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Jeden z postupov riešenia: Budeme postupovať tak, že rovnicu **I** predelíme v^2

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} : 2(u')^2 + 3u'v' - 2(v')^2 &= 0 \quad / : (v')^2 \\
\frac{2(u')^2}{(v')^2} + \frac{3u'v'}{(v')^2} - \frac{2(v')^2}{(v')^2} &= 0 \\
2\left(\frac{u'}{v'}\right)^2 + 3\frac{u'}{v} - 2 &= 0.
\end{aligned}$$

Zavedieme pomocnú premennú $a = \frac{u'}{v'}$ a dostávame kvadratickú rovnicu

$$2a^2 + 3a - 2 = 0,$$

ktorej riešením je $a = \{-2, \frac{1}{2}\}$. Predelením rovnice **II** premennou $(v')^2$ rovnako zavedieme zvolený parameter a v tvare

$$\begin{aligned}
\mathbf{II} : 2(u')^2 + 4u'v' + 5(v')^2 &= 1 \quad / : (v')^2 \\
\frac{2(u')^2}{(v')^2} + \frac{4u'v'}{(v')^2} + \frac{5(v')^2}{(v')^2} &= \frac{1}{(v')^2} \\
2a^2 + 4a + 5 &= \frac{1}{(v')^2}.
\end{aligned}$$

Teraz pre každé $a = \{-2, \frac{1}{2}\}$ nájdeme prislúchajúce riešenie u' a v'. Najskôr pre $a = -2$ dostávame

$$2(-2)^2 + 4(-2) + 5 = \frac{1}{(v')^2} \Rightarrow v' = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Vyberieme jedno riešenie, napr. $v'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ a chceme vypočítať prislúchajúce u'_1. Použijeme vzťah $a = \frac{u'_1}{v'_1}$ a dostávame

$$-2 = \frac{u'_1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \ \Rightarrow\ u'_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Rovnaký spôsobom použijeme pre $a = \frac{1}{2}$ a dostávame

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right) + 5 = \frac{1}{(v')^2} \Rightarrow v'_2 = \pm\sqrt{\frac{2}{15}}.$$

Vezmeme jedno riešenie, napr. $v'_2 = \sqrt{\frac{2}{15}}$ a prislúchajúce u'_2 spočítame ako

$$a = \frac{u'_2}{v'_2} \ \Rightarrow\ \frac{1}{2} = \frac{u'_2}{\sqrt{\frac{2}{15}}} \ \Rightarrow\ u'_2 = -\frac{1}{\sqrt{30}}.$$

Hlavný smer plochy tvorí dvojica vektorov

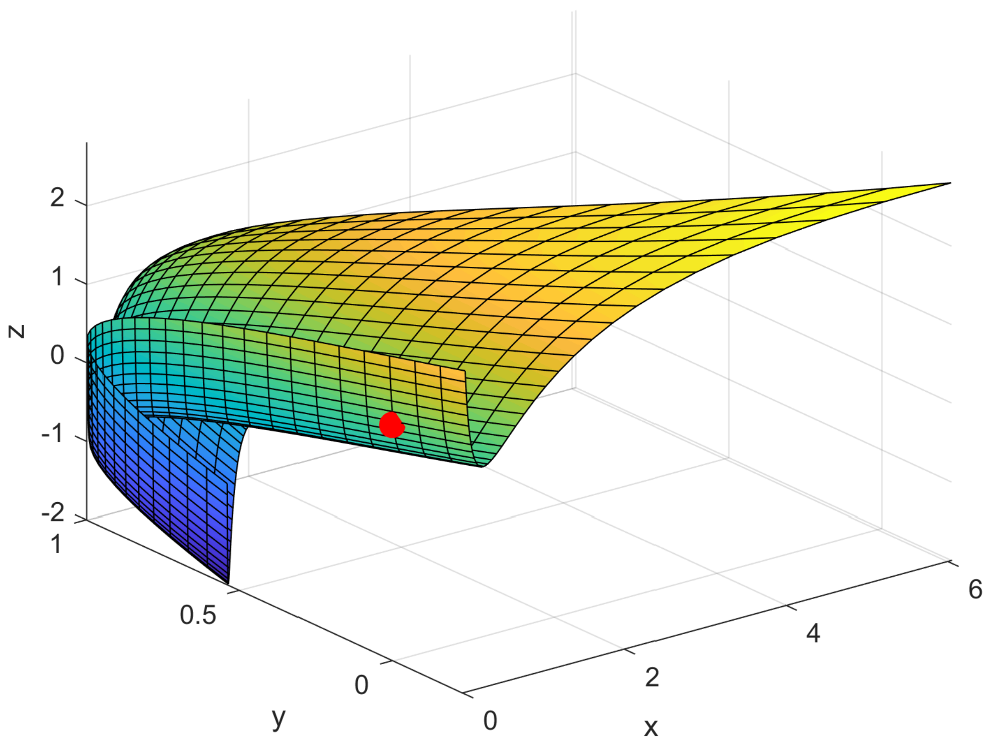
$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_1 &= \mathbf{r}_u(P)u'_1 + \mathbf{r}_v(P)v'_1 = -(1,0,1)\,\frac{2}{\sqrt{5}} + (0,1,2)\,\frac{1}{\sqrt{5}} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right),\\
\mathbf{s}_2 &= \mathbf{r}_u(P)u'_2 + \mathbf{r}_v(P)v'_2 = (1,0,1)\,\frac{1}{\sqrt{30}} + (0,1,2)\,\sqrt{\frac{2}{15}} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \sqrt{\frac{2}{15}}, \sqrt{\frac{5}{6}}\right).
\end{aligned}$$

Ostatné kominácie, napr. $v'_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, netreba uvažovať, lebo by sme vypočítali rovnaký vektor iba by mal opačný smer. Nakoniec je vhodné spraviť kontrolu
$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \sqrt{\frac{2}{15}}, \sqrt{\frac{5}{6}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{30}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\frac{2}{15}} + 0 \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} = 0.$

Príklad 94 Vypočítajte hlavné krivosti, úplnú a strednú krivosť a hlavné smery plochy $\sigma : \mathbf{r}(u,v) = (e^{u+v}, \cos(u), u + \cos(v))$ v bode $P = \mathbf{r}(0,0)$ (ak predpokladáme pravotočivý súradnicový systém).

Riešenie: Zadanie je naformulované tak, že nepotrebujeme robiť žiadne jeho úpravy a môžeme rovno pristúpiť k výpočtom. Začneme tak, že spočítame prvé i druhé derivácie vektorovej funkcie $\mathbf{r}(u, v)$ podľa u a v, ktorých hodnoty si vyjadríme v danom bode P

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(u,v) &= (e^{u+v}, \cos(u), u+\cos(v)) && \Rightarrow \quad \mathbf{r}(0,0) = P = [0,0,1],\\
\mathbf{r}_u &= (e^{u+v}, -\sin(u), 1) && \Rightarrow \quad \mathbf{r}_u(P) = (1,0,1)\,,\\
\mathbf{r}_v &= (e^{u+v}, 0, -\sin(v)) && \Rightarrow \quad \mathbf{r}_v(P) = (1,0,0)\,,\\
\mathbf{r}_{uu} &= (e^{u+v}, -\cos(u), 0) && \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{uu}(P) = (1,-1,0)\,,\\
\mathbf{r}_{uv} &= \mathbf{r}_{vu} = (e^{u+v}, 0, 0) && \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{uv}(P) = \mathbf{r}_{vu}(P) = (1,0,0)\,,\\
\mathbf{r}_{vv} &= (e^{u+v}, 0, -\cos(v)) && \Rightarrow \quad \mathbf{r}_{vv}(P) = (1,0,-1)\,.
\end{aligned}$$



Obr. 4.3.8. Plocha $\sigma : \mathbf{r}(u,v) = (e^{u+v}, \cos(u), u+\cos(v))$ a bod $P = [0,0,1]$.

Ďalej vypočítame normálu $\mathbf{n}_\sigma(P)$

$$\mathbf{n}_\sigma(P) = \frac{\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)}{|\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)|} = \frac{(1,0,1) \times (1,0,0)}{|\,(1,0,1) \times (1,0,0)\,|} = \frac{(0,1,0)}{|(0,1,0)|} = (0,1,0)$$

a hodnoty konštánt E, F, G, L, M, N v bode P

$$\begin{aligned}
E(P) &= \mathbf{r}_u(P)\cdot\mathbf{r}_u(P) = (1,0,1)\cdot(1,0,1) = 2,\\
F(P) &= \mathbf{r}_u(P)\cdot\mathbf{r}_v(P) = (1,0,1)\cdot(1,0,0) = 1,\\
G(P) &= \mathbf{r}_v(P)\cdot\mathbf{r}_v(P) = (1,0,0)\cdot(1,0,0) = 1,\\
L(P) &= \mathbf{r}_{uu}(P)\cdot\mathbf{n}_\sigma(P) = (1,-1,0)\cdot(0,1,0) = -1,\\
M(P) &= \mathbf{r}_{uv}(P)\cdot\mathbf{n}_\sigma(P) = (1,0,0)\cdot(0,1,0) = 0,\\
N(P) &= \mathbf{r}_{vv}(P)\cdot\mathbf{n}_\sigma(P) = (1,0,-1)\cdot(0,1,0) = 0.
\end{aligned}$$

Na výpočet hlavných krivostí sú potrebné pomocné parametre H a K

$$\begin{aligned}
H(P) &= \frac{E(P)\cdot N(P) + L(P)\cdot G(P) - 2F(P)\cdot M(P)}{2(E(P)\cdot G(P) - F(P)^2)} = \frac{2\cdot 0 + (-1)\cdot 1 - 2\cdot 1\cdot 0}{2(2\cdot 1 - 1^2)} =\\
&= \frac{-1}{2},\\
K(P) &= \frac{L(P)\cdot N(P) - M(P)^2}{E(P)\cdot G(P) - F(P)^2} = \frac{(-1)\cdot 0 - 0^2}{2\cdot 1 - 1^2} = 0,
\end{aligned}$$

a hlavné krivosti v bode P budú mať tvar

$$\begin{aligned}
\kappa_1(P) &= H(P) + \sqrt{H(P)^2 - K(P)} = \frac{-1}{2} + \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 0} = 0,\\
\kappa_2(P) &= H(P) - \sqrt{H(P)^2 - K(P)} = \frac{-1}{2} - \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 - 0} = -1.
\end{aligned}$$

Ostatné krivosti spočítame s použitím hlavných krivostí

$$\begin{aligned}
\kappa_t(P) &= \kappa_1\cdot\kappa_2 = 0\cdot -1 = 0,\\
\kappa_s(P) &= \frac{\kappa_1+\kappa_2}{2} = \frac{0+(-1)}{2} = \frac{-1}{2},\\
\kappa_{abs}(P) &= |\kappa_t(P)| + |\kappa_s(P)| = 0 + \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Hlavné smery vypočítame z rovnice pre hlavné smery plochy

$$\begin{aligned}
(L(P)F(P) - M(P)E(P))(u')^2 + (L(P)G(P) - N(P)E(P))u'v' &+\\
+(M(P)G(P) - N(P)F(P))(v')^2 &= 0\\
((-1)\cdot 1 - 0\cdot 2)\,(u')^2 + ((-1)\cdot 1 - 0\cdot 2)\,u'v' + (0\cdot 1 - 0\cdot 1)\,(v')^2 &= 0\\
\mathbf{I} : -(u')^2 - u'v' &= 0.
\end{aligned}$$

Ako druhú rovnicu použijeme rovnicu podmienky prirodzenej parametrizácie plochy v bode P

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}_u(P)u' + \mathbf{r}_v(P)v'| &= 1 \\
|\,(1,0,1)\,u' + (1,0,0)\,v'| &= 1 \\
\sqrt{(u'+v')^2 + (u')^2} &= 1 \\
\mathbf{II} : 2(u')^2 + 2u'v' + (v')^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Teraz máme dve rovnice o dvoch neznámych

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} : -(u')^2 - u'v' &= 0 \\
\mathbf{II} : 2(u')^2 + 2u'v' + (v')^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Navrhovaný postup riešenia: Použijeme sčítaciu metódu, pri ktorej rovnicu $\mathbf{I}$ prenásobíme dvoma a obe rovnice sčítame a dostávame

$$(v')^2 = 1 \;\Rightarrow\; v' = \pm 1.$$

Vezmeme jedno riešenie, napr. $v' = 1$, potom prislúchajúce u' spočítame dosadením v' do rovnice $\mathbf{I}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} : -(u')^2 - u' &= 0 \\
-u'(u'+1) &= 0 \;\Rightarrow\; u'_1 = 0 \;\vee\; u'_2 = -1.
\end{aligned}$$

Teraz už môžeme napísať hlavný smer plochy ako dvojicu vektorov

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_1 &= \mathbf{r}_u(P)u'_1 + \mathbf{r}_v(P)v'_1 = (1,0,1)\,0 + (1,0,0)\,1 = (1,0,0) \\
\mathbf{s}_2 &= \mathbf{r}_u(P)u'_2 + \mathbf{r}_v(P)v'_2 = (1,0,1)\,(-1) + (1,0,0)\,1 = (0,0,-1)\,.
\end{aligned}$$

Nakoniec je vhodné urobiť kontrolu $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = (1,0,0) \cdot (0,0,-1) = 0$.

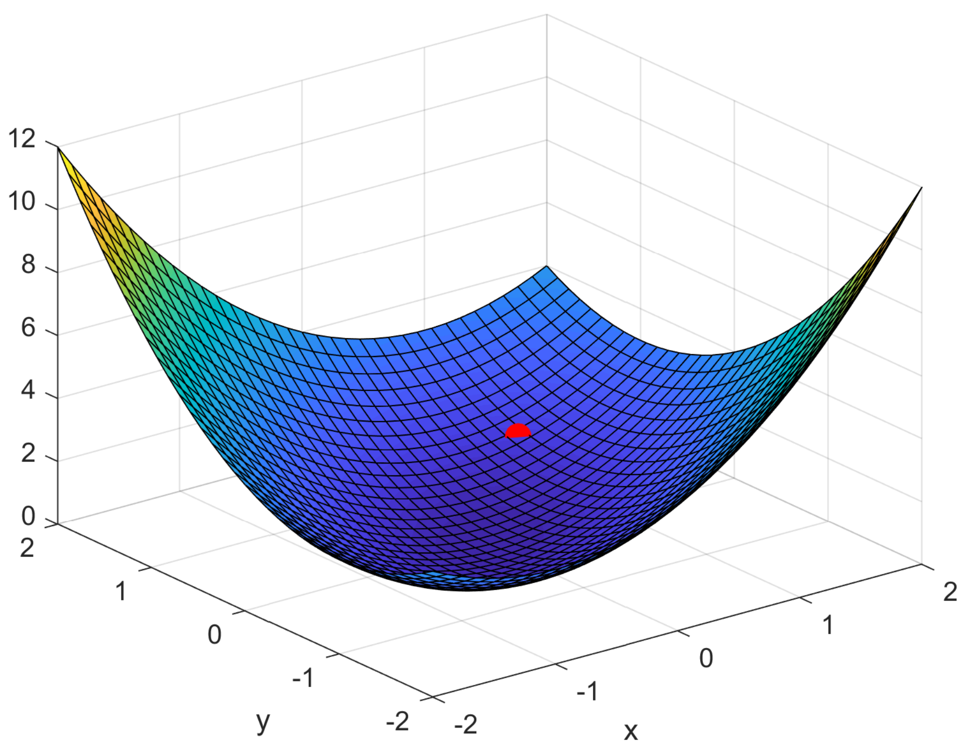
Príklad 95 Vypočítajte hlavné krivosti, úplnú a strednú krivosť a hlavné smery plochy $\sigma : z = x^2 + y^2 - xy$ v bode $P = [1,1,1]$ (ak predpokladáme pravotočivý súradnicový systém).

Riešenie: Najskôr prepíšeme explicitne zadané vyjadrenie plochy použitím vektorového (parametrického) zápisu. Premenné x a y nahradíme u a v a dostaneme: σ: $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, u^2 + v^2 - uv)$. Rovnakým spôsobom dostaneme súradnice bodu $P = \mathbf{r}(1,1)$. Pre nájdenie riešenia spočítame prvé i druhé derivácie vektorovej funkcie $\mathbf{r}(u,v)$ podľa u a v a vyjadríme ich v bode P

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_u &= (1,0,2u-v) &&\Rightarrow \quad \mathbf{r}_u(P) = (1,0,1)\,,\\
\mathbf{r}_v &= (0,1,2v-u) &&\Rightarrow \quad \mathbf{r}_v(P) = (0,1,1)\,,\\
\mathbf{r}_{uu} &= (0,0,2) &&\Rightarrow \quad \mathbf{r}_{uu}(P) = (0,0,2)\,,\\
\mathbf{r}_{uv} &= \mathbf{r}_{vu} = (0,0,-1) &&\Rightarrow \quad \mathbf{r}_{uv}(P) = \mathbf{r}_{vu}(P) = (0,0,-1)\,,\\
\mathbf{r}_{vv} &= (0,0,2) &&\Rightarrow \quad \mathbf{r}_{vv}(P) = (0,0,2)\,.
\end{aligned}
$$

Spočítame normálu $\mathbf{n}_\sigma(P)$

$$
\mathbf{n}_\sigma(P) = \frac{\mathbf{r}_u(P)\times\mathbf{r}_v(P)}{|\mathbf{r}_u(P)\times\mathbf{r}_v(P)|} = \frac{(1,0,1)\times(0,1,1)}{|(1,0,1)\times(0,1,1)|} = \frac{(-1,-1,1)}{|(-1,-1,1)|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(-1,-1,1)\,.
$$



Obr. 4.3.9. Plocha $\sigma : z = \frac{x^3}{3} + y^2$ a bod $P = \left[1, 1, \frac{4}{3}\right]$.

