Pravidlá pre počítanie limít

V pravidlách 8 až 14 symboly 0, $a \in \mathbb{R}$ a $\pm\infty$ označujú len **typy limít**. To znamená, že zastupujú nejakú funkciu, ktorej limita v bode x_0 má uvedenú hodnotu, t.j. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, alebo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$. Hodnoty $\pm\infty$ nie sú reálne čísla a v žiadnom prípade sa s nimi nesmú robiť aritmetické operácie tak, ako sme zvyknutí ich robiť s reálnymi číslami.

1. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \infty$
3. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$
4. $\lim\limits_{x\to \infty} x^a = 0$, ak $a < 0$
5. $\lim\limits_{x\to \infty} x^a = \infty$, ak $a > 0$
6. $\lim\limits_{x\to \infty} a^x = 0$, ak $|a| < 1$
7. $\lim\limits_{x\to \infty} a^x = \infty$, ak $a > 1$
8. $0 . a = 0$ $\leftarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$
9. $\infty + \infty = \infty$ $\leftarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} x = \infty$
10. $\infty \cdot \infty = \infty$
11. $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$
12. $a \cdot \infty = \infty$, ak $a > 0$
13. $a \cdot \infty = -\infty$, ak $a < 0$
14. $\dfrac{1}{\pm\infty} = 0$

Niektoré dôležité limity funkcií:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a\,,$ pre $a > 0$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a,$ pre $a \in \mathbb{R}$

5. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p\,,$ pre $p \in \mathbb{R}$

6. $\lim\limits_{x\to 0^+} x \log_a x = 0\,,$ pre $a > 0, \ \ a \neq 1$

7. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0\,,$ pre $n \in \mathbb{N}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0\,,$ pre $a > 0, \ \ a \neq 1$

9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log_a(x+1)}{x} = \frac{1}{\ln a},$
   pre $a > 0, \ \ a \neq 1$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

11. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

12. $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x}} = \sqrt{2}$

1. K ľubovoľnému okoliu U čísla 3, nájdite také okolie V čísla 5, aby platilo $\forall x \in V \Rightarrow \frac{x+4}{3} \in U$.

$U = (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$ $\quad \varepsilon > 0$

$V = (5-\delta, 5+\delta)$ $\quad \delta > 0$

$V = (5-\underset{\delta}{3\varepsilon}, 5+3\varepsilon)$

$3-\varepsilon < \frac{x+4}{3} < 3+\varepsilon \quad /\cdot 3$

$9-3\varepsilon < x+4 < 9+3\varepsilon \quad /-4$

$5-3\varepsilon < x < 5+3\varepsilon$

Pre $\forall \varepsilon > 0$ až $\delta = 3\varepsilon$

$U = (3-\varepsilon, 3+\varepsilon)$

$V = (5-\delta, 5+\delta)$

2. Dokážte, že platí: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in (2-\delta, 2+\delta) \Rightarrow \frac{x^2-4}{x-2} \in (4-\varepsilon, 4+\varepsilon)$

$4-\varepsilon < \frac{x^2-4}{x-2} < 4+\varepsilon$

ak $x \neq 2$:

$4-\varepsilon < \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} < 4+\varepsilon$

$4-\varepsilon < x+2 < 4+\varepsilon \quad /-2$

$2-\varepsilon < x < 2+\varepsilon$

$\delta = \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \varepsilon > 0$

3. Vypočítajte limitu: $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$.

$$\lim_{x\to 2} \underbrace{\frac{x^2-2x}{x^2-4}}_{f} = \lim_{x\to 2} \frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x\to 2} \underbrace{\frac{x}{x+2}}_{g} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$D(f) = R - \{-2, 2\}$

$D(g) = R - \{-2\}$

4. Vypočítajte limitu: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}}_{=1} = \lim_{x\to 1} = \frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(\cdots)} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

5. Vypočítajte limitu: $\lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

$\nearrow 0 \qquad \nearrow$ ohr. funkcia

$\lim_{x\to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \underline{\underline{0}}$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$\nearrow 0 \qquad \nearrow$ ohraničená

$\lim_{x\to a} g(x) \cdot f(x) = 0$

6. Vypočítajte limitu: $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{\sqrt{x-2}}_{f}^{\nearrow\infty}-\underbrace{\sqrt{x}}_{g}^{\nearrow\infty}\right)\cdot\overbrace{\frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}}^{=1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-2-x}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\underbrace{\sqrt{x-2}}_{\infty}+\underbrace{\sqrt{x}}_{\infty}}=\underline{\underline{0}}$$

$$\underbrace{\infty+\infty}_{\infty}$$

$$\frac{a}{\infty}=0$$