

MATEMATIKA I, II

RIEŠENÉ PRÍKLADY

KATARÍNA TROKANOVÁ

MATEMATIKA I, II

RIEŠENÉ PRÍKLADY

KATARÍNA TROKANOVÁ

Všetky práva vyhradené. Nijaká časť textu nesmie byť použitá na ďalšie šírenie akoukoľvek formou bez predchádzajúceho súhlasu autorov alebo nakladateľstva.

© doc. RNDr. Katarína Trokanová, PhD.

Recenzenti: RNDr. Milan Jasem, CSc.
doc. RNDr. Milan Paštéka, CSc.

Schválila Edičná rada Stavebnej fakulty STU v Bratislave.

ISBN 978-80-227-3943-6

P R E D H O V O R

Táto zbierka je určená poslucháčom prvého ročníka Stavebnej fakulty STU v Bratislave. Obsahuje vzorové príklady, úlohy na samostatné riešenie s výsledkami, určené na pochopenie a precvičenie látky, ktorá je obsahom predmetu Matematika I a II v prvom a druhom semestri bakalárskeho štúdia. Úlohy v zbierke zohľadňujú potreby štúdia chémie a fyziky a zodpovedajú približne náročnosti požiadaviek na skúškach. Výsledky úloh sú uvedené na konci každej podkapitoly.

Posledná kapitola obsahuje základné vzorce na výpočet derivácií a neurčitých integrálov. V týchto skriptách je množina všetkých prirodzených čísel označovaná symbolom N , množina všetkých celých čísel symbolom Z a množina všetkých reálnych čísel symbolom R .

Autorka

1 ZIMNÝ SEMESTER

1.1 Sústava m lineárnych rovníc o n neznámych.

Príklad 1.1.1

Gaussovou eliminačnou metódou nájdite všetky riešenia sústavy lineárnych rovníc

$$-2x_2 + x_3 + 2x_4 + 10 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 3x_4 - 4 = 0$$

$$x_1 + 3x_2 - x_3 - 18 = 0$$

$$x_1 + x_2 + 2x_4 - 8 = 0$$

Riešenie.

K danej sústave vytvoríme maticu sústavy A a rozšírenú maticu sústavy A' , ktorú upravíme na trojuholníkový tvar pomocou elementárnych riadkových úprav.

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 1 & 2 & -10 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 18 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -10 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 18 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{cc} (-1) & (-1) \\ \downarrow & \downarrow \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{c} (1) \\ \downarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{c} (-1) \\ \downarrow \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \triangle \text{ tvar.}$$

Takto upravenú rozšírenú maticu sústavy prepíšeme naspäť do rovníc.

$$\begin{array}{rrrrrr} x_1 & + & x_2 & & + & 3x_4 & = & 4 \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -10 \\ & & & & - & x_4 & = & 4 \end{array}$$

		Správne upravená matica na Δ tvar	3
Nájďme hodnotu matice A'	$h(A') =$	3 je počet nenulových riadkov v matici A' upravenej na Δ tvar	0,25
Nájďme hodnotu matice A	$h(A) =$	3 je počet nenulových riadkov v matici A upravenej na Δ tvar	0,25
Počet neznámych	$n =$	4	
Frobeniova veta	Ak $h(A') = h(A) < n$,	tak sústava má	0,5
		nekonečne veľa riešení	0,5
Počet parametrov	$n - h(A) =$	$4 - 3 = 1 \Rightarrow$ zvolíme jednu neznámu ako parameter	
Zvolíme neznámu	$x_2 =$	a	0,5
Dosadíme do 3. rovnice	$x_4 =$	-4	0,5
Dosadíme do 2. rovnice	$x_2 =$ $x_4 =$ $-2x_2 + x_3 + 2x_4 = -10$	a -4 $-2a + x_3 + 2(-4) = -10 \Rightarrow$ $x_3 = 2a - 2$	0,5
Dosadíme do 1. rovnice	$x_3 =$ $x_2 =$ $x_4 =$ $x_1 + x_2 + 3x_4 = 4$	$2a - 2$ a -4 $x_1 + a + 3(-4) = 4 \Rightarrow x_1 = 16 - a$	0,5
Všeobecné riešenie sústavy	$(x_1, x_2, x_3, x_4) =$	$(16 - a, a, 2a - 2, -4) =$ $(16, 0, -2, -4) + (-1, 1, 2, 0)a, a \in R$	0,5 0,5
SPOLU			7

Príklad 1.1.2

Gaussovou eliminačnou metódou nájdite všetky riešenia sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned}2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 1 &= 0 \\x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - 2 &= 0 \\x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 - 10 &= 0\end{aligned}$$

Riešenie.

K danej sústave vytvoríme maticu sústavy A a rozšírenú maticu sústavy A' , ktorú upravíme na trojuholníkový tvar pomocou elementárnych riadkových úprav.

$$A' = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & 10 \end{array} \right) \begin{array}{cc} (-2) & (-1) \\ \downarrow & \downarrow \\ & \downarrow \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & 8 \end{array} \right) \begin{array}{c} (1) \\ \downarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right) = \triangle \text{ tvar.}$$

		Správne upravená matica na $\triangle$ tvar	3
Nájdeme hodnotu matice A'	$h(A') =$	3 je počet nenulových riadkov v matici A' upravenej na $\triangle$ tvar	1
Nájdeme hodnotu matice A	$h(A) =$	2 je počet nenulových riadkov v matici A upravenej na $\triangle$ tvar	1
Frobeniova veta	Ak $h(A') \neq h(A)$,	tak sústava nemá riešenie	1
SPOLU			6

Príklad 1.1.3

Gaussovou eliminačnou metódou nájdite všetky riešenia sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned}5x + y - 3t + 18 &= 0 \\ x + 2y + 3z - t - 1 &= 0 \\ 2x + 2y + z - 3 &= 0 \\ y + z + t - 8 &= 0 \\ 3x + 3z + t - 5 &= 0\end{aligned}$$

Riešenie.

K danej sústave vytvoríme maticu sústavy A a rozšírenú maticu sústavy A' , ktorú upravíme na trojuholníkový tvar pomocou elementárnych riadkových úprav.

$$\begin{aligned}A' &= \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 1 & 0 & -3 & -18 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 & -3 & -18 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{ccc} (-5) & (-2) & (-3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & \downarrow & \downarrow \\ & & \downarrow \\ & & \downarrow \end{array} \sim \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -9 & -15 & 2 & -23 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -6 & -6 & 4 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{cc} \downarrow & \uparrow \\ \downarrow & \uparrow \\ \downarrow & \uparrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & -15 & 2 & -23 \\ 0 & -6 & -6 & 4 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{ccc} 2 & 9 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & \downarrow & \downarrow \\ & & \downarrow \end{array} \sim \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & -6 & 11 & 49 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 50 \end{array} \right) \begin{array}{c} -2 \\ \downarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 50 \end{array} \right) \begin{array}{c} \sim \\ \frac{1}{3} \end{array} \sim \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 50 \end{array} \right) \begin{array}{c} (-10) \\ \downarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \triangle \text{ tvar}\end{aligned}$$

Takto upravenú rozšírenú maticu sústavy prepíšeme naspäť do rovníc.

$$\begin{aligned}x + 2y + 3z - t &= 1 \\ y + z + t &= 8 \\ -3z + 4t &= 17 \\ t &= 5\end{aligned}$$

		Správne upravená matica na $\triangle$ tvar	3
Nájdeme hodnotu matice A'	$h(A') =$	4 je počet nenulových riadkov v matici A' upravenej na $\triangle$ tvar	0.25
Nájdeme hodnotu matice A	$h(A) =$	4 je počet nenulových riadkov v matici A upravenej na $\triangle$ tvar	0.25
Počet neznámych	$n =$	4	
Frobeniova veta	Ak $h(A') = h(A) = n$,	tak sústava má jediné riešenie	0.5
4. rovnica	$t =$	5	0.5
Dosadíme do 3. rovnice	$-3z + 4t = 17$	$-3z + 20 = 17 \Rightarrow z = 1$	0.5
Dosadíme do 2. rovnice	$z = 1$ $t = 5$ $y + z + t = 8$	$y + 1 + 5 = 8 \Rightarrow y = 2$	0.5
Dosadíme do 1. rovnice	$y = 2$ $z = 1$ $t = 5$ $x + 2y + 3z - t = 1$	$x + 4 + 3 - 5 = 1 \Rightarrow x = -1$	0.5
Riešenie sústavy	$(x, y, z, t) =$	$(-1, 2, 1, 5)$	1
SPOLU			7

1.1.3.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

Gaussovou eliminačnou metódou nájdite všetky riešenia sústavy lineárnych rovníc

a)
$$\begin{aligned} 3x - y &= -2 \\ -6x + 2y &= 4 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} -x + 2y &= 1 \\ 3x - 6y &= 2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 &= 4 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x - 2y + z - 2 &= 0 \\ x + 5y + 2z - 6 &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x - y + 2z - 3 &= 0 \\ 4x + 2y - z - 6 &= 0 \\ 2x + 4y - 5z &= 0 \\ -x - 3y + 4z - 1 &= 0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 26x_3 + 22x_4 &= 0 \\ x_1 - 8x_3 + 7x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} 3x + y + z &= 0 \\ x + y + 2z - 4 &= 0 \\ -x + y + 3z - 4 &= 0 \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 6 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 + x_5 - 3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 - 2 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 + 5x_4 - 9x_5 + 5 &= 0 \end{aligned}$$

Výsledky.

a) $(a, 3a + 2) = (0, 2) + (1, 3)a, a \in R;$

b) nemá riešenie;

c) $(1, -1, 2);$ d) $(-2, 0, 4);$ e) $(2 - a, -1 + 3a, 2a) = (2, -1, 0) + (-1, 3, 2)a, a \in R;$

f) $(8a - 7b, -6a + 5b, a, b) = (8, -6, 1, 0)a + (-7, 5, 0, 1)b, a, b \in R;$

g) nemá riešenie;

h) nemá riešenie.

1.1.3.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

Gaussovou eliminačnou metódou nájdite všetky riešenia sústavy lineárnych rovníc

a)
$$\begin{aligned} 5x - 2y - 4z &= 0 \\ 2x + y - z - 3 &= 0 \\ 4x - y - 3z - 1 &= 0 \\ x - 4y - 2z + 6 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 + 4x_4 + 2 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 - 3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 - 5 &= 0 \\ x_1 - 5x_3 + 3x_4 + 5 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 2y - z + 1 &= 0 \\ x + 2y - 3z - 1 &= 0 \\ 5x + 10y + 15z + 25 &= 0 \\ x + 2y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 2x - y + 4z + 5t - 2 &= 0 \\ 3y + 3t - 6 &= 0 \\ 2x - 4y + 4z + 2t + 4 &= 0 \\ 2x + 2y + 3z + 8t - 9 &= 0 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 5 &= 0 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 - 2 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 9 &= 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 - 4 &= 0 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} x_1 - x_3 - 3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 1 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 7 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x + y - 3z + 1 = 0 \\ \text{g)} \quad & 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ & x + y + z - 3 = 0 \\ & x + 2y - 3z - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 1 = 0 \\ \text{h)} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 - 7 = 0 \\ & x_1 - 8x_2 + 4x_3 + 2 = 0 \\ & 2x_2 - x_3 - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ \text{i)} \quad & 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 2 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 4x_4 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -3x - y + z + 2 = 0 \\ \text{j)} \quad & 2x + 3y + 5z + 3 = 0 \\ & -x + 2y + z - 5 = 0 \\ & x - y + z + 6 = 0 \end{aligned}$$

Výsledky.

- a) $(4 - 2a, a, 5 - 3a) = (4, 0, 5) + (-2, 1, -3)a, a \in R;$
b) $(-14 + 11a, 2, a, 3 - 2a) = (-14, 2, 0, 3) + (11, 0, 1, -2)a, a \in R;$
c) $(-2 - 2a, a, -1) = (-2, 0, -1) + (-2, 1, 0)a, a \in R;$
d) $(4 - 3a, 2 - a, -1, a) = (4, 2, -1, 0) + (-3, -1, 0, 1)a, a \in R;$
f) $(3 + a, -2, a) = (3, -2, 0) + (1, 0, 1)a, a \in R;$
g) nemá riešenie;
h) $(10, a, 2a - 3) = (10, 0, -3) + (0, 1, 2)a, a \in R;$
i) sústava nemá riešenie;
j) $(-1, 3, -2).$

1.1.3.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

Gaussovou eliminačnou metódou nájdite všetky riešenia sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} & 7x + 14y - 21z - 7 = 0 \\ \text{a)} \quad & x + 2y - 3z - 1 = 0 \\ & 5x + 10y + 15z - 5 = 0 \\ & 3x + 6y - 9z - 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2x + y + z + 2 = 0 \\ \text{b)} \quad & 3x + y - 2z = 0 \\ & -5x - 2y + z - 2 = 0 \\ & 11x + 4y - 5z + 2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3x - 4y + 14z = 7 \\ \text{c)} \quad & x + 4y + 2z = 5 \\ & 2x + 6y + 5z = 9 \\ & x + 2y + 3z = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3x + y - 3z - 1 = 0 \\ \text{d)} \quad & x + z - t + 3 = 0 \\ & -2x + y - 4z + 3t - 4 = 0 \\ & -7x + z + 3t + 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0 \\ \text{e)} \quad & 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ & x_1 + x_2 - x_3 + 6x_4 - 3 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 + 3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 7 \\ \text{f)} \quad & x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ & x_2 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ & x_1 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 4 \end{aligned}$$

Výsledky.

- a) $(1 - 2a, a, 0) = (1, 0, 0) + (-2, 1, 0)a, a \in R;$
b) $(2 - 3a, -6, 0) = (2, -6, 0) + (3, -7, 1)a, a \in R;$
c) $(3 - 4a, \frac{1}{2} + \frac{a}{2}, a) = (3, \frac{1}{2}, 0) + (-4, \frac{1}{2}, 1)a, a \in R;$
d) $(\frac{a}{2}, -8, -3 + \frac{a}{2}, a) = (0, -8, -3, 0) + (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1)a, a \in R;$
e) $(-a, a, 3, 1) = (0, 0, 3, 1) + (-1, 1, 0, 0)a, a \in R;$
f) $(5 + 2a - b, 1 + a + 2b, 1, a, b) = (5, 1, 1, 0, 0) + (2, 1, 0, 1, 0)a + (-1, 2, 0, 0, 1)b, a, b \in R.$

1.2 Matice a determinanty

Príklad 1.2.1 Vypočítajte determinant matice $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Riešenie.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} \begin{matrix} \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \\ \downarrow \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2) & (2) & (2) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & & \downarrow \end{matrix} = \\
 &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-3) \\ \downarrow \end{matrix} = \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 1) = -5
 \end{aligned}$$

Príklad 1.2.2 Zistite, pre ktoré a je matica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & a \end{pmatrix}$ singulárna.

Riešenie.

Štvorcová matica A je singulárna práve vtedy, keď determinant $|A|$ je rovný nule.

$$\begin{aligned}
 |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & a \end{vmatrix} \\
 &\quad \begin{matrix} +1 & \mapsto & \mapsto & \uparrow \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Rozvineme determinant podľa tretieho riadka

$$(-2)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ 2 & 3 \\ \downarrow \end{matrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & -7 & a+6 \end{vmatrix}$$

Rozvineme determinant podľa prvého stĺpca

$$\begin{aligned}
 &-2(-1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & a+6 \end{vmatrix} = (-2)(-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -7 & a+6 \end{vmatrix} = \\
 &= 6(a + 6 - 7) = 6(a - 1).
 \end{aligned}$$

Výsledok: Matica A je singulárna práve vtedy, keď $a = 1$.

Príklad 1.2.3 Nájdite inverznú maticu A^{-1} , kde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

Riešenie.

$$A^{-1} : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} (-5) \\ \downarrow \\ (5) \\ \downarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \uparrow \\ (1) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} \uparrow \\ (1) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Skúška správnosti:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -5 & 1 \\ -5 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0+0, & 1-1+0, & 1-1+0 \\ 5+0-5, & 5-5+1, & 5-5+0 \\ -5+0+5, & -5+6-1, & -5+6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Príklad 1.2.4 Riešte maticovú rovnicu $XD - C = 3X$, kde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Riešenie.

$$XD - C = 3X \Rightarrow XD - 3X = C \Rightarrow X(D - 3E_2) = C \Rightarrow X = C(D - 3E_2)^{-1}$$

$$D - 3E = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nájdeme inverznú maticu k matici $(D - 3E_2)$.

$$(D - 3E)^{-1} : \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right); \quad (D - 3E_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = C(D - 3E_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

Skúška správnosti:

$$\text{LS} = XD - C = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ -16 & 29 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 27 \end{pmatrix}.$$

$$\text{PS} = 3X = 3 \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 27 \end{pmatrix}.$$

$$\text{LS} = \text{PS}.$$

1.2.4.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

Algebraické operácie s maticami

1. Nájdite x a y tak, aby platilo

$$\begin{pmatrix} 2x + 5y & 4 \\ 9 & 2y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x + 15y & 4 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Vypočítajte $3A + B$, $B + 3A$, $A - 2B$, $2B - A$, AB , BA

$$\text{pre } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$$

3. Vypočítajte $2A + B$, $B + 2A$, $A - 4B$, $4B - A$, AB , BA

$$\text{pre } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 7 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Vypočítajte AB , BA pre matice rôzneho typu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

5. K daným maticiam vypočítajte inverzné matice pomocou elementárnych riadkových úprav a urobte skúšku správnosti.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Nájdite riešenie sústavy rovníc pomocou inverznej matice

$$\begin{aligned} -3x - 3y + 4z &= -1 \\ x + y - z &= 2 \\ -4x - 5y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

7. Vypočítajte determinanty 2. a 3. stupňa

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

8. Rozvojom podľa vhodného riadka alebo stĺpca vypočítajte determinanty

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ -10 & 0 & 7 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

9. Zistite, pre ktoré a je matica regulárna

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

10. Riešte maticovú rovnicu $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

11. Riešte maticovú rovnicu $XA = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

12. Riešte maticovú rovnicu $AXB = C$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

13. Riešte maticovú rovnicu $G - 3X = FX$, kde

$$F = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

14. Riešte maticovú rovnicu $XA - B = 2X$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Výsledky.

1. $x = -1, y = 1$; 2. $AB = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -6 & -13 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 32 & -18 \\ 83 & -47 \end{pmatrix};$

3. $AB = \begin{pmatrix} -15 & 3 & -7 \\ -22 & 5 & -10 \\ -5 & -1 & -2 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -8 & -2 & 3 \\ -7 & -2 & 2 \\ 14 & 7 & -2 \end{pmatrix};$

4. $AB = \begin{pmatrix} -7 & 15 \\ 7 & -20 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} -7 & 11 & -5 \\ 9 & -14 & 6 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix};$

5. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix}, C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix};$

6. $(x, y, z) = (5, 2, 5);$

7. $|A| = 1, |B| = -14;$ 8. $|A| = 6, |B| = 4, |C| = -1;$ 9. $a \neq 1;$

10. $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix};$ 11. $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$

12. $X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -10 & 7 \end{pmatrix};$ 13. $X = (F + 3E_2)^{-1}G = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$

14. $X = B(A - 2E_2)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 7 & -25 \end{pmatrix}.$

1.2.4.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

Algebraické operácie s maticami

1. Vypočítajte $A + 2B$, $2B + A$, $4A - B$, $B - 4A$, AB , BA

$$\text{pre } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Vypočítajte $A + B$, $B + A$, $A - B$, $B - A$, AB , BA

$$\text{pre } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Vypočítajte AB , BA pre matice rôzneho typu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. K daným maticiam vypočítajte inverzné matice pomocou elementárnych riadkových úprav a urobte skúšku správnosti.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Nájdite riešenie sústavy rovníc pomocou inverznej matice

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 5 \\ -x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

6. Rozvojom podľa vhodného riadka alebo stĺpca vypočítajte determinanty

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 10 \\ -1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

7. Zistite pre ktoré v je matica singulárna

$$\begin{pmatrix} v & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 2 \\ 5 & -5 & 10 & 15 \end{pmatrix}$$

8. Riešte maticovú rovnicu $XA = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

9. Riešte maticovú rovnicu $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

10. Riešte maticovú rovnicu $AXB^{-1} = C$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Riešte maticovú rovnicu $XA + B = 3X$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

12. Riešte maticovú rovnicu $DX - C = 3X$, kde

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Výsledky.

$$1. \quad A + 2B = 2B + A = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad 4A - B = \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ -2 & 13 \end{pmatrix}, \quad B - 4A = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 2 & -13 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 2 & -7 \end{pmatrix};$$

$$2. \quad A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 3 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3. \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & -11 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & -11 & 3 & 1 \\ -5 & 14 & -4 & -1 \\ -3 & 9 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$4. \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$5. \quad (x, y, z) = (-7, 7, 6);$$

$$6. \quad |A| = -6, \quad |B| = 1, \quad |C| = -4;$$

$$7. \quad v = \frac{2}{5};$$

$$8. \quad X = BA^{-1} = A \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 9. \quad X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$10. \quad X = A^{-1}CB = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -10 & 7 \end{pmatrix}; \quad 11. \quad X = B(3E_2 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -15 \end{pmatrix};$$

$$12. \quad X = (D - 3E_2)^{-1}C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.2.4.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

Algebraické operácie s maticami

1. Vypočítajte $2A - 3B$, AB , BA

$$\text{pre } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Vypočítajte $3A + 2B$, AB , BA

$$\text{pre } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Vypočítajte AB , BA pre matice rôzneho typu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

4. K daným maticiam vypočítajte inverzné matice pomocou elementárnych riadkových úprav a urobte skúšku správnosti.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ -4 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

5. Rozvojom podľa vhodného riadka alebo stĺpca vypočítajte determinanty

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -10 & 1 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$$

6. Zistite pre ktoré p je matica singulárna

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & p \end{pmatrix}$$

7. Riešte maticovú rovnicu $XA = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Riešte maticovú rovnicu $AX = B$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

9. Riešte maticovú rovnicu $P^{-1}XQ = R$, kde

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Riešte maticovú rovnicu $2X - CX = D$, kde

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

11. Riešte maticovú rovnicu $EX - F = 4X$, kde

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledky.

1. $2A - 3B = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;

2. $3A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -13 & 3 \\ -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

3. $AB = \begin{pmatrix} 3 & -11 & -2 \\ -4 & 15 & 3 \end{pmatrix}$, BA neexistuje;

4. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ -4 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 4 \\ -4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$,

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 17 \\ -3 & -1 & -13 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

5. $|A| = 6$, $|B| = 4$, $|C| = -1$;

6. $p = 1$;

7. $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -5 & 14 \end{pmatrix}$; 8. $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;

9. $X = PRQ^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}$; 10. $X = (2E_2 - C)^{-1}D = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$;

11. $X = (E - 4E_2)^{-1}F = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$.

1.3 Derivácie

1.3.1 Dotyčnica a normála

Príklad 1.3.1.1 Nájdite rovnicu dotyčnice a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x) = e^{-\sin(3x)}$ v bode $A = (\pi, ?)$.

Riešenie.

		Body
Rovnica dotyčnice	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$	1
$x_0 =$	π	1
$y_0 = f(x_0) =$	$f(\pi) = e^{-\sin(3\pi)} = e^0 = 1$	1
$f'(x) =$	$(e^{-\sin(3x)})' = -3e^{-\sin(3x)}(\cos(3x))$	3
$f'(\pi) =$	$-3e^{-\sin(3\pi)} \cos(3\pi) = -3e^0 \cos 3\pi = 3$	1
$d :$	$y - 1 = 3(x - \pi)$	1
Rovnica normály	$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$	1
$n :$	$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - \pi)$	1
SPOLU		10

1.3.1.1.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

- Vypočítajte derivácie.

– derivácia násobku funkcie konštantou, derivácia súčtu a rozdielu dvoch funkcií

1.	$f(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{x^{10}} + \frac{x^{100}}{5}$	2.	$f(x) = 3e^x + \frac{\ln x}{10}$
3.	$f(x) = \frac{\cos 3x}{3} + 10\operatorname{tg} \frac{x}{2}$	4.	$f(x) = 3 \operatorname{arccotg} x + \frac{\arcsin x}{\pi}$
5.	$f(x) = \frac{1-x^2}{\sqrt[3]{\pi}}$	6.	$f(x) = 2^x + 3x^2$

– derivácia súčinu a podielu dvoch funkcií

7.	$f(x) = x \sin 3x$	8.	$f(x) = \arcsin x \cdot \cos x$
9.	$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$	10.	$f(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 3x}$

– derivácia zloženej funkcie

11.	$f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} + 3\right)$	12.	$f(x) = \operatorname{cotg}^{100} x$
13.	$f(x) = \frac{1}{1-x^2}$	14.	$f(x) = \sqrt{e^x + 5}$
15.	$f(x) = e^{\sqrt{x}}$	16.	$f(x) = \ln^4 x$
17.	$f(x) = \arcsin \frac{x}{7}$	18.	$f(x) = 2^{\frac{1}{\cos x}}$
19.	$f(x) = (1 + \cos^5 x)^9$	20.	$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{2-x}$

- Nájdite rovnicu dotýčnice a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x)$ v bode A .

1. $f(x) = \sqrt{5-x^2}$, $A = [-2, ?]$
2. $f(x) = \frac{3x+1}{2x-5}$, $A = [2, ?]$
3. $f(x) = e^{4x-x^2}$, $A = [4, ?]$

Výsledky.

• Derivácie.

1.	$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - 10x^{-11} + 20x^{99}$	2.	$f'(x) = 3e^x + \frac{1}{10x}$
3.	$f'(x) = -\sin 3x + \frac{5}{\cos^2 \frac{x}{2}}$	4.	$f'(x) = -\frac{3}{1+x^2} + \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$
5.	$f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt[3]{\pi}}$	6.	$f'(x) = 2^x \ln 2 + 6x$
7.	$f'(x) = \sin 3x + 3x \cos 3x$	8.	$f'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-x^2}} - \sin x \cdot \arcsin x$
9.	$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$	10.	$f'(x) = \frac{2 \cos 2x \cos 3x + 3 \sin 2x \sin 3x}{\cos^2 3x}$
11.	$f'(x) = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2} + 3\right)$	12.	$f'(x) = 100(\cotg^{99} x)\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$
13.	$f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$	14.	$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+5}}$
15.	$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$	16.	$f'(x) = \frac{4 \ln^3 x}{x}$
17.	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{49-x^2}}$	18.	$f'(x) = 2^{\frac{1}{\cos x}} (\ln 2) \frac{\sin x}{\cos^2 x}$
19.	$f'(x) = -45(1+\cos^5 x)^8 \cos^4 x (\sin x)$	20.	$f'(x) = \frac{2}{(2-x)^2+x^2}$

• Dotyčnice a normály.

	$f(x)$	bod	rovnica dotyčnice	rovnica normály
1.	$f(x) = \sqrt{5-x^2}$ $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}$	$[-2, 1]$	$y - 1 = 2(x + 2)$	$y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 2)$
2.	$f(x) = \frac{3x+1}{2x-5}$ $f'(x) = -\frac{17}{(2x-5)^2}$	$[2, -7]$	$y + 7 = -17(x - 2)$	$y + 7 = \frac{1}{17}(x - 2)$
3.	$f(x) = e^{4x-x^2}$ $f'(x) = 2e^{4x-x^2}(2-x)$	$[4, 1]$	$y - 1 = -4(x - 4)$	$y - 1 = \frac{1}{4}(x - 4)$

1.3.1.1.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

- Vypočítajte derivácie.

1.	$f(x) = x - \sqrt[4]{x} + x^{12}$	2.	$f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x+1}}$
3.	$f(x) = x^3(x^2 + 1)^{10}$	4.	$f(x) = \frac{3x+1}{1-5x}$
5.	$f(x) = (3 - 2x)^6$	6.	$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
7.	$f(x) = \frac{x^3-1}{\sqrt{x^2+1}}$	8.	$f(x) = \sin 2x^3$
9.	$f(x) = (e^{-2x+5}) \sin \frac{x}{5}$	10.	$f(x) = \operatorname{tg} \frac{x-1}{x}$
11.	$f(x) = \cos \sqrt{x^2 - 1}$	12.	$f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$
13.	$f(x) = \frac{\operatorname{arccotg} \ln(3x)}{5}$	14.	$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
15.	$f(x) = e^{x^2-2x+3}$	16.	$f(x) = \arccos \frac{1}{x}$
17.	$f(x) = 5^{2x-3}$	18.	$f(x) = 3^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$
19.	$f(x) = \ln \frac{x^2}{x^3-1}$	20.	$f(x) = \ln \sin \frac{x-1}{x+1}$
21.	$f(x) = x \arcsin(2x + 1)$	22.	$f(x) = \operatorname{arctg}^4 \frac{x-1}{x}$

- Nájdite rovnicu dotyčnice a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x)$ v bode A .

1. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$, $A = [2, ?]$
2. $f(x) = e^{\cos \frac{x}{4}}$, $A = [2\pi, ?]$
3. $f(x) = 16 \operatorname{arctg}^3 \left(\frac{2-x}{x} \right)$, $A = [1, ?]$
4. $f(x) = \frac{8 \cos(3\pi x)}{\sqrt{6-2x}} + 5$, $A = [1, ?]$
5. $f(x) = \frac{\operatorname{tg}(\ln 3x)}{2}$, $A = [\frac{1}{3}, ?]$

Výsledky.

• Derivácie.

1.	$f'(x) = 1 - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} + 12x^{11}$	2.	$f'(x) = \frac{5\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}\sqrt{x+1}(x+1)}$
3.	$f'(x) = 3x^2(x^2+1)^{10} + 20x^4(x^2+1)^9$	4.	$f'(x) = \frac{8}{(1-5x)^2}$
5.	$f'(x) = -12(3-2x)^5$	6.	$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
7.	$f'(x) = \frac{2x^4+3x^2+x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$	8.	$f'(x) = 6x^2 \cos 2x^3$
9.	$f'(x) = e^{-2x+5}(-2\sin \frac{x}{5} + \frac{1}{5}\cos \frac{x}{5})$	10.	$f'(x) = \left(\frac{1}{\cos^2 \frac{x-1}{x}}\right) \frac{1}{x^2}$
11.	$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \sin \sqrt{x^2-1}$	12.	$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} =$ $\frac{1}{4 \cos^2 \frac{x}{2} \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}}$
13.	$f'(x) = -\frac{1}{5x(1+\ln^2 3x)}$	14.	$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
15.	$f'(x) = (2x-2)e^{x^2-2x+3}$	16.	$f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
17.	$f'(x) = 2(\ln 5)5^{2x-3}$	18.	$f'(x) = 3^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}} \frac{\ln 3}{\cos^2 \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$
19.	$f'(x) = -\frac{x^3+2}{x(x^3-1)}$	20.	$f'(x) = \left(\cotg \frac{x-1}{x+1}\right) \frac{2}{(x+1)^2}$
21.	$f'(x) = \arcsin(2x+1) + \frac{2x}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}$	22.	$f'(x) =$ $4 \left(\operatorname{arctg}^3 \frac{x-1}{x}\right) \left(\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x}\right)^2}\right) \frac{1}{x^2} =$ $4 \left(\operatorname{arctg}^3 \frac{x-1}{x}\right) \frac{1}{x^2+(x-1)^2}$

• Dotyčnice a normály.

	$f(x)$	bod	rovnica dotyčnice	rovnica normály
1.	$f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ $f'(x) = -\frac{2}{x^2-1}$	$[2, \ln 3]$	$y - \ln 3 = -\frac{2}{3}(x-2)$	$y - \ln 3 = \frac{3}{2}(x-2)$
2.	$f(x) = e^{\cos \frac{x}{4}}$ $f'(x) = -\frac{\sin \frac{x}{4} e^{\cos \frac{x}{4}}}{4}$	$[2\pi, 1]$	$y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 2\pi)$	$y - 1 = 4(x - 2\pi)$
3.	$f(x) = 16 \operatorname{arctg}^3 \left(\frac{2-x}{x}\right)$ $f'(x) =$ $-48 \operatorname{arctg}^2 \left(\frac{2-x}{x}\right) \frac{1}{1+\left(\frac{2-x}{x}\right)^2} \frac{2}{x^2}$	$\left[1, \frac{\pi^3}{4}\right]$	$y - \frac{\pi^3}{4} = -3\pi^2(x-1)$	$y - \frac{\pi^3}{4} = \frac{1}{3\pi^2}(x-1)$
4.	$f(x) = \frac{8 \cos 3\pi x}{\sqrt{6-2x}} + 5$ $f'(x) =$ $8 \frac{-\sin(3\pi x) 3\pi \sqrt{6-2x} - \cos(3\pi x) \frac{-1}{\sqrt{6-2x}}}{6-2x}$	$[1, 1]$	$y - 1 = -(x-1)$	$y - 1 = (x-1)$
5.	$f(x) = \frac{\operatorname{tg}(\ln(3x))}{2}$ $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2(\ln(3x))} \frac{1}{x}$	$\left[\frac{1}{3}, 0\right]$	$y - 0 = \frac{3}{2}(x - \frac{1}{3})$	$y - 0 = -\frac{2}{3}(x - \frac{1}{3})$

1.3.1.1.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

- Vypočítajte derivácie.