Vyjadríme hodnoty konštánt E, F, G, L, M, N v bode P

$$E(P) = \mathbf{r}_u(P) \cdot \mathbf{r}_u(P) = (1,0,1) \cdot (1,0,1) = 2,$$
$$F(P) = \mathbf{r}_u(P) \cdot \mathbf{r}_v(P) = (1,0,1) \cdot (0,1,1) = 1,$$
$$G(P) = \mathbf{r}_v(P) \cdot \mathbf{r}_v(P) = (0,1,1) \cdot (0,1,1) = 2,$$
$$L(P) = \mathbf{r}_{uu}(P) \cdot \mathbf{n}_\sigma(P) = (0,0,2) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1) = \tfrac{2}{\sqrt{3}},$$
$$M(P) = \mathbf{r}_{uv}(P) \cdot \mathbf{n}_\sigma(P) = (0,0,-1) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1) = -\tfrac{1}{\sqrt{3}},$$
$$N(P) = \mathbf{r}_{vv}(P) \cdot \mathbf{n}_\sigma(P) = (0,0,2) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1) = \tfrac{2}{\sqrt{3}}.$$

Na výpočet hlavných krivostí použijeme pomocné parametre H a K

$$\begin{aligned} H(P) &= \frac{E(P)\cdot N(P) - 2F(P)\cdot M(P) + L(P)\cdot G(P)}{2(E(P)\cdot G(P) - F(P)^2)} = \\ &= \frac{2\cdot \frac{2}{\sqrt{3}} - 2\cdot 1\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2}{2(2\cdot 2 - 1^2)} = \frac{5}{3\sqrt{3}}, \\ K(P) &= \frac{L(P)\cdot N(P) - M(P)^2}{E(P)\cdot G(P) - F(P)^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} - (-\frac{1}{\sqrt{3}})^2}{2\cdot 2 - 1^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Potom hlavné krivosti v bode P budú mať tvar

$$\begin{aligned} \kappa_1(P) &= H(P) + \sqrt{H(P)^2 - K(P)} = \frac{5}{3\sqrt{3}} + \sqrt{\left(\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{3}} = \sqrt{3}, \\ \kappa_2(P) &= H(P) - \sqrt{H(P)^2 - K(P)} = \frac{5}{3\sqrt{3}} - \sqrt{\left(\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Ostatné krivosti spočítame s použitím hlavných krivostí

$$\begin{aligned} \kappa_t(P) &= \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3}, \\ \kappa_s(P) &= \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}}}{2} = \frac{5}{3\sqrt{3}}, \\ \kappa_{abs}(P) &= |\kappa_t(P)| + |\kappa_s(P)| = \frac{1}{3} + \frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{9}\left(3 + 5\sqrt{3}\right). \end{aligned}$$

Na výpočet hlavných smerov využijeme rovnicu pre hlavné smery plochy a dosadíme už známe hodnoty v bode P

$$\begin{aligned}
(L(P)F(P)-M(P)E(P))(u')^2+(L(P)G(P)-N(P)E(P))u'v' &\quad + \\
+(M(P)G(P)-N(P)F(P))(v')^2 &= 0 \\
\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 1-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 2\right)(u')^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 2\right)u'v' &\quad + \\
+\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 2-\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot 1\right)(v')^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Jednotlivé členy sčítame

$$\frac{4}{\sqrt{3}}(u')^2-\frac{4}{\sqrt{3}}(v')^2=0$$

a pre jednoduchosť zápisu vynásobíme $\frac{\sqrt{3}}{4}$ a dostávame

$$\mathbf{I}:(u')^2-(v')^2=0.$$

Ako druhú rovnicu použijeme rovnicu podmienky prirodzenej parametrizácie plochy vyjadrenú v bode P

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}_u(P)u'+\mathbf{r}_v(P)v'| &= 1 \\
|\,(1,0,1)\,u'+(0,1,1)\,v'| &= 1 \\
|\,(u',v',u'+v')\,| &= 1 \\
\sqrt{(u')^2+(v')^2+(u'+v')^2} &= 1 \\
\mathbf{II}:2(u')^2+2u'v'+2(v')^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Máme dve rovnice o dvoch neznámych

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}:(u')^2-(v')^2 &= 0, \\
\mathbf{II}:2(u')^2+2u'v'+2(v')^2 &= 1.
\end{aligned}$$

Navrhovaný postup riešenia: Prvú rovnicu upravíme

$$\begin{aligned} \mathbf{I}: (u')^2 - (v')^2 &= 0 \\ (u')^2 &= (v')^2 \\ \left(\frac{u'}{v'}\right)^2 &= 1 \\ \frac{u'}{v'} &= \pm 1. \end{aligned}$$

Vidíme, že dostávame dve riešenia $\frac{u_1'}{v_1'} = 1 \Rightarrow u_1' = v_1'$ a $\frac{u_2'}{v_2'} = -1 \Rightarrow u_2' = -v_2'$. Tieto dve riešenia dosadíme do rovnice **II**. Pre riešenie $u_1' = v_1'$ dostávame

$$\begin{aligned} \mathbf{II}: 2(v_1')^2 + 2v_1'v_1' + 2(v_1')^2 &= 1 \\ 6(v_1')^2 &= 1 \\ (v_1')^2 &= \frac{1}{6} \\ v_1' &= \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

a vyberieme jedno z riešení napr. $v_1' = \frac{1}{\sqrt{6}}$, potom $u_1' = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Pre $u_2' = -v_2'$

$$\begin{aligned} \mathbf{II}: 2(-v_2')^2 + 2(-v_2')v_2' + 2(v_2')^2 &= 1 \\ 2(v_2')^2 &= 1 \\ (v_2')^2 &= \frac{1}{2} \\ v_2' &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

rovnako vyberieme jedno z riešení napr. $v_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a dostávame $u_2' = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Hlavný smer plochy potom tvorí dvojica vektorov

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_1 &= \mathbf{r}_u(P)u_1' + \mathbf{r}_v(P)v_1' = (1,0,1)\,\frac{1}{\sqrt{6}} + (0,1,1)\,\frac{1}{\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right), \\ \mathbf{s}_2 &= \mathbf{r}_u(P)u_2' + \mathbf{r}_v(P)v_2' = (1,0,1)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (0,1,1)\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right). \end{aligned}$$

Nakoniec spravíme kontrolu $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 0$.

4.4 Geodetická krivosť krivky na ploche

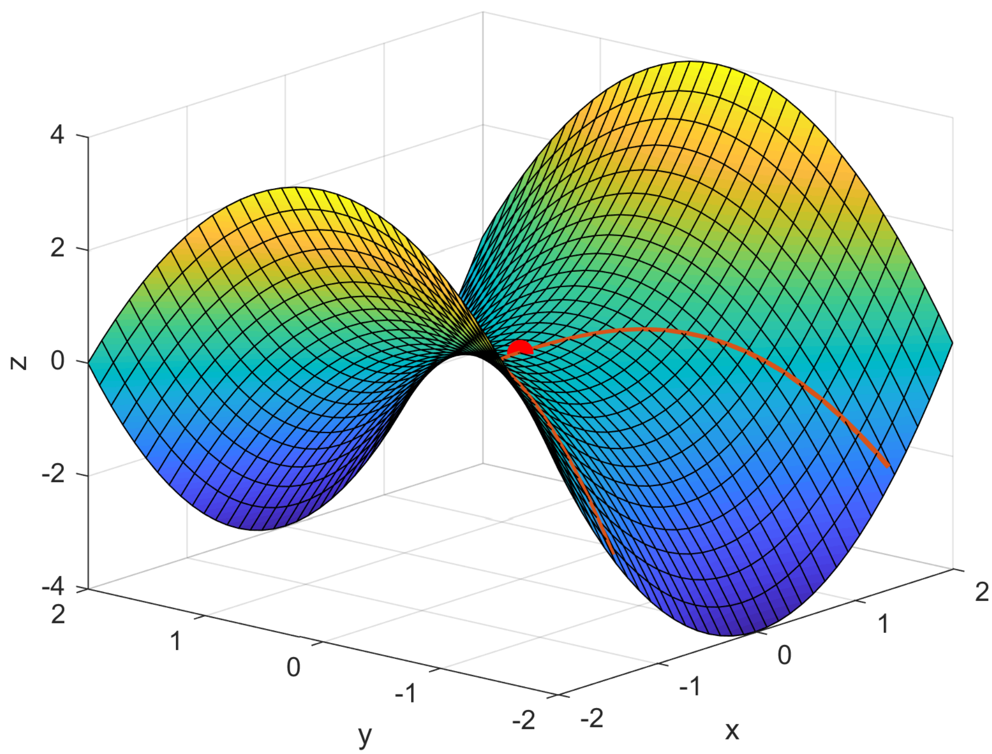
Geodetická krivosť krivky

$\mathbf{P}(t) = r(u(t), v(t)) = (x(u(t), v(t)); y(u(t), v(t)); z(u(t), v(t)))$ na ploche σ v bode P: $\kappa_g = \frac{\mathbf{n}_\sigma(P) \times \dot{r}}{|\dot{r}|^3} \cdot \ddot{r}$,

kde $\dot{r} = \dot{r}(u(t), v(t)) = \mathbf{r}_u \dot{u} + \mathbf{r}_v \dot{v}$,

$\ddot{r} = \ddot{r}(u(t), v(t)) = \mathbf{r}_{uu}(\dot{u})^2 + 2\mathbf{r}_{uv}\dot{u}\dot{v} + \mathbf{r}_{vv}(\dot{v})^2 + \mathbf{r}_u \ddot{u} + \mathbf{r}_v \ddot{v}$.

Príklad 96 Vypočítajte geodetickú krivosť krivky K s u-krivkami $u(t) = t$ a v-krivkami $v(t) = -t^2$ (pre $t_0 = 0$) ležiacej na ploche $\sigma : \mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ v bode $P = [0, 0, 0]$ (ak predpokladáme pravotočivý súradnicový systém).



Obr. 4.4.10. Plocha $\sigma : \mathbf{r}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ a krivka $K : u(t) = t, v(t) = -t^2$.

Riešenie: Rovnako ako v predchádzajúcich príkladoch spočítame hodnoty, ktoré budeme neskôr dosadzovať do vzorca. Na úvod spočítame prvé a druhé derivácie vektorovej funkcie

$\mathbf{r}(u,v)$ podľa u a v, ktorých hodnoty vyjadríme v danom bode $P = \mathbf{r}(u,v) = (0,0)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u &= (1,0,2u) &&\Rightarrow \ \mathbf{r}_u(P) = (1,0,0)\,,\\
\mathbf{r}_v &= (0,1,-2v) &&\Rightarrow \ \mathbf{r}_v(P) = (0,1,0)\,,\\
\mathbf{r}_{uu} &= (0,0,2) &&\Rightarrow \ \mathbf{r}_{uu}(P) = (0,0,2)\,,\\
\mathbf{r}_{uv} &= \mathbf{r}_{vu} = (0,0,0) &&\Rightarrow \ \mathbf{r}_{uv}(P) = \mathbf{r}_{vu} = (0,0,0)\,,\\
\mathbf{r}_{vv} &= (0,0,-2) &&\Rightarrow \ \mathbf{r}_{vv}(P) = (0,0,-2)\,.
\end{aligned}$$

Vypočítame normálu $\mathbf{n}_\sigma(P)$

$$\mathbf{n}_\sigma(P) = \frac{\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)}{|\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)|} = \frac{(1,0,0)\times(0,1,0)}{|\,(1,0,0)\times(0,1,0)\,|} = \frac{(0,0,1)}{|(0,0,1)|} = (0,0,1)\,.$$

Ďalej vyjadríme derivácie premenných u a v v hľadanom bode P, pre ktorý platí $t_0 = 0$

$$\dot{u} = \dot{u}(t_0) = 1, \quad \dot{v} = -2t \Rightarrow \dot{v}(t_0) = 0, \quad \ddot{u} = \ddot{u}(t_0) = 0, \quad \ddot{v} = \ddot{v}(t_0) = -2.$$

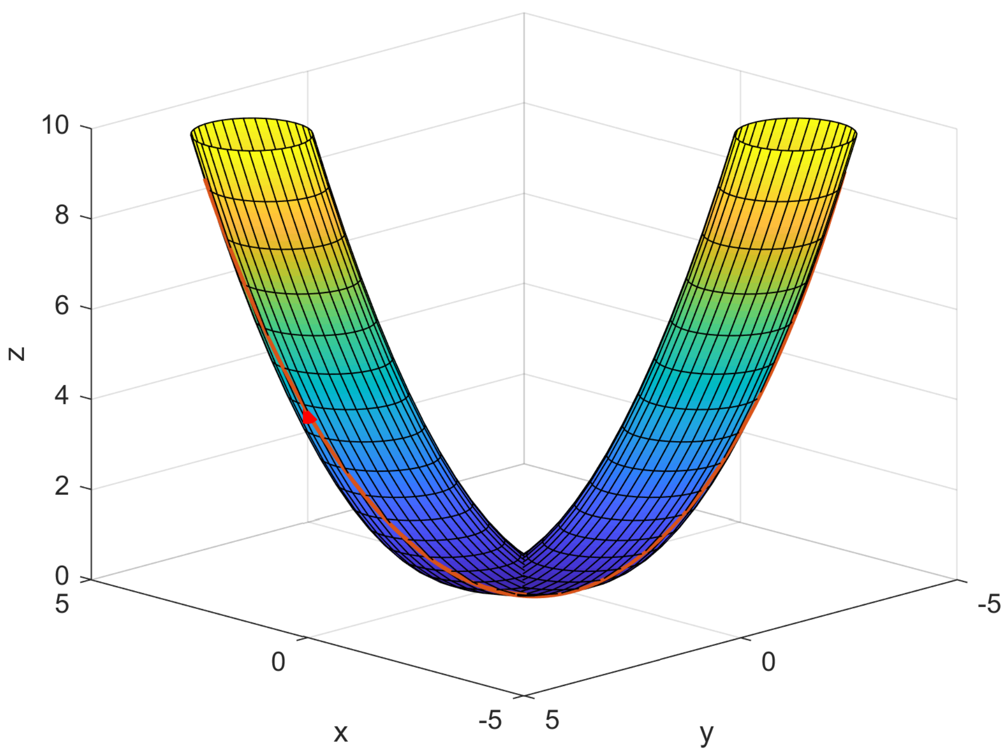
Ako posledné vyjadríme parametre $\dot{r}$ a $\ddot{r}$ v hľadanom bode P dosadením do vzorcov

$$\begin{aligned}
\dot{r}(P) &= \mathbf{r}_u(P)\dot{u}(t_0) + \mathbf{r}_v(P)\dot{v}(t_0) = (1,0,0)\,.1 + (0,1,0)\,.0 = (1,0,0)\,,\\
\ddot{r}(P) &= \mathbf{r}_{uu}(P)(\dot{u}(t_0))^2 + 2\mathbf{r}_{uv}(P)\dot{u}(t_0)\dot{v}(t_0) + \mathbf{r}_{vv}(P)(\dot{v}(t_0))^2 + \mathbf{r}_u(P)\ddot{u}(t_0) + \\
&+ \mathbf{r}_v(P)\ddot{v}(t_0) = \\
&= (0,0,2)\cdot 1^2 + 2\,(0,0,0)\cdot 1\cdot 0 + (0,0,-2)\cdot 0^2 + (1,0,0)\cdot 0 + (0,1,0)\cdot(-2) = \\
&= (0,-2,2).
\end{aligned}$$

Teraz už môžeme spočítať geodetickú krivosť krivky

$$\kappa_g(P) = \frac{\mathbf{n}_\sigma(P)\times\dot{r}(P)}{|\dot{r}(P)|^3}\cdot\ddot{r}(P) = \frac{(0,0,1)\times(1,0,0)}{|(1,0,0)|^3}\cdot(0,-2,2) = \frac{(0,1,0)}{1^3}\cdot(0,-2,2) = -2.$$

Príklad 97 Vypočítajte geodetickú krivosť krivky K s u-krivkami $u(t) = t-1$ a v-krivkami $v(t) = 2t$ (pre $t_0 = 1$) ležiacej na ploche $\sigma : \mathbf{r}(u,v) = (v+\sin(u), v+\cos(u), v^2)$ v bode $P = [2,3,4]$ (ak predpokladáme pravotočivý súradnicový systém).



