

NUMERICKÉ METÓDY V INŽINIERSKÝCH APLIKÁCIÁCH

Mária Minárová

SLOVENSKÁ TECHNICKÁ UNIVERZITA
2008

Obsah

1. Základy programového systému <i>MATHEMATICA</i>	5
2. Obyčajné diferenciálne rovnice – fyzikálna interpretácia, analytické a numerické riešenie. FDM finite difference method – metóda konečných diferencií	9
3. Parciálne diferenciálne rovnice. FDM vo viacdimenziónoch fyzikálnych úlohách.	16
4. Parciálne diferenciálne rovnice. FEM – finite element method – metóda konečných prvkov.	24
5. ANSYS – program využívajúci FEM pre parciálne diferenciálne rovnice. Príklady použitia.	32

1. Základy programového systému *MATHEMATICA*

Tvorba výrazov v systéme *MATHEMATICA*:

výraz	zápis v systéme <i>MATHEMATICA</i>
$x \pm y$	$x \pm y$
xy	$x*y$
$\frac{x}{y}$	x/y
x^y	x^y

Aritmetické výrazy sa vyhodnocujú zľava doprava. Najvyššiu prioritu má operátor umocnenia, potom delenia a násobenia a nakoniec sčítania a odčítania. Prioritu môžeme meniť **okrúhlymi zátvorkami**.

Základnou snahou programu *MATHEMATICA* je poskytnúť presný výsledok výpočtu. Ak je pre nás postačujúci len **približný výpočet**, postupujeme nasledovne:

- hodnota//N
- N[hodnota]
- N[hodnota,n] – približná hodnota sa vypočíta na n-desatinných miest.

Príklad:

- [1/3+4/5]//N
- N[1/3+4/5]
- N[1/3+4/5,6] – vypočíta s presnosťou na 6 desatinných miest.

Dosadzovací operátor:

V(x) – výraz premennej x

V(x,y) – výraz premenných x, y

výraz	zápis v systéme <i>MATHEMATICA</i>
V(a) – hodnota výrazu pre x = a	výraz/.x->a
V(a,b) -hodnota výrazu pre x = a, y = b	výraz/.{x->a,y->b}

Pri zadaní každého vstupu sa objaví napr. **In[4]** a každý výstup je označený **Out[4]** (rovnakým číslom, ako vstup, ku ktorému sa viaže). Ak chceme použiť výsledok, ktorý sme vypočítali v niektorom z predchádzajúcich vstupov, môžeme sa naň odvolať pomocou **Out[číslo výstupu]**, alebo **%číslo výstupu**.

výraz	zápis v systéme <i>MATHEMATICA</i>
V(a) – hodnota výrazu pre x = a, V(x) je napr. výstup č. 4	Out[4]/.x->a, alebo %4/.x->a

Často používaným je aj príkaz *Simplify*, ktorý zjednodušuje výrazy.

výraz	zápis v systéme MATHEMATICA
Zjednodušiť výraz $V(x)$	výraz//Simplify, alebo, ak sa odvolávame napr. na výstup č.4, %4//Simplify

Základné preddefinované konštanty:

výraz	zápis v systéme MATHEMATICA
π	Pi
$e = 2,7128\dots$	E
i – imaginárna jednotka	I
∞	Infinity
$-\infty$	-Infinity

Základné preddefinované funkcie:

výraz	zápis v systéme MATHEMATICA
\sqrt{x}	Sqrt[x]
e^x	Exp[x]
$\ln x$	Log[x]
$\log_a x$	Log[a,x]
$ x $	Abs[x]
$\sin x$	Sin[x]
$\cos x$	Cos[x]
tgx	Tan[x]
$\cot gx$	Cot[x]
$\arcsin x$	ArcSin[x]
$\arccos x$	ArcCos[x]
$arctgx$	ArcTan[x]
$arc \cot gx$	ArcCot[x]

Uvedené funkcie predstavujú len zlomok z preddefinovaných funkcií systému *MATHEMATICA*. K dispozícii je asi 1200 funkcií.

Všetky **mená funkcií** sa musia vypísať **celé, prvé písmeno** každej **funkcie** je **veľké**, **argument** je **v hranatej zátvorke**.