1.	$f(x) = x^4 - 4x^2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{x^2}$	2.	$f(x) = (x^2 - 7)(x + 3)$
3.	$f(x) = \frac{x^3+1}{\sqrt{\pi}}$	4.	$f(x) = \frac{1}{1-x^3}$
5.	$f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$	6.	$f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
7.	$f(x) = (x^2 + 5) \cos(3x)$	8.	$f(x) = \frac{\cos 3x}{1 - \sin 2x}$
9.	$f(x) = 3 \operatorname{arccotg} \frac{1}{x+1}$	10.	$f(x) = x \arcsin \frac{x}{5}$
11.	$f(x) = \operatorname{cotg}(1 - x^2)$	12.	$f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x^3 + 2}$
13.	$f(x) = \frac{\sin^{100} x}{x}$	14.	$f(x) = \arccos \ln(2x)$
15.	$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$	16.	$f(x) = \frac{e^x}{\sin 3x}$
17.	$f(x) = e^{\cos 2x}$	18.	$f(x) = \ln \operatorname{cotg} \frac{1-x}{1+x}$
19.	$f(x) = \ln^3 \frac{2}{x}$	20.	$f(x) = \ln \cos 2x$
21.	$f(x) = \operatorname{arctg}^3(2x - 5)$	22.	$f(x) = \sqrt{\ln(x^3 + 1)}$

- Nájdite rovnicu dotyčnice a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x)$ v bode A .

1. $f(x) = \frac{\ln(1+\sin 3x)}{3}$, $A = [\pi, ?]$
2. $f(x) = e^{2x-x^2}$, $A = [1, ?]$
3. $f(x) = \operatorname{arctg} \ln(-2x)$, $A = [-\frac{1}{2}, ?]$
4. $f(x) = 8x^3 e^{2x-1}$, $A = [\frac{1}{2}, ?]$
5. $f(x) = \ln \left(\frac{x+2}{2-x} \right)$, $A = [1, ?]$

Výsledky.

• Derivácie.

1.	$f'(x) = 4x^3 - 10\sqrt{x^3} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{4}{x^3}$	2.	$f'(x) = 3x^2 + 6x - 7$
3.	$f'(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{\pi}}$	4.	$f'(x) = \frac{3x^2}{(1-x^3)^2}$
5.	$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3}}$	6.	$f'(x) = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\frac{1}{(1+x)^2} \right)$
7.	$f'(x) = 2x \cos 3x - 3(x^2 + 5) \sin 3x$	8.	$f'(x) = \frac{-3 \sin 3x (1 - \sin 2x) + 2 \cos 3x \cos 2x}{(1 - \sin 2x)^2}$
9.	$f'(x) = \frac{3}{[(x+1)^2+1]}$	10.	$f'(x) = \arcsin \frac{x}{5} + \frac{x}{25-x^2}$
11.	$f'(x) = \frac{2x}{\sin^2(1-x^2)}$	12.	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x^3+2}} \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+2}}$
13.	$f'(x) = \frac{100x \sin^{99} x \cos x - \sin^{100} x}{x^2}$	14.	$f'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2(2x)}}$
15.	$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$	16.	$f'(x) = \frac{e^x \sin 3x - 3e^x \cos 3x}{\sin^2 3x}$
17.	$f'(x) = (-2 \sin 2x) e^{\cos 2x}$	18.	$f'(x) = \frac{1}{\cotg \frac{1-x}{1+x}} \left(\frac{-1}{\sin^2 \frac{1-x}{1+x}} \right) \left(\frac{-2}{(1+x)^2} \right) =$ $\frac{2}{(1+x)^2 \cos \frac{1-x}{1+x} \sin \frac{1-x}{1+x}}$
19.	$f'(x) = -\frac{3}{x} \ln^2 \frac{2}{x}$	20.	$f'(x) = -2 \operatorname{tg} 2x$
21.	$f'(x) = 6 (\operatorname{arctg}^2(2x-5)) \frac{1}{1+(2x-5)^2}$	22.	$f'(x) = \frac{3x^2}{2(x^3+1)\sqrt{\ln(x^3+1)}}$

• Dotyčnice a normály.

	$f(x)$	bod	rovnica dotyčnice	rovnica normály
1.	$f(x) = \frac{\ln(1+\sin 3x)}{3}$ $f'(x) = \frac{\cos 3x}{1+\sin 3x}$	$[\pi, 0]$	$y - 0 = -(x - \pi)$	$y - 0 = (x - \pi)$
2.	$f(x) = e^{2x-x^2}$ $f'(x) = e^{2x-x^2}(2-2x)$	$[1, e]$	$y - e = 0(x - 1),$ $y = e$	$x = 1$
3.	$f(x) = \operatorname{arctg} \ln(-2x)$ $f'(x) = \frac{1}{1+\ln^2(-2x)} \frac{1}{x}$	$[-\frac{1}{2}, 0]$	$y - 0 = -2(x + \frac{1}{2})$	$y - 0 = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{2})$
4.	$f(x) = 8x^3 e^{2x-1}$ $f'(x) = 24x^2 e^{2x-1} + 16x^3 e^{2x-1}$	$[\frac{1}{2}, 1]$	$y - 1 = 8(x - \frac{1}{2})$	$y - 1 = -\frac{1}{8}(x - \frac{1}{2})$
5.	$f(x) = \ln \left(\frac{x+2}{2-x} \right)$ $f'(x) = \frac{4}{4-x^2}$	$[1, \ln 3]$	$y - \ln 3 = \frac{4}{3}(x - 1)$	$y - \ln 3 = -\frac{3}{4}(x - 1)$

1.3.2 Taylorov polynóm

Príklad 1.3.2.1 Nájdite definičný obor a Taylorov polynóm 3. stupňa funkcie $f(x) = \sqrt{4x-3}$ v bode $x_0 = 1$.

Riešenie.

		Body
Nájdeme $D(f) =$	$\{x \mid 4x - 3 \geq 0\} = \{x \mid x \geq \frac{3}{4}\} = [\frac{3}{4}, \infty)$	1
$T_3[f(x), x_0] =$	$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3$	1
$f(x) =$	$\sqrt{4x-3}$	0
$x_0 =$	1	0
$f(x_0) =$	$f(1) = \sqrt{4 \cdot 1 - 3} = \sqrt{1} = 1$	0.5
$f'(x) =$	$(\sqrt{4x-3})' = \frac{4}{2\sqrt{4x-3}} = \frac{2}{\sqrt{4x-3}}$	2
$f'(x_0) =$	$f'(1) = \frac{2}{\sqrt{1}} = 2$	0.5
$f''(x) =$	$(2(4x-3)^{-\frac{1}{2}})' = 2(-\frac{1}{2})(4x-3)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4 = -\frac{4}{\sqrt{(4x-3)^3}}$	2
$f''(x_0) =$	$f''(1) = -\frac{4}{\sqrt{1}} = -4$	0.5
$f'''(x) =$	$(-\frac{4}{\sqrt{(4x-3)^3}})' = -4(-\frac{3}{2})(4x-3)^{-\frac{5}{2}} \cdot 4 = 24(4x-3)^{-\frac{5}{2}}$	2
$f'''(x_0) =$	$f'''(1) = \frac{24}{\sqrt{(4 \cdot 1 - 3)^5}} = 24$	0.5
$T_3[\sqrt{4x-3}, 1] =$	$1 + \frac{2}{1!}(x-1) - \frac{4}{2!}(x-1)^2 + \frac{24}{3!}(x-1)^3$	1
SPOLU		11

1.3.2.1.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

Nájdite Taylorov polynóm n -tého stupňa funkcie $f(x)$ v bode a .

	$f(x)$	n	a
1.	e^{2x}	n	0
2.	$\sin 5x$	n	0
3.	$x^3 - 2x + 7$	3	-1
4.	$\frac{1}{x}$	4	2
5.	$\frac{1}{1-2x}$	n	0
6.	xe^{-3x}	n	0
7.	$\frac{2x-4}{2x+5}$	3	-2

Výsledky.

	$f(x)$	n	a	$T_n[f(x), a]$
1.	e^{2x}	n	0	$1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \dots + \frac{(2x)^n}{n!} =$ $= 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^3 x^3}{3!} + \dots + \frac{2^n x^n}{n!}$
2.	$\sin 5x$	n	0	$5x - \frac{(5x)^3}{3!} + \frac{(5x)^5}{5!} - \dots + (-1)^{2n+1} \left(\frac{(5x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) =$ $= 5x - \frac{5^3 x^3}{3!} + \frac{5^5 x^5}{5!} - \dots + (-1)^{2n+1} \left(\frac{5^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)$
3.	$x^3 - 2x + 7$	3	-1	$8 + \frac{x+1}{1!} - \frac{6(x+1)^2}{2!} + \frac{6(x+1)^3}{3!} =$ $= 8 + (x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3$
4.	$\frac{1}{x}$	4	2	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{(x-2)^1}{1!} + \frac{1}{4} \frac{(x-2)^2}{2!} - \frac{3}{8} \frac{(x-2)^3}{3!} + \frac{3}{4} \frac{(x-2)^4}{4!} =$ $= \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + \frac{(x-2)^4}{32}$
5.	$\frac{1}{1-2x}$	n	0	$1 + (2x)^1 + (2x)^2 + (2x)^3 + \dots + (2x)^n =$ $= 1 + 2x + 2^2 x^2 + 2^3 x^3 + \dots + 2^n x^n$
6.	xe^{-3x}	n	0	$x \left(1 + \frac{-3x}{1!} + \frac{(-3x)^2}{2!} + \frac{(-3x)^3}{3!} + \dots + \frac{(-3x)^n}{n!} \right) =$ $= x - \frac{3x^2}{1!} + \frac{3^2 x^3}{2!} - \frac{3^3 x^4}{3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{3^n x^{(n+1)}}{n!}$
7.	$\frac{2x-4}{2x+5}$	3	-2	$-8 + 18 \frac{(x+2)}{1!} - 72 \frac{(x+2)^2}{2!} + 432 \frac{(x+2)^3}{3!} =$ $= -8 + 18(x+2) - 36(x+2)^2 + 72(x+2)^3$

1.3.2.1.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

Nájdite Taylorov polynóm n –tého stupňa funkcie $f(x)$ v bode a .

	$f(x)$	n	a
1.	e^{-3x}	n	0
2.	$\sin \frac{x}{2}$	n	0
3.	$x^3 + 7x^2 + x + 5$	3	-1
4.	$\frac{1}{x}$	4	2
5.	$\frac{1}{1+3x}$	n	0
6.	$xe^{\frac{x}{2}}$	n	0

Výsledky.

	$f(x)$	n	a	$T_n[f(x), a]$
1.	e^{-3x}	n	0	$1 + \frac{-3x}{1!} + \frac{(-3x)^2}{2!} + \frac{(-3x)^3}{3!} + \dots + \frac{(-3x)^n}{n!} =$ $= 1 - \frac{3x}{1!} + \frac{3^2 x^2}{2!} - \frac{3^3 x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{3^n x^n}{n!}$
2.	$\sin \frac{x}{2}$	n	0	$\frac{x}{2} - \frac{(\frac{x}{2})^3}{3!} + \frac{(\frac{x}{2})^5}{5!} - \dots + (-1)^n \left(\frac{(\frac{x}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) =$ $= \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 3!} + \frac{x^5}{2^5 5!} - \dots + (-1)^n \left(\frac{x^{2n+1}}{2^{2n+1} (2n+1)!} \right)$
3.	$x^3 + 7x^2 + x + 5$	3	-1	$10 - \frac{10(x+1)}{1!} + \frac{8(x+1)^2}{2!} + \frac{6(x+1)^3}{3!} =$ $= 10 - 10(x+1) + 4(x+1)^2 + (x+1)^3$
4.	$\frac{1}{x}$	4	2	$\frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \frac{(x-2)^3}{2^4} + \frac{(x-2)^4}{2^5}$
5.	$\frac{1}{1+3x}$	n	0	$1 + (-3x)^1 + (-3x)^2 + (-3x)^3 + \dots + (-3x)^n =$ $= 1 - 3x + (-3)^2 x^2 + (-3)^3 x^3 + \dots + (-3)^n x^n =$ $= 1 - 3x + (-3)^2 x^2 + (-3)^3 x^3 + \dots + (-1)^n 3^n x^n$
6.	$xe^{\frac{x}{2}}$	n	0	$x \left(1 + \frac{\frac{x}{2}}{1!} + \frac{(\frac{x}{2})^2}{2!} + \frac{(\frac{x}{2})^3}{3!} + \dots + \frac{(\frac{x}{2})^n}{n!} \right) =$ $= x + \frac{x^2}{2 \cdot 1!} + \frac{x^3}{2^2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{2^3 \cdot 3!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{2^n \cdot n!}$

1.3.2.1.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

Nájdite Taylorov polynóm n -tého stupňa funkcie $f(x)$ v bode a .

	$f(x)$	n	a
1.	$\operatorname{tg} x$	3	0
2.	$\cos 4x$	n	0
3.	$\frac{x}{1-5x}$	n	0
4.	$\ln x$	4	1

Výsledky.

	$f(x)$	n	a	$T_n[f(x), a]$
1.	$\operatorname{tg} x$	3	0	$\frac{x}{1!} + \frac{2x^3}{3!} = x + \frac{x^3}{3}$
2.	$\cos 4x$	n	0	$1 - \frac{(4x)^2}{2!} + \frac{(4x)^4}{4!} - \frac{(4x)^6}{6!} + \dots + (-1)^n \left(\frac{(4x)^{2n}}{(2n)!} \right) =$ $= 1 - \frac{4^2 x^2}{2!} + \frac{4^4 x^4}{4!} - \frac{4^6 x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \left(\frac{4^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \right)$
3.	$\frac{x}{1-5x}$	n	0	$x(1 + 5x + (5x)^2 + (5x)^3 + \dots + (5x)^{n-1}) =$ $= x + 5x^2 + 5^2 x^3 + 5^3 x^4 + \dots + 5^{n-1} x^n$
4.	$\ln x$	4	1	$0 + \frac{(x-1)}{1!} - \frac{(x-1)^2}{2!} + 2\frac{(x-1)^3}{3!} - 6\frac{(x-1)^4}{4!}$

1.4 Vlastnosti funkcií - monotónnosť, lokálne extrém

Príklad 1.4.1 Nájdite definičný obor, intervaly monotónnosti a lokálne extrém funkcie $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

Riešenie.

			Body
Nájdeme	$D(f) =$	$\{x \mid x > 0, \ln x \neq 0\}, \ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \Rightarrow \Rightarrow D(f) = (0, 1) \cup (1, \infty)$	0,5
Vypočítame	$f'(x) =$	$(\frac{x}{\ln x})' = \frac{1 \ln x - x \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$	5
Položíme	$f'(x) = 0$	$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \Rightarrow \ln x - 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow \Rightarrow x = e$	1
Funkcia $f(x)$ má stacionárny bod		$x = e$	1
Nájdeme intervaly, kde	$f'(x) > 0$	$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} > 0$. Keďže $\ln^2 x > 0$, platí $\ln x - 1 > 0 \Rightarrow \Rightarrow \ln x > 1 \Rightarrow x > e$	1
Funkcia $f(x)$ je rastúca na intervale		(e, ∞)	0,5
Nájdeme intervaly, kde	$f'(x) < 0$	$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} < 0$. Keďže $\ln^2 x > 0$, platí $\ln x - 1 < 0 \Rightarrow \Rightarrow \ln x < 1 \Rightarrow x < e$	1
Funkcia $f(x)$ je klesajúca na intervaloch		$(0, 1)$ a $(1, e)$	0,5
Funkcia $f(x)$ má v bode lokálne minimum		$[e, f(e)] = [e, \frac{e}{\ln e}] = [e, e]$	0,5
SPOLU			11

1.4.1.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

Nájdite definičný obor, intervaly monotónnosti a lokálne extrémny funkcií

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$

2. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

3. $f(x) = xe^{-2x}$

4. $f(x) = 2x^2 - \ln x$

5. $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$

Výsledky.

	$f(x)$	$D(f)$	$f(x)$ rastie na intervaloch	$f(x)$ klesá na intervaloch	lokálne extrémy
1.	$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$ $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \frac{1}{3})$, $(1, \infty)$	$(\frac{1}{3}, 1)$	$[\frac{1}{3}, \frac{139}{27}]$ lok. max. $[1, 5]$ lok. min.
2.	$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$	$(-\infty, \infty)$	$(-1, 1)$	$(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$	$[-1, -\frac{1}{2}]$ lok. min. $[1, \frac{1}{2}]$ lok. max.
3.	$f(x) = xe^{-2x}$ $f'(x) = e^{-2x}(1 - 2x)$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, \infty)$	$[\frac{1}{2}, \frac{1}{2e}]$ lok. max.
4.	$f(x) = 2x^2 - \ln x$ $f'(x) = \frac{4x^2-1}{x}$	$(0, \infty)$	$(\frac{1}{2}, \infty)$	$(0, \frac{1}{2})$	$[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \ln 2]$ lok. min.
5.	$f(x) = \frac{e^x}{x-1}$ $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$	$(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$	$(2, \infty)$	$(-\infty, 1)$, $(1, 2)$	$[2, e^2]$ lok. min.

1.4.1.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

Nájdite definičný obor, intervaly monotónnosti a lokálne extrémny funkcií

1. $f(x) = \frac{x}{e^x}$
2. $f(x) = x \ln x$
3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$
4. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
5. $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x^2}$

Výsledky.

	$f(x)$	$D(f)$	$f(x)$ rastie na intervaloch	$f(x)$ klesá na intervaloch	lokálne extrémy
1.	$f(x) = \frac{x}{e^x}$ $f'(x) = \frac{1-x}{e^x}$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, 1),$	$(1, \infty)$	$[1, \frac{1}{e}]$ lok. max.
2.	$f(x) = x \ln x$ $f'(x) = \ln x + 1$	$(0, \infty)$	$(\frac{1}{e}, \infty)$	$(0, \frac{1}{e})$	$[\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}]$ lok. min.
3.	$f(x) = \frac{x}{\ln x}$ $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$	$(0, 1) \cup (1, \infty)$	(e, ∞)	$(0, 1),$ $(1, e)$	$[e, e]$ lok. min.
4.	$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$	$(0, \infty)$	$(0, e)$	(e, ∞)	$[e, \frac{1}{e}]$ lok. max.
5.	$f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x^2}$ $f'(x) = \frac{2x}{x^4 + 1}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$	nemá

1.4.1.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

Nájdite definičný obor, intervaly monotónnosti a lokálne extrémny funkcií

1. $f(x) = \frac{\arcsin 4x^2}{3}$

2. $f(x) = 3 \arctg(2x^2 + 4x + 2)$

3. $f(x) = \frac{e^{5x}}{\sqrt{x}}$

4. $f(x) = \ln^5(x - x^2)$

5. $f(x) = \ln^3(\sin x)$ na intervale $(0, 2\pi)$

Výsledky.

	$f(x)$	$D(f)$	$f(x)$ rastie na intervaloch	$f(x)$ klesá na intervaloch	lokálne extrémy
1.	$f(x) = \frac{\arcsin 4x^2}{3}$ $f'(x) = \frac{8x}{3\sqrt{1-16x^4}}$	$< -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} >$	$(0, \frac{1}{2}),$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$[0, 0]$ lok. min.
2.	$f(x) =$ $3 \arctg(2x^2 + 4x + 2)$ $f'(x) = \frac{12(x+1)}{1+(2x^2+4x+2)^2}$	$(-\infty, \infty)$	$(-1, \infty)$	$(-\infty, -1)$	$[-1, 0]$ lok. min.
3.	$f(x) = \frac{e^{5x}}{\sqrt{x}}$ $f'(x) = \frac{e^{5x}(10x-1)}{\sqrt{x}(2x)}$	$(0, \infty)$	$(\frac{1}{10}, \infty)$	$(0, \frac{1}{10})$	$[\frac{1}{10}, \sqrt{10}e]$ lok. min.
4.	$f(x) = \ln^5(x - x^2)$ $f'(x) = \frac{5(1-2x)\ln^4(x-x^2)}{x-x^2}$	$(0, 1)$	$(0, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, 1)$	$[\frac{1}{2}, -\ln^5 4]$ lok. max.
5.	$f(x) = \ln^3(\sin x)$ $f'(x) = 3(\cot g x) \ln^2(\sin x)$	$(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$	$(0, \frac{\pi}{2}),$ $(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi),$ $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$	$[\frac{\pi}{2}, 0],$ $[\frac{3\pi}{2}, 0]$ lok. max.

1.5 Vlastnosti funkcií - konvexnosť, konkávnosť, inflexné body

Príklad 1.5.1 Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = 3 \operatorname{arctg}(2x - 4)$, intervaly, na ktorých je funkcia konvexná, konkávna a jej inflexné body.

Riešenie.

			Body
Nájdeme	$D(f) =$	$R = (-\infty, \infty)$	0.5
Vypočítame	$f'(x) =$ $f''(x) =$	$(3 \operatorname{arctg}(2x - 4))' =$ $= 3 \frac{1}{1+(2x-4)^2} \cdot (2x - 4)' = 3 \frac{1}{4x^2-16x+17} \cdot 2 = \frac{6}{4x^2-16x+17}$ $(\frac{6}{4x^2-16x+17})' =$ $= 6(-1)(4x^2 - 16x + 17)^{-2}(4x^2 - 16x + 17)' =$ $= \frac{-6}{(4x^2-16x+17)^2} \cdot (8x - 16) = \frac{-48(x-2)}{(4x^2-16x+17)^2}$	2.5

1.5.1.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

Nájdite definičný obor, intervaly na ktorých je funkcia $f(x)$ konvexná, konkávna a jej inflexné body.

1. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$

2. $f(x) = xe^{-2x}$

3. $f(x) = 2x^2 - \ln x$

4. $f(x) = \frac{e^x}{x}$

5. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Výsledky.

		$D(f)$ definičný obor	$f(x)$ je konvexná na intervaloch	$f(x)$ je konkávna na intervaloch	$f(x)$ inflexné body
1.	$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 5$ $f''(x) = 6x - 4$	$(-\infty, \infty)$	$(\frac{2}{3}, \infty)$	$(-\infty, \frac{2}{3})$	$[\frac{2}{3}, \frac{137}{27}]$
2.	$f(x) = xe^{-2x}$ $f''(x) = 4e^{-2x}(x - 1)$	$(-\infty, \infty)$	$(1, \infty)$	$(-\infty, 1)$	$[1, e^{-2}]$
3.	$f(x) = 2x^2 - \ln x$ $f''(x) = \frac{4x^2+1}{x^2}$	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$	na žiadnom intervale	nemá
4.	$f(x) = \frac{e^x}{x}$ $f''(x) = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$	nemá
5.	$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ $f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}$	$(-\infty, \infty)$	$(-\sqrt{3}, 0),$ $(\sqrt{3}, \infty)$	$(-\infty, -\sqrt{3}),$ $(0, \sqrt{3})$	$[-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}],$ $[\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}]$

1.5.1.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

Nájdite definičný obor, intervaly na ktorých je funkcia $f(x)$ konvexná, konkávna a jej inflexné body.

1. $f(x) = \frac{x}{e^x}$

2. $f(x) = x \ln x$

3. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

4. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

5. $f(x) = 5 \arctg(6 - 2x)$.

Výsledky.

		$D(f)$ definičný obor	$f(x)$ je konvexná na intervaloch	$f(x)$ je konkávna na intervaloch	$f(x)$ inflexné body
1.	$f(x) = \frac{x}{e^x}$ $f''(x) = \frac{x-2}{e^x}$	$(-\infty, \infty)$	$(2, \infty)$	$(-\infty, 2)$	$[2, \frac{2}{e^2}]$
2.	$f(x) = x \ln x$ $f''(x) = \frac{1}{x}$	$(0, \infty)$	$(0, \infty)$	na žiadnom intervale	nemá
3.	$f(x) = \frac{x}{\ln x}$ $f''(x) = \frac{(2-\ln x) \ln x}{x \ln^4 x}$	$(0, 1) \cup (1, \infty)$	$(1, e^2)$	$(0, 1),$ (e^2, ∞)	$[e^2, \frac{e^2}{2}]$
4.	$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$	$(0, \infty)$	$(e^{\frac{3}{2}}, \infty)$	$(0, e^{\frac{3}{2}})$	$[e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}]$
5.	$f(x) = 5 \arctg(6 - 2x)$ $f''(x) = \frac{80(x-3)}{(4x^2-24x+37)^2}$	$(-\infty, \infty)$	$(3, \infty)$	$(-\infty, 3)$	$[3, 0]$

1.5.1.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

Nájdite definičný obor, intervaly na ktorých je funkcia $f(x)$ konvexná, konkávna a jej inflexné body.

1. $f(x) = 2x + \operatorname{arccotg} 4x$

2. $f(x) = \arcsin 2x$

3. $f(x) = \frac{xe^{-4x}}{4}$

4. $f(x) = \ln^5(x - x^2)$

5. $f(x) = 8x^2 - 8\sin^2 x$.

Výsledky.

		$D(f)$ definičný obor	$f(x)$ je konvexná na intervaloch	$f(x)$ je konkávna na intervaloch	$f(x)$ inflexné body
1.	$f(x) = 2x + \operatorname{arccotg} 4x$ $f''(x) = \frac{128x}{(1+16x^2)^2}$	$(-\infty, \infty)$	$(0, \infty)$	$(-\infty, 0)$	$[0, \frac{\pi}{2}]$
2.	$f(x) = 3 \arcsin 2x$ $f''(x) = \frac{24x}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}}$	$< -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} >$	$(0, \frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$[0, 0]$
3.	$f(x) = \frac{xe^{-4x}}{4}$ $f''(x) = e^{-4x}(4x - 2)$	$(-\infty, \infty)$	$(\frac{1}{2}, \infty)$	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$[\frac{1}{2}, \frac{1}{8e^2}]$
4.	$f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ $f''(x) = \frac{4x}{(x^2-1)^2}$	$(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$	$(1, \infty)$	$(-\infty, -1)$	nemá
5.	$f(x) = 8x^2 - 8\sin^2 x$ $f'(x) = 16(1 - \cos 2x)$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$	na žiadnom intervale	nemá

ZNÁMKA	A	B	C	D	E	FX/P	FX/N	FN	
--------	---	---	---	---	---	------	------	----	--

SKUPINA

Priezvisko študenta:

Meno študenta:

Číslo študenta z prvej strany indexu:

Dátum:

Krúžok:

Ročník:/Smer:

Číslo príkladu	1	2	3	4	5	Súčet
Hodnotenie učiteľa						
Bodové hodnotenie príkladov	7	8	11	13	11	50
Derivácie	@	@				
Maximum za derivácie	@	@	8	3	4	15
Nezačaté príklady						@
Počet percent z cvičenia	@	@	@	@	@	
max 100	@	@	@	@	@	
Hodnotenie skúšky	53-60 A 46-52 B	39-45 C 33-38 D	28-32 E @	@	@	@

Čas trvania písomnej skúšky: 2 hod.

Ak niektorý príklad nezačnete počítať, napíšte v tabuľke do riadku

Nezačaté príklady pod príslušné číslo príkladu písmeno N.

Na skúške nesmiete používať kalkulačku, mobilný telefón a vlastné papiere.

V prípade, že potrebujete ďalší papier, dozorujúci učiteľ Vám ho dá.

Píšte perom, nie ceruzkou. Výsledky vypíšte aj na prvú stranu.

1. PRÍKLAD. Gaussovou eliminačnou metódou nájdite všetky riešenia sústavy lineárnych rovníc

$$x + 3y + z + 4 = 0$$

$$2x + z + 3t + 12 = 0$$

$$3y + 2z + 3t + 1 = 0$$

$$x + 3y - 3t + 2 = 0$$

Výsledok: $(x, y, z, t) =$

2. PRÍKLAD. Riešte rovnicu $G - 3X = FX$, kde $F = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Výsledok: $X =$

3. PRÍKLAD. Nájdite definičný obor a Taylorov polynóm štvrtého stupňa funkcie $f(x) = e^{x^2}$ v bode $x_0 = 0$.

Výsledok:

4. PRÍKLAD. Nájdite intervaly monotónnosti a všetky lokálne extrém funkcie $f(x) = \ln^3(\cos x)$

na intervale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Výsledok: $D(f) =$

Funkcia je na intervale:

Funkcia je na intervale:

Funkcia má lokálny extrém v bode:

5. PRÍKLAD. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \arctg(\frac{1}{x})$, intervaly, na ktorých je konvexná, konkávna a jej inflexné body.

Výsledok: $D(f) =$

Funkcia je konvexná na intervale:

Funkcia je konkávna na intervale:

Funkcia má inflexný bod:

1. PRÍKLAD

Gaussovou eliminačnou metódou nájdite všetky riešenia sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned}x + 3y + z + 4 &= 0 \\2x + z + 3t + 12 &= 0 \\3y + 2z + 3t + 1 &= 0 \\x + 3y - 3t + 2 &= 0\end{aligned}$$

Riešenie.

K danej sústave vytvoríme maticu sústavy A a rozšírenú maticu sústavy A' , ktorú upravíme na trojuholníkový tvar pomocou elementárnych riadkových úprav.

$$\begin{aligned}A' &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & -12 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{cc} -2 & -1 \\ \downarrow & \downarrow \\ & \downarrow \\ & \downarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \sim \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -6 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \sim \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{c} 3 \\ \downarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \Delta \text{ tvar}\end{aligned}$$

Takto upravenú rozšírenú maticu sústavy prepíšeme naspäť do rovníc.

$$\begin{array}{cccccccl}x & + & 3y & + & z & & & = & -4 \\ & & 3y & + & 2z & + & 3t & = & -1 \\ & & & - & z & - & 3t & = & 2\end{array}$$

		Správne upravená matica na $\triangle$ tvar	3
Nájdeme hodnotu matice A'	$h(A') =$	3 je počet nenulových riadkov v matici A' upravenej na $\triangle$ tvar	0,25
Nájdeme hodnotu matice A	$h(A) =$	3 je počet nenulových riadkov v matici A upravenej na $\triangle$ tvar	0,25
Počet neznámych	$n =$	4	
Frobeniova veta	Ak $h(A') = h(A) < n$,	tak sústava má nekonečne veľa riešení	0,5
Počet parametrov	$n - h(A) =$	$4 - 3 = 1 \Rightarrow$ zvolíme jednu neznámu ako parameter	
Zvolíme neznámu	$t =$	a	0,5
Dosadíme do 3. rovnice	$t =$ $-z - 3t = 2$	a $-z - 3a = 2 \Rightarrow z = -2 - 3a$	0,5
Dosadíme do 2. rovnice	$z =$ $t =$ $3y + 2z + 3t = -1$	$-2 - 3a$ a $3y + 2(-2 - 3a) + 3a = -1 \Rightarrow$ $3y = 3 + 3a \Rightarrow y = 1 + a$	0,5
Dosadíme do 1. rovnice	$y =$ $z =$ $t =$ $x + 3y + z = -4$	$1 + a$ $-2 - 3a$ a $x + 3(1 + a) - 2 - 3a = -4 \Rightarrow$ $x = -5$	0,5
Všeobecné riešenie	$(x, y, z, t) =$	$(-5, 1 + a, -3a - 2, a) =$ $= (-5, 1, -2, 0) + (0, 1, -3, 1)a,$ $a \in R$	0,5 0,5
SPOLU			7

2. PRÍKLAD

Riešte maticovú rovnicu $G - 3X = FX$, kde

$$F = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Riešenie.

Upravíme rovnicu Vynásobíme obidve strany rovnice inveznou maticou zľava	$G - 3X = FX$ $G = (F + 3E_2)X$ $(F + 3E_2)^{-1}$ $X =$	$G = FX + 3X \Rightarrow G = (F + 3E_2)X$ $(F + 3E_2)^{-1}G = (F + 3E_2)^{-1}(F + 3E_2)X \Rightarrow$ $\Rightarrow (F + 3E_2)^{-1}G = E_2X = X$ $(F + 3E_2)^{-1}G$	1 1 1 0,5
Vypočítame maticu Vypočítajme inverznú maticu	$F + 3E_2 =$ $(F + 3E_2)^{-1} :$	$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{cc cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim$ $\left(\begin{array}{cc cc} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$	0,5 2
Vypočítame	$X =$	$(F + 3E_2)^{-1}G =$ $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	1
Skúška správnosti	$G - 3X =$ $FX =$ $LS = PS$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} -35 & 10 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} -35 & 10 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -35 & 10 \\ 11 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -35 & 10 \\ 11 & -3 \end{pmatrix}$	1
Výsledok	$X =$	$\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$	
SPOLU			8

3. PRÍKLAD

Nájdite definičný obor a Taylorov polynóm 4. stupňa funkcie

$$f(x) = e^{x^2} \text{ v bode } x_0 = 0.$$

Riešenie.

Nájdeme	$D(f)$	$= (-\infty, \infty)$	0,25
Vzorec	$T_4[f(x), x_0] =$	$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4$	0,5
Vypočítajme	$f(x_0) =$	$f(0) = e^{0^2} = 1$	0,25
	$f'(x) =$	$(e^{x^2})' = e^{x^2}(x^2)' = 2xe^{x^2}$	1
	$f'(x_0) =$	$2 \cdot 0 \cdot e^{0^2} = 0$	1
	$f''(x) =$	$(2xe^{x^2})' = 2e^{x^2} + 2xe^{x^2} \cdot 2x = (2 + 4x^2)e^{x^2}$	1
	$f''(x_0) =$	$(2 + 4 \cdot 0^2)e^{0^2} = 2$	1
	$f'''(x) =$	$((2 + 4x^2)e^{x^2})' = 8xe^{x^2} + (2 + 4x^2)e^{x^2} \cdot 2x = (12x + 8x^3)e^{x^2}$	1
	$f'''(x_0) =$	$(12 \cdot 0 + 8 \cdot 0^3)e^{0^2} = 0$	1
	$f^{(4)}(x) =$	$((12x + 8x^3)e^{x^2})' = (12 + 24x^2)e^{x^2} + (12x + 8x^3)e^{x^2} \cdot 2x = (12 + 48x^2 + 16x^3)e^{x^2}$	2
	$f^{(4)}(x_0) =$	$(12 + 48 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0^3)e^{0^2} = 12$	1
	$T_4[e^{x^2}, 0] =$	$1 + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{12}{4!}x^4 = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$	1
SPOLU			11

Nájdite definičný obor a Taylorov polynóm 4. stupňa funkcie

$f(x) = e^{x^2}$ v bode $x_0 = 0$.