Obr. 4.4.11. Plocha $\sigma : \mathbf{r}(u,v) = (v+\sin(u), v+\cos(u), v^2)$ a krivka $K : u(t) = t - 1, v(t) = 2t$.

Riešenie: Najskôr prepíšeme súradnice bodu P tak, aby sme poznali parametre u a v. Máme dve možnosti ako to vyriešiť:

A. Klasicky budeme riešiť sústavu troch rovníc o dvoch neznámych:

$$\begin{aligned} v^2 &= 4 \Rightarrow v \pm 2 \\ v+\sin(u) &= 2 \wedge v+\cos(u) = 3 \Rightarrow u = 0 \wedge v = 2 \end{aligned}$$

a dostávame $P = \mathbf{r}(0,2)$.

B. Použijeme parametre krivky K a pre $t_0 = 1$ nájdeme prislúchajúce u a v:

$$\begin{aligned} u(t_0) &= 1-1 \Rightarrow u = 0, \\ v(t_0) &= 2 \cdot 1 \Rightarrow v = 2, \end{aligned}$$

rovnako dostávame $P = \mathbf{r}(0,2)$. Potom spočítame prvé a druhé derivácie vektorovej funkcie $\mathbf{r}(u,v)$ podľa u, v a ich hodnoty vyjadríme v bode $P = \mathbf{r}(u,v) = (0,2)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u &= (\cos(u), -\sin(u), 0) &&\Rightarrow \mathbf{r}_u(P) = (1,0,0)\,,\\
\mathbf{r}_v &= (1,1,2v) &&\Rightarrow \mathbf{r}_v(P) = (1,1,4)\,,\\
\mathbf{r}_{uu} &= (-\sin(u), -\cos(u), 0) &&\Rightarrow \mathbf{r}_{uu}(P) = (0,-1,0)\,,\\
\mathbf{r}_{uv} &= \mathbf{r}_{vu} = (0,0,0) &&\Rightarrow \mathbf{r}_{uv}(P) = \mathbf{r}_{vu} = (0,0,0)\,,\\
\mathbf{r}_{vv} &= (0,0,2) &&\Rightarrow \mathbf{r}_{vv}(P) = (0,0,2)\,.
\end{aligned}$$

Normálu $\mathbf{n}_\sigma$ vyjadríme v bode P

$$\mathbf{n}_\sigma(P) = \frac{\mathbf{r}_u(P)\times\mathbf{r}_v(P)}{|\mathbf{r}_u(P)\times\mathbf{r}_v(P)|} = \frac{(1,0,0)\times(1,1,4)}{|\,(1,0,0)\times(1,1,4)\,|} = \frac{(0,-4,1)}{|(0,-4,1)|} = \left(0, \frac{-4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right).$$

Vyjadríme derivácie premenných u a v v hľadanom bode $P : t_0 = 0$

$$\dot{u} = \dot{u}(t_0) = 1, \quad \dot{v} = \dot{v}(t_0) = 2, \quad \ddot{u} = \ddot{u}(t_0) = 0, \quad \ddot{v} = \ddot{v}(t_0) = 0$$

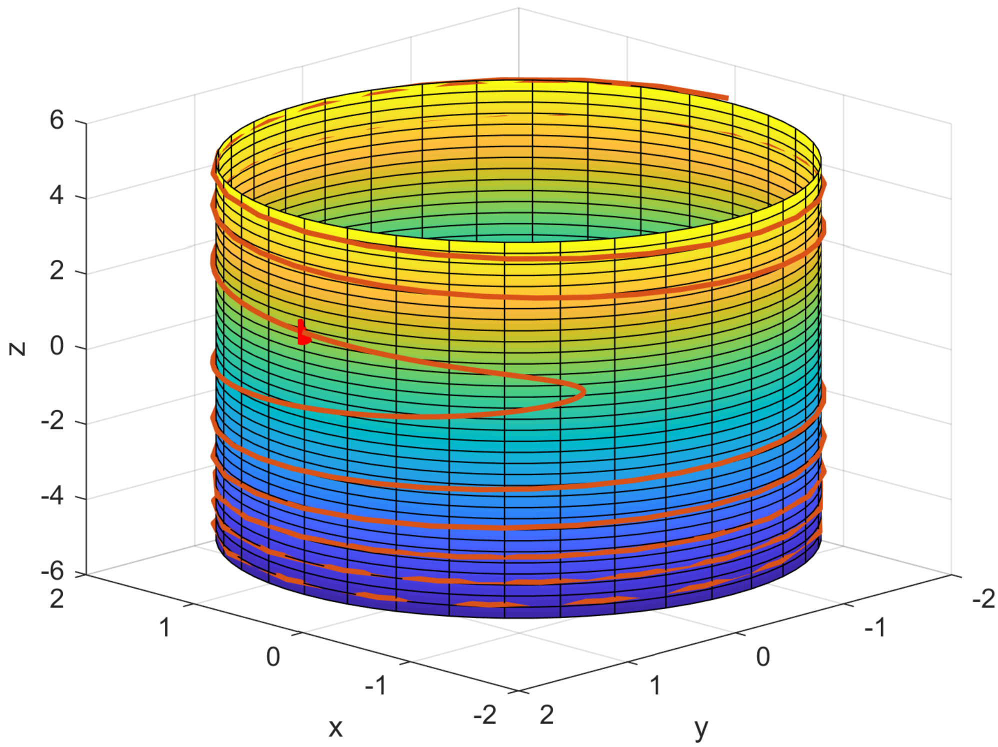
a parametre $\dot{r}$ a $\ddot{r}$ v hľadanom bode P

$$\begin{aligned}
r(\dot{P}) &= \mathbf{r}_u(P)\dot{u}(t_0) + \mathbf{r}_v(P)\dot{v}(t_0) = (1,0,0)\,1 + (1,1,4)\,2 = (3,2,8)\,,\\
\ddot{r}(P) &= \mathbf{r}_{uu}(P)(\dot{u}(t_0))^2 + 2\mathbf{r}_{uv}(P)\dot{u}(t_0)\dot{v}(t_0) + \mathbf{r}_{vv}(P)(\dot{v}(t_0))^2 + \mathbf{r}_u(P)\ddot{u}(t_0) +\\
&+ \mathbf{r}_v(P)\ddot{v}(t_0) =\\
&= (0,-1,0)\,1^2 + 2\,(0,0,0)\,2 + (0,0,2)\,2^2 + (1,0,0)\,0 + (1,1,4)\,0 = (0,-1,8).
\end{aligned}$$

Spočítame geodetickú krivosť krivky

$$\begin{aligned}
\kappa_g(P) &= \frac{\mathbf{n}_\sigma(P)\times\dot{r}(P)}{|\dot{r}(P)|^3}\cdot\ddot{r}(P) = \frac{\left(0, \frac{-4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)\times(3,2,8)}{|(3,2,8)|^3}\cdot(0,-1,8) =\\
&= \frac{\left(-2\sqrt{17}, \frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{12}{\sqrt{17}}\right)}{(\sqrt{77})^3}\cdot(0,-1,8) = \frac{\frac{93}{\sqrt{17}}}{77\sqrt{77}} = \frac{93}{77\sqrt{1309}}.
\end{aligned}$$

Príklad 98 Vypočítajte geodetickú krivosť krivky K s u-krivkami $u(t) = t^2 - 1$ a v-krivkami $v(t) = t + 1$ (pre $t_0 = 1$) ležiacej na ploche $\sigma : \mathbf{r}(u,v) = (2\sin(u), 2\cos(u), v)$ v bode $P = [0,2,2]$ (ak predpokladáme pravotočivý súradnicový systém).



Obr. 4.4.12. Plocha $\sigma : \mathbf{r}(u,v) = (2\sin(u), 2\cos(u), v)$ a krivka $K : u(t) = t^2 - 1, v(t) = t + 1$.

Riešenie: Ako prvé prepíšeme súradnice bodu P na parametre u a v. Riešenie je veľmi jednoduché, z rovnice pre premennú z vidíme, čomu sa rovná parameter $v = 2$, a potom

$$2\sin(u) = 0 \ \wedge \ 2\cos(u) = 2 \ \Rightarrow \ u = 0$$

dostávame $P = \mathbf{r}(0,2)$. Alebo použijeme parametre krivky K a pre $t_0 = 1$ nájdeme prislúchajúce u a v:

$$\begin{aligned} u(t_0) &= 1^2 - 1 \ \Rightarrow \ u = 0, \\ v(t_0) &= 1 + 1 \ \Rightarrow \ v = 2. \end{aligned}$$

Spočítame prvé a druhé derivácie vektorovej funkcie $\mathbf{r}(u,v)$ podľa u, v a ich hodnoty vyjadríme v danom bode $P = \mathbf{r}(u, v) = (0, 1)$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u &= (2\cos(u), -2\sin(u), 0) &\Rightarrow\ & \mathbf{r}_u(P) = (2, 0, 0)\,,\\
\mathbf{r}_v &= (0, 0, 1) &\Rightarrow\ & \mathbf{r}_v(P) = (0, 0, 1)\,,\\
\mathbf{r}_{uu} &= (-2\sin(u), -2\cos(u), 0) &\Rightarrow\ & \mathbf{r}_{uu}(P) = (0, -2, 0)\,,\\
\mathbf{r}_{uv} &= \mathbf{r}_{vu} = (0, 0, 0) &\Rightarrow\ & \mathbf{r}_{uv}(P) = \mathbf{r}_{vu} = (0, 0, 0)\,,\\
\mathbf{r}_{vv} &= (0, 0, 0) &\Rightarrow\ & \mathbf{r}_{vv}(P) = (0, 0, 0)\,.
\end{aligned}$$

Vypočítame normálu $\mathbf{n}_\sigma(P)$

$$\mathbf{n}_\sigma(P) = \frac{\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)}{|\mathbf{r}_u(P) \times \mathbf{r}_v(P)|} = \frac{(2, 0, 0) \times (0, 0, 1)}{|\,(2, 0, 0) \times (0, 0, 1)\,|} = \frac{(0, -2, 0)}{|(0, -2, 0)|} = (0, -1, 0)\,.$$

Vyjadríme derivácie premenných u a v v hľadanom bode $P : t_0 = 0$

$$\dot{u} = 2t \Rightarrow \dot{u}(t_0) = 2, \quad \dot{v} = \dot{v}(t_0) = 1, \quad \ddot{u} = \ddot{u}(t_0) = 2, \quad \ddot{v} = \ddot{v}(t_0) = 0$$

a parametre $\dot{r}$ a $\ddot{r}$ v hľadanom bode P

$$\begin{aligned}
\dot{r}(P) &= \mathbf{r}_u(P)\dot{u}(t_0) + \mathbf{r}_v(P)\dot{v}(t_0) = (2, 0, 0) \cdot 2 + (0, 0, 1) \cdot 1 = (4, 0, 1)\,,\\
\ddot{r}(P) &= \mathbf{r}_{uu}(P)(\dot{u}(t_0))^2 + 2\mathbf{r}_{uv}(P)\dot{u}(t_0)\dot{v}(t_0) + \mathbf{r}_{vv}(P)(\dot{v}(t_0))^2 + \mathbf{r}_u(P)\ddot{u}(t_0) + \\
&+ \mathbf{r}_v(P)\ddot{v}(t_0) = \\
&= (0, -2, 0) \cdot 2^2 + 2\,(0, 0, 0) \cdot 2 \cdot 1 + (0, 0, 0) \cdot 1^2 + (2, 0, 0) \cdot 2 + (0, 0, 1) \cdot 0 = \\
&= (4, -8, 0).
\end{aligned}$$

Teraz spočítame geodetickú krivosť krivky

$$\begin{aligned}
\kappa_g(P) &= \frac{\mathbf{n}_\sigma(P) \times \dot{r}(P)}{|\dot{r}(P)|^3} \cdot \ddot{r}(P) = \frac{(0, -1, 0) \times (4, 0, 1)}{|(4, 0, 1)|^3} \cdot (4, -8, 0) = \\
&= \frac{(-1, 0, 4)}{(\sqrt{17})^3} \cdot (4, -8, 0) = -\frac{4}{(\sqrt{17})^3}.
\end{aligned}$$

4.5 Úlohy na precvičenie

Úloha 16 Vypočítajte hlavné krivosti, úplnú a strednú krivosť a hlavné smery:

a) helikoidu σ daného vektorovou rovnicou $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), 2v)$ v bode $P = [0,1,\pi]$. .... $\left[\kappa_1 = \frac{2}{5}, \kappa_2 = -\frac{2}{5}, \kappa_t = -\frac{4}{25}, \kappa_s = 0, \mathbf{s}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right), \mathbf{s}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)\right]$

b) hyperbolického paraboloidu daného rovnicou $z = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$ v bode $P = [2,2,0]$. .... $\left[\kappa_1 = \frac{1}{9}, \kappa_2 = -\frac{1}{9}, \kappa_t = -\frac{1}{81}, \kappa_s = 0, \mathbf{s}_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right), \mathbf{s}_2 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{3}\right)\right]$

c) plochy σ danej rovnicou $r(u,v) = (u+2\cos(v), u+2\sin(v), u^2)$ v bode $P = [-2,0,0]$. .... $[\kappa_1 = 0, \kappa_2 = -2, \kappa_t = 0, \kappa_s = -1, \mathbf{s}_1 = (0,-1,0), \mathbf{s}_2 = (1,0,0)]$

d) plochy σ danej rovnicou $z = x^2 - 2xy + y^2$ v bode $P = [0,-1,1]$. .... $\left[\kappa_1 = \frac{4}{27}, \kappa_2 = 0, \kappa_t = 0, \kappa_s = \frac{2}{27}, \mathbf{s}_1 = \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right), \mathbf{s}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right]$

e) plochy σ danej rovnicou $r(u,v) = (u, v, u^3 + v^3 - 3uv)$ v bode $P = [1,1,-1]$. .... $\left[\kappa_1 = 9, \kappa_2 = 3, \kappa_t = 27, \kappa_s = 6, \mathbf{s}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \mathbf{s}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right]$

f) plochy σ danej rovnicou $r(u,v) = (u, v, u^2 + v^3 - 4uv)$ v bode $P = [1,1,-2]$. .... $\left[\kappa_1 = 2, \kappa_2 = -\frac{2}{27}, \kappa_t = -\frac{4}{27}, \kappa_s = \frac{26}{27}, \mathbf{s}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \mathbf{s}_2 = \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right]$

Úloha 17 Vypočítajte geodetickú krivosť krivky K s u-krivkami a v-krivkami ležiacej na ploche σ v bode P:

a) σ : $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos(v), u\sin(v), 2v)$ v bode $P = [-2,0,0]$, K: $(u(t) = t,\ v(t) = t^2)$ pre $t = 1$. .... $\left[\kappa_g = -\sqrt{\frac{2}{5}}\right]$

b) σ : $\mathbf{r}(u,v) = (u\cos(v), u^2\sin(v), u)$ v bode $P = [-1,0,1]$, K: $(u(t) = t,\ v(t) = t^2)$ pre $t = 1$. .... $\left[\kappa_g = \frac{1}{9\sqrt{2}}\right]$

c) σ : $\mathbf{r}(u,v) = (u, v, u^3 + v^3 - uv)$ v bode $P = [1,1,1]$, K: $(u(t) = 1 + \cos(t)$, $v(t) = \sin(t))$ pre $t = \frac{\pi}{2}$. .... $\left[\kappa_g = -\frac{4}{125}\right]$

d) $\sigma : \mathbf{r}(u,v) = (u, v, u^3 + v^3 - uv)$ v bode $P = [-2, 0, 1]$, K: $(u(t) = t,\ v(t) = t^2)$ pre $t = 1$. .... $\left[\kappa_g = \frac{7}{12\sqrt{3}}\right]$

Kapitola 5

Sférická trigonometria

Základné prvky sférického trojuholníka (ST) sú vrcholy A, B a C. Strany a, b, c sú dĺžky sférických oblúkov $\overline{BC}, \overline{AC}$ a $\overline{AB}$. Uhly α, β, γ sú vnútorné uhly ST ABC. Všetky prvky sa merajú v stupňoch.

Základné vlastnosti ST:

- všetky strany a uhly ST sú duté uhly, a teda sú menšie ako π,

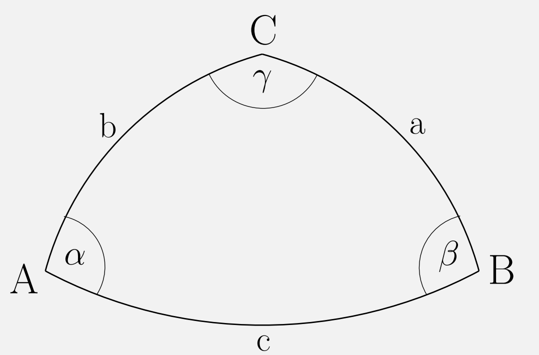
- pre strany a, b, c platí: $a < b + c, b > a + c, c < a + b$,

- pre strany a, b, c platí: $a + b + c < 2\pi$,

- pre uhly α, β, γ platí: $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$, $-\pi < \alpha + \beta - \gamma < \pi$, $-\pi < \alpha - \beta + \gamma < \pi$ a $-\pi < -\alpha + \beta + \gamma < \pi$,

- oproti väčšej strane leží väčší uhol,

- oproti zhodným stranám ležia zhodné uhly.