Definícia vlastnej funkcie $f(x)$

f[x_]=

výraz	zápis v systéme MATHEMATICA
$f(x) = \sqrt{x+1}$	f[x_]=Sqrt[x+1]
Vypočítajte $f(2)$	f[2]
Graf funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a, b \rangle$	Plot[f[x],{x,a,b}] Pozor, ak interval $\langle a, b \rangle \notin D(f)$, <i>MATHEMATICA</i> , na to upozorní červeným písmom.

Graf funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a,b \rangle$, rozsah na osi y je interval $\langle c,d \rangle$	Plot[f[x],{x,a,b},PlotRange->{c,d}]
Graf funkcie $f(x)$ na intervale $\langle a,b \rangle$, jednotky na osi x a y sú rovnaké	Plot[f[x],{x,a,b},AspectRatio->Automatic]

Limita a derivácia funkcie:

výraz	zápis v systéme MATHEMATICA
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	Limit[f[x],x->a]
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	Limit[f[x],x->a, Direction->-1]
$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$	Limit[f[x],x->a, Direction->+1]
$f'(x)$	D[f[x],x]
$f''(x)$	D[f[x],x,x]
$f^{(n)}(x)$	D[f[x],{x,n}]

Riešenie algebraickej rovnice a systémov lineárnych rovníc:

výraz	zápis v systéme MATHEMATICA
$L(x) = P(x)$	Solve[rovnica,neznáma], alebo Solve[L[x]==P[x],x]
Systém rovníc	Solve[{prvá rovnica, druhá rovnica,...}, {prvá neznáma, druhá neznáma,...}]

Riešenie nealgebraickej rovnice:

FindRoot[rovnica,{neznáma,b}] – nájde numerické riešenie v okolí bodu b ().

Matice a determinanty:

výraz	zápis v systéme MATHEMATICA
$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ k & l & m \\ x & y & z \end{pmatrix}$	{{a,b,c},{k,l,m},{x,y,z}} ak chceme maticu pomenovať A={{a,b,c},{k,l,m},{x,y,z}}
A v tvare matice	MatrixForm[A]
Transponovaná matica k A	Transpose[A]
Inverzná matica k matici A, ak existuje	Inverse[A]
Násobenie matíc A a B, ak je definované	A.B
$ A $ - determinant matice A	Det[A]

Neurčitý a určitý integrál.

výraz	zápis v systéme Mathematica
$\int f(x)dx$	<code>Integrate[f[x],x]</code>
$\int_a^b f(x)dx$	<code>Integrate[f[x],{x,a,b}]</code>

Príklad 1: (Použitie vlastnej funkcie pri aplikácii určitého integrálu.)

Vypočítajte plošný obsah elementárnej oblasti $A: A = \{[x, y], a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$,

Ak elementárna oblasť $A = \{[x, y], a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$, kde f a g sú spojité funkcie na intervale $\langle a, b \rangle$, tak pre plošný obsah platí:

$$P_A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

Ak máme vypočítať plošný obsah plochy, ktorá je ohraničená grafmi funkcií $f(x)$ a $g(x)$, postupujeme nasledovne:

1. načrtneme grafy funkcií
2. nájdeme priesečníky grafov funkcií: riešime rovnicu $f(x) = g(x)$, priesečníky označíme a, b tak, aby $a < b$.
3. Ak $\forall x \in \langle a, b \rangle$ je $g(x) \leq f(x)$, elementárna oblasť $A = \{[x, y], a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$.
4. dosadíme do vzťahu pre výpočet a vypočítame integrál.

V programovom systéme *MATHEMATICA* je výhodné si najprv definovať funkcie $f(x)$ a $g(x)$, t.j.

`f[x_]=`

`g[x_]=`

Potom príkazy k jednotlivým bodom sú:

1. `Plot[{f[x],g[x]},{x,c,d}]`

V prípade, že daná množina nie je celá na obrázku, zväčšíme interval.