Iné riešenie.

Nájdeme	$D(f) =$	$(-\infty, \infty)$	0,25
Vzorec	$e^z =$	$1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$	2,75
Substitúcia	$z = x^2$ $e^{x^2} =$	$1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \frac{(x^2)^4}{4!} + \dots =$ $= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \dots$	1 5 1
	$T_4[e^{x^2}, 0] =$	$1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$	1
SPOLU			11

4. PRÍKLAD

Nájdite intervaly monotónnosti funkcie $y = \ln^3(\cos x)$ a všetky jej lokálne extrémny na intervale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Riešenie.

Vypočítame	$f'(x) =$	$(\ln^3(\cos x))' = 3 \ln^2(\cos x) \frac{1}{\cos x} (\cos x)' =$ $3 \ln^2(\cos x) \frac{1}{\cos x} (-\sin x) = -3(\operatorname{tg} x) \ln^2(\cos x)$	3
Položíme	$f'(x) = 0$	$-3(\operatorname{tg} x)(\ln^2(\cos x)) = 0 \Rightarrow \ln^2(\cos x) = 0$ resp. $\operatorname{tg} x = 0$ $\ln^2(\cos x) = 0 \Rightarrow \ln(\cos x) = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0$ resp. $\operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = 0$	1 1 1
Funkcia $f(x)$ má stacionárny bod		$x = 0$	
Nájdeme intervaly, kde	$f'(x) > 0$	$-3(\operatorname{tg} x) \ln^2(\cos x) > 0$. Keďže $\ln^2(\cos x) > 0$, platí $\operatorname{tg} x < 0 \Rightarrow x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$	1 1
Funkcia $f(x)$ je rastúca na intervale		$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	1
Nájdeme intervaly, kde	$f'(x) < 0$	$-3(\operatorname{tg} x)(\ln^2(\cos x)) < 0$. Keďže $\ln^2(\cos x) > 0$, platí $\operatorname{tg} x > 0 \Rightarrow x \in (0, \frac{\pi}{2})$	1 1
Funkcia $f(x)$ je klesajúca na intervale		$(0, \frac{\pi}{2})$	1
Funkcia $f(x)$ má lokálne maximum v bode		$(0, \ln^3 \cos 0) = (0, \ln^3 1) = (0, 0)$	1
		SPOLU	13

5. PRÍKLAD

Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \arctg(\frac{1}{x})$, intervaly, na ktorých je funkcia konvexná, konkávna a jej inflexné body.

Riešenie.

Nájdeme	$D(f) =$	$\{x \mid x \neq 0\} = R - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	1
Vypočítame	$f'(x) =$	$(\arctg(\frac{1}{x}))' = \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot (\frac{1}{x})' = \frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = -\frac{1}{x^2+1}$	2
Vypočítame	$f''(x) =$	$(-\frac{1}{x^2+1})' = -(-1)(x^2+1)^{-2}(x^2+1)' =$ $= \frac{1}{(x^2+1)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$	2
Položíme	$f''(x) = 0$	$\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0$ pre $x = 0 \notin D(f)$	1
Nájdeme intervaly, kde	$f''(x) > 0$	$\frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \Rightarrow x > 0$	1
Funkcia $f(x)$ je konvexná na intervale		$(0, \infty)$	1
Nájdeme intervaly, kde	$f''(x) < 0$	$\frac{2x}{(x^2+1)^2} < 0 \Rightarrow x < 0$	1
Funkcia $f(x)$ je konkávna na intervale		$(-\infty, 0)$	1
Funkcia $f(x)$ inflexný bod		nemá, pretože $0 \notin D(f)$	1
SPOLU			11

ZNÁMKA	A	B	C	D	E	FX/P	FX/N	FN	
--------	---	---	---	---	---	------	------	----	--

SKUPINA

Priezvisko študenta:

Meno študenta:

Číslo študenta z prvej strany indexu:

Dátum:

Krúžok:

Ročník:/Smer:

Číslo príkladu	1	2	3	4	5	Súčet
Hodnotenie učiteľa						
Bodové hodnotenie príkladov	7	8	12	11	12	50
Derivácie	@	@				
Maximum za derivácie	@	@	6	4	6	16
Nezačaté príklady						@
Počet percent z cvičenia max 100	@	@	@	@	@	
	@	@	@	@	@	
Hodnotenie skúšky	53-60 A 46-52 B	39-45 C 33-38 D	28-32 E @	@	@	@

Čas trvania písomnej skúšky: 2 hod.

Ak niektorý príklad nezačnete počítat', napíšte v tabuľke do riadku

Nezačaté príklady pod príslušné číslo príkladu písmeno N.

Na skúške nesmiete používať kalkulačku, mobilný telefón a vlastné papiere.

V prípade, že potrebujete ďalší papier, dozorujúci učiteľ Vám ho dá.

Píšte perom, nie ceruzkou. Výsledky vypíšte aj na prvú stranu.

1. PRÍKLAD.

Gaussovou eliminačnou metódou nájdite všetky riešenia sústavy lineárnych rovníc

$$2y + z + 16 = 0$$

$$2x + 3y + 2z + w + 34 = 0$$

$$-x + y + z + 10 = 0$$

Výsledok: $(x, y, z, t) =$

2. PRÍKLAD. Nájdite inverznú maticu k matici A , kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a urobte skúšku správnosti.

Výsledok: $A^{-1} =$

3. PRÍKLAD. Nájdite rovnicu dotyku a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x) = \frac{\sin^6(\ln 2x + \frac{\pi}{2})}{3}$ v bode $P = [\frac{1}{2}, ?]$.

Výsledok: $d :$

$n :$

4. PRÍKLAD. Nájdite definičný obor, intervaly monotónnosti a všetky lokálne extrém funkcie $f(x) = \operatorname{arccotg}(\frac{1}{x^2})$.

Výsledok: $D(f) =$

Funkcia je na intervale:

Funkcia je na intervale:

Funkcia má lokálny extrém v bode:

5. PRÍKLAD. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \frac{xe^{-4x}}{4}$, intervaly, na ktorých je konvexná, konkávna a jej inflexné body.

Výsledok: $D(f) =$

Funkcia je konvexná na intervale:

Funkcia je konkávna na intervale:

Funkcia má inflexný bod:

1. PRÍKLAD

Gaussovou eliminačnou metódou nájdite všetky riešenia sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 2y + z + 16 &= 0 \\ 2x + 3y + 2z + w + 34 &= 0 \\ -x + y + z + 10 &= 0 \end{aligned}$$

Riešenie.

K danej sústave vytvoríme maticu sústavy A a rozšírenú maticu sústavy A' , ktorú upravíme na trojuholníkový tvar pomocou elementárnych riadkových úprav.

$$\begin{aligned} A' &= \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 & -16 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & -34 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & -10 \end{array} \right) \begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \\ \uparrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & -10 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & -34 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -16 \end{array} \right) \begin{array}{c} (2) \\ \downarrow \\ \end{array} \sim \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 5 & 4 & 1 & -54 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -16 \end{array} \right) \begin{array}{c} \uparrow \\ (-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -22 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -16 \end{array} \right) \begin{array}{c} (-2) \\ \downarrow \end{array} \sim \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 28 \end{array} \right) \begin{array}{c} \\ \\ -\frac{1}{2} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & -14 \end{array} \right) = \triangle \text{ tvar} \end{aligned}$$

Takto upravenú rozšírenú maticu sústavy prepíšeme naspäť do rovníc.

$$\begin{aligned} -x + y + z &= -10 \\ y + 2z + w &= -22 \\ \frac{3}{2}z + w &= -14 \end{aligned}$$

		Správne upravená matica na $\triangle$ tvar	3
Nájdeme hodnotu matice A'	$h(A') =$	3 je počet nenulových riadkov v matici A' upravenej na $\triangle$ tvar	0,25
Nájdeme hodnotu matice A	$h(A) =$	3 je počet nenulových riadkov v matici A upravenej na $\triangle$ tvar	0,25
Počet neznámych	$n =$	3	
Frobeniova veta	Ak $h(A') = h(A) < n$,	tak sústava má nekonečne veľa riešení	0,5
Počet parametrov	$n - h(A) =$	$4 - 3 = 1 \Rightarrow$ zvolíme jednu neznámu ako parameter	
Zvolíme neznámu	$z =$	a	0,5
Dosadíme do 3. rovnice	$z =$ $\frac{3}{2}z + w = -14$	a $\frac{3}{2}a + w = -14 \Rightarrow w = -14 - \frac{3}{2}a$	0,5
Dosadíme do 2. rovnice	$w =$ $z =$ $y + 2z + w = -22$ $y =$	$-14 - \frac{3}{2}a$ a $y + 2a - 14 - \frac{3}{2}a = -22 \Rightarrow$ $y = -22 - 2a + 14 + \frac{3}{2}a \Rightarrow$ $-8 - \frac{a}{2}$	0,5
Dosadíme do 1. rovnice	$y =$ $w =$ $z =$ $-x + y + z = -10$	$-8 - \frac{a}{2}$ $-14 - \frac{3}{2}a$ a $-x - 8 - \frac{a}{2} + a = -10$ $\Rightarrow x = 2 + \frac{a}{2}$	0,5
Všeobecné riešenie	$(x, y, z, w) =$	$(2 + \frac{a}{2}, -8 - \frac{a}{2}, a, -14 - \frac{3}{2}a) =$ $(2, -8, 0, -14) + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2})a,$ $a \in R$	0,5 0,5
SPOLU			7

2. PRÍKLAD

Maximálny celkový počet bodov 8.

Nájdite inverznú maticu k matici A , kde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

a urobte skúšku správnosti.

Riešenie.

Inverznú maticu hľadáme tak, že spolu tými istými riadkovými elementárnymi operáciami upravujeme maticu A na jednotkovú maticu a jednotkovú maticu E na maticu A^{-1}

$$A^{-1} : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} (-1) \\ \downarrow \\ \downarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} (-1) \\ \downarrow \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} \uparrow \\ (4) \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ (-3) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{c} (-1) \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Za skúšku správnosti 2 body.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1+0+0, & 3+0-3 & -3+0+3 \\ 1-1+0, & 3-3+1, & -3+4-1 \\ 1-1+0, & 3-3+0, & -3+4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. PRÍKLAD

Nájdite rovnicu dotyčnice a rovnicu normály ku grafu funkcie

$$f(x) = \frac{\sin^6(\ln 2x + \frac{\pi}{2})}{3} \text{ v bode } P = [\frac{1}{2}, ?].$$

Riešenie.

Určíme	$x_0 =$	$\frac{1}{2}$	0,5
Rovnica dotyčnice	$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$		0,5
Dosadíme x_0 do $f(x)$	$f(x_0) =$	$f(\frac{1}{2}) = \frac{\sin^6(\ln(2\frac{1}{2}) + \frac{\pi}{2})}{3} = \frac{\sin^6(\ln 1 + \frac{\pi}{2})}{3} =$ $= \frac{\sin^6(0 + \frac{\pi}{2})}{3} = \frac{\sin^6(\frac{\pi}{2})}{3} = \frac{1^6}{3} = \frac{1}{3}$	1
Vypočítame	$f'(x) =$	$(\frac{\sin^6(\ln 2x + \frac{\pi}{2})}{3})' =$ $= \frac{1}{3} 6 \sin^5(\ln 2x + \frac{\pi}{2}) (\sin(\ln 2x + \frac{\pi}{2}))' =$ $= 2 \sin^5(\ln 2x + \frac{\pi}{2}) \cos(\ln 2x + \frac{\pi}{2}) (\ln 2x + \frac{\pi}{2})' =$ $= 2 \sin^5(\ln 2x + \frac{\pi}{2}) (\cos(\ln 2x + \frac{\pi}{2})) \frac{2}{2x} =$ $= \frac{2}{x} \sin^5(\ln 2x + \frac{\pi}{2}) \cos(\ln 2x + \frac{\pi}{2})$	6
Dosadíme x_0 do $f'(x)$	$f'(x_0) =$	$f'(\frac{1}{2}) =$ $= 2 \sin^5(\ln(2 \cdot \frac{1}{2}) + \frac{\pi}{2}) (\cos(\ln(2 \cdot \frac{1}{2}) + \frac{\pi}{2})) \frac{1}{\frac{1}{2}} =$ $= 2 \sin^5(\ln 1 + \frac{\pi}{2}) (\cos(\ln 1 + \frac{\pi}{2})) \cdot 2 =$ $= 4 \sin^5(0 + \frac{\pi}{2}) (\cos(0 + \frac{\pi}{2})) =$ $= 4 \sin^5(\frac{\pi}{2}) (\cos(\frac{\pi}{2})) = 0$	1
Dosadíme $x_0, f(x_0),$ $f'(x_0)$ do rovnice dotyčnice		$y - \frac{1}{3} = 0(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow y = \frac{1}{3}$	1
Rovnica normály	$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$		0,5
Pretože $f'(x_0) = 0$ rovnica normály je		$x = \frac{1}{2}$	1,5
SPOLU			12

4. PRÍKLAD

Nájdite definičný obor, intervaly monotónnosti a všetky lokálne extrémny funkcie $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x^2}$.

Riešenie.

Nájdeme	$D(f) =$	$\{x \mid x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	1
Vypočítame	$f'(x) =$	$-\frac{1}{1+(\frac{1}{x^2})^2}(-\frac{2}{x^3}) = -\frac{1}{\frac{x^4+1}{x^4}}(-\frac{2}{x^3}) = \frac{2x^4}{x^3(x^4+1)} = \frac{2x}{x^4+1}$	4
Položíme	$f'(x) = 0$	$\frac{2x}{x^4+1} = 0 \Rightarrow x = 0$	1
Funkcia $f(x)$ stacionárny bod		nemá, pretože $0 \notin D(f)$	1
Nájdeme interval, kde	$f'(x) > 0$	$\frac{2x}{x^4+1} > 0$. Keďže $x^4 + 1 > 0$, platí $x > 0 \Rightarrow x \in (0, \infty)$	0,5
Funkcia $f(x)$ je rastúca na intervale		$(0, \infty)$	1
Nájdeme interval, kde	$f'(x) < 0$	$\frac{2x}{x^4+1} < 0$. Keďže $x^4 + 1 > 0$, platí $x < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0)$	0,5
Funkcia $f(x)$ je klesajúca na intervale		$(-\infty, 0)$	1
Funkcia $f(x)$ nemá lokálne extrémy			1
SPOLU			11

5. PRÍKLAD

Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \frac{xe^{-4x}}{4}$, intervaly, na ktorých je funkcia konvexná, konkávna a jej inflexné body.

Riešenie.

Nájdeme	$D(f) =$	$(-\infty, \infty)$	0,5
Vypočítame	$f'(x) =$ $f''(x) =$	$(\frac{xe^{-4x}}{4})' = \frac{1}{4}(1 \cdot e^{-4x} + xe^{-4x}(-4)) = \frac{1}{4}e^{-4x}(1 - 4x)$ $(\frac{1}{4}e^{-4x}(1 - 4x))' =$ $= \frac{1}{4}(e^{-4x}(-4)(1 - 4x) + e^{-4x}(-4)) =$ $= \frac{-4}{4}e^{-4x}(1 - 4x + 1) = e^{-4x}(4x - 2)$	2 4
Položíme	$f''(x) = 0$	$e^{-4x}(4x - 2) = 0 \Rightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$	1
Nájdeme intervaly, kde	$f''(x) > 0$	$e^{-4x}(4x - 2) > 0 \Rightarrow 4x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{2}$	1
Funkcia $f(x)$ je konvexná na intervale		$(\frac{1}{2}, \infty)$	1
Nájdeme intervaly, kde	$f''(x) < 0$	$e^{-4x}(4x - 2) < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2}$	1
Funkcia $f(x)$ je konkávna na intervale		$(-\infty, \frac{1}{2})$	1
Funkcia $f(x)$ má inflexný bod		$[\frac{1}{2}, \frac{\frac{1}{2}e^{-4 \cdot \frac{1}{2}}}{4}] = [\frac{1}{2}, \frac{1}{8}e^{-2}]$	0,5
SPOLU			12

ZNÁMKA	A	B	C	D	E	FX/P	FX/N	FN	
--------	---	---	---	---	---	------	------	----	--

SKUPINA

Priezvisko študenta:

Meno študenta:

Číslo študenta z prvej strany indexu:

Dátum:

Krúžok:

Ročník:/Smer:

Číslo príkladu	1	2	3	4	5	Súčet
Hodnotenie učiteľa						
Bodové hodnotenie príkladov	7	8	10	12	13	50
Derivácie	@	@				
Maximum za derivácie	@	@	6	4	6	16
Nezačaté príklady						@
Počet percent z cvičenia max 100	@ @	@ @	@ @	@ @	@ @	
Hodnotenie skúšky	53-60 A 46-52 B	39-45 C 33-38 D	28-32 E @	@ @	@ @	@ @

Čas trvania písomnej skúšky: 2 hod.

Ak niektorý príklad nezačnete počítať, napíšte v tabuľke do riadku

Nezačaté príklady pod príslušné číslo príkladu písmeno N.

Na skúške nesmiete používať kalkulačku, mobilný telefón a vlastné papiere.

V prípade, že potrebujete ďalší papier, dozorujúci učiteľ Vám ho dá.

Píšte perom, nie ceruzkou. Výsledky vypíšte aj na prvú stranu.

1. PRÍKLAD. Gaussovou eliminačnou metódou nájdite všetky riešenia sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} 3x + y + t - 8 &= 0 \\ 2y + 3z + t - 24 &= 0 \\ 3x + 3z + 2t - 2 &= 0 \\ 3x + y - 3z - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Výsledok: $(x, y, z, t) =$

2. PRÍKLAD. Zistite, pre ktoré p je matica A regulárna, kde $A = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Výsledok: $p =$

3. PRÍKLAD. Nájdite rovnicu dotyčnice a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x) = \ln \frac{x+2}{2-x}$ v bode $P = [1, ?]$.
Výsledok: $d :$ $n :$

4. PRÍKLAD. Nájdite definičný obor, intervaly monotónnosti a všetky lokálne extrém funkcie $f(x) = x^2 e^{-4x}$.

Výsledok: $D(f) =$

Funkcia je na intervale:

Funkcia je na intervale:

Funkcia má lokálny extrém v bode:

5. PRÍKLAD. Nájdite definičný obor a intervaly, na ktorých je funkcia $f(x) = 3 \arccos(\frac{x}{3} - 1)$ konvexná, konkávna a jej inflexné body.

Výsledok: $D(f) =$

Funkcia je konvexná na intervale:

Funkcia je konkávna na intervale:

Funkcia má inflexný bod:

1. PRÍKLAD

Gaussovou eliminačnou metódou nájdite všetky riešenia sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned}3x + y + t - 8 &= 0 \\2y + 3z + t - 24 &= 0 \\3x + 3z + 2t - 2 &= 0 \\3x + y - 3z - 4 &= 0\end{aligned}$$

Riešenie.

K danej sústave vytvoríme maticu sústavy A a rozšírenú maticu sústavy A' , ktorú upravíme na trojuholníkový tvar pomocou elementárnych riadkových úprav.

$$\begin{aligned}A' &= \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 24 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{cc} -1 & -1 \\ \downarrow & \downarrow \\ & \downarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 24 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{c} \downarrow \\ \uparrow \end{array} \sim \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 24 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 9 & 3 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{c} (-1) \\ \frac{1}{3} \end{array} \sim \\ &\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -4 \end{array} \right) \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \triangle \text{ tvar}\end{aligned}$$

Takto upravenú rozšírenú maticu sústavy prepíšeme naspäť do rovníc.

$$\begin{aligned}3x + y &+ t = 8 \\ y - 3z - t &= 6 \\ 3z + t &= 4\end{aligned}$$

		Správne upravená matica na $\triangle$ tvar	3
Nájdeme hodnotu matice A'	$h(A') =$	3 je počet nenulových riadkov v matici A' upravenej na $\triangle$ tvar	0,25
Nájdeme hodnotu matice A	$h(A) =$	3 je počet nenulových riadkov v matici A upravenej na $\triangle$ tvar	0,25
Počet neznámych	$n =$	3	
Frobeniova veta	Ak $h(A') = h(A) < n$,	tak sústava má nekonečne veľa riešení	0,5
Počet parametrov	$n - h(A) =$	$4 - 3 = 1 \Rightarrow$ zvolíme jednu neznámu ako parameter	
Zvolíme neznámu	$z =$	a	0,5
Dosadíme do 3. rovnice	$z =$ $3z + t = 4$	a $3a + t = 4 \Rightarrow t = 4 - 3a$	0,5
Dosadíme do 2. rovnice	$t =$ $z =$ $y - 3z - t = 6$	$4 - 3a$ a $y - 3a - (4 - 3a) = 6 \Rightarrow y = 10$	0,5
Dosadíme do 1. rovnice	$y =$ $t =$ $z =$ $3x + y + t = 8$	10 $4 - 3a$ a $3x + 10 + 4 - 3a = 8 \Rightarrow$ $3x = -6 + 3a \Rightarrow x = a - 2$	0,5
Všeobecné riešenie	$(x, y, z, t) =$	$(a - 2, 10, a, 4 - 3a) =$ $= (-2, 10, 0, 4) + (1, 0, 1, -3)a,$ $a \in R$	0,5 0,5
SPOLU			7

2. PRÍKLAD

Maximálny počet bodov 8.

Zistite, pre ktoré p je matica A regulárna, kde

$$A = \begin{pmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Riešenie.

Štvorcová matica A je regulárna práve vtedy, keď jej determinant $|A| \neq 0$.

Najprv determinant upravíme pomocou riadkových elementárnych úprav tak, aby sme vo štvrtom riadku dostali tri nuly.

$$|A| = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ (-1) \\ \\ \downarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Rozvineme determinant podľa štvrtého riadka

$$|A| = 1(-1)^{4+4} \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (\frac{1}{2}) \end{matrix} = 2 \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ (-1) \end{matrix} =$$

$$2 \begin{vmatrix} p-1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Rozvineme determinant podľa prvého riadka

$$|A| = 2(-1)^{1+1}(p-1) \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(p-1)(-2 - (-1)) = 2(p-1)(-1) = 2(1-p)$$

Výsledok: Matica A je regulárna práve vtedy, keď $p \neq 1$.

3. PRÍKLAD

Nájdite rovnicu dotyčnice a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x) = \ln \frac{x+2}{2-x}$ v bode $P = [1, ?]$.

Riešenie.

Určíme	$x_0 =$	1	0,5
Rovnica dotyčnice	$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$		0,5 0,5
Dosadíme x_0 do $f(x)$	$y_0 = f(x_0) =$	$f(1) = \ln \frac{1+2}{2-1} = \ln 3$	1
Vypočítame	$f'(x) =$	$(\ln \frac{x+2}{2-x})' = \frac{1}{\frac{x+2}{2-x}} \frac{1(2-x) - (x+2)(-1)}{(2-x)^2} =$ $= \frac{2-x}{(x+2)} \frac{4}{(2-x)^2} = \frac{4}{4-x^2}$	4
Dosadíme x_0 do $f'(x)$	$f'(x_0) =$	$f'(1) = \frac{4}{4-1^2} = \frac{4}{3}$	1
Dosadíme $x_0, f(x_0), f'(x_0)$ do rovnice dotyčnice		$y - \ln 3 = \frac{4}{3}(x - 1)$	1
Rovnica normály	$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$		0,5
Dosadíme $x_0, f(x_0), f'(x_0)$ do rovnice normály		$y - \ln 3 = -\frac{3}{4}(x - 1)$	1
		SPOLU	10

4. PRÍKLAD

Nájdite definičný obor, intervaly monotónnosti a všetky lokálne extrémny funkcie $f(x) = x^2 e^{-4x}$.

Riešenie.

Nájdeme	$D(f) =$	$R = (-\infty, \infty)$	1
Vypočítame	$f'(x) =$	$(x^2 e^{-4x})' = 2x e^{-4x} + x^2 e^{-4x}(-4) = e^{-4x}(2x - 4x^2) = 2e^{-4x}(x - 2x^2)$	3
Položíme	$f'(x) = 0$	$2e^{-4x}(x - 2x^2) = 0 \Rightarrow$ $x(1 - 2x) = 0 \Rightarrow x = 0$ alebo $1 - 2x = 0$ $1 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$	1 1
Funkcia $f(x)$ má stacionárne body		$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$	
Nájdeme interval, kde	$f'(x) > 0$	$2e^{-4x}(x - 2x^2) > 0$. Keďže $e^{-4x} > 0$, platí $x(1 - 2x) > 0$ $y = x(1 - 2x)$ je rovnica paraboly s nulovými bodmi $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{1}{2}$ orientovaná vrcholom hore $\Rightarrow x \in (0, \frac{1}{2})$	1
Funkcia $f(x)$ je rastúca na intervale		$(0, \frac{1}{2})$	1
Nájdeme interval, kde	$f'(x) < 0$	$2e^{-4x}(x - 2x^2) < 0$. Keďže $e^{-4x} > 0$, platí $x(1 - 2x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$.	1
Funkcia $f(x)$ je klesajúca na intervaloch		$(-\infty, 0)$ a $(\frac{1}{2}, \infty)$	1
Funkcia $f(x)$ má lokálne minimum v bode		$(0, 0^2 \cdot e^{-4 \cdot 0}) = (0, 0)$	1
Funkcia $f(x)$ má lokálne maximum v bode		$(\frac{1}{2}, (\frac{1}{2})^2 e^{-4 \cdot (\frac{1}{2})}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4} e^{-2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4e^2})$.	1
SPOLU			12

5. PRÍKLAD

Nájdite definičný obor a intervaly, na ktorých je funkcia $f(x) = 3 \arccos(\frac{x}{3} - 1)$ konvexná, konkávna a jej inflexné body.

Riešenie.

Nájdeme	$D(f) =$	$\{x \mid -1 \leq \frac{x}{3} - 1 \leq 1\} = \{x \mid 0 \leq \frac{x}{3} \leq 2\} =$ $= \{x \mid 0 \leq x \leq 6\}$	1
Vypočítame	$f'(x) =$	$(3 \arccos(\frac{x}{3} - 1))' =$ $= 3 \cdot \frac{-1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{3} - 1)^2}} \cdot (\frac{1}{3}) = -\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{3} - 1)^2}} =$ $= -(1 - (\frac{x}{3} - 1)^2)^{-\frac{1}{2}}$	3
	$f''(x) =$	$(-(1 - (\frac{x}{3} - 1)^2)^{-\frac{1}{2}})' =$ $= \frac{1}{2} \cdot (1 - (\frac{x}{3} - 1)^2)^{-\frac{3}{2}} (-2)(\frac{x}{3} - 1) \cdot \frac{1}{3} =$ $= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{x}{3} - 1)^2)^3}} (\frac{x}{3} - 1)$	2 2
Položíme	$f''(x) = 0$	$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{x}{3} - 1)^2)^3}} (\frac{x}{3} - 1) = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} - 1 = 0 \Rightarrow x = 3$	0,5
Nájdeme intervaly, kde	$f''(x) > 0$	$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{x}{3} - 1)^2)^3}} (\frac{x}{3} - 1) > 0$ Keďže $\sqrt{(1 - (\frac{x}{3} - 1)^2)^3} > 0$, platí $-\frac{1}{3}(\frac{x}{3} - 1) > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow -(\frac{x}{3} - 1) > 0 \Rightarrow \frac{x}{3} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow x < 3$	1
Funkcia $f(x)$ je konvexná na intervale		$< 0, 3)$	1
Nájdeme intervaly, kde	$f''(x) < 0$	$-\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 - (\frac{x}{3} - 1)^2)^3}} (\frac{x}{3} - 1) < 0$ Keďže $\sqrt{(1 - (\frac{x}{3} - 1)^2)^3} > 0$, platí $-\frac{1}{3}(\frac{x}{3} - 1) < 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow (\frac{x}{3} - 1) > 0 \Rightarrow \frac{x}{3} > 1 \Rightarrow x > 3$	1
Funkcia $f(x)$ je konkávna na intervale		$(3, 6 >$	1
Funkcia $f(x)$ má inflexný bod		$[3, \arccos(\frac{3}{3} - 1)] = [3, \arccos 0] = [3, \frac{\pi}{2}]$	0,5
SPOLU			13

ZNÁMKA	A	B	C	D	E	FX/P	FX/N	FN	
--------	---	---	---	---	---	------	------	----	--

SKUPINA

Priezvisko študenta:

Meno študenta:

Číslo študenta z prvej strany indexu:

Dátum:

Krúžok:

Ročník:/Smer:

Číslo príkladu	1	2	3	4	5	Súčet
Hodnotenie učiteľa						
Bodové hodnotenie príkladov	7	8	13	11	11	50
Derivácie	@	@				
Maximum za derivácie	@	@	7	5	3	15
Nezačaté príklady						@
Počet percent z cvičenia max 100	@ @	@ @	@ @	@ @	@ @	
Hodnotenie skúšky	53-60 A 46-52 B	39-45 C 33-38 D	28-32 E @	@ @	@ @	@ @

Čas trvania písomnej skúšky: 2 hod.

Ak niektorý príklad nezačnete počítať, napíšte v tabuľke do riadku

Nezačaté príklady pod príslušné číslo príkladu písmeno N.

Na skúške nesmiete používať kalkulačku, mobilný telefón a vlastné papiere.

V prípade, že potrebujete ďalší papier, dozorujúci učiteľ Vám ho dá.

Píšte perom, nie ceruzkou. Výsledky vypíšte aj na prvú stranu.

1. PRÍKLAD. Gaussovou eliminačnou metódou nájdite všetky riešenia sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} -x + y + 2z + 3 &= 0 \\ -3x + y + 2z - 3 &= 0 \\ 15x + 5y + 10z + 75 &= 0 \\ y + 2z + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Výsledok: $(x, y, z) =$

2. PRÍKLAD. Vypočítajte determinant matice $A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Výsledok: $|A| =$

3. PRÍKLAD. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \arctg^3(\frac{2-x}{x})$ a rovnicu dotýčnice a rovnicu normály k jej grafu v bode $P = [1, ?]$.

Výsledok: $d :$

$n :$

4. PRÍKLAD. Nájdite definičný obor, intervaly monotónnosti a lokálne extrém funkcie $y = \frac{e^{5x}}{\sqrt{x}}$.

Výsledok: $D(f) =$

Funkcia je na intervale:

Funkcia je na intervale:

Funkcia má lokálny extrém v bode:

5. PRÍKLAD. Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, intervaly, na ktorých je funkcia konvexná, konkávna a jej inflexné body.

Výsledok: $D(f) =$

Funkcia je konvexná na intervale:

Funkcia je konkávna na intervale:

Funkcia má inflexný bod:

1. PRÍKLAD

Gaussovou eliminačnou metódou nájdite všetky riešenia sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{aligned} -x + y + 2z + 3 &= 0 \\ -3x + y + 2z - 3 &= 0 \\ 15x + 5y + 10z + 75 &= 0 \\ y + 2z + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Riešenie.

K danej sústave vytvoríme maticu sústavy A a rozšírenú maticu sústavy A' , ktorú upravíme na trojuholníkový tvar pomocou elementárnych riadkových úprav.

$$\begin{aligned} A' &= \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ 15 & 5 & 10 & -75 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{c} -1 \\ \\ \frac{1}{5} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & -15 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{c} 3 \quad -3 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \downarrow \end{array} \sim \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 12 \\ 0 & 4 & 8 & -24 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \end{array} \right) \frac{1}{2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & -24 \\ 0 & 1 & 2 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{c} 4 \quad 1 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \downarrow \end{array} \sim \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = \triangle \text{ tvar} \end{aligned}$$

Takto upravenú rozšírenú maticu sústavy prepíšeme naspäť do rovníc.

$$\begin{array}{rrrr} x & - & y & - & 2z & = & 3 \\ & & - & y & - & 2z & = & 6 \end{array}$$

		Správne upravená matica na $\triangle$ tvar	3
Nájdeme hodnotu matice A'	$h(A') =$	2 je počet nenulových riadkov v matici A' upravenej na $\triangle$ tvar	0,25
Nájdeme hodnotu matice A	$h(A) =$	2 je počet nenulových riadkov v matici A upravenej na $\triangle$ tvar	0,25
Počet neznámych	$n =$	3	
Frobeniova veta	Ak $h(A') = h(A) < n$,	tak sústava má nekonečne veľa riešení	0,5
Počet parametrov	$n - h(A) =$	$3 - 2 = 1 \Rightarrow$ zvolíme jednu neznámu ako parameter	
Zvolíme neznámu	$z =$	a	0,5
Dosadíme do 2. rovnice	$z =$ $-y - 2z = 6$	a $-y - 2a = 6 \Rightarrow y = -6 - 2a$	0,5
Dosadíme	$y =$	$-6 - 2a$	
	$z =$	a	
do 1. rovnice	$x - y - 2z = 3$	$x + 6 + 2a - 2a = 3 \Rightarrow x = -3$	0,5
Všeobecné riešenie	$(x, y, z) =$	$(-3, -6 - 2a, a) =$ $= (-3, -6, 0) + (0, -2, 1)a, \quad a \in R$	0,5 1
SPOLU			7

2. PRÍKLAD

Maximálny počet bodov 8.