Obr. 5.0.1. Označenia vo všeobecnom sférickom trojuholníku.

5.1 Pravouhlý sférický trojuholník

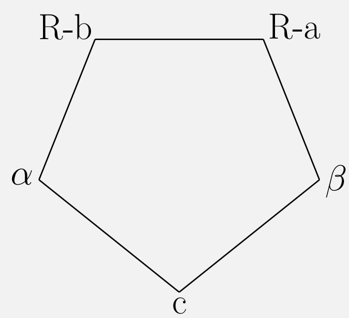
Sférický trojuholník, ktorý má aspoň jeden uhol pravý, nazývame pravouhlý ST. Pravý uhol γ označíme R.

Napierovo pravidlo pre pravouhlý ST:

Kosínus ľubovoľného prvku je rovný súčinu:

a) sínusov protiľahlých prvkov (1. *Napierovo pravidlo*),

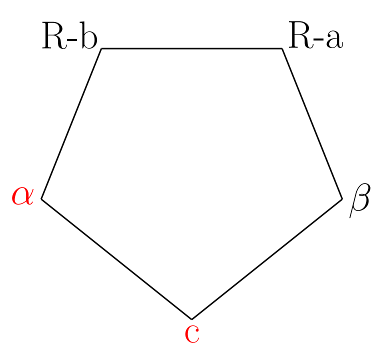
b) cotangensov priľahlých prvkov (2. *Napierovo pravidlo*).



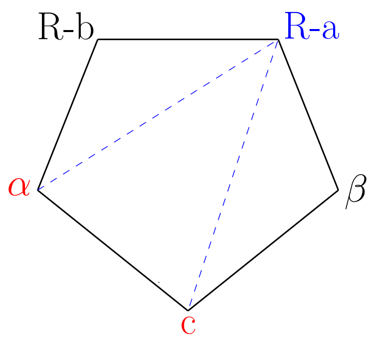
Obr. 5.1.2. Označenie prvkov pre pravouhlý sférický trojuholník.

Príklad 99 Riešte pravouhlý ST, ktorý je určený preponou $c = 69^\circ\, 25'\, 00''$ a priľahlým uhlom $\alpha = 54^\circ\, 54'\, 00''$ ak $\gamma = R = 90^\circ$. Dopočítajte prvky a, b a β.

Riešenie: Na vyriešenie pravouhlého ST budeme používať iba zadané hodnoty. Nami vypočítané hodnoty prvkov pri ďalšom výpočte používať nebudeme. Ako prvé je vhodné nakresliť si v päťuholníku prvky pravouhlého ST s označením zadaných hodnôt.



Obr. 5.1.3. Príklad 99 - zadané prvky sú označené červenou farbou.



Obr. 5.1.4. Príklad 99 - protiľahlé prvky ku $R-a$ v pravouhlom ST.

Ako prvú neznámu budeme počítať $R-a$ a použijeme 1. *Napierovo pravidlo*. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.4.

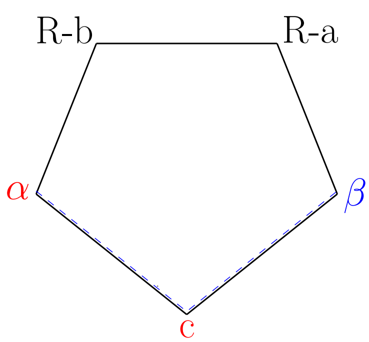
$$\cos(R-a) = \sin(a) = \sin(\alpha)\cdot\sin(c),$$
$$\sin(a) = \sin(54^\circ\,54'\,00'')\cdot\sin(69^\circ\,25'\,00'') = 0,76592.$$

Pre tvar funkcie $\sin(a)$ na intervale $\langle 0,\pi\rangle$ dostávame dve riešenia:

$$\begin{aligned} a_1 &= 49^\circ\,59'\,20'', \\ a_2 &= 180^\circ\ - a_1 = 130^\circ\,00'\,40''. \end{aligned}$$

Použitím pravidla oproti menšej strane leží menší uhol, dostávame

$$\alpha < \gamma \ \Rightarrow\ a < c \ \Rightarrow\ a_1 = a = 49^\circ\,59'\,20''.$$



Obr. 5.1.5. Príklad 99 - priľahlé prvky ku c v pravouhlom ST.

Ďalej budeme počítať uhol β. Na výpočet použijeme 2. *Napierovo pravidlo*. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.5. Je dobré si uvedomiť, že neznáma hodnota nemusí byť vždy na ľavej strane rovnice.

$$\begin{aligned} \cos(c) &= \operatorname{cotan}(\alpha)\cdot\operatorname{cotan}(\beta) \Rightarrow \operatorname{cotan}(\beta) = \frac{\cos(c)}{\operatorname{cotan}(\alpha)}, \\ \tan(\beta) &= \frac{1}{\tan(\alpha)\cos(c)} = \\ &= \frac{1}{\tan(54^\circ\,54'\,00'')\cdot\cos(69^\circ\,25'\,00'')} = 1,99907. \end{aligned}$$

Potom dostávame riešenie $\beta = 63^\circ\,25'\,27''$.

Ako posledný spočítame prvok $R-b$. Použijeme rovnaké pravidlo ako pri výpočte uhla β. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.6.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \operatorname{cotan}(c)\cdot\operatorname{cotan}(R-b) \Rightarrow \operatorname{cotan}(R-b) = \frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{cotan}(c)}, \\ \tan(b) &= \cos(\alpha)\cdot\tan(c) = \cos(54^\circ\,54'\,00'')\cdot\tan(69^\circ\,25'\,00'') = 1,53113. \end{aligned}$$

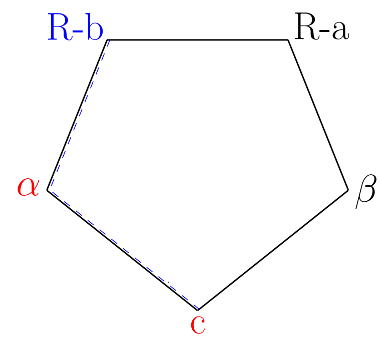
Dostávame riešenie $b = 56^\circ\, 51'\, 03''$.

Na záver je potrebné urobiť kontrolu výpočtu použitím sínusovej vety

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)},$$

potom dostávame

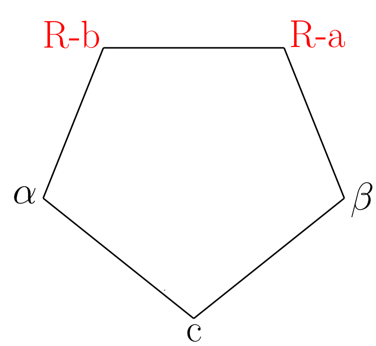
$$\begin{aligned}
\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} &= \frac{\sin(49^\circ\, 59'\, 20'')}{\sin(54^\circ\, 54'\, 00'')} = 0,93616,\\
\frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} &= \frac{\sin(56^\circ\, 51'\, 03'')}{\sin(63^\circ\, 25'\, 27'')} = 0,93616,\\
\frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} &= \frac{\sin(69^\circ\, 25'\, 00'')}{\sin(90^\circ)} = 0,93616.
\end{aligned}$$



Obr. 5.1.6. Príklad 99 - priľahlé prvky k α v pravouhlom ST.

Príklad 100 Riešte pravouhlý ST, ktorý je určený odvesnami $a = 52^\circ\, 13'\, 12''$ a $b = 37^\circ\, 60'\, 30''$ ak $\gamma = R = 90^\circ$. Dopočítajte prvky c, α a β.

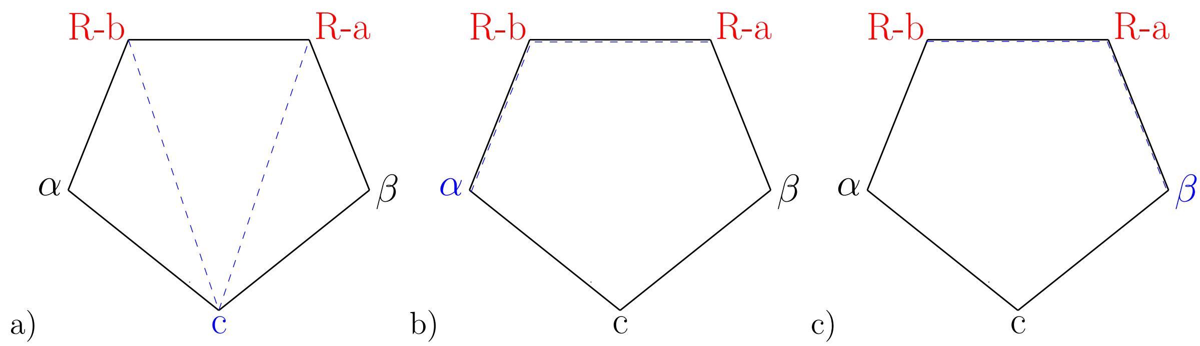
Riešenie: Začneme s označením zadaných prvkov pravouhlého ST.



Obr. 5.1.7. Príklad 100 - zadané prvky sú označené červenou farbou.

Dĺžku strany c vypočítame použitím 1. *Napierovho pravidla*. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.8 a).

$$\begin{aligned}
\cos(c) &= \sin(R-b)\cdot\sin(R-a) = \cos(b)\cdot\cos(a),\\
\cos(c) &= \cos(37^\circ\, 60'\, 30'')\cdot\cos(52^\circ\, 13'\, 12'') = 0,48271 \Rightarrow c = 61^\circ\, 08'\, 16''.
\end{aligned}$$



Obr. 5.1.8. Príklad 100 - znázornenie Napierovho pravidla pre pravouhlý ST.

Uhol α spočítame použitím 2. *Napierovho pravidla*. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.8 b).

$$\begin{aligned}
\cos(R-b) &= \operatorname{cotan}(\alpha)\cdot\operatorname{cotan}(R-a) \Rightarrow \operatorname{cotan}(\alpha)=\sin(b)\cdot\operatorname{cotan}(a),\\
\tan(\alpha) &= \frac{\tan(a)}{\sin(b)}=\frac{\tan(52^\circ\,13'\,12'')}{\sin(37^\circ\,60'\,30'')}=2,09512 \Rightarrow \alpha = 64^\circ\,29'\,05''.
\end{aligned}$$

Ako posledný spočítame uhol β. Použijeme rovnaké pravidlo ako pri výpočte uhla α. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.8 c).

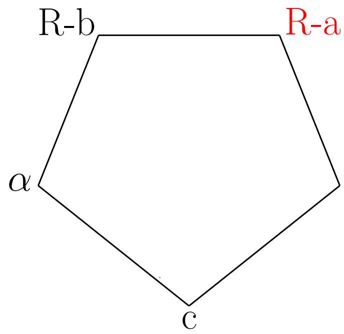
$$\begin{aligned}
\cos(R-a) &= \operatorname{cotan}(R-b)\cdot\operatorname{cotan}(\beta) \Rightarrow \operatorname{cotan}(\beta)=\sin(a)\cdot\operatorname{cotan}(b),\\
\tan(\beta) &= \frac{\tan(b)}{\sin(a)}=\frac{\tan(37^\circ\,60'\,30'')}{\sin(52^\circ\,13'\,12'')}=0,98880 \Rightarrow \beta = 44^\circ\,40'\,39''.
\end{aligned}$$

Na záver urobíme kontrolu použitím sínusovej vety

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} &= \frac{\sin(52^\circ\,13'\,12'')}{\sin(64^\circ\,29'\,05'')}=0,87578,\\
\frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} &= \frac{\sin(37^\circ\,60'\,30'')}{\sin(44^\circ\,40'\,39'')}=0,87578,\\
\frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} &= \frac{\sin(61^\circ\,08'\,16'')}{\sin(90^\circ)}=0,87578.
\end{aligned}$$

Príklad 101 Riešte pravouhlý ST, ktorý je určený odvesnou $a = 52^\circ\,44'\,23''$ a priľahlým uhlom $\beta = 79^\circ\,01'\,01''$ ak $\gamma = R = 90^\circ$. Dopočítajte prvky α, b a c.

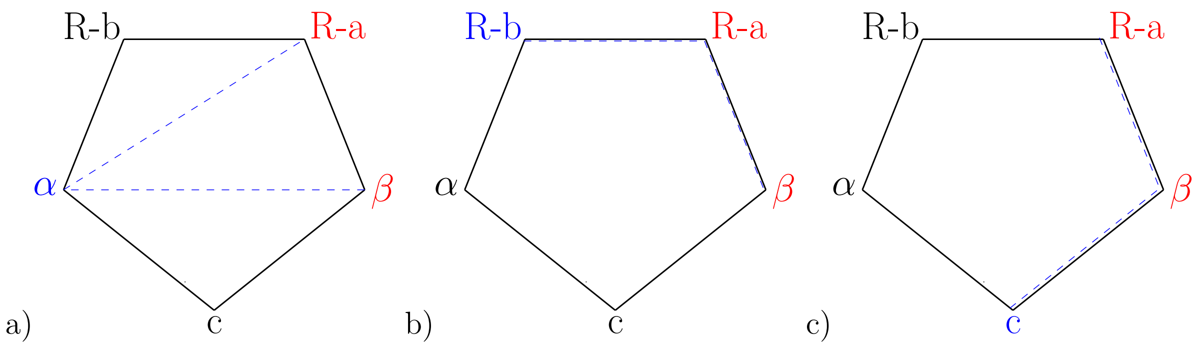
Riešenie: Začneme s označením zadaných prvkov pravouhlého ST.



Obr. 5.1.9. Príklad 101 - zadané prvky sú označené červenou farbou.

Veľkosť uhlu α vypočítame použitím 1. *Napierovho pravidla*. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.10 a).

$$\begin{aligned}\cos(\alpha) &= \sin(R-a)\cdot\sin(\beta) = \cos(a)\cdot\sin(\beta),\\ \cos(\alpha) &= \cos(52^\circ\,44'\,23'')\cdot\cos(79^\circ\,01'\,03'') = 0,59435 \Rightarrow \alpha = 53^\circ\,32'\,02''.\end{aligned}$$



Obr. 5.1.10. Príklad 101 - znázornenie Napierovho pravidla pre pravouhlý ST.

Stranu b spočítame použitím 2. *Napierovho pravidla*. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.10 b).

$$\begin{aligned}\cos(R-a) &= \operatorname{cotan}(R-b)\cdot\operatorname{cotan}(\beta) \Rightarrow \tan(b) = \frac{\sin(a)}{\operatorname{cotan}(\beta)} = \sin(a)\cdot\tan(\beta),\\ \tan(b) &= \sin(52^\circ\,44'\,23'')\cdot\tan(79^\circ\,01'\,03'') = 4,10120 \Rightarrow b = 76^\circ\,17'\,49''.\end{aligned}$$

Ako poslednú spočítame stranu c. Použijeme rovnaké pravidlo ako pri výpočte strany b.

Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.10 c).

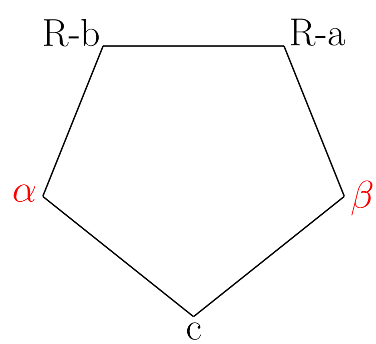
$$\begin{aligned} \cos(\beta) &= \operatorname{cotan}(R-a)\cdot\operatorname{cotan}(c) \Rightarrow \operatorname{cotan}(c) = \cos(b)\cdot\tan(a), \\ \tan(c) &= \frac{\tan(a)}{\cos(\beta)} = \frac{\tan(52^\circ\,44'\,23'')}{\cos(79^\circ\,01'\,03'')} = 6,90034 \Rightarrow c = 81^\circ\,45'\,15''. \end{aligned}$$

Na záver urobíme kontrolu použitím sínusovej vety

$$\begin{aligned} \frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} &= \frac{\sin(52^\circ\,44'\,23'')}{\sin(53^\circ\,32'\,02'')} = 0,98966, \\ \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} &= \frac{\sin(76^\circ\,17'\,49'')}{\sin(79^\circ\,01'\,03'')} = 0,98966, \\ \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} &= \frac{\sin(81^\circ\,45'\,15'')}{\sin(90^\circ)} = 0,98966. \end{aligned}$$

Príklad 102 Riešte pravouhlý ST, ktorý je určený dvoma uhlami $\alpha = 61^\circ\,19'\,09''$ a $\beta = 45^\circ\,23'\,15''$ ak $\gamma = R = 90^\circ$. Dopočítajte strany a, b a c.