Vypočítajte determinant matice A

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 4 & 0 \\ -3 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Riešenie.

Rozvinieme determinant podľa prvého riadka

$$|A| = 11(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 11 \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} + 4 \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \uparrow \\ \uparrow \end{matrix} =$$

$$= 11 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -7 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Obidva determinanty rozvinieme podľa tretieho stĺpca

$$11.1.(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} + 4.1(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -11 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -11(6 - 3) - 4(-21) = -33 + 84 = 51.$$

Výsledok: $|A| = 51$.

3. PRÍKLAD

Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \arctg^3(\frac{2-x}{x})$ a rovnicu dotyčnice a rovnicu normály k jej grafu v bode $P = [1, ?]$.

Riešenie.

Určíme	$x_0 =$	1	0,5
Nájdeme	$D(f) =$	$\{x \mid x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	0,5
Rovnica dotyčnice	$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$		0,5
Dosadíme x_0 do $f(x)$	$f(x_0) =$	$f(1) = (\arctg(\frac{2-1}{1}))^3 = (\arctg 1)^3 = (\frac{\pi}{4})^3 = \frac{\pi^3}{64}$	1
Vypočítame	$f'(x) =$	$(\arctg^3(\frac{2-x}{x}))' =$ $= 3 \arctg^2(\frac{2-x}{x})(\arctg(\frac{2-x}{x}))' =$ $= 3 \arctg^2(\frac{2-x}{x}) \frac{1}{1+(\frac{2-x}{x})^2} \cdot (\frac{2-x}{x})' =$ $= 3 \arctg^2(\frac{2-x}{x}) \frac{1}{\frac{x^2+4-4x+x^2}{x^2}} \cdot (-\frac{2}{x^2}) =$ $= -\frac{3}{x^2-2x+2} \arctg^2(\frac{2-x}{x})$	7
Dosadíme x_0 do $f'(x)$	$f'(x_0) =$	$f'(1) = -3(\frac{\pi}{4})^2 = -\frac{3\pi^2}{16}$	1
Dosadíme $x_0, f(x_0), f'(x_0)$ do rovnice dotyčnice		$y - \frac{\pi^3}{64} = -\frac{3\pi^2}{16}(x - 1)$	1
Rovnica normály	$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$		0,5
Dosadíme $x_0, f(x_0), f'(x_0)$ do rovnice normály		$y - \frac{\pi^3}{64} = \frac{16}{3\pi^2}(x - 1)$	1
SPOLU			13

4. PRÍKLAD

Nájdite definičný obor, intervaly monotónnosti a lokálne extrémny funkcie $f(x) = \frac{e^{5x}}{\sqrt{x}}$.

Riešenie.

Nájdeme	$D(f) =$	$R^+ = (0, \infty)$	1
Vypočítame	$f'(x) =$	$(\frac{e^{5x}}{\sqrt{x}})' = \frac{5e^{5x}\sqrt{x} - e^{5x}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{5e^{5x}2x - e^{5x}}{2x\sqrt{x}} = \frac{e^{5x}(10x-1)}{2x\sqrt{x}}$	5
Položíme	$f'(x) = 0$	$f'(x) = \frac{e^{5x}(10x-1)}{2x\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow 10x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{10}$	1
Funkcia $f(x)$ má stacionárny bod		$x = \frac{1}{10}$	1
Nájdeme interval, kde	$f'(x) > 0$	$\frac{e^{5x}(10x-1)}{2x\sqrt{x}} > 0.$ Keďže $\frac{e^{5x}}{2x\sqrt{x}} > 0$, platí $10x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{10}$	
Funkcia $f(x)$ je rastúca na intervale		$(\frac{1}{10}, \infty)$	1
Nájdeme interval, kde	$f'(x) < 0$	$\frac{e^{5x}(10x-1)}{2x\sqrt{x}} < 0.$ Keďže $\frac{e^{5x}}{2x\sqrt{x}} > 0$, platí $10x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{10}$	
Funkcia $f(x)$ je klesajúca na intervale		$(0, \frac{1}{10})$	1
Funkcia $f(x)$ má lokálne minimum v bode		$[\frac{1}{10}, \sqrt{10}e^{\frac{1}{2}}] = [\frac{1}{10}, \sqrt{10}e]$	1
SPOLU			11

5. PRÍKLAD

Nájdite definičný obor funkcie $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, intervaly, na ktorých je funkcia konvexná, konkávna a jej inflexné body.

Riešenie.

Nájdeme	$D(f) =$	$R^+ = (0, \infty)$	0,5
Vypočítame	$f'(x) =$	$(\frac{\ln x}{x})' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$	2
	$f''(x) =$	$(\frac{1 - \ln x}{x^2})' = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x)2x}{x^4} = \frac{-x - 2x + 2x \ln x}{x^4} =$ $= \frac{-3x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{x(2 \ln x - 3)}{x^4} = \frac{(2 \ln x - 3)}{x^3}$	3
Položíme	$f''(x) = 0$	$\frac{(2 \ln x - 3)}{x^3} = 0$. Keďže $x > 0 \Rightarrow (2 \ln x - 3) = 0$ $\Rightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Rightarrow \ln x = \ln e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}}$	1
Nájdeme intervaly, kde	$f''(x) > 0$	$\frac{(2 \ln x - 3)}{x^3} > 0$. Keďže $x > 0 \Rightarrow (2 \ln x - 3) > 0$ $\Rightarrow \ln x > \frac{3}{2} \Rightarrow \ln x > \ln e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x > e^{\frac{3}{2}}$	1
Funkcia $f(x)$ je konvexná na intervale		$(e^{\frac{3}{2}}, \infty)$	1
Nájdeme intervaly, kde	$f''(x) < 0$	$\frac{(2 \ln x - 3)}{x^3} < 0$. Keďže $x > 0 \Rightarrow (2 \ln x - 3) < 0$ $\Rightarrow \ln x < \frac{3}{2} \Rightarrow \ln x < \ln e^{\frac{3}{2}} \Rightarrow x < e^{\frac{3}{2}}$	1
Funkcia $f(x)$ je konkávna na intervale		$(0, e^{\frac{3}{2}})$	1
Funkcia $f(x)$ má inflexný bod		$[e^{\frac{3}{2}}, \frac{\ln(e^{\frac{3}{2}})}{e^{\frac{3}{2}}}] = [e^{\frac{3}{2}}, \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}}] = [e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}]$	0,5
SPOLU			11

2 LETNÝ SEMESTER

2.1 Neurčité integrály

2.1.1 Substitúcia

Príklad 2.1.1.1 Vypočítajte integrál $\int \frac{x dx}{\sqrt{4-x}}$.

Riešenie.

Substitúcia	$\{4 - x = t^2, -1 \cdot dx = 2t dt, x = 4 - t^2\}$	2
Dosadíme substitúciu	$\int \frac{x}{\sqrt{4-x}} dx = \int \frac{4-t^2}{\sqrt{t^2}} (-2t dt) = 2 \int (t^2 - 4) dt =$	2
	$2(\frac{t^3}{3} - 4t) + C =$	2
	$\frac{2}{3} \sqrt{(4-x)^3} - 8\sqrt{4-x} + C$	1
Výsledok	$\int \frac{x dx}{\sqrt{4-x}} = \frac{2}{3} \sqrt{(4-x)^3} - 8\sqrt{4-x} + C$	
SPOLU		7

Príklad 2.1.1.2 Vypočítajte integrál $\int \frac{\ln x - 2}{x\sqrt{\ln x}} dx$.

Riešenie.

Substitúcia	$\{\ln x = t, \frac{dx}{x} = dt, dx = x dt\}$	2
Dosadíme substitúciu	$\int \frac{\ln x - 2}{x\sqrt{\ln x}} dx = \int \frac{t-2}{x\sqrt{t}} x dt = \int \frac{t-2}{\sqrt{t}} dt =$	2
	$\int (t^{\frac{1}{2}} - 2t^{-\frac{1}{2}}) dt = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C =$	2
	$\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} - 4(\ln x)^{\frac{1}{2}} + C$	1
Výsledok	$\int \frac{\ln x - 2}{x\sqrt{\ln x}} dx = \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}} - 4(\ln x)^{\frac{1}{2}} + C$	
SPOLU		7

2.1.1.2.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

Vypočítajte integrály.

1. $\int (18x^8 + \frac{1}{2x^3} + 3) dx$
2. $\int (\sqrt{x} + \frac{3}{1+x^2}) dx$
3. $\int (\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{x+1}) dx$
4. $\int (\sin \frac{x}{3} - 6e^{-3x}) dx$
5. $\int (3x - 1)^8 dx$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$
7. $\int \frac{dx}{x^2-4x+4}$
8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{5-x}}$
9. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$
10. $\int x^2 e^{x^3} dx$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+1}}$
12. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
13. $\int \frac{\sqrt{x-9}}{x} dx$
14. $\int e^{1-5x} dx$
15. $\int \sin^5 x \cos x dx$
16. $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$
17. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
18. $\int \frac{e^x}{1-e^x} dx$
19. $\int \frac{1}{x^2} \operatorname{tg} \frac{1}{x} dx$
20. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$
21. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x-4}}$
22. $\int \frac{9}{\sqrt{e^{2x}-9}} dx$

Výsledky.

1. $2x^9 - \frac{1}{4x^2} + 3x + C$; 2. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 3 \operatorname{arctg} x + C$; 3. $3x^{\frac{1}{3}} - \arcsin x + \ln |x+1| + C$;
4. $-3 \cos \frac{x}{3} + 2e^{-3x} + C$; 5. $\frac{1}{27}(3x-1)^9 + C$; 6. $\arcsin \frac{x}{2} + C$; 7. $\frac{1}{2-x} + C$;
8. $-\frac{2\sqrt{5-x}(10+x)}{3}$; 9. $-\sqrt{4-x^2} + C$; 10. $\frac{1}{3}e^{x^3} + C$; 11. $\frac{2}{5}\sqrt{5x+1} + C$;
12. $-2\sqrt{1-x^2} - \arcsin x + C$; 13. $2\sqrt{x-9} - 6 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x-9}}{3} + C$; 14. $-\frac{1}{5}e^{1-5x} + C$; 15. $\frac{\sin^6 x}{6} + C$;
16. $\frac{1}{3 \cos^3 x} + C$; 17. $\frac{\arcsin^2 x}{2} + C$; 18. $-\ln |1-e^x| + C$; 19. $\ln |\cos(\frac{1}{x})| + C$; 20. $-\cos(\ln x) + C$;
21. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x-4}}{2} + C$; 22. $3 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{e^{2x}-9}}{3} + C$.

2.1.1.2.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

Vypočítajte integrály.

1. $\int (5x^4 + \frac{1}{2x^2} + 1) dx$
2. $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^2 dx$
3. $\int (\frac{x}{2} - 1)^{100} dx$
4. $\int \operatorname{tg} 2x dx$
5. $\int \frac{dx}{9x^2+4}$
6. $\int (\cos 2x + \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}) dx$
7. $\int \frac{dx}{x^2+6x+9}$
8. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$
9. $\int \sin x \sqrt{1+\cos x} dx$
10. $\int x^3 \sqrt{1+x^2} dx$
11. $\int \frac{24x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$
12. $\int \frac{8x - (\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2} dx$

$$13. \int \frac{e^x \sqrt{1-e^x}}{5-e^x} dx$$

$$14. \int \frac{dx}{2x+\sqrt{x}} dx$$

$$15. \int \frac{\sqrt{x-9}}{x} dx$$

$$16. \int \frac{e^{4x}}{e^{2x}-4} dx$$

Výsledky.

1. $x^5 - \frac{1}{2x} + x + C$; 2. $-\frac{1}{x} - 6\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3\sqrt[3]{x} + C$; 3. $\frac{2}{101}(\frac{x}{2} - 1)^{101} + C$;
4. $-\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C$; 5. $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{3x}{2} + C$; 6. $\frac{\sin(2x)}{2} + e^{\frac{x}{2}} + C$;
7. $-\frac{1}{x+3} + C$; 8. $2\sqrt{\ln x} + C$; 9. $-\frac{2}{3}\sqrt{(1+\cos x)^3} + C$; 10. $\frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{5} - \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} + C =$
 $= \frac{(3x^2-2)}{15}\sqrt{(1+x^2)^3} + C$; 11. $-24\sqrt{1-x^2} + 8\sqrt{(1-x^2)^3} + C = -8(x^2+2)\sqrt{1-x^2} + C$;
12. $4 \ln(1+x^2) - \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3} + C$; 13. $-2\sqrt{1-e^x} + 4 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{1-e^x}}{2} \right) + C$; 14. $\ln(2\sqrt{x}+1) + C$;
15. $2\sqrt{x-9} - 6 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{x-9}}{3} \right) + C$; 16. $\frac{1}{2}(e^{2x}-4) + 2 \ln |e^{2x}-4| + C$.

2.1.1.2.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

Vypočítajte integrály.

Vo výpočtoch použite všetky prebraté metódy integrovania, t.j. substitúciu, per partes a rozklad na parciálne zlomky.

$$1. \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$$

$$2. \int \frac{2e^x+1}{e^x+1} dx$$

$$3. \int \frac{dx}{\sqrt{e^{4x}-16}} dx$$

$$4. \int \sqrt{e^{2x}-4} dx$$

$$5. \int \frac{\ln x - 2}{x\sqrt{\ln x}} dx$$

$$6. \int e^{2x} \sqrt{1+e^x} dx$$

$$7. \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$$

$$8. \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$9. \int \frac{3dx}{e^{2x}+e^x}$$

$$10. \int \frac{1}{x^2} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} dx$$

$$11. \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$$

$$12. \int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x} dx$$

Výsledky.

1. $2 \ln(1+\sqrt{x}) + x - 2\sqrt{x} + C$; 2. $x + \ln(e^x+1) + C$; 3. $2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{e^{4x}-16}}{4} + C$;
4. $\sqrt{e^{2x}-4} - 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{e^{2x}-4}}{2} \right) + C$; 5. $\sqrt{\ln x} \left(\frac{2}{3} \ln x - 4 \right) + C$; 6. $(1+e^x)\sqrt{1+e^x} \left(\frac{2}{5} e^x - \frac{4}{15} \right) + C$;
7. $2 \ln |1-\sqrt{1-x}| - \ln |x| + C$; 8. $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$; 9. $-3x - 3e^{-x} + 3 \ln(e^x+1) + C$;
10. $-\frac{1}{x} \operatorname{arccotg} \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) + C$; 11. $\ln x (\ln(\ln x) - 1) + C$; 12. $-\frac{1}{2} \cotg 2x - \frac{1}{2} \frac{1}{\sin 2x} + C$.

2.1.2 Per partes

Príklad 2.1.2.1 Vypočítajte $\int (6x - 1) \ln(3x - 1) dx$.

Riešenie.

Per partes	$u = \ln(3x - 1), \quad u' = \frac{3}{3x-1}$ $v' = 6x - 1, \quad v = 3x^2 - x$	2
Dosadíme do vzorca	$\int (6x - 1) \ln(3x - 1) dx = (3x^2 - x) \ln(3x - 1) - \int \frac{3(3x^2 - x)}{3x-1} dx =$ $= (3x^2 - x) \ln(3x - 1) - \int \frac{3x(3x-1)}{3x-1} dx =$ $= (3x^2 - x) \ln(3x - 1) - \int 3x dx =$ $= (3x^2 - x) \ln(3x - 1) - \frac{3x^2}{2} + C$	2 2 1
Výsledok	$\int (6x - 1) \ln(3x - 1) dx = (3x^2 - x) \ln(3x - 1) - \frac{3x^2}{2} + C$	
SPOLU		7

Príklad 2.1.2.2 Vypočítajte $\int \operatorname{arctg}(2x + 1) dx$.

Riešenie.

Per partes	$u = \operatorname{arctg}(2x + 1), \quad u' = \frac{1}{1+(2x)^2} \cdot 2 = \frac{2}{1+4x^2}$ $v' = 1, \quad v = x$	2
Dosadíme do vzorca	$\int \operatorname{arctg}(2x + 1) dx = x \operatorname{arctg}(2x + 1) - \int \frac{2x}{1+4x^2} dx =$ $= x \operatorname{arctg}(2x + 1) - \frac{1}{4} \int \frac{8x}{1+4x^2} dx =$ $= x \operatorname{arctg}(2x + 1) - \frac{1}{4} \ln 1 + 4x^2 + C =$ $= x \operatorname{arctg}(2x + 1) - \frac{1}{4} \ln(1 + 4x^2) + C$	2 1 2
Výsledok	$\int \operatorname{arctg}(2x + 1) dx = x \operatorname{arctg}(2x + 1) - \frac{1}{4} \ln(1 + 4x^2) + C$	
SPOLU		7

2.1.2.2.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

Vypočítajte integrály.

- | | |
|---------------------------------------|----------------------------|
| 1. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ | 2. $\int x e^{-2x} dx$ |
| 3. $\int x \sin 3x dx$ | 4. $\int x^2 \ln x dx$ |
| 5. $\int x \ln^2 x$ | 6. $\int \ln(2x+1)$ |
| 7. $\int \arcsin 2x dx$ | 8. $\int x \ln(x+1) dx$ |
| 9. $\int x \operatorname{arctg} x dx$ | 10. $\int e^{\sqrt{x}} dx$ |

Výsledky.

1. $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$; 2. $-\frac{x e^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4} + C$; 3. $-\frac{x \cos 3x}{3} + \frac{\sin 3x}{9} + C$;
4. $\frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9} + C$; 5. $\frac{x^2 \ln^2 x}{2} - \frac{x^2 \ln x}{2} + \frac{x^2}{4} + C$; 6. $(x + \frac{1}{2}) \ln(2x+1) - x + C$;
7. $x \arcsin 2x + \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2} + C$; 8. $\frac{x^2 \ln(x+1)}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\ln(x+1)}{2} + C$;
9. $\frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + C$; 10. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C$.

2.1.2.2.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

Vypočítajte integrály.

- | | |
|--|--|
| 1. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ | 2. $\int x e^{3x} dx$ |
| 3. $\int x \cos 2x dx$ | 4. $\int x^3 \ln x dx$ |
| 5. $\int x^2 \sin x dx$ | 6. $\int \arccos \frac{x}{2} dx$ |
| 7. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ | 8. $\int x \operatorname{arccotg} 3x dx$ |
| 9. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$ | |

Výsledky.

1. $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$; 2. $\frac{x e^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$; 3. $\frac{x \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$;
4. $\frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$; 5. $-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$; 6. $x \arccos \frac{x}{2} - \sqrt{4-x^2} + C$;
7. $2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C$; 8. $\frac{x^2}{2} \operatorname{arccotg} 3x + \frac{x}{6} - \frac{1}{18} \operatorname{arccotg} 3x + C$;
9. $x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C$.

2.1.2.2.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

Vypočítajte integrály.

1. $\int x^2 e^{-x} dx$

2. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

3. $\int x \sin \frac{x}{2} dx$

4. $\int \arcsin(2x + 1) dx$

5. $\int \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

6. $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$

7. $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$

8. $\int x \operatorname{arctg}^2 x dx$

Výsledky.

1. $-e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C$; 2. $-\frac{\ln^2 x}{x} - 2\frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C$; 3. $-2x \cos \frac{x}{2} + 4 \sin \frac{x}{2} + C$;
4. $(x + \frac{1}{2}) \arcsin(2x + 1) + \sqrt{-x^2 - x} + C$; 5. $2\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \ln |1 + x| + C$;
6. $x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + C$; 7. $\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \ln(1 + x^2) - \frac{x^2}{6} + C$;
8. $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg}^2 x - x \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$.

2.1.3 Rozklad na parciálne zlomky

Príklad 2.1.3.1 Vypočítajte $\int \frac{x+17}{x^2-x-12} dx$.

Riešenie.

Stupeň čitateľa Stupeň menovateľa Porovnáme stupne	$st(x+17) = 1$ $st(x^2-x-12) = 2$ $1 < 2 \Rightarrow$ nemusíme deliť čitateľa menovateľom	0,5
Rozložíme menovateľa na koreňové činitele	$x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} \Rightarrow$ $x_1 = 4, x_2 = -3$ $x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3)$	0,25 0,25
	$\int \frac{x+17}{x^2-x-12} dx = \int \frac{x+17}{(x-4)(x+3)} dx \quad \clubsuit$	1
RPZ	$\frac{x+17}{(x-4)(x+3)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+3}$	1
Z rovnosti zlomkov dostávame	$x+17 = A(x+3) + B(x-4) \quad \spadesuit$	1
Dosadíme do $\spadesuit$	$x = -3, \quad -3+17 = A(-3+3) + B(-3-4) \Rightarrow 14 = -7B \Rightarrow B = -2$ $x = 4, \quad 4+17 = A(4+3) + B(4-4) \Rightarrow 21 = 7A \Rightarrow A = 3$	1 1
	$\clubsuit = \int \frac{x+17}{(x-4)(x+3)} dx = \int \left(\frac{3}{x-4} + \frac{-2}{x+3} \right) dx =$ $3 \ln x-4 - 2 \ln x+3 + C$	1
Výsledok	$\int \frac{x+17}{x^2-x-12} dx = 3 \ln x-4 - 2 \ln x+3 + C$	
SPOLU		7

Príklad 2.1.3.2 Vypočítajte $\int \frac{27}{(x-1)^2(x+2)} dx$.

Riešenie.

Stupeň čitateľa Stupeň menovateľa Porovnáme stupne	$st(27) = 0$ $st((x-1)^2(x+2)) = 3$ $0 < 3 \Rightarrow$ nemusíme deliť čitateľa menovateľom	1
RPZ	$\frac{27}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$	1
Z rovnosti zlomkov dostávame	$27 = A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$ ♠	1
Dosadíme do ♠ $x =$	$1, \quad 27 = A(1-1)(1+2) + B(1+2) + C(1-1)^2 \Rightarrow B = 9$	1
$x =$	$-2, \quad 27 = A(-2-1)(-2+2) + B(-2+2) + C(-2-1)^2$ $\Rightarrow C = 3$	1
$x =$	$0, \quad 27 = A(0-1)(0+2) + B(0+2) + C(0-1)^2$ $\Rightarrow 27 = -2A + 2B + C \Rightarrow 27 = -2A + 18 + 3 \Rightarrow A = -3$	1
	$\int \frac{27}{(x-1)^2(x+2)} dx = \int \left(\frac{-3}{x-1} + \frac{9}{(x-1)^2} + \frac{3}{x+2} \right) dx =$ $-3 \ln x-1 + 9 \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + 3 \ln x+2 + C =$ $-3 \ln x-1 - \frac{9}{x-1} + 3 \ln x+2 + C$	1 1
Výsledok	$\int \frac{27}{(x-1)^2(x+2)} dx = -3 \ln x-1 - \frac{9}{x-1} + 3 \ln x+2 + C$	
SPOLU		7

Príklad 2.1.3.3 Vypočítajte $\int \frac{x^2-x-1}{x(x^2+1)} dx$.

Riešenie.

Stupeň čitateľa Stupeň menovateľa Porovnáme stupne	$st(x^2 - x - 1) = 2$ $st(x(x^2 + 1)) = st(x^3 + x) = 3$ $2 < 3 \Rightarrow$ nemusíme deliť čitateľa menovateľom	0,5
Doplníme na úplny štvorec	$x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in R$ výraz je v tvare úplneho štvorca, preto ho nemusíme upravovať	0,5
RPZ	$\frac{x^2-x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$	1
Z rovnosti zlomkov dostávame	$x^2 - x - 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x$ ♠	1
Dosadíme do ♠	$x = 0, \quad 0^2 - 0 - 1 = A(0^2 + 1) + (B \cdot 0 + C) \cdot 0 \Rightarrow -1 = A$ $x = 1, \quad 1^2 - 1 - 1 = A(1^2 + 1) + (B \cdot 1 + C) \cdot 1 \Rightarrow$ $-1 = 2A + B + C \Rightarrow$ $-1 = -2 + B + C \Rightarrow 1 = B + C$ $x = -1, \quad (-1)^2 - (-1) - 1 = A((-1)^2 + 1) + (B \cdot (-1) + C) \cdot (-1) \Rightarrow$ $1 = 2A + B - C \Rightarrow 1 = -2 + B - C \Rightarrow 3 = B - C$	1 1 1
Riešime sústavu	$1 = B + C$ $3 = B - C \Rightarrow 4 = 2B \Rightarrow B = 2, \quad C = -1$	1
	$\int \frac{x^2-x-1}{x(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2x-1}{x^2+1} \right) dx =$ $\int \left(-\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = -\ln x + \ln x^2 + 1 - \arctg x + C$ $-\ln x + \ln(x^2 + 1) - \arctg x + C$	1
Výsledok	$\int \frac{x^2-x-1}{x(x^2+1)} dx = \ln(x^2 + 1) - \ln x - \arctg x + C$	
SPOLU		8

Príklad 2.1.3.4 Vypočítajte $\int \frac{1}{x^2+3x+3} dx$.

Riešenie.

Stupeň čitateľa Stupeň menovateľa Porovnáme stupne	$st(1) = 0$ $st(x^2 + 3x + 3) = 2$ $0 < 2 \Rightarrow$ nemusíme deliť čitateľa menovateľom	0,5
Doplníme na úplný štvorec	$x^2 + 3x + 3 \neq 0, \forall x \in R$, pretože $D = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 < 0$ $x^2 + 3x + 3 = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + 3 = x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + (\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 + 3 =$ $(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + (\frac{3}{2})^2) - (\frac{3}{2})^2 + 3 = (x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + (\frac{3}{2})^2) - \frac{9}{4} + 3 =$ $(x + \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{4}$	0,5 2
Substitúcia	$\int \frac{1}{x^2+3x+3} dx = \int \frac{1}{(x+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}} dx = \{t = x + \frac{3}{2}, dt = dx\} =$ $\int \frac{1}{t^2+\frac{3}{4}} dt = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2(x+\frac{3}{2})}{\sqrt{3}} + C =$ $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{3}} + C$	1 1
Výsledok	$\int \frac{1}{x^2+3x+3} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{3}} + C$	
SPOLU		5

Príklad 2.1.3.5 Vypočítajte $\int \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x} dx$.

Riešenie.

Stupeň čitateľa Stupeň menovateľa Porovnáme stupne	$st(x^4 + 2x - 6) = 4$ $st(x^3 + x^2 - 2x) = 3$ $4 > 3 \Rightarrow$ musíme deliť čitateľa menovateľom	0,5
Delíme čitateľa menovateľom	$\begin{array}{r} (x^4 + 2x - 6) : (x^3 + x^2 - 2x) = x - 1 \\ -(x^4 + x^3 - 2x^2) \\ \hline -x^3 + 2x^2 + 2x - 6 \\ -(-x^3 - x^2 + 2x) \\ \hline 3x^2 - 6 \end{array}$ $\frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x} = x - 1 + \frac{3x^2-6}{x^3+x^2-2x}$	
	$\int \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x} dx = \int (x - 1) dx + \int \frac{3x^2-6}{x^3+x^2-2x} dx = \clubsuit$	1
Rozložíme menovateľa na koreňové činitele	$x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee (x^2 + x - 2) = 0$ $x_0 = 0 \vee x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$ $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = -2$ $x^3 + x^2 - 2x = x(x - 1)(x + 2)$	0,25 0,25
Vypočítame	$\int \frac{3x^2-6}{x^3+x^2-2x} dx = \int \frac{3x^2-6}{x(x^2+x-2)} dx = \int \frac{3x^2-6}{x(x+2)(x-1)} dx = \spadesuit - \text{RPZ}$	1
RPZ Z rovnosti zlomkov dostávame Dosadíme do ♠ $x = 0$ $x = 1$ $x = -2$	$\frac{3x^2-6}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x+2)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+2)}{x(x+2)(x-1)}$ $3x^2 - 6 = A(x + 2)(x - 1) + Bx(x - 1) + Cx(x + 2) \spadesuit$ $3 \cdot 0^2 - 6 = A(0 + 2)(0 - 1) + B \cdot 0(0 - 1) + C \cdot 0(0 + 2) \Rightarrow A = 3$ $3 \cdot 1^2 - 6 = A(1 + 2)(1 - 1) + B \cdot 1(1 - 1) + C \cdot 1(1 + 2) \Rightarrow C = -1$ $3(-2)^2 - 6 = A(-2 + 2)(-2 - 1) + B(-2)(-2 - 1) + C(-2)(-2 + 2) \Rightarrow B = 1$ $\frac{3x^2-6}{x^3+x^2-2x} = \frac{3}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{-1}{x-1}$	1 1 1 1
	$\spadesuit = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{-1}{x-1} \right) dx =$ $3 \ln x + \ln x + 2 - \ln x - 1 + C$	1
	$\clubsuit = \frac{x^2}{2} - x + 3 \ln x + \ln x + 2 - \ln x - 1 + C$	1
Výsledok	$\int \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x} dx = \frac{x^2}{2} - x + 3 \ln x + \ln \left \frac{x+2}{x-1} \right + C$	
SPOLU		8

2.1.3.5.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

Vypočítajte integrály.

1. $\int \frac{x^4-2x^3+1}{x^2+1} dx$
2. $\int \frac{dx}{3-x}$
3. $\int \frac{dx}{(5-x)^2}$
4. $\int \frac{dx}{x^2+9}$
5. $\int \frac{dx}{x^2+6}$
6. $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$
7. $\int \frac{2x+5}{x^2+3x+4} dx$
8. $\int \frac{x-1}{x^2-3x+4} dx$
9. $\int \frac{4x-1}{x^2+3x-10} dx$
10. $\int \frac{9dx}{(x-1)^2(x+2)}$
11. $\int \frac{8dx}{x^3+2x^2} dx$
12. $\int \frac{15x+25}{(x+1)(x^2+4)} dx$
13. $\int \frac{x^4+3x^2-5}{x^3-x^2+3x} dx$

Výsledky.

1. $\frac{x^3}{3} - x^2 - x + \ln(x^2 + 1) + 2 \operatorname{arctg} x + C$; 2. $-\ln|x-3| + C$; 3. $\frac{1}{5-x} + C$;
4. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$; 5. $\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{6}} + C$; 6. $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$;
7. $\ln(x^2 + 3x + 4) + \frac{4}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}} + C$; 8. $\frac{1}{2} \ln(x^2 - 3x + 4) + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x-3}{\sqrt{7}} + C$;
9. $3 \ln|x+5| + \ln|x-2| + C$; 10. $\ln\left|\frac{x+2}{x-1}\right| - \frac{3}{x-1} + C$; 11. $2 \ln\left|\frac{x+2}{x}\right| - \frac{4}{x} + C$;
12. $\ln\frac{(x+1)^2}{x^2+4} + \frac{17}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$; 13. $\frac{x^2}{2} + x - \frac{5}{3} \ln|x| + \frac{4}{3} \ln(x^2 - x + 3) - \frac{20}{3\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{11}} + C$.

2.1.3.5.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

Vypočítajte integrály.

1. $\int \frac{x^3+2x^2+5x+1}{x^2+4} dx$
2. $\int \frac{dx}{5+x}$
3. $\int \frac{dx}{(2+x)^2}$
4. $\int \frac{dx}{2x^2+32}$
5. $\int \frac{dx}{x^2+5}$
6. $\int \frac{dx}{x^2-x+1}$
7. $\int \frac{2x+5}{x^2+x+1} dx$
8. $\int \frac{x-5}{x^2+5x+8} dx$
9. $\int \frac{6x-9}{x^2-7x+10} dx$
10. $\int \frac{36dx}{(x+1)^2(5-x)}$
11. $\int \frac{25dx}{2x^3+5x^2} dx$
12. $\int \frac{5dx}{x(x^2+x+5)} dx$

Výsledky.

1. $\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) - \frac{7}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$; 2. $\ln|5+x| + C$; 3. $-\frac{1}{2+x} + C$; 4. $\frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C$;
5. $\frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C$; 6. $\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$; 7. $\ln(x^2 + x + 1) + \frac{8}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$;
8. $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 5x + 8) - \frac{15}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+5}{\sqrt{7}} + C$; 9. $7 \ln|x-5| - \ln|x-2| + C$; 10. $\ln\left|\frac{x+1}{5-x}\right| - \frac{6}{x+1} + C$;
11. $2 \ln\left|\frac{2x+5}{x}\right| - \frac{5}{x} + C$; 12. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+x+5}} - \frac{1}{\sqrt{19}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{19}} + C$.

2.1.3.5.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

Vypočítajte integrály.

1. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$

2. $\int \frac{x^2+5x+7}{x^2+2x+1} dx$

3. $\int \frac{x-5}{x^2-4x+3}$

4. $\int \frac{9dx}{(x-1)^2(x+2)}$

5. $\int \frac{dx}{x^2(1-x)}$

6. $\int \frac{3dx}{x(x^2-2x+3)}$

Výsledky.

1. $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{2} + C$; 2. $x+3 \ln |x+1| - \frac{3}{x+1} + C$; 3. $2 \ln |x-1| - \ln |x-3| + C$; 4. $\ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| - \frac{3}{x-1} + C$;
5. $\ln \left| \frac{x}{1-x} \right| - \frac{1}{x} + C$; 6. $\ln |x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C$.

2.2 Určité integrály - Plošné obsahy

Príklad 2.2.1 Vypočítajte plošný obsah oblasti ohraničenej grafom funkcie $f(x) = \frac{648 \arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}$ a priamkami $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$.

Riešenie.

	$g(x) = 0$	
Vypočítame priesečník grafov funkcií $f(x) = g(x)$	$\frac{648 \arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Rightarrow \arcsin^2 x = 0 \Rightarrow \arcsin x = 0 \Rightarrow x = 0$	1
Zostavíme integrál $P =$	$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{648 \arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \triangle$	2
Substitúcia	$t = \arcsin x, \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$	1
Zmeníme hranice	$t_d = \arcsin 0 = 0, \quad t_h = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$	2
Dosadíme do $\triangle$	$\triangle = \int_0^{\frac{\pi}{6}} 648 t^2 dt = [648 \frac{t^3}{3}]_0^{\frac{\pi}{6}} = 648 \frac{\pi^3}{6^3 \cdot 3} = \pi^3$	2
	SPOLU	8

Príklad 2.2.2 Vypočítajte plošný obsah oblasti ohraničenej grafom funkcie $f(x) = 9xe^{-3x}$ a priamkami $y = 0$, $x = \frac{1}{3}$.

Riešenie.

	$g(x) = 0$	
Vypočítame priesečník grafov funkcií $f(x) = g(x)$	$9xe^{-3x} = 0 \Rightarrow x = 0$	1
Zostavíme integrál $P =$	$\int_0^{\frac{1}{3}} 9xe^{-3x} dx = 9 \int_0^{\frac{1}{3}} xe^{-3x} dx = \clubsuit$	2
Per partes	$u(x) = x, \quad u'(x) = 1$ $v'(x) = e^{-3x}, \quad v(x) = \frac{e^{-3x}}{-3}$	2
Dosadíme do vzorca $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$	$\clubsuit = 9\{[\frac{xe^{-3x}}{-3}]_0^{\frac{1}{3}} + \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{-3x}}{3} dx\} = 9\{[\frac{-x}{3e^{3x}}]_0^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}[\frac{e^{-3x}}{-3}]_0^{\frac{1}{3}}\} =$ $9\{[\frac{x}{3e^{3x}}]_{\frac{1}{3}}^0 + \frac{1}{9}[\frac{1}{e^{3x}}]_{\frac{1}{3}}^0\} = 9\{\frac{-1}{9e} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9e}\} = 1 - \frac{2}{e}$	1 2
SPOLU		8

2.2.2.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

Vypočítajte určité integrály.

Newton Leibnitzov vzorec.

$$1. \int_1^2 (2x + 3) dx$$

$$2. \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$3. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6dx}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$4. \int_3^4 \frac{3x-1}{x-2} dx$$

Per partes v určtom integráli.

$$5. \int_3^6 9xe^{3x} dx$$

$$6. \int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx$$

Substitúcia v určtom integráli.

$$7. \int_2^4 \sqrt{5-x} dx$$

$$8. \int_0^1 \arcsin x dx$$

Vypočítajte plošný obsah oblasti ohraničený grafmi funkcií.

$$9. f(x) = 12x - x^2, g(x) = 0$$

$$10. f(x) = x^2 + 2x, g(x) = -x$$

$$11. f(x) = -x^2 + 6x - 7, g(x) = 3 - x$$

$$12. f(x, y) = 6 \arccos 3x \text{ a priamkami } y = 0, x = 0, x = \frac{1}{3}$$

$$13. f(x) = x - 4, g(x) = \sqrt{x-2} \text{ a priamkou } y = 0$$

$$14. f(x) = \sin x, x \in < 0, \pi >, g(x) = \frac{1}{2}$$

Výsledky.

$$1. 6; 2. 2; 3. \pi; 4. 3 + 5 \ln 2; 5. 17e^{18} - 8e^9; 6. \frac{32}{3} \ln 2 - \frac{28}{9}; 7. 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}; 8. \frac{\pi}{2} - 1.$$

9.	$f(x) = 12x - x^2, g(x) = 0$	$P = 288$
10.	$f(x) = x^2 + 2x, g(x) = -x$	$P = \frac{9}{2}$
11.	$f(x) = -x^2 + 6x - 7, g(x) = 3 - x$	$P = \frac{9}{2}$
12.	$f(x) = 6 \arccos 3x$ a priamkami $y = 0, x = 0, x = \frac{1}{3}$	$P = 2$
13.	$f(x) = x - 4, g(x) = \sqrt{x-2}$ a priamkou $y = 0$	$P = \frac{10}{3}$
14.	$f(x) = \sin x, x \in < 0, \pi >, g(x) = \frac{1}{2}$	$P = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$

2.2.2.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

Vypočítajte plošný obsah oblasti ohraničený grafmi funkcií

1. $f(x) = e^{2x}$, $g(x) = -x + 1$ a priamkou $x = 2$
2. $f(x) = 4 \ln \frac{1}{4x}$ a priamkami $y = 0$, $x = \frac{e}{4}$
3. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ a priamkami $y = 0$, $x = 1$, $x = e$
4. Vypočítajte plošný obsah oblasti ohraničený krivkou $y^2 = 2x + 1$ a priamkou $x = \frac{15}{2}$.

Výsledky.

1.	$f(x) = e^{2x}$, $g(x) = -x + 1$ a priamkou $x = 2$	$P = \frac{e^4}{2} - \frac{1}{2}$
2.	$f(x) = 4 \ln \frac{1}{4x}$ a priamkami $y = 0$, $x = \frac{e}{4}$	$P = 1$
3.	$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ a priamkami $y = 0$, $x = 1$, $x = e$	$P = 1 - \frac{2}{e}$
4.	krivkou $y^2 = 2x + 1$ a priamkou $x = \frac{15}{2}$	$P = \frac{256}{3}$

2.2.2.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

Vypočítajte plošný obsah oblasti ohraničený grafmi funkcií

1. $f(x) = x + 3$, $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ a priamkou $x = 1$
2. $f(x) = 2 \ln(3 - 2x)$ a priamkami $y = 0$, $x = -4$
3. $f(x) = 2 \ln(4 - x^2)$ a priamkami $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$
4. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ a priamkami $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

Výsledky.

1.	$f(x) = x + 3$, $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ a priamkou $x = 1$	$P = \frac{27}{4}$
2.	$f(x) = 2 \ln(3 - 2x)$ a priamkami $y = 0$, $x = -4$	$P = 11 \ln 11 - 10$
3.	$f(x) = 2 \ln(4 - x^2)$ a priamkami $y = 0$, $x = 3$, $x = 4$	$P = 6 \ln 3 - 4$
4.	$f(x) = e^{\sqrt{x}}$ a priamkami $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$	$P = 2$

2.3 Diferenciálne rovnice

2.3.1 Diferenciálne rovnice prvého rádu

2.3.1.1 Separovateľné diferenciálne rovnice

Príklad 2.3.1.1.1 Nájdite to riešenie **separovateľnej** diferenciálnej rovnice $(x+1)y' + xy = 0$, ktoré spĺňa Cauchyho začiatočnú podmienku $y(0) = 1$.

Riešenie.

1.	Dosadíme do rovnice $y' = \frac{dy}{dx}$	$(x+1)y' + xy = 0$ $(x+1)\frac{dy}{dx} + xy = 0$ $\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{x+1}$	1
2.	Separujeme premenné	$dy = -\frac{xy}{x+1}dx$ $\frac{dy}{y} = -\frac{x}{x+1}dx$	2
3.	Integrujeme obidve strany rovnice Použijeme rýchle delenie	$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{x}{x+1} dx$ $\ln y = -\int \frac{x}{x+1} dx$ $\int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int \frac{(x+1)-1}{x+1} dx = \int (1 - \frac{1}{x+1}) dx = x - \ln x+1 + C$	0.5 1 1
4.	Všeobecné riešenie rovnice	$\ln y_v = -x + \ln x+1 + C$	1
5.	Uplatníme začiatočnú podmienku	$\ln 1 = -0 + \ln 0+1 + C \Rightarrow C = 0$	1
	Upravíme riešenie	$\ln y_p = -x + \ln x+1 \Rightarrow y_p = e^{-x+\ln x+1 }$ $ y_p = e^{-x}e^{\ln x+1 } = e^{-x} x+1 \Rightarrow y_p = (x+1)e^{-x}$	0.5 1
	Výsledok	$y_p = (x+1)e^{-x}$	
	SPOLU		9

2.3.1.1.1.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

Dokážte, že dané funkcie sú riešeniami diferenciálnych rovníc.

1. $y = 100 \cos x, \quad y' + (\operatorname{tg} x)y = 0$

2. $y = C_1 + C_2 e^{-x}, \quad y'' + y' = 0$

3. $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad yy' = \frac{x}{(1+x^2)^2}$

Riešte separovateľné diferenciálne rovnice.

4. $y' = 4x + 5$

5. $y' + y = 0$

6. $y' + \frac{x}{y} = 0$

Nájdite to riešenie separovateľnej diferenciálnej rovnice, ktoré spĺňa danú začiatočnú podmienku.

7. $y' - 12x^3y = 4x^3, \quad y(0) = \frac{2}{3}$

8. $y' - (\cotg x)y = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 2$

9. $y'x - y^2 \ln x = 0, \quad y(e) = 1$

10. $xy' = y^3 + 3y, \quad y(1) = 1$

Výsledky.

4. $y_v = 2x^2 + 5x + C, C \in R$; 5. $y_v = Ce^{-x}, C \in R$; 6. $y_v^2 + x^2 = C, C \in R^+$; 7. $y_p = e^{3x^4} - \frac{1}{3}$;

8. $y_p = 2 \sin x$; 9. $y_p = \frac{2}{(\ln^2 x) - 3}$; 10. $\ln |x| - \frac{\ln 2}{3} = \frac{1}{3} \ln |y| - \frac{1}{6} \ln(y^2 + 3)$.

2.3.1.1.1.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

Nájdite to riešenie separovateľnej diferenciálnej rovnice, ktoré spĺňa danú začiatočnú podmienku.

1. $y' - 6x^2y = 3x^2, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$

2. $y' + (\operatorname{arctg} x)y = 0, \quad y(0) = e$

3. $y' = -\frac{y}{x^2 \ln y}, \quad y(1) = e$

Výsledky.

1. $y_p = e^{2x^3} - \frac{1}{2}$; 2. $y_p = (1 + x^2)e^{1-x \operatorname{arctg} x}$; 3. $y_p = e^{\sqrt{\frac{2}{x}-1}}$.

2.3.1.1.1.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

Nájdite to riešenie separovateľnej diferenciálnej rovnice, ktoré spĺňa danú začiatočnú podmienku.

1. $y' = xy \ln^2 x, \quad y(2) = e$

$$2. (x^2 + 3)y' + \frac{y^3}{x} = 0, \quad y(1) = \sqrt{3}$$

$$3. 8y' - y^3(y + 2) = 0, \quad y(0) = -1$$

Výsledky.

$$1. y_p = e^{(3 - \frac{x^2}{2})^{-1}}; 2. \frac{1}{2y_p^2} = \frac{1}{3} \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 3}} + \frac{1 + 2 \ln 2}{6}; 3. x = \ln \left| \frac{y_p}{y_p + 2} \right| + \frac{2}{y_p} - \frac{2}{y_p^2} + 4.$$

2.3.1.2 Lineárne diferenciálne rovnice

Príklad 2.3.1.2.1 Nájdite to riešenie **lineárnej** diferenciálnej rovnice $xy' + y = \ln x$, ktoré spĺňa Cauchyho začiatočnú podmienku $y(1) = 0$.

Riešenie.

1.	Riešime homog. rovnicu (bez PS)	$y' + p(x)y = 0$	$y' + \frac{1}{x}y = 0$	1
	Separujeme premenné dosadením do rovnice	$y' = \frac{dy}{dx}$ $y' + p(x)y = 0$ $\ln a = \ln b \Rightarrow a = b$ $y_h = Cg(x)$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$ $\ln y = -\ln x + C =$ $-\ln x + \ln e^C = -\ln x + \ln c =$ $\ln \frac{c}{ x }$, kde $c = e^C > 0$ $\ln y = \ln \frac{c}{ x }$ $ y = \frac{c}{ x }$, $c > 0$ $y_h = \frac{C}{x}$, $C \in R$	1 <

2.3.1.2.1.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

Nájdite to riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice prvého rádu, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku.

1. $y' - 2y = e^{2x}$, $y(0) = 2$
2. $xy' - y = x \ln x$, $y(1) = 0$
3. $xy' + 5y = \frac{8}{x^5(x^2+2)}$, $y(1) = 0$
4. $y' + 3(\operatorname{tg} x)y = -2 \sin x$, $y(0) = -4$
5. $y' - \frac{x}{x^2+1}y = 3x$, $y(0) = -1$

Výsledky.

1. $y_p = (x+2)e^{2x}$; 2. $y_p = \frac{x \ln^2 x}{2}$; 3. $y_p = \frac{4 \ln |x| - \ln(x^2+2) + 2 \ln 3}{x^5}$; 4. $y_p = -\cos x - 3 \cos^3 x$;
5. $y_p = 3(x^2+1) - 4\sqrt{x^2+1}$.

2.3.1.2.1.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

Nájdite to riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice prvého rádu, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku.

1. $y' - 4y = 8e^{-4x}$, $y(0) = -4$
2. $y' + y = \frac{1}{1+e^{2x}}$, $y(0) = \frac{\pi}{2}$
3. $y' + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(1) = 0$

Výsledky.

1. $y_p = -e^{-4x} - 3e^{4x}$; 2. $y_p = (\operatorname{arctg} e^x + \frac{\pi}{4})e^{-x}$; 3. $y_p = 1 - e^{\arccos x} + \arccos x$.

2.3.1.2.1.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

Nájdite to riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice prvého rádu, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku.

1. $y' + (\operatorname{tg} x)y = \frac{1}{\cos x}$, $y(\pi) = 0$
2. $y' - \frac{y}{x+1} = \frac{1}{x}$, $y(-\frac{1}{2}) = 2$
3. $y'(x^2+1) + y = \operatorname{arctg} x$, $y(0) = 1$
4. $xy' + 3y = \frac{8}{x^3(x^2+1)}$, $y(1) = 0$

Výsledky.

1. $y_p = \sin x$; 2. $y_p = (\ln |\frac{x}{x+1}| + 4)(x+1)$; 3. $y_p = 2e^{-\operatorname{arctg} x} - 1 + \operatorname{arctg} x$;
4. $y_p = \frac{8 \ln |x| - 4 \ln(x^2+1) + 4 \ln 2}{x^3}$.

2.3.2 Lineárna diferenciálna rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami a špeciálnou pravou stranou

Schéma na riešenie lineárnych diferenciálnych rovníc 2. rádu s konštantnými koeficientami a špeciálnou pravou stranou

$$ay'' + by' + cy = p(x) \quad \clubsuit$$

kde $p(x)$ má jeden z nasledujúcich tvarov:

A/ $p(x) = e^{mx}P(x)$, kde $P(x)$ je polynóm.

B/ $p(x) = e^{mx}(P(x)\cos nx + Q(x)\sin nx)$, kde $P(x)$, $Q(x)$ sú polynómy.

I/ Najprv riešime homogénnu diferenciálnu rovnicu, t. j. bez pravej strany

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Napíšeme charakteristickú rovnicu $ar^2 + br + c = 0$. $\spadesuit$

Je to kvadratická rovnica, ktorej riešenia sú $r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Môžu nastať 3 prípady:

- Kvadratická rovnica má dva rôzne reálne korene $r_1 \neq r_2$. Potom všeobecné riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice má tvar: $y_h = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$.
- Kvadratická rovnica má rovnaké reálne korene $r_1 = r_2 = r$. Potom všeobecné riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice má tvar: $y_h = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$.
- Kvadratická rovnica má komplexne združené korene $\alpha \pm i\beta$. Potom všeobecné riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice má tvar: $y_h = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

II/A PRAVÁ STRANA TYPU EP

- $EP = e^{mx}P(x)$ = pravá strana z aktuálneho príkladu.
- Určíme z II/A1 čomu sa rovnajú m , $P(x)$, $\text{st}(P(x))$.
- $y_p = x^k e^{mx} \overline{P(x)}$, kde $\overline{P(x)}$ je všeobecný polynóm taký, že $\text{st}(\overline{P(x)}) = \text{st}(P(x))$.
- Určíme k ako násobnosť koreňa m v charakteristickej rovnici $\spadesuit$ a dosadíme k do $y_p = x^k e^{mx} \overline{P(x)}$.

V prípade, že m nie je koreň charakteristickej rovnice, považujeme ho za nulánásobný koreň tejto rovnice.

- Dvakrát zderivujeme y_p a prvú a druhú deriváciu dosadíme do rovnice $\clubsuit$.
- Vytkneme e^{mx} na ľavej strane poslednej rovnice a obidve strany skrátime e^{mx} .
- Vypočítame koeficienty polynómu $\overline{P(x)}$ tak, že najprv porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách x^i a potom vyriešime sústavu lineárnych rovníc, ktorú dostaneme z tohto porovnania.
- Vypočítané koeficienty dosadíme do $\overline{P(x)}$ a potom $\overline{P(x)}$ dosadíme do 4/.
- Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $\clubsuit$ je $y_v = y_h + y_p$.

II/B PRAVÁ STRANA TYPU EPSC

1. $EPSC = e^{mx}(P(x) \cos nx + Q(x) \sin nx) =$ pravá strana z aktuálneho príkladu.
2. Určíme z II/B1 čomu sa rovná m , n , $P(x)$, $Q(x)$, $\text{st}(P(x))$, $\text{st}(Q(x))$.
3. $y_p = x^k e^{mx}(\overline{P(x)} \cos nx + \overline{Q(x)} \sin nx)$, kde $\overline{P(x)}$ a $\overline{Q(x)}$ sú všeobecné polynómy také, že $\text{st}(\overline{P(x)}) = \text{st}(\overline{Q(x)}) = \max(\text{st}(P(x)), \text{st}(Q(x)))$.

Pozor, **obidva polynómy $\overline{P(x)}$ a $\overline{Q(x)}$ sú vždy nenulové!**

4. Určíme k ako násobnosť koreňa $m + ni$ v charakteristickej rovnici ♠ a dosadíme k do $y_p = x^k e^{mx}(\overline{P(x)} \cos nx + \overline{Q(x)} \sin nx)$.

V prípade, že $m + ni$ nie je koreň charakteristickej rovnice, považujeme ho za nulánásobný koreň tejto rovnice.

5. Dvakrát zderivujeme y_p a prvú a druhú deriváciu dosadíme do rovnice ♣.

Pri derivovaní je potrebné združovať spolu členy pri $\sin nx$ a pri $\cos nx$.

6. Vytkneme e^{mx} na ľavej strane poslednej rovnice a obidve strany skrátime e^{mx} .

7. Vypočítame koeficienty polynómov $\overline{P(x)}$ a $\overline{Q(x)}$ tak, že najprv porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách $x^i \sin nx$, $x^i \cos nx$ a potom vyriešime sústavu lineárnych rovníc, ktorú dostaneme z tohto porovnania.

8. Vypočítané koeficienty dosadíme do $\overline{P(x)}$, $\overline{Q(x)}$ a potom $\overline{P(x)}$, $\overline{Q(x)}$ dosadíme do 4/.

9. Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice ♣ je $y_v = y_h + y_p$.

II/C SÚČET DVOCH PRAVÝCH STRÁN

Rovnicu $ay'' + by' + cy = q_1(x) + q_2(x)$ ♣♣

kde $q_1(x)$ a $q_2(x)$ sú špeciálne pravé strany typu A alebo B riešime tak, že zvlášť riešime rovnicu $ay'' + by' + cy = q_1(x)$, čím dostaneme partikulárne riešenie y_{p1}

a zvlášť riešime rovnicu $ay'' + by' + cy = q_2(x)$, čím dostaneme partikulárne riešenie y_{p2} .

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice ♣♣ je potom $y_v = y_h + y_{p1} + y_{p2}$.

Súčtom dvoch špeciálnych pravých strán sú napríklad $e^{2x} + \cos 5x$, $\cos 3x + \sin x$, $3 + e^x, \dots$

Poznámky

1. Všeobecný polynóm 0-tého stupňa je konštanta A , všeobecný polynóm 1. stupňa je $Ax + B$, všeobecný polynóm 2. stupňa je $Ax^2 + Bx + C$ atď.
2. Komplexné korene pri riešení kvadratickej rovnice dostaneme vtedy, keď diskriminant $b^2 - 4ac < 0$. V tomto prípade riešenia kvadratickej rovnice sú

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

Príklad 2.3.2.1 Riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 4y' + 13y = 169x^2 + 7$,

$k = 0$

I.	Riešenie DR			Body
I.1	s nulovou pravou stranou		$y'' - 4y' + 13y = 0$	
I.2	Charakteristická rovnica		$r^2 - 4r + 13 = 0$	0,5
I.3	Korene charakteristickej rovnice	$r_1 =$ $r_2 =$	$\frac{4+\sqrt{16-4\cdot 13}}{2} = \frac{4+\sqrt{-36}}{2} = \frac{4+6i}{2} = 2+3i,$ $\frac{4-\sqrt{16-4\cdot 13}}{2} = \frac{4-\sqrt{-36}}{2} = \frac{4-6i}{2} = 2-3i$	0,5 0,5
I.4	Riešenie DR s nulovou pravou stranou	$y_h =$	$e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$	0,5
II.	Riešenie DR s aktuálnou špeciálnou pravou stranou		$y'' - 4y' + 13y = 169x^2 + 7$	
II.1	Typ pravej strany	$EP = e^{mx}P(x) =$	$169x^2 + 7$	0,5
II.2	Určenie parametrov	$m =$ $P(x) =$ $stP(x) =$	0, $169x^2 + 7,$ 2	0,5
II.3	Tvar partikulárneho riešenia	$y_p = x^k e^{mx} \overline{P(x)} =$	$x^k e^{0x}(Ax^2 + Bx + C)$	1
II.4	Určenie exponenta k	$k =$	0, pretože $m = 0$ je nulanásobným koreňom charakteristickej rovnice, $y_p = x^0 e^{0x}(Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C$	2
II.5	Derivácie	$y'_p =$ $y''_p =$	$(Ax^2 + Bx + C)' = 2Ax + B$ $(2Ax + B)' = 2A$	0,5 0,5
II.6	Dosadenie derivácií do rovnice		$y'' - 4y' + 13y = 169x^2 + 7$ $\begin{array}{rcl} y''_p & = & 2A \\ \oplus -4y'_p & = & -8Ax - 4B \\ 13y_p & = & 13Ax^2 + 13Bx + 13C \end{array}$ $\begin{aligned} y''_p - 4y'_p + 13y_p & = \\ 13Ax^2 + (-8A + 13B)x + (2A - 4B + 13C) & = \\ (169x^2 + 7) & = \\ 13Ax^2 + (-8A + 13B)x + (2A - 4B + 13C) & \end{aligned}$ $\begin{aligned} x^2 : 169 & = 13A \Rightarrow A = 13 \\ x^1 : 0 & = -8A + 13B \Rightarrow 8 \cdot 13 = 13B \Rightarrow B = 8 \\ x^0 : 7 & = 2A - 4B + 13C \Rightarrow 13 = 13C \Rightarrow C = 1 \end{aligned}$	1,5 0,5
II.7	Partikulárne riešenie DR	$y_p =$	$13x^2 + 8x + 1$	1
	Všeobecné riešenie DR	$y_v = y_h + y_p =$	$e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + 13x^2 + 8x + 1$	1
			SPOLU	11

Príklad 2.3.2.2 Riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 2y' - 3y = (-8x + 6)e^{-x}$, $k = 1$

I.	Riešime DR s nulovou pravou stranou		$y'' - 2y' - 3y = 0$	Body
I.1				
I.2	Charakteristická rovnica		$r^2 - 2r - 3 = 0$	0,5
I.3	Nájdeme korene charakteristickej rovnice	$r_1 =$ $r_2 =$	$\frac{2+\sqrt{4-4(-3)}}{2} = \frac{2+\sqrt{16}}{2} = 3,$ $\frac{2-\sqrt{4-4(-3)}}{2} = \frac{2-\sqrt{16}}{2} = -1$	0,5 0,5
I.4	Riešenie DR s nulovou pravou stranou	$y_h =$	$C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$	0,5
II.	Riešime DR s aktuálnou špeciálnou pravou stranou		$y'' - 2y' - 3y = (-8x + 6)e^{-x}$	
II.1	Typ pravej strany	EP = $e^{mx} P(x) =$	$(-8x + 6)e^{-x}$	0,5
II.2	Určíme parametre	$m =$ $P(x) =$ $stP(x) =$	$-1,$ $-8x + 6,$ 1	0,5
II.3	Partikulárne riešenie hľadáme v tvare	$y_p = x^k e^{mx} \overline{P(x)} =$	$x^k e^{-x} (Ax + B)$	1
II.4	Určíme exponent k	$k =$	1, pretože $m = -1$ je jednonásobným koreňom charakteristickej rovnice, $y_p = x^1 e^{-x} (Ax + B) = (Ax^2 + Bx)e^{-x}$	1
II.5	Zderivujeme	$y'_p =$ $y''_p =$	$((Ax^2 + Bx)e^{-x})' =$ $(2Ax + B)e^{-x} + (Ax^2 + Bx)e^{-x}(-1) =$ $(-Ax^2 + (2A - B)x + B)e^{-x}$ $((-Ax^2 + (2A - B)x + B)e^{-x})' =$ $(-2Ax + 2A - B)e^{-x} +$ $(-Ax^2 + (2A - B)x + B)e^{-x}(-1) =$ $(Ax^2 + (-4A + B)x + 2A - 2B)e^{-x}$	1 1
II.6	Dosadíme derivácie do rovnice		$y'' - 2y' - 3y = (-8x + 6)e^{-x}$	
	Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách x^i dostávame		$\begin{array}{r} y''_p = (Ax^2 + (-4A + B)x + 2A - 2B)e^{-x} \\ \oplus -2y'_p = (2Ax^2 + (-4A + 2B)x - 2B)e^{-x} \\ -3y_p = (-3Ax^2 - 3Bx) e^{-x} \end{array}$ $y''_p - 2y'_p - 3y_p = (-8Ax + 2A - 4B)e^{-x}$ $(-8x + 6)e^{-x} = (-8Ax + 2A - 4B)e^{-x}$ $x^1: -8 = -8A \Rightarrow A = 1$ $x^0: 6 = 2A - 4B \Rightarrow 6 = 2 - 4B \Rightarrow B = -1$	1 0,5 0,5
II.7	Partikulárne riešenie DR	$y_p =$	$(x^2 - x)e^{-x}$	1
	Všeobecné riešenie DR	$y_v = y_h + y_p =$	$C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + (x^2 - x)e^{-x}$	1
	SPOLU			11

Príklad 2.3.2.3 Riešenie diferenciálnej rovnice $y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$,

$k = 2$

I.	Riešime DR			Body
I.1	s nulovou pravou stranou		$y'' + 4y' + 4y = 0$	
I.2	Charakteristická rovnica		$r^2 + 4r + 4 = 0$	0,5
I.3	Nájďme korene charakteristickej rovnice	$r_1 =$ $r_2 =$	$\frac{-4 + \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-4}{2} = -2,$ $\frac{-4 - \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$	0,5 0,5
I.4	Riešenie DR s nulovou pravou stranou	$y_h =$	$C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$	0,5
II.	Riešime DR s aktuálnou špeciálnou pravou stranou		$y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$	
II.1	Typ pravej strany	$EP = e^{mx} P(x) =$	$2e^{-2x}$	0,5
II.2	Určíme parametre	$m =$ $P(x) =$ $stP(x) =$	$-2,$ $2,$ 0	0,5
II.3	Partikulárne riešenie hľadáme v tvare	$y_p = x^k e^{mx} \overline{P(x)} =$	$x^k e^{-2x} A$	1
II.4	Určíme exponent k	$k =$	2, pretože $m = -2$ je dvojnásobným koreňom charakteristickej rovnice, $y_p = x^2 e^{-2x} A = (Ax^2) e^{-2x}$	1
II.5	Zderivujeme	$y'_p =$ $y''_p =$	$(Ax^2)e^{-2x})' = 2Ax e^{-2x} + Ax^2 e^{-2x}(-2) =$ $(-2Ax^2 + 2Ax)e^{-2x}$ $((-2Ax^2 + 2Ax)e^{-2x})' =$ $(-4Ax + 2A)e^{-2x} + (-2Ax^2 + 2Ax)e^{-2x}(-2) =$ $(4Ax^2 - 8Ax + 2A)e^{-2x}$	1 1
II.6	Dosadíme derivácie do rovnice		$y'' + 4y' + 4y = 2e^{-2x}$ $\oplus \begin{matrix} y''_p = (4Ax^2 - 8Ax + 2A)e^{-2x} \\ 4y'_p = (-8Ax^2 + 8Ax) e^{-2x} \\ 4y_p = (4Ax^2) e^{-2x} \end{matrix}$ $y''_p + 4y'_p + 4y_p = 2Ae^{-2x}$ $2e^{-2x} = 2Ae^{-2x}$ $2 = 2A \Rightarrow A = 1$	1 0,5 0,5
II.7	Partikulárne riešenie DR	$y_p =$	$x^2 e^{-2x}$	1
II.8	Všeobecné riešenie DR	$y_v = y_h + y_p =$	$C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + x^2 e^{-2x}$	1
	SPOLU			11

Príklad 2.3.2.4 Riešenie diferenciálnej rovnice (DR) $y'' - 6y' + 9y = 18 \cos 3x$, $k = 0$

I.	Riešime DR s nulovou pravou stranou		$y'' - 6y' + 9y = 0$	Body
I.1				
I.2	Charakteristická rovnica		$r^2 - 6r + 9 = 0$	0,5
I.3	Nájdeme korene char. rovnice	$r_1 =$ $r_2 =$	$\frac{6+\sqrt{36-4\cdot 9}}{2} = \frac{6}{2} = 3,$ $\frac{6-\sqrt{36-4\cdot 9}}{2} = \frac{6}{2} = 3$	0,5
I.4	Riešenie DR s nulovou pravou stranou	$y_h =$	$C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$	0,5
II.	Riešime DR s aktuálnou špeciálnou pravou stranou		$y'' - 6y' + 9y = 18 \cos 3x$	
II.1	Typ pravej strany	EPSC= $e^{mx}(P(x) \cos nx + Q(x) \sin nx) =$	$18 \cos 3x$	0,5
II.2	Určíme parametre	$m =$ $n =$ $P(x) =$ $stP(x) =$ $Q(x) =$ $stQ(x) =$	0 3 18 0 0 0	
II.3	Partikulárne riešenie hľadáme v tvare	$y_p =$ $x^k e^{mx}(\overline{P(x)} \cos nx + \overline{Q(x)} \sin nx) =$	$x^k e^{0x}(A \cos 3x + B \sin 3x)$	1
II.4	Určíme exponent k	$k =$	0, pretože $m + ni = 0 + 3i$ je nulanásobným koreňom charakteristickej rovnice $y_p = x^0 e^{0x}(A \cos 3x + B \sin 3x) =$ $y_p = A \cos 3x + B \sin 3x$	1
II.5	Zderivujeme	$y'_p =$ $y''_p =$	$-3A \sin 3x + 3B \cos 3x$ $(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x)' =$ $-9A \cos 3x - 9B \sin 3x$	1 1
II.6	Dosadíme derivácie do DR		$y'' - 6y' + 9y = 18 \cos 3x$ $-9A \cos 3x - 9B \sin 3x +$ $-6(-3A \sin 3x + 3B \cos 3x) +$ $9(A \cos 3x + B \sin 3x) = 18 \cos 3x$ $-18B \cos 3x + 18A \sin 3x =$ $18 \cos 3x$	1 0,5 0,5
	Porovnaním koeficientov pri $\sin 3x$, $\cos 3x$ dostávame		$\cos 3x : -18B = 18 \Rightarrow B = -1$ $\sin 3x : 18A = 0 \Rightarrow A = 0$	0,5 0,5
II.7	Partikulárne riešenie DR	$y_p =$	$-\sin 3x$	1
II.8	Všeobecné riešenie DR	$y_v = y_h + y_p =$	$C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} - \sin 3x$	1
	SPOLU			11

2.3.2.4.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

Nájdite všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami.

- | | |
|--------------------------|-------------------------|
| 1. $y'' - 5y' - 14y = 0$ | 2. $y'' + 6y' + 9y = 0$ |
| 3. $y'' - 4y' + 13y = 0$ | 4. $y'' + y' = 0$ |
| 5. $y'' - y' = 0$ | 6. $y'' + y = 0$ |

Výsledky.

1. $y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{7x}$; 2. $y_h = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$; 3. $y_h = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$;
4. $y_h = C_1 + C_2 e^{-x}$; 5. $y_h = C_1 + C_2 e^x$; 6. $y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Nájdite všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu so špeciálnou pravou stranou.

- | | |
|-----------------------------------|--|
| 7. $y'' + y' - 6y = 48e^{5x}$ | 8. $y'' + 4y' + 4y = (25x - 15)e^{3x}$ |
| 9. $y'' - 2y' + 2y = 2x^2 + 4$ | 10. $y'' + 2y' = 2$ |
| 11. $y'' - y' - 2y = 6e^{2x}$ | 12. $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ |
| 13. $y'' - 5y' + 6y = 52 \sin 2x$ | 14. $y'' - 2y' = 8 \cos 2x$ |

Výsledky.