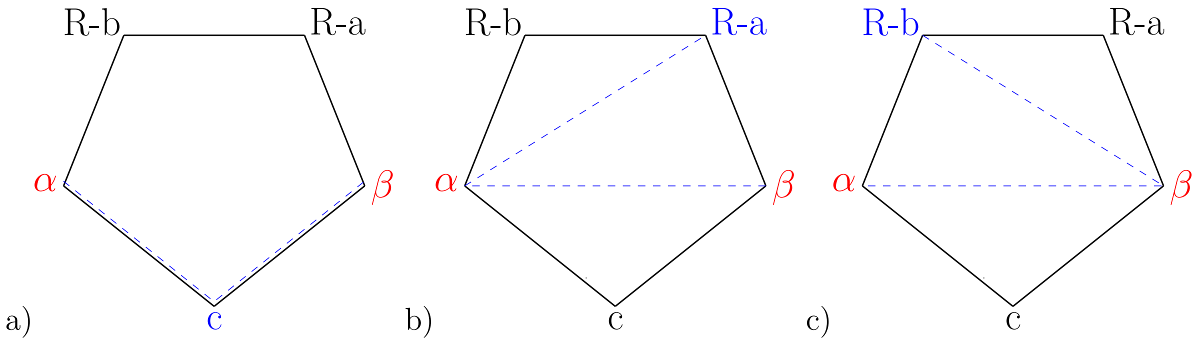
Riešenie: Začneme s označením zadaných prvkov pravouhlého ST.



Obr. 5.1.11. Príklad 102 - zadané prvky sú označené červenou farbou.

Veľkosť strany c vypočítame použitím 2. *Napierovho pravidla*. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.12 a).

$$\begin{aligned} \cos(c) &= \operatorname{cotan}(\alpha)\cdot\operatorname{cotan}(\beta) \Rightarrow \cos(c) = \frac{1}{\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}, \\ \cos(c) &= \frac{1}{\tan(61^\circ\,19'\,09'')\cdot\tan(45^\circ\,23'\,15'')} = \frac{1}{1,85288} = 0,53970 \Rightarrow c = 57^\circ\,20'\,13''. \end{aligned}$$



Obr. 5.1.12. Príklad 102 - znázornenie Napierovho pravidla pre pravouhlý ST.

Stranu a spočítame použitím 1. *Napierovho pravidla*. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.12 b).

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \sin(R-a)\cdot\sin(\beta) \Rightarrow \cos(a) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\beta)},\\
\cos(a) &= \frac{\cos(61^\circ\,19'\,09'')}{\sin(45^\circ\,23'\,15'')} = 0,67418 \Rightarrow a = 47^\circ\,36'\,34''.
\end{aligned}$$

Ako posledné vypočítame veľkosť strany b. Použijeme rovnaké pravidlo ako pri výpočte strany a. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.12 c).

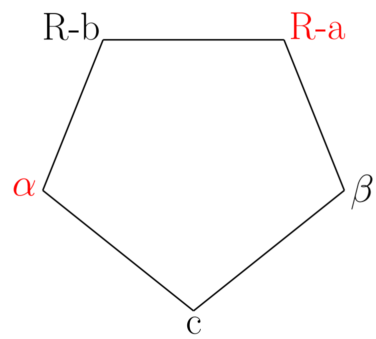
$$\begin{aligned}
\cos(\beta) &= \sin(R-b)\cdot\sin(\alpha) \Rightarrow \cos(b) = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\alpha)},\\
\cos(a) &= \frac{\cos(45^\circ\,23'\,15'')}{\sin(61^\circ\,19'\,09'')} = 0,80053 \Rightarrow b = 36^\circ\,49'\,10''.
\end{aligned}$$

Na záver urobíme kontrolu použitím sínusovej vety

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} &= \frac{\sin(47^\circ\,36'\,34'')}{\sin(61^\circ\,19'\,09'')} = 0,84186,\\
\frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} &= \frac{\sin(36^\circ\,49'\,10'')}{\sin(45^\circ\,23'\,15'')} = 0,84186,\\
\frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} &= \frac{\sin(57^\circ\,20'\,13'')}{\sin(90^\circ)} = 0,84186.
\end{aligned}$$

Príklad 103 Riešte pravouhlý ST, ktorý je určený odvesnou $a = 32^\circ\,24'\,68''$ a protiľahlým uhlom $\alpha = 40^\circ\,34'\,59''$, ak $\gamma = R = 90^\circ$. Dopočítajte strany b, c a β.

Riešenie: Začneme s označením zadaných prvkov pravouhlého ST.



Obr. 5.1.13. Príklad 103 - zadané prvky sú označené červenou farbou.

Veľkosť strany b vypočítame použitím 2. *Napierovho pravidla*. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.14 a).

$$\begin{aligned}
\cos(R-b) &= \operatorname{cotan}(\alpha)\cdot\operatorname{cotan}(R-a) \Rightarrow \sin(b) = \frac{\tan(a)}{\tan(\alpha)},\\
\sin(b) &= \frac{\tan(32^\circ\,24'\,68'')}{\tan(40^\circ\,34'\,59'')} = 0,74141.
\end{aligned}$$

Pre tvar funkcie sin dostávame dve riešenia:

$$\begin{aligned}
b_1 &= 47^\circ\,51'\,05'',\\
b_2 &= 180^\circ\; - b_1 = 132^\circ 08'\,55''.
\end{aligned}$$

Použitím pravidla oproti menšej strane leží menší uhol, i keď uhol β zatiaľ nepoznáme, dostávame

$$b > a \;\Rightarrow\; \beta > \alpha.$$

Z nerovnosti vidíme, že obe riešenia b_1, b_2 spĺňajú túto podmienku. Preto sú obe hodnoty riešením a uhol β musí byť väčší ako uhol α.
Stranu c spočítame použitím 1. *Napierovho pravidla*. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.14 b).

$$\begin{aligned}
\cos(R-a) &= \sin(\alpha)\cdot\sin(c) \Rightarrow \sin(c) = \frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)},\\
\sin(a) &= \frac{\sin(32^\circ\,24'\,68'')}{\sin(40^\circ\,34'\,59'')} = 0,82408.
\end{aligned}$$

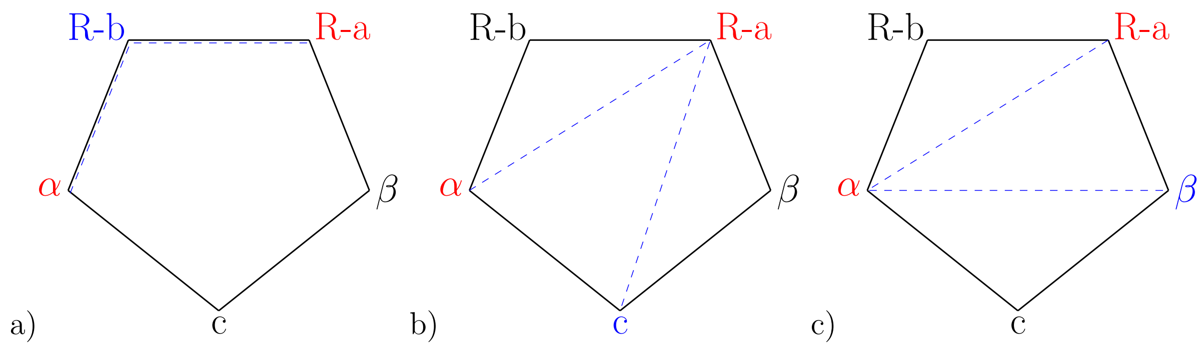
Dostávame dve riešenia:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 55^\circ\, 29'\, 43'', \\
c_2 &= 180^\circ - c_1 = 124^\circ\, 30'\, 17''.
\end{aligned}
$$

Použitím pravidla oproti menšej strane leží menší uhol dostávame

$$\gamma > \alpha \Rightarrow c > a.$$

Obe riešenia c_1, c_2 spĺňajú túto podmienku, použitím strany b a uhla β budeme vedieť napísať veľkosť prepony c jednoznačne.



Obr. 5.1.14. Príklad 103 - znázornenie Napierovho pravidla pre pravouhlý ST.

Zostáva nám preto vypočítať veľkosť uhla β. Použijeme rovnaké pravidlo ako pri výpočte strany c. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.14 c).

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \sin(R-a)\cdot\sin(\beta) \Rightarrow \sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(a)}, \\
\sin(\beta) &= \frac{\cos(40^\circ\, 34'\, 59'')}{\cos(32^\circ\, 24'\, 68'')} = 0,89968.
\end{aligned}
$$

Aj tu dostávame dve riešenia:

$$
\begin{aligned}
\beta_1 &= 64^\circ\, 06'\, 56'', \\
\beta_2 &= 180^\circ\ - \beta_1 = 115^\circ 53'\, 04''.
\end{aligned}
$$

Obidve nájdené riešenia spĺňajú podmienku, že sú väčšie ako uhol α. Uhol α a stranu a už pri použití pravidla oproti menšej strane leží menší uhol nemôžeme použiť. Pre zostávajúce strany a uhly použijeme pravidlo oproti menšej strane leží menší uhol. Môžeme napísať

$$\beta < \gamma \ \Rightarrow\ b < c \ \Rightarrow\ \beta = \beta_1 = 64^\circ\,06'\,56''.$$

Z druhej časti nerovnosti dostávame

$$b_1 < c_1 \ \wedge\ b_1 < c_2 \ \Rightarrow\ b = b_1 = 47^\circ\,51'\,05''.$$

Ako poslednú určíme veľkosť prepony c použitím pravidla

$$c < a + b \ \Rightarrow\ c = c_1 = 55^\circ\,29'\,43''.$$

Urobíme kontrolu použitím sínusovej vety

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} &= \frac{\sin(32^\circ\,24'\,68'')}{\sin(40^\circ\,34'\,59'')} = 0,82408,\\
\frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} &= \frac{\sin(47^\circ\,51'\,05'')}{\sin(64^\circ\,06'\,56'')} = 0,82408,\\
\frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} &= \frac{\sin(55^\circ\,29'\,43'')}{\sin(90^\circ)} = 0,82408.
\end{aligned}$$

Rovnako však môžeme napísať nerovnosť i v tomto tvare

$$\beta > \gamma \ \Rightarrow\ b > c \ \Rightarrow\ \beta = \beta_2 = 115^\circ\,53'\,04''.$$

Z druhej časti nerovnosti dostávame

$$b_2 > c_1 \ \wedge\ b_2 > c_2 \ \Rightarrow\ b = b_2 = 132^\circ\,08'\,55''.$$

Prepony c nevieme jednoznačne určiť použitím pravidla $c < a + b$, preto použijeme podmienku

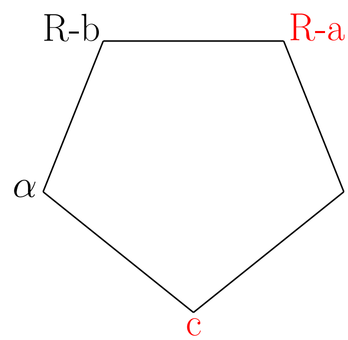
$$b < a + c \ \Rightarrow\ c = c_2 = 124^\circ\,30'\,17''.$$

Na záver urobíme kontrolu použitím sínusovej vety

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} &= \frac{\sin(32^\circ\,24'\,68'')}{\sin(40^\circ\,34'\,59'')} = 0,82408,\\
\frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} &= \frac{\sin(132^\circ\,08'\,55'')}{\sin(115^\circ\,53'\,04'')} = 0,82408,\\
\frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} &= \frac{\sin(124^\circ\,30'\,17'')}{\sin(90^\circ)} = 0,82408.
\end{aligned}$$

Príklad 104 Riešte pravouhlý ST, ktorý je určený odvesnou $a = 22°\,15'\,00''$ a preponou $c = 55°\,09'\,00''$ ak $\gamma = R = 90°$. Dopočítajte prvky b, α a β.

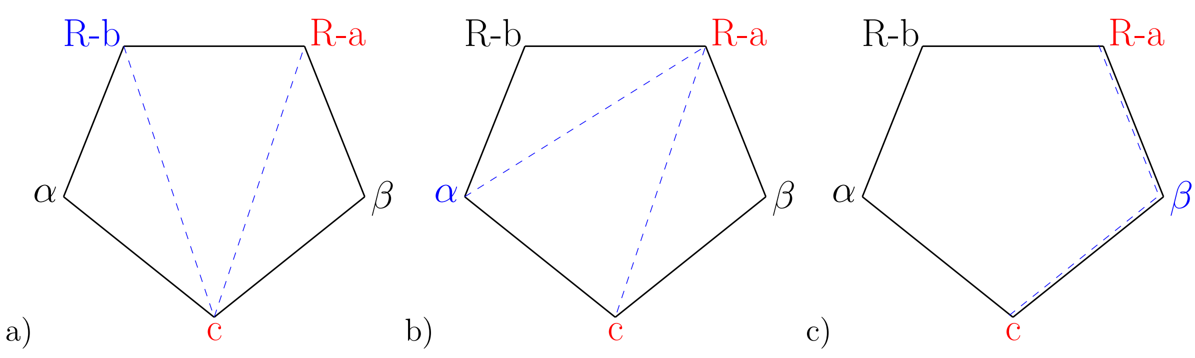
Riešenie: Začneme s označením zadaných prvkov pravouhlého ST.



Obr. 5.1.15. Príklad 104 - zadané prvky sú označené červenou farbou.

Dĺžku strany b vypočítame použitím 1. *Napierovho pravidla*. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.16 a).

$$\begin{aligned}
\cos(c) &= \sin(R-b)\cdot\sin(R-a) \Rightarrow \cos(b) = \frac{\cos(c)}{\cos(a)},\\
\cos(b) &= \frac{\cos(55°\,09'\,00'')}{\cos(22°\,15'\,00'')} = 0,61740 \Rightarrow b = 51°\,52'\,24''.
\end{aligned}$$



Obr. 5.1.16. Príklad 104 - znázornenie Napierovho pravidla pre pravouhlý ST.

Uhol α spočítame použitím rovnakého pravidla ako pri výpočte strany b. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.16 b).

$$
\begin{aligned}
\cos(R-a) &= \sin(\alpha)\cdot\sin(c) \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)},\\
\sin(\alpha) &= \frac{\sin(22^\circ\,15'\,00'')}{\sin(55^\circ\,09'\,00'')} = 0,46140.
\end{aligned}
$$

Pre tvar funkcie sin dostávame dve riešenia:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= 27^\circ\,28'\,39'',\\
\alpha_2 &= 180^\circ\ - b_1 = 152^\circ\,31'\,21''.
\end{aligned}
$$

Použitím pravidla, oproti menšej strane leží menší uhol, dostávame

$$
a < c \;\Rightarrow\; \alpha < \gamma \;\Rightarrow\; \alpha = \alpha_1 = 27^\circ\,28'\,39''.
$$

Ako posledný spočítame uhol β. Použijeme 2. *Napierovo pravidlo*. Grafické znázornenie tohto pravidla je na Obr. 5.1.16 c).

$$
\cos(\beta) = \text{cotan}(c)\cdot\text{cotan}(R-a) = \frac{\tan(a)}{\tan(c)} = \frac{\tan(22^\circ\,15'\,00'')}{\tan(55^\circ\,09'\,00'')} = 0,28487 \Rightarrow \beta = 73^\circ\,26'\,56''.
$$

Na záver urobíme kontrolu použitím sínusovej vety

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} &= \frac{\sin(22^\circ\,15'\,00'')}{\sin(27^\circ\,28'\,39'')} = 0,82065,\\
\frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} &= \frac{\sin(51^\circ\,52'\,24'')}{\sin(73^\circ\,26'\,56'')} = 0,82065,\\
\frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} &= \frac{\sin(55^\circ\,09'\,00'')}{\sin(90^\circ)} = 0,82065.
\end{aligned}
$$

5.2 Všeobecný sférický trojuholník

Sférická sínusová veta:

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)}.$$

Sférické kosínusové vety:

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha),$$
$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(a)$$

a ostatné cyklické rovnosti.

Sférické sínus-kosínusové vety:

$$\cos(a) \cdot \sin(b) = \sin(a) \cdot \cos(b) \cdot \cos(\gamma) + \sin(c) \cdot \cos(\alpha),$$
$$\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) = -\sin(\alpha) \cdot \cos(a) \cdot \cos(c) + \sin(\gamma) \cdot \cos(a)$$

a ostatné cyklické rovnosti.

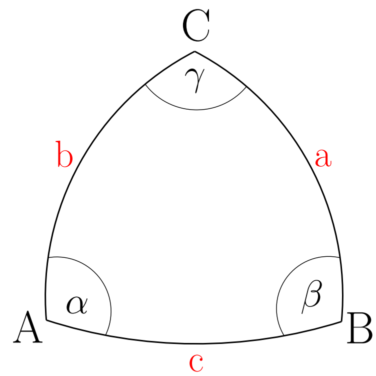
Napierové analógie:

$$\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} \cdot \operatorname{cotan}\left(\frac{\gamma}{2}\right), \quad \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)} \cdot \operatorname{cotan}\left(\frac{\gamma}{2}\right),$$
$$\tan\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \cdot \tan\left(\frac{c}{2}\right), \qquad \tan\left(\frac{a-b}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} \cdot \tan\left(\frac{c}{2}\right)$$

a ostatné cyklické rovnosti.

Príklad 105 Riešte ST, ktorý je určený tromi stranami $a = 43^\circ\, 04'\, 30''$, $b = 68^\circ\, 17'\, 20''$ a $c = 75^\circ\, 48'\, 10''$. Dopočítajte jeho ostatné prvky.

Riešenie: K vyriešeniu všeobecného ST budeme používať iba zadané hodnoty. Nami vypočítané hodnoty prvkov pri ďalšom výpočte používať nebudeme. Ako prvé je vhodné nakresliť si všeobecný ST s označením zadaných hodnôt.



Obr. 5.2.17. Príklad 105 - zadané prvky sú označené červenou farbou.

Pri riešení všeobecného ST je vhodné sa vedieť orientovať vo vzorcoch, ktoré sa používajú pre riešenie všeobecného ST. Na výpočet neznámych uhlov budeme používať *kosínusovú vetu pre strany*. Začneme výpočtom uhla α použitím vzorca

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha).$$

Vzorec upravíme

$$\cos(\alpha) = \frac{\cos(a) - \cos(b) \cdot \cos(c)}{\sin(b) \cdot \sin(c)}$$

a dosadíme známe hodnoty

$$\cos(\alpha) = \frac{\cos(43^\circ\, 04'\, 30'') - \cos(68^\circ\, 17'\, 20'') \cdot \cos(75^\circ\, 48'\, 10'')}{\sin(68^\circ\, 17'\, 20'') \cdot \sin(75^\circ\, 48'\, 10'')}.$$

Spočítame jednotlivé výrazy

$$\cos(\alpha) = \frac{0,73046 - 0,36993 \cdot 0,24526}{0,92906 \cdot 0,96946} = \frac{0,63973}{0,90068} = 0,71027$$

a dostávame

$$\alpha = 44^\circ\, 44'\, 35''.$$

Pri výpočte uhla β budeme postupovať rovnako. Začneme napísaním správneho tvaru *kosínusovej vety pre strany*

$$\cos(b) \quad = \quad \cos(c) \cdot \cos(a) + \sin(c) \cdot \sin(a) \cdot \cos(\beta).$$

Vzorec upravíme, dosadíme známe hodnoty a vypočítame uhol β

$$\begin{aligned}
\cos(\beta) &= \frac{\cos(b)-\cos(c)\cdot\cos(a)}{\sin(c)\cdot\sin(a)} = \\
&= \frac{\cos(68^\circ\,17'\,20'')-\cos(75^\circ\,48'\,10'')\cdot\cos(43^\circ\,04'\,30'')}{\sin(75^\circ\,48'\,10'')\cdot\sin(43^\circ\,04'\,30'')} = \frac{0,36993-0,17915}{0,66209} = \\
&= \frac{0,19078}{0,66209} = 0,28814 \Rightarrow \beta = 73^\circ\,15'\,13''.
\end{aligned}$$

Ako posledný spočítame uhol γ

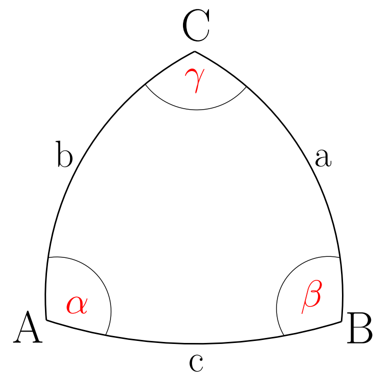
$$\begin{aligned}
\cos(c) &= \cos(a)\cdot\cos(b)+\sin(a)\cdot\sin(b)\cdot\cos(\gamma), \\
\cos(\gamma) &= \frac{\cos(c)-\cos(a)\cdot\cos(b)}{\sin(a)\cdot\sin(b)} = \\
&= \frac{\cos(75^\circ\,48'\,10'')-\cos(43^\circ\,04'\,30'')\cdot\cos(68^\circ\,17'\,20'')}{\sin(43^\circ\,04'\,30'')\cdot\sin(68^\circ\,17'\,20'')} = \frac{0,24526-0,27022}{0,63451} = \\
&= \frac{-0,02496}{0,63451} = -0,03933 \Rightarrow \gamma = 92^\circ\,15'\,15''.
\end{aligned}$$

Na záver každého príkladu je potrebné urobiť kontrolu výpočtu použitím *sínusovej vety*

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} &= \frac{\sin(43^\circ\,04'\,30'')}{\sin(44^\circ\,44'\,35'')} = 0,97021, \\
\frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} &= \frac{\sin(68^\circ\,17'\,20'')}{\sin(73^\circ\,15'\,13'')} = 0,97021, \\
\frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} &= \frac{\sin(75^\circ\,48'\,10'')}{\sin(92^\circ\,15'\,15'')} = 0,97021.
\end{aligned}$$

Príklad 106 Riešte ST, ktorý je určený tromi uhlami $\alpha = 63^\circ\,19'\,42''$, $\beta = 70^\circ\,01'\,07''$ a $\gamma = 59^\circ\,52'\,59''$. Dopočítajte jeho ostatné prvky.

Riešenie: Riešenie začneme tak, že nakreslíme všeobecný ST, v ktorom označíme zadané hodnoty.



Obr. 5.2.18. Príklad 106 - zadané prvky sú označené červenou farbou.

Poznáme všetky uhly, a preto na vypočítanie strán použijeme *kosínusové vety pre uhly*. Ako prvú vypočítame dĺžku strany a s použitím vzorca

$$\cos(\alpha) = -\cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(a),$$

ktorý si upravíme do potrebného tvaru

$$\cos(a) = \frac{\cos(\alpha) + \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma)}{\sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)}.$$

Dosadíme známe hodnoty a vypočítame dĺžku strany a

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \frac{\cos(63^\circ\,19'\,42'') + \cos(70^\circ\,01'\,07'') \cdot \cos(59^\circ\,52'\,59'')}{\sin(70^\circ\,01'\,07'') \cdot \sin(59^\circ\,52'\,59'')} = \frac{0,44888 + 0,17146}{0,81293} = \\ &= \frac{0,62034}{0,81293} = 0,76309 \Rightarrow a = 40^\circ\,15'\,47''. \end{aligned}$$

Rovnako budeme postupovať aj pri výpočte ďalších strán. Ako ďalšiu vypočítame dĺžku strany b. Vzorec napíšeme použitím cyklických rovností a dostávame

$$\cos(\beta) = -\cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha) + \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(b).$$

Našou neznámou je b, preto vzorec ešte upravíme do požadovaného tvaru

$$\cos(b) = \frac{\cos(\beta) + \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha)}.$$

Dosadíme hodnoty a vypočítame dĺžku strany b

$$\begin{aligned}\cos(b) &= \frac{\cos(70^\circ\,01'\,07'') + \cos(59^\circ\,52'\,59'')\cdot\cos(63^\circ\,19'\,42'')}{\sin(59^\circ\,52'\,59'')\cdot\sin(63^\circ\,19'\,42'')} = \frac{0,34171 + 0,22523}{0,77296} = \\ &= \frac{0,56694}{0,77296} = 0,73347 \Rightarrow b = 42^\circ\,49'\,18''.\end{aligned}$$

Zostáva už iba vypočítať dĺžku strany c. Vzorec si napíšeme použitím cyklických rovností

$$\cos(\gamma) = -\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cos(c)$$

a upravíme

$$\cos(c) = \frac{\cos(\gamma) + \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}{\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}.$$

Dosadíme hodnoty a vypočítame dĺžku strany c

$$\begin{aligned}\cos(c) &= \frac{\cos(59^\circ\,52'\,59'') + \cos(63^\circ\,19'\,42'')\cdot\cos(70^\circ\,01'\,07'')}{\sin(63^\circ\,19'\,42'')\cdot\sin(70^\circ\,01'\,07'')} = \frac{0,50177 + 0,15339}{0,83980} = \\ &= \frac{0,65516}{0,83980} = 0,78013 \Rightarrow c = 38^\circ\,43'\,39''.\end{aligned}$$

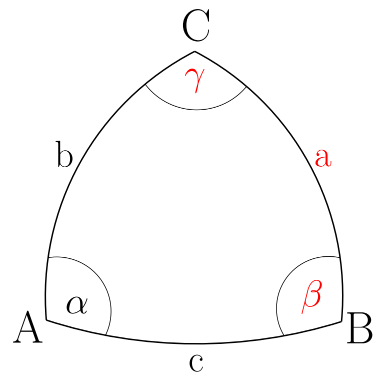
Na záver urobíme kontrolu použitím *sínusovej vety*

$$\begin{aligned}\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} &= \frac{\sin(40^\circ\,15'\,47'')}{\sin(63^\circ\,19'\,42'')} = 0,72326,\\ \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} &= \frac{\sin(42^\circ\,49'\,18'')}{\sin(70^\circ\,01'\,07'')} = 0,72326,\\ \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} &= \frac{\sin(38^\circ\,43'\,39'')}{\sin(59^\circ\,52'\,59'')} = 0,72325.\end{aligned}$$

Dopustili sme sa malej chyby spôsobenej zaokrúhľovaním. Táto chyba nie je veľká, a preto považujeme náš výpočet za správny.

Príklad 107 Riešte ST, ktorý je určený stranou $a = 64^\circ\,02'\,41''$ a priľahlými uhlami $\beta = 22^\circ\,48'\,09''$ a $\gamma = 106^\circ\,43'\,40''$. Dopočítajte jeho ostatné prvky.

Riešenie: Ako prvé je vhodné nakresliť všeobecný ST s označením zadaných hodnôt.



Obr. 5.2.19. Príklad 107 - zadané prvky sú označené červenou farbou.

Začneme s výpočtom uhla α a použijeme pritom *kosínusovú vetu pre uhly.*

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= -\cos(\beta)\cdot\cos(\gamma)+\sin(\beta)\cdot\sin(\gamma)\cdot\cos(a) = \\
&= -\cos(22^\circ\,48'\,09'')\cdot\cos(106^\circ\,43'\,40'') + \\
&+ \sin(22^\circ\,48'\,09'')\cdot\sin(106^\circ\,43'\,40'')\cdot\cos(64^\circ\,02'\,41'') = \\
&= 0,26533+0,16244 = 0,42777 \Rightarrow \alpha = 64^\circ\,40'\,25''.
\end{aligned}$$

Na výpočet strán b a c budeme používať *Napierové analógie*, ktoré riešia vždy dva prvky spolu.

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{b+c}{2}\right) &= \frac{\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}\cdot\tan\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{22^\circ\,48'\,09''-106^\circ\,43'\,40''}{2}\right)}{\cos\left(\frac{22^\circ\,48'\,09''+106^\circ\,43'\,40''}{2}\right)}\cdot\tan\left(\frac{64^\circ\,02'\,41''}{2}\right) = \\
&= \frac{0,74358}{0,42633}\cdot 0,62541 = 1,0908 \Rightarrow \frac{b+c}{2} = 47^\circ\,29'\,13'', \\
\tan\left(\frac{b-c}{2}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}\cdot\tan\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{22^\circ\,48'\,09''-106^\circ\,43'\,40''}{2}\right)}{\sin\left(\frac{22^\circ\,48'\,09''+106^\circ\,43'\,40''}{2}\right)}\cdot\tan\left(\frac{64^\circ\,02'\,41''}{2}\right) = \\
&= \frac{-0,66865}{0,90457}\cdot 0,62541 = -0,4623 \Rightarrow \frac{b+c}{2} = -24^\circ\,48'\,40''.
\end{aligned}$$

Spočítali sme iba polovičný súčet a rozdiel neznámych. Aby sme dostali výslednú hodnotu strany b, musíme tieto dva čiastkové výsledky sčítať

$$b = \frac{b+c}{2}+\frac{b-c}{2} = 47^\circ\,29'\,13'' + (-24^\circ\,48'\,40'') = 22^\circ\,40'\,33''.$$

Pre výpočet hodnoty uhla β hodnoty odčítame

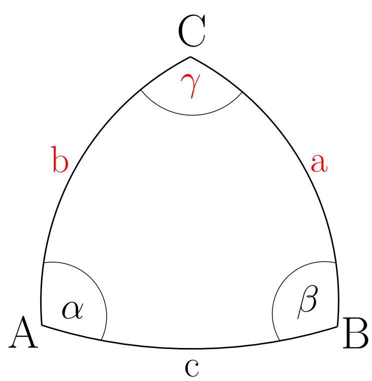
$$c = \frac{b+c}{2} - \frac{b-c}{2} = 47^\circ\,29'\,13'' - (-24^\circ\,48'\,40'') = 72^\circ\,17'\,53''.$$

Na záver urobíme kontrolu použitím *sínusovej vety*

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} &= \frac{\sin(64^\circ\,02'\,41'')}{\sin(64^\circ\,40'\,25'')} = 0,99475, \\
\frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} &= \frac{\sin(22^\circ\,40'\,33'')}{\sin(22^\circ\,48'\,09'')} = 0,99476, \\
\frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} &= \frac{\sin(72^\circ\,17'\,53'')}{\sin(106^\circ\,43'\,40'')} = 0,99475.
\end{aligned}$$

Príklad 108 Riešte ST, ktorý je určený dvoma stranami $a = 42^\circ\,05'\,43''$ a $b = 38^\circ\,46'\,41''$ a uhlom medzi nimi $\gamma = 25^\circ\,45'\,54''$. Dopočítajte jeho ostatné prvky.

Riešenie: Na úvod nakreslíme všeobecný ST s označením zadaných hodnôt.



Obr. 5.2.20. Príklad 108 - zadané prvky sú označené červenou farbou.

Začneme s výpočtom strany c a použijeme pritom *kosínusovú vetu pre strany*

$$\cos(c) = \cos(a)\cdot\cos(b) + \sin(a)\cdot\sin(b)\cos(\gamma)$$

a po dosadení známych hodnôt spočítame dĺžku strany c

$$\begin{aligned}
\cos(c) &= \cos(42^\circ\,05'\,43'')\cdot\cos(38^\circ\,46'\,41'') + \\
&+ \sin(42^\circ\,05'\,43'')\cdot\sin(38^\circ\,46'\,41'')\cdot\cos(25^\circ\,45'\,54'') = 0,57847 + 0,37811 = \\
&= 0,95658 \Rightarrow c = 16^\circ\,56'\,42''.
\end{aligned}$$

Ďalšie dva prvky budeme počítať súčasne použitím *Napierových analógii*

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) &= \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}\cdot\operatorname{cotan}\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{42^\circ\,05'\,43''-38^\circ\,46'\,41''}{2}\right)}{\cos\left(\frac{42^\circ\,05'\,43''+38^\circ\,46'\,41''}{2}\right)}\cdot\operatorname{cotan}\left(\frac{25^\circ\,45'\,54''}{2}\right) = \\
&= \frac{0,99958}{0,76112}\cdot 4,37237 = 5,74224 \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} = 80^\circ\,07'\,16'', \\
\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) &= \frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)}\cdot\operatorname{cotan}\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{42^\circ\,05'\,43''-38^\circ\,46'\,41''}{2}\right)}{\sin\left(\frac{42^\circ\,05'\,43''+38^\circ\,46'\,41''}{2}\right)}\cdot\operatorname{cotan}\left(\frac{25^\circ\,45'\,54''}{2}\right) = \\
&= \frac{0,02894}{0,64861}\cdot 4,37237 = 0,19509 \Rightarrow \frac{\alpha-\beta}{2} = 11^\circ\,02'\,21''.
\end{aligned}$$

Aby sme dostali hodnotu uhla α, musíme tieto dva čiastkové výsledky sčítať

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} = 80^\circ\,07'\,16'' + 11^\circ\,02'\,21'' = 91^\circ\,09'\,37''$$

a pre výpočet hodnoty uhla β hodnoty odčítať

$$\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} = 80^\circ\,07'\,16'' - 11^\circ\,02'\,21'' = 69^\circ\,04'\,55''.$$

Na záver urobíme kontrolu použitím *sínusovej vety*

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} &= \frac{\sin(42^\circ\,05'\,43'')}{\sin(91^\circ\,09'\,37'')} = 0,67050, \\
\frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} &= \frac{\sin(38^\circ\,46'\,41'')}{\sin(69^\circ\,04'\,55'')} = 0,67050, \\
\frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} &= \frac{\sin(16^\circ\,56'\,42'')}{\sin(25^\circ\,45'\,54'')} = 0,67050.
\end{aligned}$$

Príklad 109 Riešte ST, ktorý je daný stranou $a = 37^\circ\,02'\,10''$, priľahlým uhlom $\beta = 54^\circ\,42'\,23''$ a protiľahlým uhlom $\alpha = 71^\circ\,28'\,43''$. Dopočítajte jeho ostatné prvky.

Riešenie: Pri tomto type úlohy môžu nastať tieto tri prípady, ktoré vychádzajú so sínusovej vety

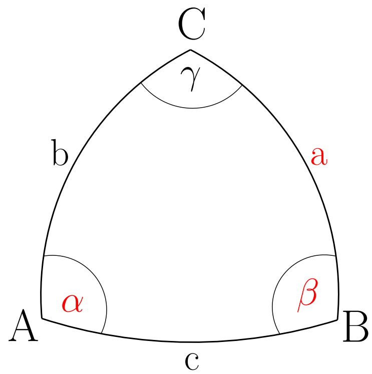
$$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} \Rightarrow \sin(b) = \frac{\sin(a)\cdot\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}:$$

a) $\sin(a)\cdot\sin(\beta) > \sin(\alpha) \Rightarrow \sin(b) > 1 \Rightarrow$ ST neexistuje,

b) $\sin(a)\cdot\sin(\beta) = \sin(\alpha) \Rightarrow \sin(b) = 1 \Rightarrow b = R$, jediné riešenie,

c) $\sin(a)\cdot\sin(\beta) < \sin(\alpha) \Rightarrow b_1, b_2 = 180^\circ - b_1$, k vyriešeniu musíme použiť b.