7. $y_v = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + 2e^{5x}$; 8. $y_v = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + (x - 1)e^{3x}$;
9. $y_v = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 + 2x + 3$; 10. $y_v = C_1 + C_2 e^{-2x} + x$;
11. $y_v = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + 2x e^{2x}$; 12. $y_v = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + x^2 e^{-x}$;
13. $y_v = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + 5 \cos 2x + \sin 2x$; 14. $y_v = C_1 + C_2 e^{2x} - \cos 2x - \sin 2x$.

2.3.2.4.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

Nájdite všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu so špeciálnou pravou stranou.

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| 1. $y'' - y' - 6y = 12e^{4x}$ | 2. $y'' + 6y' + 9y = 81x^3$ |
| 3. $y'' + y = 2e^{-x}$ | 4. $y'' + 3y' = 18 \sin 3x$ |
| 5. $y'' - 5y' = 5$ | 6. $y'' - y' - 2y = (6x - 5)e^{-x}$ |
| 7. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$ | |

Výsledky.

1. $y_v = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{3x} + 2e^{4x}$; 2. $y_v = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + 9x^3 - 18x^2 + 18x - 8$;
3. $y_v = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + e^{-x}$; 4. $y_v = C_1 + C_2 e^{-3x} - \cos 3x - \sin 3x$;
5. $y_v = C_1 + C_2 e^{5x} - x$; 6. $y_v = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + (-x^2 + x)e^{-x}$;
7. $y_v = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + x^2 e^{2x}$.

2.3.2.4.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

Nájdite všeobecné riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu so špeciálnou pravou stranou.

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $y'' - 2y' - 3y = 6e^{2x}$ | 2. $y'' + 10y' + 25y = 200e^{5x}$ |
| 3. $y'' - 4y' + 3y = 30 \cos 3x$ | 4. $y'' - 4y' + 13 = 9e^{2x}$ |
| 5. $y'' - 2y' - 3y = -8e^{3x}$ | 6. $y'' - 3y' + 2y = 2x e^{2x}$ |
| 7. $y'' + 8y' + 16y = 12x e^{-4}$ | |

Výsledky.

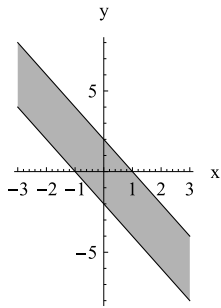
1. $y_v = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}$; 2. $y_v = C_1 e^{-5x} + C_2 x e^{-5x} + 2e^{5x}$;
3. $y_v = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - \cos 3x - 2 \sin 3x$; 4. $y_v = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{2x}$;
5. $y_v = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - 2x e^{3x}$; 6. $y_v = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (x^2 - 2x)e^{2x}$;
7. $y_v = C_1 e^{-4x} + C_2 x e^{-4x} + 2x^3 e^{-4x}$.

2.4 Funcie viacerých premenných

2.4.1 Dotyková rovina

Príklad 2.4.1.1 Nájdite a načrtnite definičný obor funkcie, rovnicu dotykovej roviny a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x, y) = \sqrt{3}y \arcsin(\frac{2x+y}{2})$ v bode $T = [0, 1, ?]$.

Riešenie.

Nájdeme $D(f) =$	$\{[x, y] \mid -1 \leq \frac{2x+y}{2} \leq 1\} = \{[x, y] \mid -2 \leq 2x+y \leq 2\} =$ $\{[x, y] \mid -2-2x \leq y \leq 2-2x\}$	0,5 0,5
Obrázok		1
Rovnica dotykovej roviny	$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$	0,5
Rovnice normály	$x = x_0 + f'_x(x_0, y_0)t, y = y_0 + f'_y(x_0, y_0)t, z = z_0 - t, t \in R$	0,5
Vypočítame $z_0 = f(x_0, y_0) =$	$f(0, 1) = \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \arcsin(\frac{2 \cdot 0 + 1}{2}) = \sqrt{3} \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$	0,5
Vypočítame $f'_x(x, y) =$	$(\sqrt{3}y \arcsin(\frac{2x+y}{2}))'_x = \sqrt{3}y \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x+y}{2})^2}} \cdot 1$	3
Vypočítame $f'_x(x_0, y_0) =$	$f'_x(0, 1) = \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2 \cdot 0 + 1}{2})^2}} \cdot 1 = \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}} \cdot 1 =$ $\sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2$	0,5
Vypočítame $f'_y(x, y) =$	$(\sqrt{3}y \arcsin(\frac{2x+y}{2}))'_y = \sqrt{3} \arcsin(\frac{2x+y}{2}) + \sqrt{3}y \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x+y}{2})^2}} \cdot \frac{1}{2}$	3
Vypočítame $f'_y(x_0, y_0) =$	$f'_y(0, 1) = \sqrt{3} \arcsin(\frac{2 \cdot 0 + 1}{2}) + \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2 \cdot 0 + 1}{2})^2}} \cdot \frac{1}{2} =$ $\sqrt{3} \arcsin \frac{1}{2} + \sqrt{3} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3} \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + 1$	1
Rovnica dotykovej roviny	$z - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} = 2x + (\frac{\sqrt{3}\pi}{6} + 1)(y - 1)$ $z = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + 2x + (\frac{\sqrt{3}\pi}{6} + 1)(y - 1)$ $z = -1 + 2x + (\frac{\sqrt{3}\pi}{6} + 1)y$	1
Rovnice normály	$x = 0 + 2t, y = 1 + (\frac{\sqrt{3}\pi}{6} + 1)t, z = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - t, t \in R$	1
SPOLU		13

2.4.1.1.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

Nájdite a načrtnite definičný obor, rovnicu dotykovej roviny a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x, y)$ v bode A .

1. $f(x, y) = \ln \frac{x}{1-y}$, $A = [-1, 2, ?]$
2. $f(x, y) = 12 \left(\sqrt{\frac{xy}{4+y^2}} \right)$, $A = [1, 2, ?]$
3. $f(x, y) = e^{xy^2} + \ln xy$, $A = [-1, -1, ?]$
4. $f(x, y) = 18y \arcsin \frac{x}{2} - 6 \ln(y^2 - 2x)$, $A = [-1, 0, ?]$

Výsledky.

1.	$f(x, y) = \ln \frac{x}{1-y}$ $A = [-1, 2, ?]$	$D(f) = \{[x, y] x > 0, y < 1 \vee x < 0, y > 1\}$ $z = -1(x + 1) - 1(y - 2)$ $x = -1 - t, y = 2 - t, z = -t, t \in R$
2.	$f(x, y) = 12 \left(\sqrt{\frac{xy}{4+y^2}} \right)$ $A = [1, -2, ?]$	$D(f) = \{[x, y] xy \geq 0\} =$ $\{[x, y] x \geq 0 \wedge y \geq 0\} \cup \{[x, y] x \leq 0 \wedge y \leq 0\}$ $z - 6 = 3(x - 1) + 0(y - 2)$ $x = 1 + 3t, y = 2, z = 6 - t, t \in R$
3.	$f(x, y) = e^{xy^2} + \ln xy$ $A = [-1, -1, ?]$	$D(f) = \{[x, y] x > 0, y > 0 \vee x < 0, y < 0\}$ $z - \frac{1}{e} = \left(\frac{1}{e} - 1\right)(x + 1) + \left(\frac{2}{e} - 1\right)(y + 1)$ $x = -1 + \left(\frac{1}{e} - 1\right)t, y = -1 + \left(\frac{2}{e} - 1\right)t,$ $z = \frac{1}{e} - t, t \in R$
4.	$f(x, y) =$ $18y \arcsin \frac{x}{2} - 6 \ln(y^2 - 2x)$ $A = [-1, 0, ?]$	$D(f) = \{[x, y] -2 \leq x \leq -2, x < \frac{y^2}{2}\}$ $z + 6 \ln 2 = 6(x + 1) - 3\pi y$ $x = -1 + 6t, y = 0 - 3\pi t, z = -6 \ln 2 - t, t \in R$

2.4.1.1.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

Nájdite a načrtnite definičný obor, rovnicu dotykovej roviny a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x, y)$ v bode A .

1. $f(x, y) = \sqrt{\frac{3y}{1+x^2}}$, $A = [0, 3, ?]$
2. $f(x, y) = \frac{y}{x} \ln(3x^2 + y)$, $A = [-2, -11, ?]$
3. $f(x, y) = 10y^2 \ln(x^2 - 4y + 8) + 10x \arccos \frac{y}{5}$, $A = [2, 0, ?]$
4. $f(x, y) = \frac{8}{\sqrt{x^2+3y^2-8}} + \ln(2x + 5y)$, $A = [3, -1, ?]$

Výsledky.

1.	$f(x, y) = \sqrt{\frac{3y}{1+x^2}}$ $A = [0, 3, ?]$	$D(f) = \{[x, y] x \geq 0\}$ $z - 3 = \frac{1}{2}(y - 3)$ $x = 0, y = 3 + \frac{1}{2}t, z = 3 - t, t \in R$
2.	$f(x, y) = \frac{y}{x} \ln(3x^2 + y)$ $A = [-2, -11, ?]$	$D(f) = \{[x, y] x \neq 0, y > -x^2\}$ $z = -66(x + 2) + \frac{11}{2}(y + 11)$ $x = -2 - 66t, y = -11 + \frac{11}{2}t,$ $z = -t, t \in R$
3.	$f(x, y) =$ $10y^2 \ln(x^2 - 4y + 8) + 10x \arccos \frac{y}{5}$ $A = [2, 0, ?]$	$D(f) = \{[x, y] -5 \leq y \leq 5, y < \frac{x^2}{4} + 2\}$ $z - 10\pi = 5\pi(x - 2) - 4(y - 0)$ $x = 2 + 5\pi t, y = -4t, z = 10\pi - t, t \in R$
4.	$f(x, y) = \frac{8}{\sqrt{x^2+3y^2-8}} + \ln(2x + 5y)$ $A = [3, -1, ?]$	$D(f) = \{[x, y] \frac{x^2}{8} + \frac{3y^2}{8} > 1, y > -\frac{2x}{5}\}$ $z - 4 = -(x - 3) + 8(y + 1)$ $x = 3 - t, y = -1 + 8t, z = 4 - t, t \in R$

2.4.1.1.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

Nájdite a načrtnite definičný obor, rovnicu dotykovej roviny a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x, y)$ v bode A .

1. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + 3 \ln \frac{x^2 - y}{3}$, $A = [-2, 1, ?]$
2. $f(x, y) = 4 \operatorname{arctg} \frac{x^2}{y-1}$, $A = [-1, 2, ?]$
3. $f(x, y) = e^{1-2x-y^2} + \frac{\ln(6xy+1)}{2}$, $A = [0, 1, ?]$
4. $f(x, y) = xe^{2xy} + 3xy^2 + x \cos(xy^2) + x$, $A = [-2, 0, ?]$

Výsledky.

1.	$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4} + 3 \ln \frac{x^2 - y}{3}$ $A = [-2, 1, ?]$	$D(f) = \{[x, y] \mid x^2 + y^2 \geq 4, x^2 > y\}$ $z - 1 = -6(x + 2) + 0(y - 1)$ $x = -2 - 6t, y = 1, z = 1 - t, t \in R$
2.	$f(x, y) = 4 \operatorname{arctg} \frac{x^2}{y-1}$ $A = [-1, 2, ?]$	$D(f) = \{[x, y] \mid y \neq 1\}$ $z - \pi = -4(x + 1) - 2(y - 2)$ $x = -1 - 4t, y = 2 - 2t,$ $z = \pi - t, t \in R$
3.	$f(x, y) = e^{1-2x-y^2} + \frac{\ln(6xy+1)}{2}$ $A = [0, 1, ?]$	$D(f) = \{[x, y] \mid y > -\frac{1}{6x} \text{ pre } x > 0\} \cup$ $\{[x, y] \mid y < -\frac{1}{6x} \text{ pre } x < 0\} \cup$ $\{[x, y] \mid [0, a], a \in R\}$ $z - 1 = (x - 0) - 2(y - 1)$ $x = 0 + t, y = 1 - 2t, z = 1 - t, t \in R$
4.	$f(x, y) = xe^{2xy} + 3xy^2 + x \cos(xy^2) + x$ $A = [-2, 0, ?]$	$D(f) = R$ $z + 6 = 3(x + 2) + 20(y - 0)$ $x = -2 + 3t, y = 20t,$ $z = -6 - t, t \in R$

2.5 Extrémy funkcií viacerých premenných

2.5.1 Lokálne extrémy funkcií viacerých premenných

Príklad 2.5.1.1 Nájdite všetky **lokálne** extrémy funkcie $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 15$

Riešenie.

Vypočítame	$f'_x(x, y) =$	$3x^2 - 3y$	0,5
Položíme	$f'_x(x, y) = 0$	$3x^2 - 3y = 0 \Rightarrow y = x^2$	0,5
Vypočítame	$f'_y(x, y) =$	$3y^2 - 3x$	0,5
Položíme	$f'_y(x, y) = 0$	$3y^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = y^2$	0,5
Riešime sústavu	$f'_x(x, y) = 0$ $f'_y(x, y) = 0$	$y = x^2$ $x = y^2 \Rightarrow x = x^4 \Rightarrow x(1 - x^3) = 0 \Rightarrow$ $x = 0$ alebo $x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$	2
Stacionárne body	$SB_1 =$ $SB_2 =$	$[0, 0]$ $[1, 1]$	1
Vypočítame	$f''_{xx}(x, y) =$ $f''_{yy}(x, y) =$ $f''_{xy}(x, y) =$ $f''_{yx}(x, y) =$	$(3x^2 - 3y)'_x = 6x$ $(3y^2 - 3x)'_y = 6y$ $(3x^2 - 3y)'_y = -3$ $(3y^2 - 3x)'_x = -3$	0,5 0,5 0,5 0,5
Vypočítame	$\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{vmatrix} =$	$\begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$	1
Vypočítame	$\Delta(SB_1) =$ $f(x, y)$ $f(x, y)$	$\Delta(0, 0) = -9 < 0$ nemá v bode $[0, 0]$ lok. extrém má v bode $SB_1 = [0, 0]$ sedlový bod	1 1
Vypočítame Určíme znamienko Vypočítame	$\Delta(SB_2) =$ $f''_{xx}(SB_2) =$ $f(SB_2) =$ $f(x, y)$	$\Delta(1, 1) = 36 - 9 = 27 > 0 \Rightarrow$ $f(x, y)$ má v bode $[1, 1]$ lok. extrém $6 > 0 \Rightarrow$ lokálne minimum $f(1, 1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 + 15 = 14$ má v bode $[1, 1, 14]$ lok. minimum	1 1
SPOLU			12

2.5.1.1.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

Nájdite všetky lokálne extrémym funkcie $f(x, y)$.

1. $f(x, y) = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$

2. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x - 2y$

3. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 2$

4. $f(x, y) = x^3 - y^3 + 18xy + 648$

5. $f(x, y) = 12xy - 3y^4 + 4x^3$

Výsledky.

1.	$f(x, y) = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$	$A = [4, -2, 13]$ lok. max.
2.	$f(x, y) = x^2 - y^2 - 2x - 2y$	nemá lok. extrémym
3.	$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy + 2$	$A = [-1, -1, 3]$ lok. max.
4.	$f(x, y) = x^3 - y^3 + 18xy + 648$	$A = [6, -6, 432]$ lok. min.
5.	$f(x, y) = 12xy - 3y^4 + 4x^3$	$A = [-1, -1, 5]$ lok. max.

2.5.1.1.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

Nájdite všetky lokálne extrémym funkcie $f(x, y)$.

1. $f(x, y) = x^3 - 6xy + y^2$
2. $f(x, y) = e^{3x}(x - y^2 + 2y)$
3. $f(x, y) = -x^2 - y^3 + 6xy - 18x + 39y + 5$

Výsledky.

1.	$f(x, y) = x^3 - 6xy + y^2$	$A = [6, 18, -108]$ lok. min.
2.	$f(x, y) = e^{3x}(x - y^2 + 2y)$	nená lok. extrémym
3.	$f(x, y) = -x^2 - y^3 + 6xy - 18x + 39y + 5$	$A = [6, 5, 111]$ lok. max.

2.5.1.1.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

Nájdite všetky lokálne extrémym funkcie $f(x, y)$.

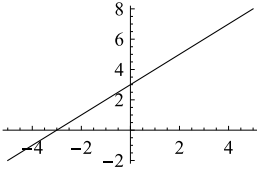
1. $f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$
2. $f(x, y) = 5xy + \frac{25}{x} + \frac{8}{y}$

Výsledky.

1.	$f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$	$A = [\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}e]$ lok. min.
2.	$f(x, y) = 5xy + \frac{8}{x} + \frac{25}{y}$	$A = [\frac{4}{5}, \frac{5}{2}, 30]$ lok. min.

2.5.2 Viazané extrémny funkcií viacerých premenných

Príklad 2.5.2.1 Nájdite všetky **viazané** lokálne extrémny funkcie $f(x, y) = x^2y(4 - x + y)$ na priamke $y = x + 3$. Načrtnite priamku. Riešenie.

Obrázok		1
Dosadíme rovnicu $y = ax + b$ do funkcie $f(x, y)$ $g(x) = f(x, ax + b) =$	$f(x, x + 3) =$ $x^2(x + 3)(4 - x + x + 3) =$ $7x^2(x + 3) = 7(x^3 + 3x^2) = 7x^3 + 21x^2$	1
$g(x) =$	$7x^3 + 21x^2$	
Vypočítame $g'(x) =$	$21x^2 + 42x$	1
Vypočítame stacionárne body funkcie $g(x)$, $g'(x) = 0$ Stacionárny bod SB_1 Stacionárny bod SB_2	$21x^2 + 42x = 21x(x + 2) = 0 \Rightarrow$ $x = 0 \vee x + 2 = 0$ $= 0$ $= -2$	
Vypočítame $g''(x) =$	$42x + 42$	1
Vypočítame $g''(SB_1) =$	$g''(0) = 42 > 0$	1
Funkcia $g(x)$ má v bode $SB_1 =$	0 lokálne minimum	1
Funkcia $f(x, y)$ má v bode	$[0, 0 + 3] = [0, 3]$ viazané lokálne minimum s hodnotou $f(0, 3) = 0^2 \cdot 3(4 - 0 + 3) = 0$ s väzbou $y = x + 3$	1
Vypočítame $g''(SB_2) =$	$g''(-2) = -82 + 42 = -42 < 0$	1
Funkcia $g(x)$ má v bode $SB_2 =$	-2 lokálne maximum	1
Funkcia $f(x, y)$ má v bode	$[-2, -2 + 3] = [-2, 1]$ viazané lokálne maximum s hodnotou $f(-2, 1) = (-2)^2 \cdot 1(4 - (-2) + 1) = 4 \cdot 7 = 28$ s väzbou $y = x + 3$	1
SPOLU		10

2.5.2.1.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

Nájdite všetky viazané lokálne extrémny funkcie $f(x, y)$.

1. $f(x, y) = x^2y(4 + x + y)$ na priamke $y = 3 - x$
2. $f(x, y) = x^2 - 4x + 2y$ na úsečke spájajúcej body $A = [-1, 4]$, $B = [3, 0]$

Výsledky.

1.	$f(x, y) = x^2y(4 + x + y)$ na priamke $y = 3 - x$	viazané lok. min. v bode $[0, 3, 0]$ viazané lok. max. v bode $[2, 1, 28]$
2.	$f(x, y) = x^2 - 4x + 2y$ na úsečke spájajúcej body $A = [-1, 4]$, $B = [3, 0]$	viazané lok. min. v bode $[3, 0, -3]$

2.5.2.1.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

Nájdite všetky viazané lokálne extrémny funkcie $f(x, y)$.

1. $f(x, y) = xy^2(4 + 2x - y)$ na priamke $y = 2x + 3$
2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 2y$ na úsečke spájajúcej body $A = [-1, 1]$, $B = [-2, -1]$

Výsledky.

1.	$f(x, y) = xy^2(4 + 2x - y)$ na priamke $y = 2x + 3$	viazané lok. min. v bode $[-\frac{1}{2}, 2, -2]$ viazané lok. max. v bode $[-\frac{3}{2}, 0, 0]$
2.	$f(x, y) = x^2 + y^2 - 6x + 2y$ na priamke prechádzajúcej bodmi $A = [-1, 1]$, $B = [-2, -1]$	viazané lok. min. v bode $[-1, 1, 10]$

2.5.2.1.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

Nájdite všetky viazané lokálne extrémny funkcie $f(x, y)$.

1. $f(x, y) = xy(4 + 3x + y)$ na priamke $y = -3x - 3$
2. $f(x, y) = 3x^2 - y^2 - 6x + 2y$ na úsečke spájajúcej body $A = [1, -1]$, $B = [-4, 9]$
3. $f(x, y) = xy(8 - 12x^2 + y)$ na parabole $y = g(x) = 12x^2 - 4$

Výsledky.

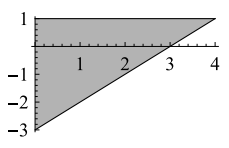
1.	$f(x, y) = xy(4 + 3x + y)$ na priamke $y = -3x - 3$	viazané lok. max. v bode $[-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}]$
2.	$f(x, y) = 3x^2 - y^2 - 6x + 2y$ na úsečke spájajúcej body $A = [1, -1], B = [-4, 9]$	viazané lok. max. v bode $[-3, 7, 10]$
3.	$f(x, y) = xy(8 - 12x^2 + y)$ na parabole $y = 12x^2 - 4$	viazané lok. max. v bode $[-\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{32}{9}]$ viazané lok. min. v bode $[\frac{1}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{32}{9}]$

2.5.3 Najmenšia a najväčšia hodnota funkcie na uzavretej oblasti

Príklad 2.5.3.1 Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x, y) = \frac{(2x-1)^2}{2} + y^2$ na trojuholníku $A = [0, -3]$, $B = [0, 1]$, $C = [4, 1]$.

Načrtnite trojuholník ABC v súradnicovej sústave.

Riešenie.

Obrázok		0,5
$f(A) =$	$f(0, -3) = \frac{(2 \cdot 0 - 1)^2}{2} + (-3)^2 = 9 + \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$	0,5
$f(B) =$	$f(0, 1) = \frac{(2 \cdot 0 - 1)^2}{2} + 1^2 = \frac{3}{2}$	0,5
$f(C) =$	$f(4, 1) = \frac{(2 \cdot 4 - 1)^2}{2} + 1^2 = \frac{49}{2} + 1 = \frac{51}{2}$	0,5
$f'_x(x, y) =$	$(\frac{(2x-1)^2}{2} + y^2)'_x = \frac{2(2x-1) \cdot 2}{2} = 2(2x-1)$	0,5
$f'_y(x, y) =$	$(\frac{(2x-1)^2}{2} + y^2)'_y = 2y$	0,5
$f'_x(x, y) = 0$	$2(2x-1) = 0$	0,25
$f'_y(x, y) = 0$	$2y = 0$	0,25
Riešenie sústavy	$2(2x-1) = 0, 2y = 0 \Rightarrow SB_1 = [\frac{1}{2}, 0] \in \Delta$	0,5
$f(SB_1) = f(\frac{1}{2}, 0) =$	$\frac{(2 \cdot \frac{1}{2} - 1)^2}{2} + 0^2 = 0$	0,5
Rovnica hrany AB	$x = 0$	0,5
$f(0, y) =$	$\frac{1}{2} + y^2$	0,5
$f'(0, y) =$	$2y$	0,25
$f'(0, y) = 0$	$2y = 0 \Rightarrow SB_2 = [0, 0] \in \Delta$	0,25
$f(SB_2) =$	$f(0, 0) = \frac{(0 \cdot \frac{1}{2} - 1)^2}{2} + 0^2 = \frac{1}{2}$	0,5
Rovnica hrany BC	$y = 1$	0,5
$f(x, 1) =$	$\frac{(2x-1)^2}{2} + 1^2 = \frac{(2x-1)^2}{2} + 1$	0,5
$f'(x, 1) =$	$\frac{1}{2} \cdot 2(2x-1) \cdot 2 = 2(2x-1)$	0,5
$f'(x, 1) = 0$	$2(2x-1) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow SB_3 = [\frac{1}{2}, 1] \in \Delta$	0,5
$f(SB_3) =$	$f(\frac{1}{2}, 1) = \frac{(2 \cdot \frac{1}{2} - 1)^2}{2} + 1^2 = 1$	0,5
Rovnica hrany AC	$y = ax + b \Rightarrow -3 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = -3,$ $1 = 4a - 3 \Rightarrow a = 1, \Rightarrow y = x - 3$	2
$f(x, x-3) =$	$\frac{(2x-1)^2}{2} + (x-3)^2$	0,5
$f'(x, x-3) =$	$\frac{1}{2} \cdot 2(2x-1) \cdot 2 + 2(x-3) = 6x - 8$	0,5
$f'(x, x-3) = 0$	$6x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3} - 3 \Rightarrow [\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}] \in \Delta$	0,5
$f(SB_4) =$	$f(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}) = \frac{(2 \cdot \frac{4}{3} - 1)^2}{2} + (-\frac{5}{3})^2 = \frac{25}{18} + \frac{25}{9} = \frac{25}{6}$	0,5
Najm. hodnota v bode	$[\frac{1}{2}, 0, 0]$	0,5
Najv. hodnota v bode	$[4, 1, \frac{51}{2}]$	0,5
SPOLU		14

2.5.3.1.1 Príklady na prepočítanie na cvičeniach

Nájdite najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie $f(x, y)$ na uzavretej a ohraničenej oblasti M .

1. $f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 + 3y + 2$ oblasť M je štvorec s vrcholmi
 $A = [-4, -4]$, $B = [4, -4]$, $C = [4, 4]$, $D = [-4, 4]$.
2. $f(x, y) = x^2 + 4x + y^2 - 2y + 7$ oblasť M je trojuholník s vrcholmi
 $A = [0, 0]$, $B = [0, 4]$, $C = [-4, 0]$.
3. $f(x, y) = xy^2(4 - x - y)$ oblasť M je oblasť ohraničená priamkami
 $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$.

Výsledky.

1.	$f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 + 3y + 2$ na štvorci s vrcholmi $A = [-4, -4]$, $B = [4, -4]$, $C = [4, 4]$, $D = [-4, 4]$	najväčšia hodnota v bode $[-4, 4, 62]$ najmenšia hodnota v bode $[2, -\frac{3}{2}, -\frac{17}{4}]$
2.	$f(x, y) = x^2 + 4x + y^2 - 2y + 7$ na trojuholníku s vrcholmi $A = [0, 0]$, $B = [0, 4]$, $C = [-4, 0]$	najväčšia hodnota v bode $[0, 4, 15]$ najmenšia hodnota v bode $[-2, 1, 2]$
3.	$f(x, y) = xy^2(4 - x - y)$ na oblasti M ohraničenej priamkami $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 6$	najväčšia hodnota v bode $[1, 2, 4]$ najmenšia hodnota v bode $[2, 4, -64]$

2.5.3.1.2 Príklady na prepočítanie na domácu úlohu

Nájdite najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie $f(x, y)$ na uzavretej a ohraničenej oblasti M .

1. $f(x, y) = x^2 + 4x + y^2 - 3y - 5$ oblasť M je štvorec s vrcholmi
 $A = [-3, -3]$, $B = [3, -3]$, $C = [3, 3]$, $D = [-3, 3]$.
2. $f(x, y) = 8x^2 + 8xy + y^2$ oblasť M je trojuholník s vrcholmi
 $A = [0, 0]$, $B = [-4, 0]$, $C = [-4, 4]$.
3. $f(x, y) = yx^2(6 + x + y)$ oblasť M je oblasť ohraničená priamkami
 $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 9 = 0$.

Výsledky.

1.	$f(x, y) = x^2 + 4x + y^2 - 3y - 5$ na štvorci s vrcholmi $A = [-3, -3], B = [3, -3],$ $C = [3, 3], D = [-3, 3]$	najväčšia hodnota v bode $[3, -3, 34]$ najmenšia hodnota v bode $[-2, \frac{3}{2}, -\frac{45}{3}]$
2.	$f(x, y) = 8x^2 + 8xy + y^2$ na trojuholníku s vrcholmi $A = [0, 0], B = [-4, 0], C = [-4, 4]$	najväčšia hodnota v bodoch $[-4, 0, 16]$ a $[-4, 4, 16]$ najmenšia hodnota v bode $[-4, 2, -16]$
3.	$f(x, y) = yx^2(6 + x + y)$ na oblasti M ohraničenej priamkami $x = 0, y = 0, x + y + 9 = 0$	najväčšia hodnota v bode $[-6, -3, 234]$ najmenšia hodnota v bode $[-3, -\frac{3}{2}, -\frac{81}{4}]$

2.5.3.1.3 Príklady na prepočítanie pred skúškou

Nájdite najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie $f(x, y)$ na uzavretej a ohraničenej oblasti M .

1. $f(x, y) = 4x^2 + 2y + y^2$ oblasť M je obdĺžnik s vrcholmi
 $A = [-2, -2], B = [2, -2], C = [2, 0], D = [-2, 0]$.
2. $f(x, y) = x^2 + 6x + y^2 + 4y - 3$ oblasť M je trojuholník s vrcholmi
 $A = [0, 0], B = [0, -6], C = [-6, 0]$.

Výsledky.

1.	$f(x, y) = 4x^2 + 2y + y^2$ na obdĺžniku s vrcholmi $A = [-2, -2], B = [2, -2],$ $C = [2, 0], D = [-2, 0]$	najväčšia hodnota v bodoch $[-2, 0, 16],$ $[-2, -2, 16], [2, -2, 16], [2, 0, 16],$ najmenšia hodnota v bode $[0, -1, -1]$
2.	$f(x, y) = x^2 + 6x + y^2 + 4y - 3$ na trojuholníku s vrcholmi $A = [0, 0], B = [0, -6], C = [-6, 0]$	najväčšia hodnota v bode $[0, -6, 9]$ najmenšia hodnota v bode $[-3, -2, -16]$

ZNÁMKA	A	B	C	D	E	FX/P	FX/N	FN	
--------	---	---	---	---	---	------	------	----	--

SKUPINA

Priezvisko študenta:

Meno študenta:

Číslo študenta z prvej strany indexu:

Dátum:

Krúžok:

Ročník:/Smer:

Číslo príkladu	1	2	3	4	5	Súčet
Hodnotenie učiteľa						
Bodové hodnotenie príkladov	7	8	11	11	12	50
Derivácie	@	@	@			
Maximum za derivácie	@	@	@	5	1.5	6.5
Nezačaté príklady						@
Počet percent z cvičenia max 100	@ @	@ @	@ @	@ @	@ @	
Hodnotenie skúšky	53-60 A 46-52 B	39-45 C 33-38 D	28-32 E @	@ @	@ @	@ @

Čas trvania písomnej skúšky: 2 hod.

Ak niektorý príklad nezačnete počítať, napíšte v tabuľke do riadku

Nezačaté príklady pod príslušné číslo príkladu písmeno N.

Na skúške nesmiete používať kalkulačku, mobilný telefón a vlastné papiere.

V prípade, že potrebujete ďalší papier, dozorujúci učiteľ Vám ho dá.

Píšte perom, nie ceruzkou. Výsledky vypíšte aj na prvú stranu.

1. PRÍKLAD

Vypočítajte integrál $\int \frac{3x^3 dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

Výsledok:

2. PRÍKLAD

Načrtnite obrázok a vypočítajte plošný obsah oblasti ohraničenej osou O_x , grafom funkcie $f(x) = 3 \ln(1 - 3x)$ a priamkou $x = \frac{1-e}{3}$.

Výsledok: $P =$

3. PRÍKLAD

Nájdite to riešenie **lineárnej** diferenciálnej rovnice $y' - \frac{y}{x+1} = \frac{60}{x^2+9}$, ktoré spĺňa začiatočnú Cauchyho podmienku $y(0) = 0$.

Výsledok:

4. PRÍKLAD

Nájdite a načrtnite definičný obor, rovnicu dotykovej roviny a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x, y) = \frac{x}{y} \ln(y^2 - x)$ v bode $[3, -2, ?]$.

Výsledok: $D(f) =$

$d :$

$n :$

5. PRÍKLAD

Nájdite najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1$ na trojuholníku $A = [0, 0]$, $B = [0, -4]$, $C = [4, 0]$.

Načrtnite trojuholník ABC v súradnicovej sústave.

Výsledok:

1. PRÍKLAD

Vypočítajte integrál $\int \frac{3x^3 dx}{\sqrt{25-x^2}}$.

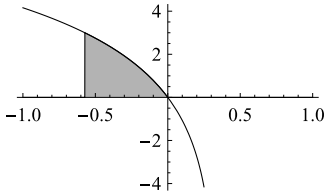
Riešenie.

Substitúcia	$\{25 - x^2 = t^2, -2x dx = 2t dt, x^2 = 25 - t^2\}$	2
Dosadíme substitúciu	$\int \frac{3x^3 dx}{\sqrt{25-x^2}} = -\frac{3}{2} \int \frac{x^2 (-2x) dx}{\sqrt{25-x^2}} = -\frac{3}{2} \int \frac{(25-t^2)2t dt}{t} =$	2
	$-3 \int (25 - t^2) dt = -75t + 3\frac{t^3}{3} + C =$	2
	$-75\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{(25 - x^2)^3} + C$	1
Výsledok	$\int \frac{3x^3 dx}{\sqrt{25-x^2}} = -75\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{(25 - x^2)^3} + C$	
SPOLU		7

2. PRÍKLAD

Načrtnite obrázok a vypočítajte plošný obsah oblasti ohraničenej osou O_x , grafom funkcie $f(x) = 3 \ln(1 - 3x)$ a priamkou $x = \frac{1-e}{3}$.