Aj v tomto príklade nakreslíme ST s označením zadaných hodnôt a začneme s výpočtom veľkosti strany b



Obr. 5.2.21. Príklad 109 - zadané prvky sú označené červenou farbou.

$$\sin(b) = \frac{\sin(a)\cdot\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(37^\circ\,02'\,10'')\cdot\sin(54^\circ\,42'\,23'')}{\sin(71^\circ\,28'\,43'')} = \frac{0,49161}{0,94821} = 0,51847.$$

Dostávame $b_1 = 31^\circ\,13'\,46''$ a $b_2 = 180^\circ - b_1 = 148^\circ 46'\,14''$. Použitím pravidla *oproti menšiemu uhlu leží menšia strana* dostávame

$$\beta < \alpha \ \Rightarrow\ b < a \ \Rightarrow\ b_1 = b = 31^\circ\,13'\,46''.$$

Ako vidíme z možnosti c) ďalšie riešenie príkladu nie je možné bez použitia už vypočítanej strany b. Toto je prípad, kedy pri riešení musíme použiť nami vypočítanú hodnotu. Na výpočet strany c a uhla γ použijeme *Napierové analógie* a pre jednoznačnosť riešenia si vyberieme vzorce obsahujúce kosínus. Ako prvú vypočítame stranu c

$$\tan\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\cdot\tan\left(\frac{c}{2}\right) \Rightarrow \tan\left(\frac{c}{2}\right) = \tan\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)},$$

podľa vzorca vypočítame iba polovičnú hodnotu strany c, a preto treba na to pamätať pri výpočte

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{c}{2}\right) &= \tan\left(\frac{37^\circ\,02'\,10''+31^\circ\,13'\,45''}{2}\right)\cdot\frac{\cos\left(\frac{71^\circ\,28'\,43''+54^\circ\,42'\,23''}{2}\right)}{\cos\left(\frac{71^\circ\,28'\,43''-54^\circ\,42'\,23''}{2}\right)} = \\ &= 0,67788\cdot\frac{0,45255}{0,98931} = 0,31009 \Rightarrow \frac{c}{2} = 17^\circ\,13'\,41'' \Rightarrow c = 34^\circ\,27'\,22''.\end{aligned}$$

Rovnako budeme postupovať aj pri výpočte uhla γ

$$\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} \cdot \mathrm{cotan}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Rightarrow \mathrm{cotan}\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}.$$

Teraz už len dosadíme známe hodnoty

$$\begin{aligned} \mathrm{cotan}\left(\frac{\gamma}{2}\right) &= \tan\left(\frac{71^\circ\,28'\,43'' + 54^\circ\,42'\,23''}{2}\right) \cdot \frac{\cos\left(\frac{37^\circ\,02'\,10'' + 31^\circ\,13'\,45''}{2}\right)}{\cos\left(\frac{37^\circ\,02'\,10'' - 31^\circ\,13'\,45''}{2}\right)} = \\ &= 1,97047 \cdot \frac{0.82774}{0,99872} = 1,63402 \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = 31^\circ\,27'\,58'' \Rightarrow \gamma = 62^\circ\,55'\,56''. \end{aligned}$$

Na záver urobíme kontrolu použitím *sínusovej vety*

$$\begin{aligned} \frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} &= \frac{\sin(37^\circ\,02'\,10'')}{\sin(71^\circ\,28'\,43'')} = 0,63522, \\ \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} &= \frac{\sin(31^\circ\,13'\,46'')}{\sin(54^\circ\,42'\,23'')} = 0,63522, \\ \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} &= \frac{\sin(34^\circ\,27'\,22'')}{\sin(62^\circ\,55'\,56'')} = 0,63527. \end{aligned}$$

Ako vidíme táto chyba je väčšia, ale i tak môžeme náš výpočet považovať za správny pri použití presnosti na päť desatinných miest.

Príklad 110 Riešte ST, ktorý je daný dvomi stranami $a = 83^\circ\,12'\,35''$ a $b = 73^\circ\,12'\,53''$, $(a > b)$ a uhlom protiľahlým k väčšej z nich $\alpha = 21^\circ\,27'\,28''$. Dopočítajte jeho ostatné prvky.

Riešenie: V tomto príklade na úvod rozoberieme podmienky existencie všeobecného ST. Podobe ako v predchádzajúcom príklade použijeme *sínusovú vetu*, ale tentokrát bude našou neznámou uhol β

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} \Rightarrow \sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha)\cdot\sin(b)}{\sin(a)}.$$

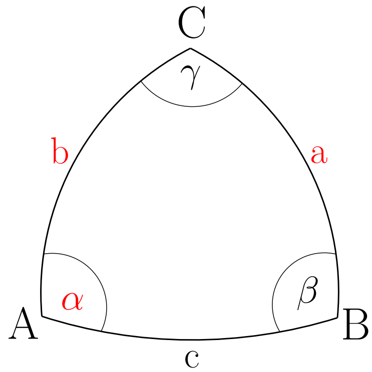
Rovnako môžu nastať tri prípady

a) $\sin(\alpha)\cdot\sin(b) > \sin(a) \Rightarrow \sin(\beta) > 1 \Rightarrow$ ST neexistuje,

b) $\sin(\alpha)\cdot\sin(b) = \sin(a) \Rightarrow \sin(\beta) = 1 \Rightarrow b = R$, jediné riešenie,

c) $\sin(\alpha)\cdot\sin(b) < \sin(a) \Rightarrow \beta_1, \beta_2 = 180^\circ - b_1$, k vyriešeniu musíme použiť β.

Nakreslíme všeobecný ST s označením zadaných hodnôt a začneme s výpočtom veľkosti uhla β.



Obr. 5.2.22. Príklad 110 - zadané prvky sú označené červenou farbou.

$$\sin(\beta) = \frac{\sin(\alpha)\cdot\sin(b)}{\sin(a)} = \frac{\sin(21^\circ\,27'\,28'')\cdot\sin(73^\circ\,12'\,53'')}{\sin(83^\circ\,12'\,35'')} = \frac{0,35023}{0,99329} = 0,35259.$$

Dostávame dve riešenia $\beta_1 = 20^\circ\,38'\,46''$ a $\beta_2 = 180^\circ - b_1 = 159^\circ 21'\,14''$. Použitím pravidla *oproti menšej strane leží menší uhol* dostávame

$$b < a \;\Rightarrow\; \beta < \alpha \;\Rightarrow\; \beta_1 = \beta = 20^\circ\,38'\,46''.$$

Zostáva nám vypočítať veľkosť strany c a uhla γ. Pretože platí bod c) budeme k výpočtu používať vypočítaný uhol β a použijeme *Napierové analógie* rovnako ako v predchádzajúcom príklade. Začneme s výpočtom veľkosti strany c

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{c}{2}\right) &= \tan\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \\
&= \tan\left(\frac{83^\circ\,12'\,35'' + 73^\circ\,12'\,53''}{2}\right)\cdot\frac{\cos\left(\frac{21^\circ\,27'\,28''+20^\circ\,38'\,46''}{2}\right)}{\cos\left(\frac{21^\circ\,27'\,28''-20^\circ\,38'\,46''}{2}\right)} = \\
&= 4,82340\cdot\frac{0,93326}{0,99997} = 4,50162 \Rightarrow \frac{c}{2} = 77^\circ\,28'\,32'' \Rightarrow c = 154^\circ\,57'\,04''.
\end{aligned}$$

Rovnako budeme postupovať aj pri výpočte uhla γ

$$\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}\cdot\operatorname{cotan}\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{cotan}\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\frac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotan}\left(\frac{\gamma}{2}\right) &= \tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\frac{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)} \\
&= \tan\left(\frac{21^\circ\,27'\,28''+20^\circ\,38'\,46''}{2}\right)\cdot\frac{\cos\left(\frac{83^\circ\,12'\,35''+73^\circ\,12'\,53''}{2}\right)}{\cos\left(\frac{83^\circ\,12'\,35''-73^\circ\,12'\,53''}{2}\right)} = \\
&= 0,38490\cdot\frac{0,20301}{0,99608} = 0,07845 \Rightarrow \frac{\gamma}{2} = 85^\circ\,30'\,52'' \Rightarrow \gamma = 171^\circ\,01'\,44''.
\end{aligned}$$

Na záver urobíme kontrolu použitím *sínusovej vety*

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} &= \frac{\sin(83^\circ\,12'\,35'')}{\sin(21^\circ\,27'\,28'')} = 2,71528, \\
\frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} &= \frac{\sin(73^\circ\,12'\,53'')}{\sin(20^\circ\,38'\,46'')} = 2,71528, \\
\frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)} &= \frac{\sin(154^\circ\,57'\,04'')}{\sin(171^\circ\,01'\,44'')} = 2,71524.
\end{aligned}$$

V tomto príklade sme sa dopustili malej chyby. Pokiaľ ale chyba nebude vyššia ako 10^{-4}, nie je potrebné príklad znovu prepočítavať s vyššou presnosťou ako na päť desatinných miest.

5.3 Úlohy na precvičenie

Úloha 18 Riešte pravouhlý ST ak $\gamma = R = 90°$.

a) Ak existuje pravouhlý ST, ktorý je určený odvesnou $a = 10° \, 32' \, 00''$ a priľahlým uhlom $\beta = 12° \, 03' \, 00''$, dopočítajte jeho ostatné základné prvky. .... [$b = 2° \, 14' \, 05''$, $c = 10° \, 45' \, 55''$, $\alpha = 78° \, 09' \, 55''$]

b) Ak existuje pravouhlý ST, ktorý je určený odvesnou $b = 21° \, 39' \, 00''$ a k nej protiľahlým uhlom $\beta = 42° \, 10' \, 00''$, dopočítajte jeho ostatné základné prvky. ....
Prvé riešenie .... [$a_1 = 25° \, 59' \, 38''$, $c_1 = 33° \, 20' \, 21''$, $\alpha_1 = 52° \, 53' \, 15''$]
Druhé riešenie .... [$a_2 = 154° \, 0' \, 22''$, $c_2 = 146° \, 39' \, 39''$, $\alpha_2 = 127° \, 06' \, 45''$]

c) Ak existuje pravouhlý ST, ktorý je určený odvesnou $a = 42° \, 12' \, 00''$ a preponou $c = 64° \, 40' \, 00''$, dopočítajte jeho ostatné základné prvky. .... [$b = 54° \, 43' \, 07''$, $\alpha = 48° \, 0' \, 14''$, $\beta = 64° \, 34' \, 45''$]

d) Ak existuje pravouhlý ST, ktorý je určený preponou $c = 69° \, 25' \, 00''$ a priľahlým uhlom $\alpha = 54° \, 54' \, 00''$, dopočítajte jeho ostatné základné prvky. .... [$a = 49° \, 59' \, 20''$, $b = 56° \, 51' \, 03''$, $\beta = 63° \, 25' \, 27''$]

e) Ak existuje pravouhlý ST, ktorý je určený odvesnou $b = 46° \, 45' \, 00''$ a k nej protiľahlým uhlom $\beta = 59° \, 12' \, 00''$, dopočítajte jeho ostatné základné prvky. ....
Prvé riešenie .... [$a_1 = 39° \, 19' \, 23''$, $c_1 = 57° \, 59' \, 29''$, $\alpha_1 = 48° \, 21' \, 28''$]
Druhé riešenie .... [$a_2 = 140° \, 40' \, 37''$, $c_2 = 122° \, 0' \, 31''$, $\alpha_2 = 131° \, 38' \, 32''$]

f) Ak existuje pravouhlý ST, ktorý je určený preponou $c = 66° \, 52' \, 04''$ a priľahlým uhlom $\alpha = 57° \, 45' \, 20''$, dopočítajte jeho ostatné základné prvky. .... [$a = 51° \, 03' \, 28''$, $b = 51° \, 18' \, 56''$, $\beta = 58° \, 05' \, 12''$]

g) Ak existuje pravouhlý ST, ktorý je určený odvesnou $b = 56° \, 55' \, 00''$ a k nej protiľahlým uhlom $\beta = 69° \, 21' \, 12''$, dopočítajte jeho ostatné základné prvky. ....
Prvé riešenie .... [$a_1 = 35° \, 20' \, 13''$, $c_1 = 63° \, 33' \, 29''$, $\alpha_1 = 40° \, 14' \, 16''$]
Druhé riešenie .... [$a_2 = 144° \, 39' \, 47''$, $c_2 = 116° \, 26' \, 31''$, $\alpha_2 = 139° \, 45' \, 44''$]

Úloha 19 Riešte všeobecný ST:

a) Nech sú dané duté uhly $a = 72^\circ\, 16'\, 00''$, $\beta = 54^\circ\, 18'\, 00''$, $\gamma = 56^\circ\, 47'\, 00''$. Ak existuje sférický trojuholník so stranou a a uhlami β, γ, vypočítajte jeho ostatné základné prvky. .... $[b = 51^\circ\, 07'\, 11'',\ c = 53^\circ\, 19'\, 06'',\ \alpha = 96^\circ\, 28'\, 22'']$

b) Nech sú dané duté uhly $a = 39^\circ\, 20'\, 14''$, $b = 112^\circ\, 16'\, 30''$ a $\gamma = 54^\circ\, 39'\, 49''$. Ak existuje sférický trojuholník so stranami a, b a uhlom γ, vypočítajte jeho ostatné základné prvky. .... $[c = 87^\circ\, 21'\, 29'',\ \alpha = 31^\circ\, 10'\, 30'',\ \beta = 130^\circ\, 54'\, 49'']$

c) Nech sú dané duté uhly $\alpha = 57^\circ\, 16'\, 01''$, $\beta = 75^\circ\, 18'\, 30''$ a $c = 35^\circ\, 20'\, 19''$. Ak existuje sférický trojuholník so stranou c a uhlami α a β, vypočítajte jeho ostatné základné prvky. .... $[a = 34^\circ\, 54'\, 53'',\ b = 41^\circ\, 09'\, 35'',\ \gamma = 58^\circ\, 13'\, 18'']$

d) Nech sú dané duté uhly $\alpha = 75^\circ\, 14'\, 20''$, $\beta = 95^\circ\, 25'\, 30''$, $\gamma = 105^\circ\, 36'\, 40''$. Ak existuje sférický trojuholník s uhlami α, β, γ, vypočítajte jeho strany. .... $[a = 73^\circ\, 00'\, 21'',\ b = 100^\circ\, 05'\, 12'',\ c = 107^\circ\, 43'\, 55'']$

e) Nech sú dané duté uhly $a = 53^\circ\, 15'\, 00''$, $b = 81^\circ\, 11'\, 00''$, $c = 115^\circ\, 29'\, 00''$. Ak existuje sférický trojuholník so stranami a, b, c, vypočítajte jeho uhly. .... $[\alpha = 41^\circ\, 52'\, 12'',\ \beta = 55^\circ\, 24'\, 07'',\ \gamma = 131^\circ\, 14'\, 24'']$

f) Nech sú dané duté uhly $a = 112^\circ\, 32'\, 12''$, $\alpha = 73^\circ\, 35'\, 12''$, $\beta = 60^\circ\, 44'\, 00''$. Ak existuje sférický trojuholník so stranou a a uhlami α, β vypočítajte jeho ostatné základné prvky. .... $[b = 57^\circ\, 08'\, 12'',\ c = 104^\circ\, 16'\, 54'',\ \gamma = 96^\circ\, 28'\, 04'']$

g) Nech sú dané duté uhly $a = 57^\circ\, 13'\, 41''$, $b = 74^\circ\, 16'\, 34''$, $\alpha = 40^\circ\, 15'\, 18''$. Ak existuje sférický trojuholník so stranami a, b a uhlom α, vypočítajte jeho ostatné základné prvky. .... $[c = 13^\circ\, 41'\, 10'',\ \beta = 47^\circ\, 42'\, 38'',\ \gamma = 125^\circ\, 41'\, 10'']$

Kapitola 6

Prílohy

6.1 Príloha č. 1 - Derivácie elementárnych funkcií

1. $(c)' = 0$
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$, kde a je ľubovoľné reálne číslo
3. $(a^x)' = a^x \ln a$, kde $a > 0,\ a \neq 1$
4. $(e^x)' = e^x$
5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, kde $a > 0,\ a \neq 1$
6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
7. $(\sin x)' = \cos x$
8. $(\cos x)' = -\sin x$
9. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10. $(\mathrm{cotan}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$
12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$
13. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
14. $(\mathrm{arccot}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

6.2 Príloha č. 2 - Integračné vzorce

1. $\int x^a \, \mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$, ak $a \in \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.
2. $\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + c$.
3. $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + c$.
4. $\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$, ak $a \in (0,1) \cup (1,\infty)$.
5. $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + c$,
6. $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + c$.
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \tan x + c$,
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{cotan} x + c$.
9. $\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \begin{cases} \operatorname{arctan} x + c \\ -\operatorname{arccot} x + c. \end{cases}$
10. $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$.
11. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ -\arccos x + c. \end{cases}$
12. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + c$.
13. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c$.