Riešenie.

Obrázok		1
Nájdeme $D(f) =$	$\{ x \mid 1 - 3x > 0 \} = \{ x \mid x < \frac{1}{3} \} = (-\infty, \frac{1}{3})$	0,5
$g(x) =$	0, pretože funkcia $g(x) = O_x$	
Vypočítame priesečník grafov funkcií $f(x) = g(x)$	$3 \ln(1 - 3x) = 0 \Rightarrow \ln(1 - 3x) = 0 \Rightarrow \ln(1 - 3x) = \ln 1 \Rightarrow 1 - 3x = 1 \Rightarrow x = 0$ $(\frac{1-e}{3}, 0) \subset D(f)$	1
Zistíme znamienko funkcie $f(x)$ na intervale, cez ktorý integrujeme	$3 \ln(1 - 3x) \geq 0$ na $(\frac{1-e}{3}, 0)$	0,5
Popíšeme oblasť	$\frac{1-e}{3} \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 3 \ln(1 - 3x)$	
Zostavíme integrál $P =$	$\int_{\frac{1-e}{3}}^0 3 \ln(1 - 3x) dx = \triangle$	1
Substitúcia Zmeníme hranice	$t = 1 - 3x, dt = -3dx, dx = -\frac{dt}{3},$ $t_h = 1 - 3 \cdot 0 = 1, t_d = 1 - 3 \cdot \frac{1-e}{3} = e$	1 1
Dosadíme substitúciu	$\triangle = \int_e^1 3 \ln t (-\frac{dt}{3}) = \int_e^1 -\ln t dt = \int_1^e \ln 1 \cdot t dt = \clubsuit$	1
Per partes $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$	$u = \ln t \quad u' = \frac{1}{t}$ $v' = 1 \quad v = t$	
Dosadíme do vzorca $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$	$\clubsuit = [t \ln t]_1^e - \int_1^e t \frac{1}{t} dt = e \ln e - 1 \ln 1 - \int_1^e 1 dt =$ $e - 0 - [t]_1^e = e - (e - 1) = 1$	0,5 0,5
SPOLU		8

3. PRÍKLAD

Nájdite to riešenie **lineárnej** diferenciálnej rovnice $y' - \frac{y}{x+1} = \frac{60}{x^2+9}$,

ktoré spĺňa začiatočnú Cauchyho podmienku $y(0) = 0$.

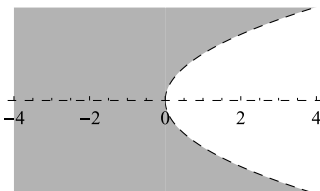
Riešenie.

1.	Riešime homog. rovniciu (bez PS)	$y' - \frac{y}{x+1} = 0$	0,5												
	$y' = \frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1}$ $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}$ $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x+1}$ $\ln y = \ln x+1 + C = \ln x+1 + \ln e^C =$ $\ln x+1 + \ln c = \ln c x+1 \Rightarrow y = c x+1 , \ c > 0$ $y_h = C(x+1), \ C \in R$	1 1												
2.	Variácia konštanty	$y_v = C(x)(x+1)$ $y'_v = C'(x)(x+1) + C(x)$	1 0,5												
	Dosadíme y'_v do rovnice s PS	$y'_v - \frac{y_v}{x+1} = \frac{60}{x^2+9}$													
		$C'(x)(x+1) + C(x) - \frac{C(x)(x+1)}{x+1} = \frac{60}{x^2+9}$ $C'(x)(x+1) = \frac{60}{x^2+9}$ $C'(x) = \frac{60}{(x+1)(x^2+9)}$ $C(x) = \int \frac{60}{(x+1)(x^2+9)} \, dx \spadesuit$	0,5 0,5 0,5 0,5												
	RPZ	$\frac{60}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+9} = \frac{A(x^2+9)+(Mx+N)(x+1)}{(x+1)(x^2+9)}$ <table><tr><td></td><td>$60 = A(x^2+9) + (Mx+N)(x+1)$</td><td></td></tr><tr><td>$x = -1$</td><td>$60 = A.10$</td><td>$A = 6$</td></tr><tr><td>$x = 0$</td><td>$60 = 6.9 + N.1$</td><td>$N = 6$</td></tr><tr><td>$x = 1$</td><td>$60 = 6.10 + (M+6).2$</td><td>$M = -6$</td></tr></table> $\frac{60}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{6}{x+1} + \frac{-6x+6}{x^2+9}$		$60 = A(x^2+9) + (Mx+N)(x+1)$		$x = -1$	$60 = A.10$	$A = 6$	$x = 0$	$60 = 6.9 + N.1$	$N = 6$	$x = 1$	$60 = 6.10 + (M+6).2$	$M = -6$	2
	$60 = A(x^2+9) + (Mx+N)(x+1)$														
$x = -1$	$60 = A.10$	$A = 6$													
$x = 0$	$60 = 6.9 + N.1$	$N = 6$													
$x = 1$	$60 = 6.10 + (M+6).2$	$M = -6$													
	Vypočítame integrál	$\spadesuit C(x) = \int \frac{6}{(x+1)} \, dx + \int \frac{-6x+6}{(x^2+9)} \, dx$ $C(x) = 6 \ln x+1 + \int \frac{-6x}{(x^2+9)} \, dx + \int \frac{6}{(x^2+9)} \, dx$ $C(x) = 6 \ln x+1 - 3 \int \frac{2x}{(x^2+9)} \, dx + \int \frac{6}{(x^2+9)} \, dx$ $C(x) = 6 \ln x+1 - 3 \ln (x^2+9) + 6. \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} + B$	0,5 0,5												
		$y_v = C(x)(x+1) =$ $(6 \ln x+1 - 3 \ln (x^2+9) + 2 \arctg \frac{x}{3} + B)(x+1)$	0,5												
3.	Uplatníme začiatočnú podmienku	$y(0) = 0$ $0 = y_p(0) =$ $(6 \ln 0+1 - 3 \ln (0^2+9) + 2 \arctg \frac{0}{3} + B)(0+1)$ $0 = (-3 \ln 9 + B)$ $B = 6 \ln 3$	1												
4.	Výsledok	$y_p = (6 \ln x+1 - 3 \ln (x^2+9) + 2 \arctg \frac{x}{3} + 6 \ln 3)(x+1)$	0,5												
	SPOLU		11												

4. PRÍKLAD

Nájdite a načrtnite definičný obor, rovnicu dotykovej roviny a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x, y) = \frac{x}{y} \ln(y^2 - x)$ v bode $[3, -2, ?]$.

Riešenie.

Nájdeme $D(f) =$	$\{ [x, y] \mid y^2 - x > 0, y \neq 0 \} = \{ [x, y] \mid x < y^2, y \neq 0 \}$	0,5
Obrázok		1
Rovnica dotykovej roviny	$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$	0,5
Rovnice normály	$x = x_0 + f'_x(x_0, y_0)t, y = y_0 + f'_y(x_0, y_0)t, z = z_0 - t, t \in R$	0,5
Vypočítame $z_0 = f(x_0, y_0) =$	$f(3, -2) = \frac{3}{-2} \ln((-2)^2 - 3) = \frac{3}{-2} \ln 1 = 0$	0,5
Vypočítame $f'_x(x, y) =$	$(\frac{x}{y} \ln(y^2 - x))'_x = \frac{1}{y} \ln(y^2 - x) + \frac{x}{y} \frac{1}{(y^2 - x)}(-1)$	2,5
Vypočítame $f'_x(x_0, y_0) =$	$f'_x(3, -2) = \frac{1}{-2} \ln((-2)^2 - 3) + \frac{3}{-2} \frac{1}{((-2)^2 - 3)}(-1) = \frac{3}{2}$	0,5
Vypočítame $f'_y(x, y) =$	$(\frac{x}{y} \ln(y^2 - x))'_y = -\frac{x}{y^2} \ln(y^2 - x) + \frac{x}{y} \frac{1}{(y^2 - x)} 2y$	2,5
Vypočítame $f'_y(x_0, y_0) =$	$f'_y(3, -2) = -\frac{3}{(-2)^2} \ln((-2)^2 - 3) + \frac{3}{-2} \frac{1}{((-2)^2 - 3)} 2(-2) = 6$	0,5
Rovnica dotykovej roviny	$z = \frac{3}{2}(x - 3) + 6(y + 2)$ $3x + 12y - 2z + 15 = 0$	1
Rovnice normály	$x = 3 + \frac{3}{2}t, y = -2 + 6t, z = 0 - t, t \in R$	1
SPOLU		11

5. PRÍKLAD

Nájdite najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1$ na $\triangle A = [0, 0]$, $B = [0, -4]$, $C = [4, 0]$. Načrtnite $\triangle ABC$ v súradnicovej sústave.

Riešenie.

Obrázok		0,25
$f(A) =$	$f(0, 0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 0^2 + 4 \cdot 0 + 1 = 1$	0,25
$f(B) =$	$f(0, -4) = 0^2 - 2 \cdot 0 + (-4)^2 + 4 \cdot (-4) + 1 = 1$	0,25
$f(C) =$	$f(4, 0) = 4^2 - 2 \cdot 4 + 0^2 + 4 \cdot 0 + 1 = 9$	0,25
$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} =$	$2x - 2$	0,5
$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0$	$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$	0,25
$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} =$	$2y + 4$	0,5
$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$	$2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2$	0,5
$SB_1 =$	$[1, -2] \in \triangle ABC$	0,25
$f(SB_1) =$	$f(1, -2) = 1^2 - 2 \cdot 1 + (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 1 = -4$	0,5
Rovnica hrany AC	$y = 0$	0,5
$f(x, 0) = h_1(x) =$	$x^2 - 2x + 0^2 + 4 \cdot 0 + 1 = x^2 - 2x + 1$	0,25
$f'(x, 0) = h'_1(x) =$	$2x - 2$	0,5
$f'(x, 0) = h'_1(x) = 0$	$2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$	0,5
$SB_2 =$	$[1, 0] \in \triangle ABC$	0,25
$f(SB_2) =$	$f(1, 0) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 0^2 + 4 \cdot 0 + 1 = 0$	0,5
Rovnica hrany AB	$x = 0$	0,5
$f(0, y) = h_2(y) =$	$0^2 - 2 \cdot 0 + y^2 + 4y + 1 = y^2 + 4y + 1$	0,25
$f'(0, y) = h'_2(y) =$	$2y + 4$	0,5
$f'(0, y) = h'_2(y) = 0$	$2y + 4 = 0 \Rightarrow y = -2$	0,5
$SB_3 =$	$[0, -2] \in \triangle ABC$	0,25
$f(SB_3) =$	$f(0, -2) = 0^2 - 2 \cdot 0 + (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 1 = -3$	0,5
Rovnica hrany BC	$y = x - 4$	0,5
$f(x, x - 4) = h_3(x) =$	$x^2 - 2x + (x - 4)^2 + 4(x - 4) + 1 = 2x^2 - 6x + 1$	0,5
$f'(x, x - 4) = h'_3(x) =$	$4x - 6$	0,5
$f'(x, x - 4) = h'_3(x) = 0$	$4x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2}$	0,25
$SB_4 =$	$[\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}] \in \triangle ABC$	0,25
$f(SB_4) =$	$f(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}) = (\frac{3}{2})^2 - 2(\frac{3}{2}) + (-\frac{5}{2})^2 + 4(-\frac{5}{2}) + 1 = -\frac{7}{2}$	0,5
Najväčšia hodnota	$\max(f(A), f(B), f(C), f(SB_1), f(SB_2), f(SB_3), f(SB_4)) = 9$ Funkcia $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1$ má najväčšiu hodnotu v bode $[4, 0, 9]$.	0,5
Najmenšia hodnota	$\min(f(A), f(B), f(C), f(SB_1), f(SB_2), f(SB_3), f(SB_4)) = -4$ Funkcia $f(x, y) = x^2 - 2x + y^2 + 4y + 1$ má najmenšiu hodnotu v bode $[1, -2, -4]$.	0,5
SPOLU		12

ZNÁMKA	A	B	C	D	E	FX/P	FX/N	FN	
--------	---	---	---	---	---	------	------	----	--

SKUPINA

Priezvisko študenta:

Meno študenta:

Číslo študenta z prvej strany indexu:

Dátum:

Krúžok:

Ročník:/Smer:

Číslo príkladu	1	2	3	4	5	Súčet
Hodnotenie učiteľa						
Bodové hodnotenie príkladov	7	8	13	12	10	50
Derivácie	@	@	@			
Maximum za derivácie	@	@	5	6	2	13
Nezačaté príklady						@
Počet percent z cvičenia max 100	@ @	@ @	@ @	@ @	@ @	
Hodnotenie skúšky	53-60 A 46-52 B	39-45 C 33-38 D	28-32 E @	@ @	@ @	@ @

Čas trvania písomnej skúšky: 2 hod.

Ak niektorý príklad nezačnete počítať, napíšte v tabuľke do riadku

Nezačaté príklady pod príslušné číslo príkladu písmeno N.

Na skúške nesmiete používať kalkulačku, mobilný telefón a vlastné papiere.

V prípade, že potrebujete ďalší papier, dozorujúci učiteľ Vám ho dá.

Píšte perom, nie ceruzkou. Výsledky vypíšte aj na prvú stranu.

1. PRÍKLAD

Vypočítajte integrál $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

Výsledok:

2. PRÍKLAD

Vypočítajte plošný obsah elementárnej oblasti ohraničenej grafom funkcie $f(x) = \frac{10}{x^2 - x - 6}$ a priamkami $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Výsledok: $P =$

3. PRÍKLAD

Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 6y' + 9y = 12xe^{3x}$.

Výsledok:

4. PRÍKLAD

Nájdite a načrtnite definičný obor, rovnicu dotykovej roviny a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x, y) = \frac{\cos(x^2 y)}{x} - \frac{2y}{3}$ v bode $[1, 0, ?]$.

Výsledok: $d :$ $n :$

5. PRÍKLAD

Nájdite všetky **viazané lokálne** extrémny funkcie $f(x, y) = y^2 - 4y + 2x$ na priamke prechádzajúcej bodmi $A = [-1, -2]$ a $B = [1, -1]$.

Načrtnite priamku AB .

Výsledok:

1. PRÍKLAD

Vypočítajte integrál $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

Riešenie.

Substitúcia	$\sqrt{x} = t, \quad x = t^2, \quad dx = 2t dt$	1
Dosadíme	$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\ln t^2}{t} 2t dt =$	1
substitúciu	$2 \int \ln t^2 dt = 2 \int 2 \ln t dt = 4 \int \ln t dt = 4 \int 1 \cdot \ln t dt = \clubsuit$	1
Per partes	$u = \ln t, \quad u' = \frac{1}{t}$	
$\int uv' = uv - \int u'v$	$v' = 1, \quad v = t$	1
Dosadíme do vzorca	$\clubsuit = 4(t \ln t - \int \frac{1}{t} t dt) = 4(t \ln t - \int 1 dt) = 4t \ln t - 4t + C =$	1
$\int uv' = uv - \int u'v$	$4\sqrt{x} \ln \sqrt{x} - 4\sqrt{x} + C = 4\sqrt{x} \ln x^{\frac{1}{2}} - 4\sqrt{x} + C =$	1
	$4\frac{1}{2}\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C$	1
Výsledok	$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C$	
SPOLU		7

2. PRÍKLAD

Vypočítajte plošný obsah elementárnej oblasti ohraničenej funkciou $f(x) = \frac{10}{x^2-x-6}$ a priamkami $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Riešenie.

Nájdeme $D(f) =$	$\{x \mid x^2 - x - 6 \neq 0\} = \clubsuit$	
Nájdeme nulové body menovateľa	$x^2 - x - 6 = 0$ $x_1 = \frac{1+\sqrt{1-4(-6)}}{2} = \frac{1+5}{2} = 3$ $x_2 = \frac{1-\sqrt{1-4(-6)}}{2} = \frac{1-5}{2} = -2$ $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$	1
$D(f) =$	$\clubsuit = (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, \infty)$	
	$g(x) = 0$	
Vypočítame priesečník grafov funkcií $f(x) = g(x)$	$\frac{10}{x^2-x-6} \neq 0$, pre $x \in D(f)$	0,5
Zistíme znamienko funkcie $f(x)$ na intervale cez ktorý integrujeme	$\frac{10}{x^2-x-6} < 0$ na $(0, 1)$ pretože $(0, 1) \subset (-2, 3)$	0,5
Zostavíme integrál $P =$	$-\int_0^1 \frac{10}{x^2-x-6} dx$	1
RPZ	$\frac{10}{x^2-x-6} = \frac{10}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$	1
Upravíme na spoločného menovateľa	$\frac{10}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+2)}{(x+2)(x-3)}$	0,5
Z rovnosti zlomkov dostávame	$10 = A(x-3) + B(x+2)$	0,5
Dosadením $x =$	-2 dostávame $10 = A(-5) \Rightarrow A = -2$	0,5
Dosadením $x =$	3 dostávame $10 = B \cdot 5 \Rightarrow B = 2$	0,5
	$\frac{10}{x^2-x-6} = \frac{-2}{x+2} + \frac{2}{x-3}$	1
Vypočítame integrál $P =$	$-\int_0^1 \frac{10}{x^2-x-6} dx = -(\int_0^1 \frac{-2}{x+2} dx + \int_0^1 \frac{2}{x-3} dx) =$ $[2 \ln x+2 - 2 \ln x-3]_0^1 = [2 \ln \frac{x+2}{x-3}]_0^1 =$ $2(\ln \frac{3}{-2} - \ln \frac{2}{-3}) = 2(\ln\frac{3}{2} - \ln\frac{2}{3}) =$ $2 \ln\frac{9}{4} = 2 \ln(\frac{3}{2})^2 = 4 \ln\frac{3}{2}$	1
SPOLU		8

3. PRÍKLAD

Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $y'' - 6y' + 9y = 12xe^{3x}$.

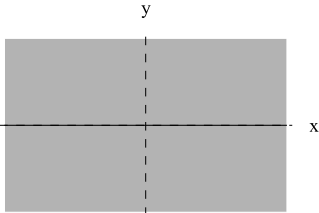
Riešenie.

I.	Riešime DR s nulovou PS		$y'' - 6y' + 9y = 0$	
I.2	Char.rovnica		$r^2 - 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r - 3)^2 = 0$	0,5
I.3	Korene char. rovnice	$r_1 =$ $r_2 =$	3 3	0,5 0,5
I.4	Riešenie DR s nulovou PS	$y_h =$	$C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$	0,5
II.	Riešime DR so špeciál. PS		$y'' - 6y' + 9y = 12xe^{3x}$	
II.1	Typ PS	EP= $e^{mx}P(x) =$	$12xe^{3x}$	0,5
II.2	Určíme parametre	$m =$ $P(x) =$ $stP(x) =$	3 $12x$ 1	0,5
II.3	Partikulárne riešenie hľadáme v tvare	$y_p = x^k e^{mx} \overline{P(x)} =$	$x^k e^{3x} (Ax + B)$	0,5
II.4	Určíme exponent k	$k =$	2 , pretože $m = 3$ je dvojnásobný koreň char. rovnice $x^2 e^{3x} (Ax + B) = (Ax^3 + Bx^2)e^{3x}$	1
II.3	Zderivujeme	$y'_p =$ $y''_p =$	$(Ax^3 + Bx^2)e^{3x})' =$ $(3Ax^2 + 2Bx)e^{3x} + (Ax^3 + Bx^2)3e^{3x} =$ $(3Ax^3 + (3A + 3B)x^2 + 2Bx)e^{3x}$ $((3Ax^3 + (3A + 3B)x^2 + 2Bx)e^{3x})' =$ $(9Ax^2 + (6A + 6B)x + 2B)e^{3x} +$ $(3Ax^3 + (3A + 3B)x^2 + 2Bx)3e^{3x} =$ $(9Ax^3 + (18A + 9B)x^2 + (6A + 12B)x + 2B)e^{3x}$	2 3
II.6	Dosadíme derivácie do rovnice Krátíme e^{mx} Dostávame	$\oplus$ $y'' =$ $-6y' =$ $+9y =$ $\overline{y'' - 6y' + 9y} =$ $12xe^{3x} =$ $12x =$	$y'' - 6y' + 9y = 12xe^{3x}$ $(9Ax^3 + (18A + 9B)x^2 + (6A + 12B)x + 2B)e^{3x}$ $(-18Ax^3 + (-18A - 18B)x^2 - 12Bx)e^{3x}$ $(9Ax^3 + 9Bx^2)e^{3x}$ $\overline{(6Ax + 2B)e^{3x}}$ $(6Ax + 2B)e^{3x}$ $6Ax + 2B$	1
	Porovnáme koef. pri x^1 : koef. pri x^0 :	$12 =$ $0 =$	$6A \Rightarrow A = 2$ $2B \Rightarrow B = 0$	0,5 0,5
II.7	Partikulárne riešenie	$y_p =$	$2x^3e^{3x}$	0,5
II.8	Všeobecné riešenie	$y_v = y_h + y_p =$	$C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + 2x^3e^{3x}$	1
	SPOLU			13

4. PRÍKLAD

Nájdite a načrtnite definičný obor, rovnicu dotykovej roviny a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x, y) = \frac{\cos(x^2 y)}{x} - \frac{2y}{3}$ v bode $[1, 0, ?]$.

Riešenie.

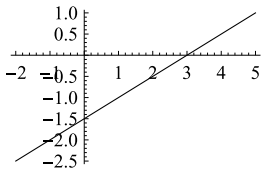
Nájdeme $D(f) =$	$\{ [x, y] \mid x \neq 0 \}$	0,5
Obrázok		1
Rovnica dotykovej roviny	$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$	0,5
Rovnice normály	$x = x_0 + f'_x(x_0, y_0)t, y = y_0 + f'_y(x_0, y_0)t, z = z_0 - t, t \in R$	0,5
Vypočítame $z_0 = f(x_0, y_0) =$	$f(1, 0) = \frac{\cos(1^2 \cdot 0)}{1} - \frac{2 \cdot 0}{3} = 1$	0,5
Vypočítame $f'_x(x, y) =$	$(\frac{\cos(x^2 y)}{x} - \frac{2y}{3})'_x = \frac{-\sin(x^2 y)(2xy)x - \cos(x^2 y) \cdot 1}{x^2} - 0$	3
Vypočítame $f'_x(x_0, y_0) =$	$f'_x(1, 0) = \frac{-\sin(1^2 \cdot 0)(2 \cdot 1 \cdot 0)1 - \cos(1^2 \cdot 0) \cdot 1}{1^2} - 0 = -1$	0,5
Vypočítame $f'_y(x, y) =$	$(\frac{\cos(x^2 y)}{x} - \frac{2y}{3})'_y = \frac{1}{x}(-\sin(x^2 y))x^2 - \frac{2}{3}$	3
Vypočítame $f'_y(x_0, y_0) =$	$f'_y(1, 0) = \frac{1}{1}(-\sin(1^2 \cdot 0))1^2 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$	0,5
Rovnica dotykovej roviny	$z - 1 = -1(x - 1) - \frac{2}{3}(y - 0)$ $3x + 2y + 3z - 6 = 0$	1
Rovnice normály	$x = 1 - t, y = 0 - \frac{2}{3}t, z = 1 - t, t \in R$	1
SPOLU		12

5. PRÍKLAD

Nájdite všetky **viazané lokálne** extrémym funkcie $f(x, y) = y^2 - 4y + 2x$ na priamke prechádzajúcej bodmi $A = [-1, -2]$ a $B = [1, -1]$.

Načrtnite priamku AB .

Riešenie.

Obrázok		1
Vypočítame rovnicu priamky $y = ax + b$ dosadíme bod $A = [-1, -2]$ dosadíme bod $B = [1, -1]$	$\begin{aligned} [-1, -2], \quad -2 &= a(-1) + b \Rightarrow b = a - 2 \\ [1, -1], \quad -1 &= a \cdot 1 + b \Rightarrow a = -b - 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow a &= -a + 2 - 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \end{aligned}$	2
Upravíme rovnicu priamky	$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \Rightarrow 2y = x - 3 \Rightarrow x = 2y + 3 = cy + d$	
Dosadíme rovnicu $x = cy + d$ do funkcie $f(x, y)$ $h(y) = f(cy + d, y) =$	$\begin{aligned} f(2y + 3, y) &= y^2 - 4y + 2(2y + 3) = \\ &= y^2 - 4y + 4y + 6 = y^2 + 6 \end{aligned}$	2
$h(y) =$	$y^2 + 6$	
Vypočítame $h'(y) =$	$2y$	1
Vypočítame stacionárny bod funkcie $h(y)$ $h'(y) = 0$	$h'(y) = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$	
Stacionárny bod $SB =$	0	1
Vypočítame $h''(y) =$	2	1
$h''(SB) =$	$h''(0) = 2 > 0$	1
Funkcia $h(y)$ má v bode $SB =$	0 lokálne minimum	1
Funkcia $f(x, y)$	má v bode $[2 \cdot 0 + 3, 0] = [3, 0]$ viazané lokálne minimum s hodnotou $f(3, 0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6$ s väzbou $x = 2y + 3$	1
SPOLU		10

ZNÁMKA	A	B	C	D	E	FX/P	FX/N	FN	
--------	---	---	---	---	---	------	------	----	--

SKUPINA

Priezvisko študenta:

Meno študenta:

Číslo študenta z prvej strany indexu:

Dátum:

Krúžok:

Ročník:/Smer:

Číslo príkladu	1	2	3	4	5	Súčet
Hodnotenie učiteľa						
Bodové hodnotenie príkladov	7	8	11	13	11	50
Derivácie	@	@	@			
Maximum za derivácie	@	@	@	4	2	6
Nezačaté príklady						@
Počet percent z cvičenia max 100	@ @	@ @	@ @	@ @	@ @	
Hodnotenie skúšky	53-60 A 46-52 B	39-45 C 33-38 D	28-32 E @	@ @	@ @	@ @

Čas trvania písomnej skúšky: 2 hod.

Ak niektorý príklad nezačnete počítať, napíšte v tabuľke do riadku

Nezačaté príklady pod príslušné číslo príkladu písmeno N.

Na skúške nesmiete používať kalkulačku, mobilný telefón a vlastné papiere.

V prípade, že potrebujete ďalší papier, dozorujúci učiteľ Vám ho dá.

Píšte perom, nie ceruzkou. Výsledky vypíšte aj na prvú stranu.

1. PRÍKLAD

Vypočítajte $\int \frac{5}{(x+1)(x^2-2x+2)} dx$.

Výsledok:

2. PRÍKLAD

Vypočítajte plošný obsah oblasti ohraničenej grafom funkcie $f(x) = \frac{3x^3}{\sqrt{25-x^2}}$
a priamkami $y = 0$, $x = 3$

Výsledok: $P =$

3. PRÍKLAD

Nájdite to riešenie **separovateľnej** diferenciálnej rovnice $y' = y \arcsin(3x)$,
ktoré spĺňa Cauchyho začiatočnú podmienku $y(0) = 1$.

Výsledok:

4. PRÍKLAD

Nájdite a načrtnite definičný obor, rovnicu dotykovej roviny a rovnicu normály
ku grafu funkcie $f(x, y) = 3\sqrt{x^2 + y^2 - 9} + 6 \ln \frac{x-y^2}{2}$ v bode $P = [4, \sqrt{2}, ?]$.

Výsledok:

$d :$

$n :$

5. PRÍKLAD

Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie

$$f(x, y) = x - x^2y + y$$

na štvoruholníku $A = [0, 0]$, $B = [0, \frac{3}{2}]$, $C = [\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, $D = [\frac{3}{2}, 0]$.

Načrtnite štvoruholník ABCD v súradnicovej sústave.

Výsledok:

1. PRÍKLAD

Vypočítajte $\int \frac{5}{(x+1)(x^2-2x+2)} dx$.

Riešenie.

	$\int \frac{5}{(x+1)(x^2-2x+2)} dx = \clubsuit$	
RPZ	$\frac{5}{(x+1)(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$	1
	$\frac{5}{(x+1)(x^2-2x+2)} = \frac{A(x^2-2x+2)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-2x+2)}$	
Z rovnosti zlomkov dostávame	$5 = A(x^2 - 2x + 2) + (Bx + C)(x + 1)$	1
Dosadíme $x =$	$-1, \quad 5 = A((-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 2) + (B \cdot (-1) + C)(-1 + 1) \Rightarrow A = 1$	
$x =$	$0, \quad 5 = 1(0^2 - 2 \cdot 0 + 2) + (B \cdot 0 + C)(0 + 1) \Rightarrow 5 = 2 + 1C \Rightarrow C = 3$	
$x =$	$1, \quad 5 = 1(1^2 - 2 \cdot 1 + 2) + (B \cdot 1 + 3)(1 + 1) \Rightarrow 5 = 1 + 2B + 6 \Rightarrow 5 - 7 = 2B \Rightarrow B = -1$	1
	$\frac{5}{(x+1)(x^2-2x+2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-x+3}{x^2-2x+2}$	2
Substitúcia	$\clubsuit = \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{-x+3}{x^2-2x+2} dx =$ $\ln x+1 - \frac{1}{2} \int \frac{2x-6}{x^2-2x+2} dx = \ln x+1 - \frac{1}{2} \int \frac{2x-2-4}{x^2-2x+2} dx =$ $\ln x+1 - \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2+1} =$ $\{t = x - 1, \quad dt = dx\}$ $\ln x+1 - \frac{1}{2} \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx + 2 \int \frac{dt}{t^2+1} =$ $\ln x+1 - \frac{1}{2} \ln x^2 - 2x + 2 + 2 \operatorname{arctg} t + C =$ $\ln x+1 - \frac{1}{2} \ln (x-1)^2 + 1 + 2 \operatorname{arctg}(x-1) + C$	1
Výsledok	$\int \frac{5}{(x+1)(x^2-2x+2)} dx =$ $\ln x+1 - \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 2) + 2 \operatorname{arctg}(x-1) + C$	
SPOLU		7

2. PRÍKLAD

Vypočítajte plošný obsah oblasti ohraničenej grafom funkcie

$$f(x) = \frac{3x^3}{\sqrt{25-x^2}}$$

a priamkami $y = 0$, $x = 3$.

Riešenie.

Nájdeme $D(f) =$	$\{x \mid 25 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 25\} = \{x \mid -5 < x < 5\} = (-5, 5)$	0,5
	$g(x) = 0$	
Vypočítame priesečník grafov funkcií $f(x) = g(x)$	$\frac{3x^3}{\sqrt{25-x^2}} = 0 \Rightarrow x = 0, (0, 3) \subset D(f) = (-5, 5)$	0,5
Zistíme znamienko funkcie $f(x)$ na intervale cez ktorý integrujeme	Pre $x \in (0, 3)$ platí $\frac{3x^3}{\sqrt{25-x^2}} > 0$	0,5
Popíšeme oblasť	$0 \leq x \leq 3$ $0 \leq y \leq \frac{3x^3}{\sqrt{25-x^2}}$	0,5
Zostavíme integrál $P =$	$\int_0^3 \frac{3x^3}{\sqrt{25-x^2}} dx = 3 \int_0^3 \frac{x^2 \cdot x dx}{\sqrt{25-x^2}} = \clubsuit$	1
Substitúcia	$\sqrt{25-x^2} = t, \quad t^2 = 25-x^2, \quad 2t dt = -2x dx, \quad x^2 = 25-t^2$ $t_d = \sqrt{25-0^2} = 5, \quad t_h = \sqrt{25-3^2} = 4$	1 1
	$\clubsuit = 3 \int_5^4 \frac{(25-t^2) \cdot (-t dt)}{t} = -3 \int_5^4 (25-t^2) dt = 3 \int_4^5 (25-t^2) dt =$ $3[25t - \frac{t^3}{3}]_4^5 = [75t - t^3]_4^5 = (75 \cdot 5 - 5^3) - (75 \cdot 4 - 4^3) =$ $5(75 - 5^2) - 4(75 - 4^2) = 5(75 - 25) - 4(75 - 16) =$ $5 \cdot 50 - 4 \cdot 59 = 250 - 236 = 14$	2 1
SPOLU		8

3. PRÍKLAD

Nájdite to riešenie **separovateľnej** diferenciálnej rovnice $y' = y \arcsin(3x)$, ktoré spĺňa Cauchyho začiatočnú podmienku $y(0) = 1$.

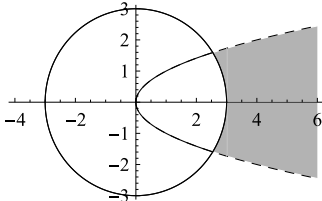
Riešenie.