6.3 Príloha č. 3 - Diferenciálna geometria kriviek

Oskulačná rovina krivky K: $\tau : (X - \mathbf{P}(t)) \cdot (\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) = 0,$

Normálová rovina krivky K: $\nu : (X - \mathbf{P}(t)) \cdot \dot{\mathbf{P}}(t) = 0,$

Rektifikačná rovina krivky K: $\mu : (X - \mathbf{P}(t)) \cdot ((\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) \times \dot{\mathbf{P}}(t)) = 0,$

kde $X = [x, y, z]$ je bod na krivke K.

Dotyčnica krivky K: $d = \mathbf{P}(t) + \lambda\dot{\mathbf{P}}(t)$, $\lambda \in R$

Hlavná normála krivky K: $n = \mathbf{P}(t) + \lambda((\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) \times \dot{\mathbf{P}}(t))$

Binormála krivky K: $b = \mathbf{P}(t) + \lambda(\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t))$

Prvá krivosť krivky K (flexia):

$$\kappa^2(t) = \frac{|\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}t|^2}{(\dot{\mathbf{P}}(t) \cdot \dot{\mathbf{P}}(t))^3},$$

Druhá krivosť krivky K (torzia):

$$\tau(t) = \frac{(\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)) \cdot \dddot{\mathbf{P}}(t)}{|\dot{\mathbf{P}}(t) \times \ddot{\mathbf{P}}(t)|^2}.$$

Polomer krivosti

$$R(t) = \frac{1}{\kappa(t)}.$$

6.4 Príloha č. 4 - Diferenciálna geometria plôch

Vektorová rovnica plochy σ: $\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$,

Explicitná rovnica plochy σ: $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$,

Implicitná rovnica plochy σ: $F(x,y,z) = 0$.

Dotyková rovina plochy σ v bode P:

pre vektorovú rovnicu plochy: $(X-P)\cdot(\mathbf{r}_u(P)\times\mathbf{r}_v(P)) = 0$,

pre implicitnú rovnicu plochy: $(X-P)\cdot\nabla F(P) = 0$,

kde $X = [x,y,z]$ je bod na ploche σ, $\mathbf{r}_u = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}$ a $\mathbf{r}_v = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}$,
$\nabla F = \left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}, \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y}, \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z}\right)$.

Normálová rovina plochy σ v bode P:

pre vektorovú rovnicu plochy: $X = P + \lambda(\mathbf{r}_u(P)\times\mathbf{r}_v(P)), \quad \lambda \in R$,

pre implicitnú rovnicu plochy: $X = P + \lambda\nabla F(P)$.

Prvá základná forma plochy σ: $\varphi_1 = E(\mathrm{d}u)^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G(\mathrm{d}v)^2$,

$$\text{kde}\quad E = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_u, \quad F = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{r}_u\cdot\mathbf{r}_v,$$
$$G\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{r}_v\cdot\mathbf{r}_v.$$

Jednotkovým vektorom normály plochy σ $\mathbf{n}_\sigma(u,v) = \frac{\mathbf{r}_u(u,v)\times\mathbf{r}_v(u,v)}{|\mathbf{r}_u(u,v)\times\mathbf{r}_v(u,v)|} \neq 0$ v bode $P(u,v)$.

Druhá základná forma plochy σ: $\varphi_2 = L(\mathrm{d}u)^2 + 2M\mathrm{d}u\mathrm{d}v + N(\mathrm{d}v)^2$,

$$\text{kde}\quad L = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u^2}\cdot\mathbf{n}_\sigma = \mathbf{r}_{uu}\cdot\mathbf{n}_\sigma, \quad M = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial u\partial v} = \mathbf{r}_{uv}\cdot\mathbf{n}_\sigma,$$
$$N = \frac{\partial^2\mathbf{r}}{\partial v^2} = \mathbf{r}_{vv}\cdot\mathbf{n}_\sigma.$$

Normálová krivosť krivky K na ploche σ: $\kappa_n = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$.

Geodetická krivosť krivky

$K(t) = (x(u(t),v(t)); y(u(t),v(t)); z(u(t),v(t)))$ na ploche σ v bode P: $\kappa_g = \frac{\mathbf{n}_\sigma(P)\times\dot{r}}{|\dot{r}|^3}\cdot\ddot{r}$,

kde $\dot{r} = \dot{r}(u(t),v(t)) = \mathbf{r}_u\dot{u} + \mathbf{r}_v\dot{v}$,

$\ddot{r} = \ddot{r}(u(t),v(t)) = \mathbf{r}_{uu}(\dot{u})^2 + 2\mathbf{r}_{uv}\dot{u}\dot{v} + \mathbf{r}_{vv}(\dot{v})^2 + \mathbf{r}_u\ddot{u} + \mathbf{r}_v\ddot{v}$.

6.5 Príloha č. 5 - Sférická trigonometria

Sférická sínusová veta:

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\gamma)}.$$

Sférické kosínusové vety:

$$\begin{aligned}
\cos(a) &= \cos(b)\cdot\cos(c) + \sin(b)\cdot\sin(c)\cdot\cos(\alpha),\\
\cos(b) &= \cos(c)\cdot\cos(a) + \sin(c)\cdot\sin(a)\cos(\beta),\\
\cos(c) &= \cos(a)\cdot\cos(b) + \sin(a)\cdot\sin(b)\cos(\gamma).\\
\cos(\alpha) &= -\cos(\beta)\cdot\cos(\gamma) + \sin(\beta)\cdot\sin(\gamma)\cdot\cos(a)\\
\cos(\beta) &= -\cos(\gamma)\cdot\cos(\alpha) + \sin(\gamma)\cdot\sin(\alpha)\cos(b),\\
\cos(\gamma) &= -\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)\cos(c).
\end{aligned}$$

Sférické sínus-kosínusové vety:

$$\cos(a)\cdot\sin(b) = \sin(a)\cdot\cos(b)\cdot\cos(\gamma) + \sin(c)\cdot\cos(\alpha),$$
$$\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) = -\sin(\alpha)\cdot\cos(a)\cdot\cos(c) + \sin(\gamma)\cdot\cos(a)$$

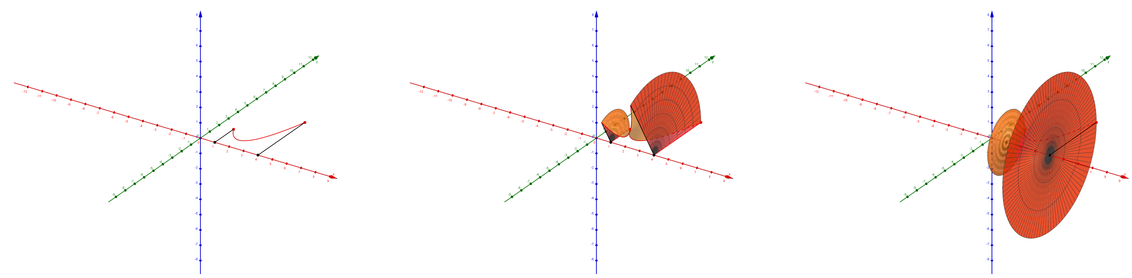
a ostatné cyklické rovnosti.

Napierové analógie:

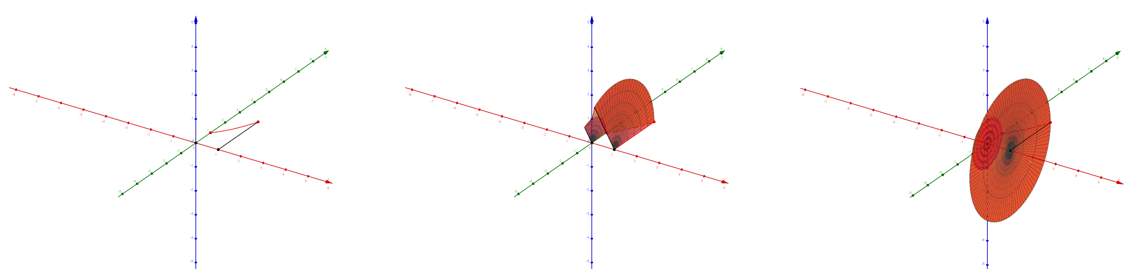
$$\tan\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}\cdot\cot\left(\tfrac{\gamma}{2}\right), \quad \tan\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)}\cdot\cot\left(\tfrac{\gamma}{2}\right),$$
$$\tan\left(\tfrac{a+b}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\cdot\tan\left(\tfrac{c}{2}\right), \quad \tan\left(\tfrac{a-b}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\cdot\tan\left(\tfrac{c}{2}\right)$$

a ostatné cyklické rovnosti.

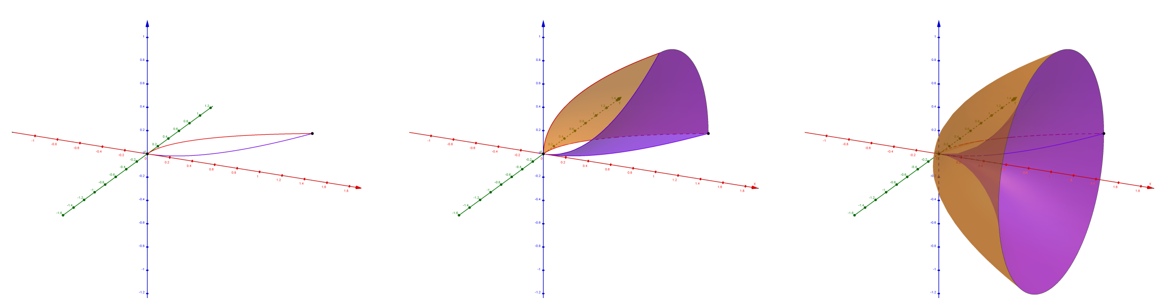
6.6 Príloha č. 6 - Zobrazenie rotačných telies z Kapitoly 1



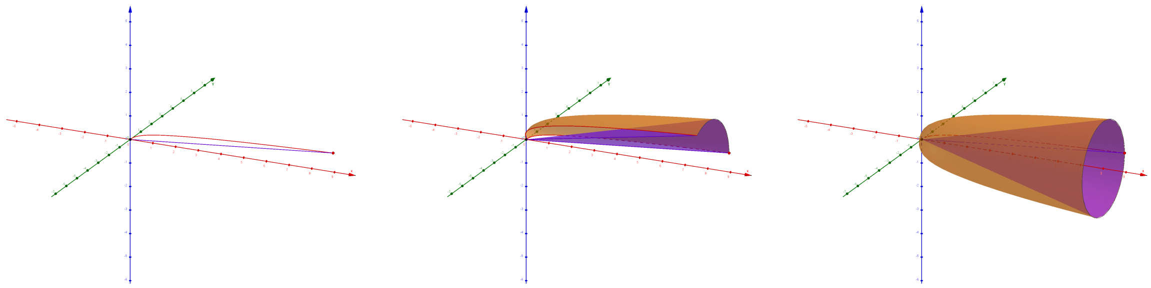
Obr. 6.6.1. Príklad č. 25: Oblasť ohraničená grafom funkcie $f(x) = x^2 - 4x + 5$, osou o_x a priamkami $x = 1$ a $x = 4$; rotácia okolo o_x.



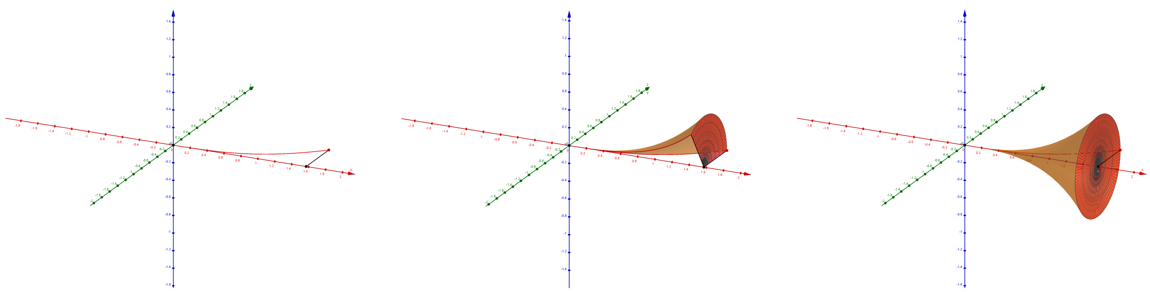
Obr. 6.6.2. Príklad č. 26: Oblasť ohraničená grafom funkcie $f(x) = e^x$, osou o_x a priamkami $x = 0$ a $x = 1$; rotácia okolo o_x.



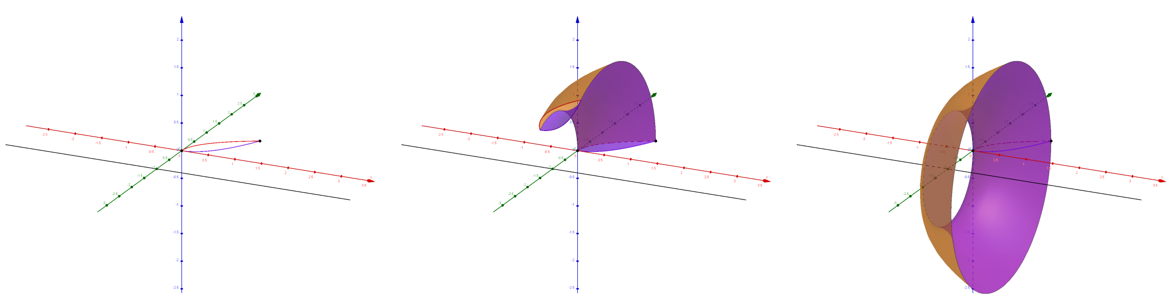
Obr. 6.6.3. Príklad č. 27: Oblasť ohraničená grafmi funkcií $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = x^2$; rotácia okolo o_x.



Obr. 6.6.4. Príklad č. 28: Oblasť ohraničená grafmi funkcií $f(x) = \sqrt[3]{x}$ a $g(x) = \frac{x}{4}$ pre $x \in \langle 0, 8 \rangle$; rotácia okolo o_x.



Obr. 6.6.5. Príklad č. 29: Oblasť ohraničená grafom funkcie $f(x) = x - \sin(x)$ a priamkami $y = 0$ v intervale $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$; rotácia okolo o_x.



Obr. 6.6.6. Príklad č. 30: Oblasť ohraničená grafmi funkcií $f(x) = \sqrt{x}$ a $g(x) = x^2$; rotácia okolo priamky $y = -1$.

Literatúra

[1] Barret O.: Elementary differential geometry. San Diego: Academic Press, 1997. 482 s. ISBN 0-12-526745-2.

[2] Budinský B.: Analytická a diferenciální geometrie. SNTL, Praha, 1983. 296 s.

[3] Eliaš J., Horváth J., Kajan J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky: 2.časť. (7. vydanie). Alfa, Bratislava, 1995. 320 s. ISBN 80-227-0742-2.

[4] Hohenwarter M., Borcherds M., Ancsin G., Bencze B., Blossier M., Éliás J., Frank K., Gál L., Hofstätter A., Jordan F., Konečný Z., Kovács Z., Lettner E., Lizelfelner S., Parisse B., Solyom-Gecse C., Stadlbauer C., Tomaschko M.: GeoGebra 5.0.507.0, http://www.geogebra.org/ 2018.

[5] Ivan J.: Matematika 2. Alfa, Bratislava, 1989. 631 s. ISBN 80-05-00114-2.

[6] Kalina M.: Matematika. Nakladateľstvo STU, Bratislava, 2012. 297 s. ISBN 978-80-227-3655-8.

[7] Kálnová G., Handlovičová A., Mišík L., Širáň J.: Riešené úlohy z matematiky II. Nakladateľstvo STU, Bratislava, 2000. 186 s. ISBN 80-227-1344-9.

[8] Kluvánek I., Mišík L., Švec J.: Matematika 2 pre štúdium technických vied. Alfa, Bratislava, 1970. 815 s.

[9] Košuk K.: Matematika. Sférická trigonometria. SVŠT, Bratislava, 1986. 168 s.

[10] Košuk K.: Matematika: Zbierka úloh zo sférickej trigonometrie. SVŠT, Bratislava, 1984. 85 s.

[11] Kubáček Z., Valášek J.: Cvičenia z matematickej analýzy II. UK Bratislava, 1994. http://www.iam.fmph.uniba.sk/skripta/kubacek/

[12] MATLAB version 2018 b. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2018.

[13] Švec J., Mišík L., Kluvánek I.: Matematika 1 pre štúdium technických vied. Alfa, Bratislava, 1971. 758 s.

[14] Umehara M., Yamada K.: Differential Geometry of Curves and Surfaces. New Jersey World Scientific, USA, 2017. 312 s. ISBN 978-981-4740-24-1.