Dosadíme do rovnice $y' = \frac{dy}{dx}$	$y' = y \arcsin(3x)$ $\frac{dy}{dx} = y \arcsin(3x)$	0,5
Separujeme premenné	$dy = y \cdot \arcsin(3x) \cdot dx$ $\frac{dy}{y} = \arcsin(3x) \cdot dx$	1
Integrujeme obidve strany DR	$\int \frac{dy}{y} = \int \arcsin(3x) \cdot dx$ $\ln y = \int \arcsin(3x) \cdot dx$	0,5 1
Vypočítame integrál		
Per partes	$\int \arcsin(3x) \cdot dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \arcsin(3x) & u' = \frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} \\ v' = 1 & v = x \end{array} \right\}$	2
	$\int \arcsin(3x) \cdot dx = x \arcsin(3x) - \int \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx = \clubsuit$	1
Substitúcia	$\int \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx = \{1 - 9x^2 = t^2, -18x dx = 2t dt\} = -\frac{1}{3} \int \frac{t dt}{t} =$ $-\frac{1}{3} \int dt = -\frac{1}{3} t + C = -\frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2} + C$	1
	$\clubsuit = x \arcsin(3x) + \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2} + C$	1
Upravíme rovnicu	$\ln y = x \arcsin(3x) + \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2} + C$ $ y = e^{x \arcsin(3x) + \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2} + C} = e^C e^{x \arcsin(3x) + \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2}} =$ $k e^{x \arcsin(3x) + \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2}}, k > 0$	1
Všeobecné riešenie rovnice	$y = C_1 e^{x \arcsin(3x) + \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2}}, C_1 \in R$	
Uplatníme začiatočnú podmienku	$1 = C_1 e^{0 \cdot \arcsin(3 \cdot 0) + \frac{1}{3} \sqrt{1-9 \cdot 0^2}} \Rightarrow C_1 e^{\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow C_1 = e^{-\frac{1}{3}}$	1
Výsledok	$y = e^{-\frac{1}{3}} e^{x \arcsin(3x) + \frac{1}{3} \sqrt{1-9x^2}}$	1
SPOLU		11

4. PRÍKLAD

Nájdite a načrtnite definičný obor, rovnicu dotykovej roviny a rovnicu normály ku grafu funkcie $f(x, y) = 3\sqrt{x^2 + y^2 - 9} + 6 \ln \frac{x-y^2}{2}$ v bode $P = [4, \sqrt{2}, ?]$.

Riešenie.

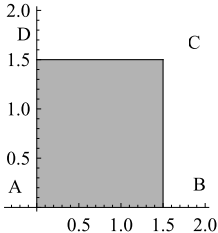
Nájdeme $D(f) =$	$\{ [x, y] \mid x^2 + y^2 - 9 \geq 0 \wedge x - y^2 > 0 \} =$ $\{ [x, y] \mid x^2 + y^2 \geq 9 \wedge y^2 < x \}$	2
Obrázok		2
Rovnica dotykovej roviny	$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$	0,5
Rovnice normály	$x = x_0 + f'_x(x_0, y_0)t, y = y_0 + f'_y(x_0, y_0)t, z = z_0 - t, t \in R$	0,5
Vypočítame $z_0 = f(x_0, y_0) =$	$f(4, \sqrt{2}) = 3\sqrt{4^2 + \sqrt{2}^2 - 9} + 6 \ln \frac{4 - \sqrt{2}^2}{2} =$ $3\sqrt{16 + 2 - 9} + 6 \ln \frac{4-2}{2} = 3.3 + 6 \ln \frac{2}{2} = 9$	1
Vypočítame $f'_x(x, y) =$	$(3\sqrt{x^2 + y^2 - 9} + 6 \ln \frac{x-y^2}{2})'_x = \frac{3.2x}{2\sqrt{x^2+y^2-9}} + 6 \frac{2}{x-y^2} \cdot (\frac{1}{2}) =$ $\frac{3x}{\sqrt{x^2+y^2-9}} + \frac{6}{x-y^2}$	2
Vypočítame $f'_x(x_0, y_0) =$	$f'_x(4, \sqrt{2}) = \frac{3.4}{\sqrt{4^2 + \sqrt{2}^2 - 9}} + \frac{6}{4 - \sqrt{2}^2} = \frac{3.4}{3} + \frac{6}{2} = 4 + 3 = 7$	0,5
Vypočítame $f'_y(x, y) =$	$(3\sqrt{x^2 + y^2 - 9} + 6 \ln \frac{x-y^2}{2})'_y = \frac{3.2y}{2\sqrt{x^2+y^2-9}} + 6 \frac{2}{x-y^2} \cdot \frac{-2y}{2} =$ $\frac{3y}{\sqrt{x^2+y^2-9}} - \frac{12y}{x-y^2}$	2
Vypočítame $f'_y(x_0, y_0) =$	$f'_y(4, \sqrt{2}) = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{4^2 + \sqrt{2}^2 - 9}} - \frac{12\sqrt{2}}{4-2} = \frac{3\sqrt{2}}{3} - \frac{12\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 6\sqrt{2} =$ $-5\sqrt{2}$	0,5
Rovnica dotykovej roviny	$z - 9 = 7(x - 4) - 5\sqrt{2}(y - \sqrt{2})$ $7x - 5\sqrt{2}y - z - 9 = 0$	1
Rovnice normály	$x = 4 + 7t, y = \sqrt{2} - 5\sqrt{2}t, z = 9 - t, t \in R$	1
SPOLU		13

5. PRÍKLAD

Nájdite najväčšiu a najmenšiu hodnotu funkcie $f(x, y) = x - x^2y + y$ na štvorci $A = [0, 0]$, $B = [\frac{3}{2}, 0]$, $C = [\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$, $D = [0, \frac{3}{2}]$.

Načrtnite štvorec ABCD v súradnicovej sústave.

Riešenie.

Obrázok		0,5
$f(A) =$ $f(B) =$ $f(C) =$ $f(D) =$	$f(0, 0) = 0 - 0^2 \cdot 0 + 0 = 0$ $f(\frac{3}{2}, 0) = \frac{3}{2} - (\frac{3}{2})^2 \cdot 0 + 0 = \frac{3}{2}$ $f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) = \frac{3}{2} - (\frac{3}{2})^2 \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{3}{8}$ $f(0, \frac{3}{2}) = 0 - 0^2 \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$	1
$f'_x(x, y) = 0$ $f'_y(x, y) = 0$	$(x - x^2y + y)'_x = 1 - 2xy = 0$ $(x - x^2y + y)'_y = -x^2 + 1 = 0$	0,5 0,5
Riešenie sústavy $f'_x(x, y) = 0$ $f'_y(x, y) = 0$ SB_1	$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 1$ $x_1 = -1 \Rightarrow 1 - 2 \cdot (-1) \cdot y = 0 \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow [-1, -\frac{1}{2}] \notin \square$ $x_2 = 1 \Rightarrow 1 - 2 \cdot 1 \cdot y = 0 \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow [1, \frac{1}{2}] \in \square \Rightarrow$ $= [1, \frac{1}{2}]$	1,5
$f(SB_1)$	$= f(1, \frac{1}{2}) = 1 - 1^2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$	0,5
Rovnica hrany AD	$x = 0$	0,25
$f(0, y) =$	$0 - 0^2y + y = y$	0,5
$f'(0, y) =$	$1 \neq 0 \Rightarrow$ nemá stacionárne body	0,5
Rovnica hrany CD	$y = \frac{3}{2}$	0,25
$f(x, \frac{3}{2}) =$	$x - x^2 \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} =$	0,5
$f'(x, \frac{3}{2}) =$	$1 - 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow SB_2 = [\frac{1}{3}, \frac{3}{2}] \in \square$	0,5
$f(SB_2) =$	$f(\frac{1}{3}, \frac{3}{2}) = \frac{1}{3} - (\frac{1}{3})^2 \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{5}{3}$	0,5
Rovnica hrany BC	$x = \frac{3}{2}$	0,25
$f(\frac{3}{2}, y) =$	$\frac{3}{2} - (\frac{3}{2})^2 y + y = \frac{3}{2} - \frac{5}{4}y$	0,5
$f'(\frac{3}{2}, y) =$	$-\frac{5}{4} \neq 0 \Rightarrow$ nemá stacionárne body	0,5
Rovnica hrany AB	$y = 0$	0,25
$f(x, 0) =$	$x - x^2 \cdot 0 + 0 = x$	0,5
$f'(x, 0) =$	$1 \neq 0 \Rightarrow$ nemá stacionárne body	0,5
Najväčšia hodnota v bode	$[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, f(\frac{1}{3}, \frac{3}{2})] = [\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}]$	0,5
Najmenšia hodnota v bode	$[\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, f(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})] = [\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{8}]$	0,5
SPOLU		11

ZNÁMKA	A	B	C	D	E	FX/P	FX/N	FN	
--------	---	---	---	---	---	------	------	----	--

SKUPINA

Priezvisko študenta:

Meno študenta:

Číslo študenta z prvej strany indexu:

Dátum:

Krúžok:

Ročník:/Smer:

Číslo príkladu	1	2	3	4	5	Súčet
Hodnotenie učiteľa						
Bodové hodnotenie príkladov	7	8	10	12	13	50
Derivácie	@	@	@			
Maximum za derivácie	@	@	1	4	2	7
Nezačaté príklady						@
Počet percent z cvičenia max 100	@ @	@ @	@ @	@ @	@ @	
Hodnotenie skúšky	53-60 A 46-52 B	39-45 C 33-38 D	28-32 E @	@ @	@ @	@ @

Čas trvania písomnej skúšky: 2 hod.

Ak niektorý príklad nezačnete počítať, napíšte v tabuľke do riadku

Nezačaté príklady pod príslušné číslo príkladu písmeno N.

Na skúške nesmiete používať kalkulačku, mobilný telefón a vlastné papiere.

V prípade, že potrebujete ďalší papier, dozorujúci učiteľ Vám ho dá.

Píšte perom, nie ceruzkou. Výsledky vypíšte aj na prvú stranu.

1. PRÍKLAD

Vypočítajte $\int \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 2x} dx$.

Výsledok:

2. PRÍKLAD

Vypočítajte plošný obsah oblasti ohraničenej grafmi funkcií

$f(x) = 2 \ln(x^2 - 4)$, $g(x) = 0$ a priamkami $x = 3$, $x = 4$.

Výsledok: $P =$

3. PRÍKLAD

Nájdite to riešenie **lineárnej** diferenciálnej rovnice prvého rádu $y' + 5y = e^{-5x}$, ktoré spĺňa Cauchyho začiatočnú podmienku $y(0) = 5$.

Výsledok: $y =$

4. PRÍKLAD

Nájdite a načrtnite definičný obor, rovnicu dotykovej roviny a rovnicu normály

ku grafu funkcie $f(x, y) = 4 \left(\sqrt{\frac{x}{4x^2 + y^2}} \right)$ v bode $P = [1, 0, ?]$.

Výsledok: $d :$

$n :$

5. PRÍKLAD

Nájdite všetky **viazané** lokálne extrémny funkcie $f(x, y) = xy(5 + 3y^2 - x)$ na parabole $x = g(y) = 3y^2 - 1$. Načrtnite parabolu.

Výsledok:

1. PRÍKLAD

Vypočítajte

$$\int \frac{1 + \sin 2x}{\cos^2 2x} dx.$$

Riešenie.

	$\int \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 2x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 2x} dx + \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} dx = \spadesuit$	2
Substitúcia pre prvý integrál	$\{2x = t, 2dx = dt\}$ $\spadesuit = \int \frac{1}{2 \cos^2 t} dt + \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} dx =$ $\frac{1}{2} \operatorname{tg} t + \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x + \int \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} dx = \clubsuit$	1
Substitúcia pre druhý integrál	$\{\cos 2x = z, -2 \sin 2x dx = dz\}$ $\clubsuit = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} 2x) - \int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} 2x) - \frac{1}{2} \int z^{-2} dz =$ $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x - \frac{1}{2} \frac{z^{-1}}{(-1)} + C = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{2} \frac{1}{\cos 2x} + C$	1
Výsledok	$\int \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 2x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x + \frac{1}{2} \frac{1}{\cos 2x} + C$	
SPOLU		7

2. PRÍKLAD

Vypočítajte plošný obsah oblasti ohraničenej grafmi funkcií

$$f(x) = 2 \ln(x^2 - 4), \quad g(x) = 0 \text{ a priamkami } x = 3, \quad x = 4.$$

Riešenie.

Nájdeme $D(f) =$	$\{x \mid x^2 - 4 > 0\} = \{x \mid x^2 > 4\} =$ $\{x \mid x > 2 \vee x < -2\} = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$	
Vypočítame priesečník grafov funkcií $f(x) = g(x)$	$2 \ln(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \ln(x^2 - 4) = \ln 1$ $\Rightarrow x^2 - 4 = 1 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{5} < 3$ Priesečníky neležia v intervale $[3, 4] \subset D(f)$	1
Popíšeme oblasť	$3 \leq x \leq 4, \quad 0 \leq y \leq 2 \ln(x^2 - 4)$	
Zostavíme integrál $P =$	$\int_3^4 2 \ln(x^2 - 4) \, dx = \clubsuit$	1
Výpočítame integrál Per partes $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$	$u = \ln(x^2 - 4) \quad u' = \frac{2x}{x^2 - 4}$ $v' = 2 \quad v = 2x$	2
Dosadíme do vzorca $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$	$\clubsuit = [2x \ln(x^2 - 4)]_3^4 - \int_3^4 \frac{4x^2}{x^2 - 4} \, dx =$	1
RPZ Z rovnosti zlomkov dostávame dosadením $x =$ dosadením $x =$	$2.4 \ln(4^2 - 4) - 2.3. \ln(3^2 - 4) - 4 \int_3^4 \frac{x^2 dx}{x^2 - 4} =$ $8 \ln 12 - 6 \ln 5 - 4 \int_3^4 \frac{((x^2 - 4) + 4) dx}{x^2 - 4} =$ $8 \ln 12 - 6 \ln 5 - 4 \int_3^4 1. \, dx - 4 \int_3^4 \frac{4 dx}{x^2 - 4} = \spadesuit$ $\frac{4}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} =$ $4 = A(x + 2) + B(x - 2)$ $2, \text{ dostávame } 4 = A(2 + 2) + B(2 - 2) \Rightarrow A = 1$ $-2, \text{ dostávame } 4 = A(-2 + 2) + B(-2 - 2) \Rightarrow B = -1$ $\frac{4}{x^2 - 4} = \frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2}$	1
	$\spadesuit = 8 \ln 12 - 6 \ln 5 - 4[x]_3^4 - 4 \int_3^4 \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2}\right) =$ $8 \ln 12 - 6 \ln 5 - 4 - 4[\ln x - 2 - \ln x + 2]_3^4 =$ $8 \ln 12 - 6 \ln 5 - 4 - 4[\ln 2 - \ln 6 - \ln 1 + \ln 5] =$ $8 \ln(2^2 \cdot 3) - 6 \ln 5 - 4 - 4[\ln 2 - \ln 2 \cdot 3 - \ln 1 + \ln 5] =$ $16 \ln 2 + 8 \ln 3 - 6 \ln 5 - 4 - 4[\ln 2 - \ln 2 - \ln 3 + \ln 5] =$ $12 \ln 3 + 16 \ln 2 - 10 \ln 5 - 4$	1
SPOLU		8

3. PRÍKLAD

Nájdite to riešenie **lineárnej** diferenciálnej rovnice prvého rádu

$y' + 5y = e^{-5x}$, ktoré splňa Cauchyho začiatočnú podmienku $y(0) = 5$.

Riešenie.

I.	Riešime DR s nulovou PS		$y' + 5y = 0$	
I.1	Char.rovnica		$r + 5 = 0 \Rightarrow r = -5$	0,5
I.2	Nájdeme koreň char. rovnice	$r =$	-5	0,5
I.3	Riešenie DR s nulovou PS	$y_h =$	Ce^{-5x}	0,5
II.	Riešime DR so špeciál.PS		$y' + 5y = e^{-5x}$	
II.1	Typ PS	$EP = e^{mx} P(x) =$	e^{-5x}	0,5
II.2	Určíme parametre	$m =$ $P(x) =$ $stP(x) =$	-5 1 0	0,5
II.3	Partikulárne riešenie hľadáme v tvare	$y_p = x^k e^{mx} \overline{P(x)} =$	$x^k e^{-5x} A$	0,5
II.4	Určíme exponent k	$k =$ $y_p =$	1 , pretože $m = -5$ je jednonásobný koreň char. rovnice $x^1 A e^{-5x} = A x e^{-5x}$	2
II.5	Zderivujeme	$y'_p =$	$(A x e^{-5x})' =$ $A e^{-5x} + A x e^{-5x}(-5) = (-5Ax + A)e^{-5x}$	1
II.6	Dosadíme derivácie do rovnice Krátime e^{mx} Dostávame		$y' + 5y = e^{-5x}$ $y'_p = (-5Ax + A)e^{-5x}$ $\oplus \quad 5y_p = (5Ax) e^{-5x}$ $\underline{y'_p + 5y_p = A e^{-5x}}$ $e^{-5x} = A e^{-5x}$ $A = 1$	1 0,5
II.7	Partikulárne riešenie	$y_p =$	$x e^{-5x}$	0,5
II.8	Všeobecné riešenie	$y_v = y_h + y_p =$	$C e^{-5x} + x e^{-5x}$	1
II.9	Začiatočná podmienka	$y_v(a) = b$	$y_v(0) = 5$ $y_v(0) = C e^{5 \cdot 0} + 0 \cdot e^{5 \cdot 0} = 5 \Rightarrow C = 5$	1
	Výsledok	$y_z =$	$5x^{-5x} + x e^{-5x} = (x + 5)e^{-5x}$	
	SPOLU			10

Vysvetlivky: DR = diferenciálna rovnica

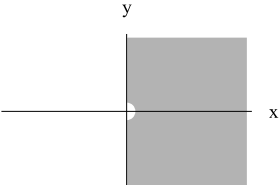
PS = pravá strana

4. PRÍKLAD

Nájdite definičný obor, rovnicu dotykovej roviny a rovnicu normály

ku grafu funkcie $f(x, y) = 4 \left(\sqrt{\frac{x}{4x^2+y^2}} \right)$ v bode $P = [1, 0, ?]$.

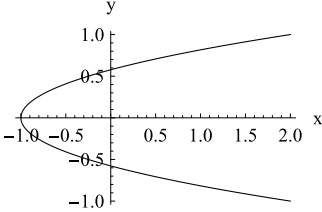
Riešenie.

Nájdeme $D(f) =$	$\{ [x, y] \mid \frac{x}{4x^2+y^2} \geq 0 \} = \spadesuit$ $\frac{x}{4x^2+y^2} \geq 0 \Rightarrow (x \geq 0 \wedge 4x^2 + y^2 > 0) \vee (x \leq 0 \wedge 4x^2 + y^2 < 0)$ pre $\forall x, y \in R$ platí $4x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$ $\spadesuit = \{(x, y) \mid x \geq 0\} \setminus \{[0, 0]\}$	2
Obrázok		0,5
Rovnica dotykovej roviny	$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$	1
Rovnice normály	$x = x_0 + f'_x(x_0, y_0)t, y = y_0 + f'_y(x_0, y_0)t, z = z_0 - t, t \in R$	0,5
Vypočítame $z_0 = f(x_0, y_0) =$	$f(1, 0) = 4\sqrt{\frac{1}{4 \cdot 1^2 + 0^2}} = 4\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{4}{2} = 2$	0,5
Vypočítame $f'_x(x, y) =$	$\left(4 \left(\sqrt{\frac{x}{4x^2+y^2}} \right) \right)'_x = 4 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4x^2+y^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{4x^2+y^2} \right)'_x =$ $2 \left(\frac{4x^2+y^2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1(4x^2+y^2) - x \cdot 8x}{(4x^2+y^2)^2} \right)$	2
Vypočítame $f'_x(x_0, y_0) =$	$f'_x(1, 0) = 2 \left(\frac{4 \cdot 1^2 + 0^2}{1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1(4 \cdot 1^2 + 0^2) - 1 \cdot 8 \cdot 1}{(4 \cdot 1^2 + 0^2)^2} \right) = 2 \cdot \sqrt{4} \frac{4-8}{16} =$ $4 \left(-\frac{4}{16} \right) = -1$	1
Vypočítame $f'_y(x, y) =$	$\left(4 \left(\sqrt{\frac{x}{4x^2+y^2}} \right) \right)'_y = 4 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{x}{4x^2+y^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{4x^2+y^2} \right)'_y =$ $2 \left(\frac{4x^2+y^2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} x ((4x^2 + y^2)^{-1})'_y =$ $2x \left(\frac{4x^2+y^2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} (-1)(4x^2 + y^2)^{-2} 2y =$ $-4xy \left(\frac{4x^2+y^2}{x} \right)^{\frac{1}{2}} (4x^2 + y^2)^{-2}$	2
Vypočítame $f'_y(x_0, y_0) =$	$f'_y(1, 0) = -4 \cdot 1 \cdot 0 \left(\frac{4 \cdot 1^2 + 0^2}{1} \right)^{\frac{1}{2}} (4 \cdot 1^2 + 0^2)^{-2} = 0$	1
Rovnica dotykovej roviny	$z - 2 = -1(x - 1) + 0(y - 0)$ $x + z - 3 = 0$	1
Rovnice normály	$x = 1 - t, y = 0, z = 2 - t, t \in R$	1
SPOLU		12

5. PRÍKLAD

Nájdite všetky **viazané** lokálne extrém y funkcie $f(x, y) = xy(5 + 3y^2 - x)$ na parabole $x = g(y) = 3y^2 - 1$. Načrtnite parabolu.

Riešenie.

Obrázok		1
Dosadíme rovnicu $x = g(y)$ do funkcie $f(x, y)$ $h(y) = f(g(y), y) =$ $h(y) =$	$f(3y^2 - 1, y) =$ $(3y^2 - 1)y(5 + 3y^2 - (3y^2 - 1))$ $6y(3y^2 - 1) = 6(3y^3 - y)$ $h(y) =$ $6(3y^3 - y)$	2
Vypočítame $h'(y) =$	$6(9y^2 - 1)$	1
Vypočítame stacionárne body funkcie $h(y)$, $h'(y) = 0$ Stacionárny bod $SB_1 =$ Stacionárny bod $SB_2 =$	$6(9y^2 - 1) = 0 \Rightarrow (9y^2 - 1) = 0 \Rightarrow$ $y^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{3}, y_2 = -\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $-\frac{1}{3}$	2
Vypočítame $h''(y) =$	$6 \cdot 9 \cdot 2y = 108y$	1
Vypočítame $h''(SB_1) =$	$h''(\frac{1}{3}) = 108 \cdot \frac{1}{3} > 0$	1
Funkcia $h(y)$ má v bode SB_1	$= \frac{1}{3}$ lokálne minimum	1
Funkcia $f(x, y)$ má v bode	$[3(\frac{1}{3})^2 - 1, \frac{1}{3}] = [-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$ viazané lokálne minimum s hodnotou $f(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = (-\frac{2}{3})\frac{1}{3}(5 + 3(\frac{1}{3})^2 - (-\frac{2}{3})) = -\frac{4}{3}$ s väzbou $x = 3y^2 - 1$	1
Vypočítame $h''(SB_2) =$	$h''(-\frac{1}{3}) = 108 \cdot (-\frac{1}{3}) < 0$	1
Funkcia $h(y)$ má v bode SB_2	$-\frac{1}{3}$ lokálne maximum	1
Funkcia $f(x, y)$	má v bode $[3(-\frac{1}{3})^2 - 1, -\frac{1}{3}] = [-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]$ viazané lokálne maximum s hodnotou $f(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}(-\frac{1}{3})(5 + 3(-\frac{1}{3})^2 - (-\frac{2}{3})) = \frac{4}{3}$ s väzbou $x = 3y^2 - 1$	1
SPOLU		13

Z Á K L A D N É V Z O R C E

1D. $(c)' = 0$

1I.

2D. $(x^a)' = ax^{a-1}$

2I. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ pre $a \neq -1$

3D. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

3I. $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

4D. $(e^x)' = e^x$

4I. $\int e^x dx = e^x + C$

5D. $(a^x)' = a^x \ln a$

5I. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

6D. $(\sin ax)' = a \cos ax$

6I. $\int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a} + C$

7D. $(\cos ax)' = -a \sin ax$

7I. $\int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} + C$

8D. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

8I. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

9D. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

9I. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$

10D. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10I. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$

11D. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11I. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C$

12D. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

12I. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

13D. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

13I. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arccotg} x + C$

14D. $(cf(x))' = cf'(x)$

14I. $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx + C$

15D. $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

15I. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

16D. $(f(x).g(x))' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$

16I. $\int uv' = u.v - \int u'v$

17D. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

17I. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$

Trigonometrické vzorce

18I. $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$

1T. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

19I. $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

2T. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

kde $F'(x) = f(x)$

3T. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Logaritmické funkcie

4T. $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

1L. $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y$ pre $a > 0$

5T. $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

2L. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ pre $a > 0$

6T. $\cos(-x) = \cos x$

3L. $\log_a x^y = y \log_a x$ pre $a > 0$

7T. $\sin(-x) = -\sin x$

Základné vzorce

1Z. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

3Z. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

2Z. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Doporučená literatúra

- [1] Trokanová,K.-Žembery,I.: Matematika I,II. 1.vyd. Bratislava: STU, 2004.
ISBN 80-227-2037-2
- [2] Handlovičová,A. a kol.: Riešené úlohy z matematiky I. 1.vyd. Bratislava: STU, 1997.
ISBN 80-227-1024-5
- [3] Eliáš,J.-Horváth,J.-Kajan,J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky I. 6.vyd. Bratislava:
Alfa, 1985.
- [4] Eliáš,J.-Horváth,J.-Kajan,J.: Zbierka úloh z vyššej matematiky II. 7.vyd.
Bratislava: STU, 1995.
ISBN 80-227-0742-2

	PREDHOVOR.....	3
1	ZIMNÝ SEMESTER.....	5
1.1	Sústava m lineárnych rovníc o n neznámych	4
1.1.1	Vzorový príklad - nekonečne veľa riešení.....	4
1.1.2	Vzorový príklad nemá riešenie - nemá riešenie.....	6
1.1.3	Vzorový príklad nemá riešenie - jediné riešenie.....	7
1.1.3.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach.....	9
1.1.3.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu.....	9
1.1.3.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	10
1.2	Maticy a determinanty	11
1.2.1	Vzorový príklad - výpočet determinantu.....	11
1.2.2	Vzorový príklad - singulárna matica.....	11
1.2.3	Vzorový príklad - inverzná matica.....	12
1.2.4	Vzorový príklad - maticová rovnica.....	12
1.2.4.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach.....	14
1.2.4.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu	16
1.2.4.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	18
1.3	Derivácie	20
1.3.1	Dotyčnica a normála	20
1.3.1.1	Vzorový príklad.....	20
1.3.1.1.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach.....	21
1.3.1.1.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu	23
1.3.1.1.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	25
1.3.2	Taylorov polynóm	27
1.3.2.1	Vzorový príklad.....	27
1.3.2.1.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach.....	28
1.3.2.1.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu	29
1.3.2.1.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	30
1.4.	Vlastnosti funkcií - monotónnosť, lokálne extrém	31
1.4.1	Vzorový príklad.....	31

1.4.1.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach.....	32
1.4.1.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu	33
1.4.1.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	34
1.5.	Vlastnosti funkcií - konkávnosť, konvexnosť, inflexné body.	35
1.5.1	Vzorový príklad.....	35
1.5.1.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach.....	36
1.5.1.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu	37
1.5.1.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	38
	Príklady zo skúšky z Matematiky 1, 1. termín.....	39
	Riešenie 1. príkladu.....	40
	Riešenie 2. príkladu.....	42
	Riešenie 3. príkladu.....	43
	Riešenie 4. príkladu.....	45
	Riešenie 5. príkladu.....	46
	Príklady zo skúšky z Matematiky 1, 2. termín.....	47
	Riešenie 1. príkladu.....	48
	Riešenie 2. príkladu.....	50
	Riešenie 3. príkladu.....	51
	Riešenie 4. príkladu.....	52
	Riešenie 5. príkladu.....	53
	Príklady zo skúšky z Matematiky 1, 3. termín.....	54
	Riešenie 1. príkladu.....	55
	Riešenie 2. príkladu.....	57
	Riešenie 3. príkladu.....	58
	Riešenie 4. príkladu.....	59
	Riešenie 5. príkladu.....	60
	Príklady zo skúšky z Matematiky 1, 4. termín.....	61
	Riešenie 1. príkladu.....	62
	Riešenie 2. príkladu.....	64
	Riešenie 3. príkladu.....	65
	Riešenie 4. príkladu.....	66
	Riešenie 5. príkladu.....	67

2	LETNÝ SEMESTER.....	68
2.1	Neurčité integrály	68
2.1.1	Substitúcia	68
2.1.1.1	Vzorový príklad substitúcia.....	68
2.1.1.2	Vzorový príklad substitúcia.....	68
2.1.1.2.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach	69
2.1.1.2.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu	69
2.1.1.2.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	70
2.1.2	Per partes	71
2.1.2.1	Vzorový príklad per partes.....	71
2.1.2.2	Vzorový príklad per partes.....	71
2.1.2.2.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach	72
2.1.2.2.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu	72
2.1.2.2.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	73
2.1.3	Rozklad na parciálne zlomky	74
2.1.3.1	Vzorový príklad na rozklad na parciálne zlomky.....	74
2.1.3.2	Vzorový príklad na rozklad na parciálne zlomky.....	75
2.1.3.3	Vzorový príklad na rozklad na parciálne zlomky.....	76
2.1.3.4	Vzorový príklad na rozklad na parciálne zlomky.....	77
2.1.3.5	Vzorový príklad na rozklad na parciálne zlomky.....	78
2.1.3.5.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach	79
2.1.3.5.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu	79
2.1.3.5.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	80
2.2	Určité integrály-Plošné obsahy	81
2.2.1	Vzorový príklad.....	81
2.2.2	Vzorový príklad.....	81
2.2.2.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach	82
2.2.2.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu	83

2.2.2.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	83
2.3	Diferenciálne rovnice.....	84
2.3.1	Diferenciálne rovnice prvého rádu.....	84
2.3.1.1	Separovateľné diferenciálne rovnice.....	84
2.3.1.1.1	Vzorový príklad.....	84
2.3.1.1.1.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach	85
2.3.1.1.1.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu	85
2.3.1.1.1.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	85
2.3.1.2	Lineárne diferenciálne rovnice.....	87
2.3.1.2.1	Vzorový príklad.....	87
2.3.1.2.1.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach	88
2.3.1.2.1.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu	88
2.3.1.2.1.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	88
2.3.2	Lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu s konštantnými	89
	koeficientami a špeciálnou pravou stranou	
	Schéma na riešenie lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu s konštantnými koeficientami a špeciálnou pravou stranou.....	89
2.3.2.1	Vzorový príklad - $k = 0$	91
2.3.2.2	Vzorový príklad - $k = 1$	92
2.3.2.3	Vzorový príklad - $k = 2$	93
2.3.2.4	Vzorový príklad - $\sin x, \cos x$	94
2.3.2.4.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach	95
2.3.2.4.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu	95
2.3.2.4.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	95
2.4	Funkcie viacerých premenných.....	96
2.4.1	Dotyková rovina.....	96
2.4.1.1	Vzorový príklad.....	96
2.4.1.1.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach	97
2.4.1.1.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu	98
2.4.1.1.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	99
2.5	Extrémy funkcie viacerých premenných.....	100
2.5.1	Lokálne extrémy funkcie viacerých premenných.....	100
2.5.1.1	Vzorový príklad.....	100
2.5.1.1.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach	101

2.5.1.1.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu	102
2.5.1.1.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	102
2.5.2	Viazané extrémny funkcie viacerých premenných.....	103
2.5.2.1	Vzorový príklad.....	103
2.5.2.1.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach	104
2.5.2.1.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu	104
2.5.2.1.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	104
2.5.3	Najmenšia a najväčšia hodnota funkcie	106
2.5.3.1	Vzorový príklad.....	106
2.5.3.1.1	Príklady na prepočítanie na cvičeniach	107
2.5.3.1.2	Príklady na prepočítanie na domácu úlohu	107
2.5.3.1.3	Príklady na prepočítanie pred skúškou.....	107
	Príklady zo skúšky z Matematiky 2, 1. termín.....	109
	Riešenie 1. príkladu.....	110
	Riešenie 2. príkladu.....	111
	Riešenie 3. príkladu.....	112
	Riešenie 4. príkladu.....	113
	Riešenie 5. príkladu.....	114
	Príklady zo skúšky z Matematiky 2, 2. termín.....	115
	Riešenie 1. príkladu.....	116
	Riešenie 2. príkladu.....	117
	Riešenie 3. príkladu.....	118
	Riešenie 4. príkladu.....	119
	Riešenie 5. príkladu.....	120
	Príklady zo skúšky z Matematiky 2, 3. termín.....	121
	Riešenie 1. príkladu.....	122
	Riešenie 2. príkladu.....	123
	Riešenie 3. príkladu.....	124
	Riešenie 4. príkladu.....	125
	Riešenie 5. príkladu.....	126
	Príklady zo skúšky z Matematiky 2, 4. termín.....	127
	Riešenie 1. príkladu.....	128
	Riešenie 2. príkladu.....	129

Riešenie 3. príkladu.....	130
Riešenie 4. príkladu.....	131
Riešenie 5. príkladu.....	132
Základné vzorce na počítanie derivácií a integrálov.....	133
Literatúra.....	134
Obsah.....	135

Doc. RNDr. Katarína Trokanová, PhD.

MATEMATIKA I, II.
Riešené príklady

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave v Nakladateľstve STU,
Bratislava, Vazovova 5, v roku 2013.

Edícia skrípt

Rozsah 140 strán, 9,581 AH, 9,805 VH, 1. vydanie, edičné číslo 5720,
tlač Nakladateľstvo STU v Bratislave.

85 – 233 – 2013

ISBN 978-80-227-3943-6