2. `Solve[f[x]==g[x],x]`

Ak daná rovnica nie je algebraická, možno použiť na nájdenie priesečníkov aj príkaz

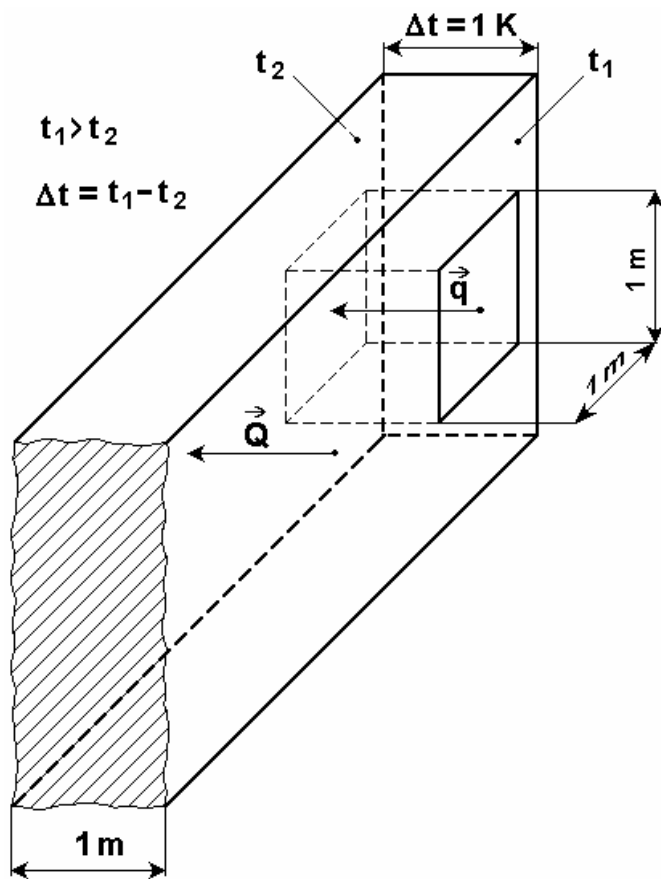
`FindRoot[f[x]==g[x],{x,x0}]`,

ktorý numericky vypočíta priesečník v okolí bodu x_0 . Bod x_0 musíme vyčítať z grafického znázornenia.

3. $\text{Integrate}[f[x]-g[x],\{x,a,b\}]$.

2. Obyčajné diferenciálne rovnice – fyzikálna interpretácia, analytické a numerické riešenie. FDM finite difference method – metóda konečných diferencií

Fyzikálna motivácia a interpretácia rovnice vedenia tepla



V technickej praxi sa vyskytujú úlohy, pri ktorých je teplota funkciou len jednej priestorovej súradnice a nezávisí od času. Vtedy hovoríme o jednorozmernom stacionárnom teplotnom poli definovanom funkciou $t(x)$, vid' obr. 2.1 – vedenie tepla vo vnútri steny, na ktorej oboch povrchoch sú konštantné teploty.

Vedenie tepla sledujeme v kočke s rozmermi 1 m, predpokladáme, že najbližší tepelný most (miesto, kde sa teplotné pole deformuje), sa nachádza v dostatočnej vzdialenosti na to, aby jeho vplyv bol zanedbateľný. Teda

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$$

Obr. 2.1: Jednorozmerné vedenie tepla cez homogénnu stenu

Okrem pojmov *teplota*, *teplo*, *množstvo tepla*, ap., sa v termodynamike vyskytujú pojmy *koefficient vedenia tepla*, *tepelný tok* a *hustota tepelného toku*:

Koeficient vedenia tepla Je definovaný ako množstvo tepla Q [J], ktoré musí za jednotku času τ [s] prejsť telesom, aby na jednotku dĺžky bol jednotkový teplotný spád. Pritom sa predpokladá, že teplo sa šíri len v jednom smere.

$$\lambda = \frac{\vec{Q}}{S} \frac{\delta}{\Delta t} = \vec{q} \frac{\delta}{\Delta t} \quad [\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}]$$

Tepelný tok je množstvo tepla Q [J], ktoré prejde určitou plochou za jednotku času τ [s]

$$\vec{Q} = \frac{Q}{\tau} \quad [\text{J.s}^{-1}]$$

Hustota tepelného toku je tepelný tok \dot{Q} [W] prechádzajúci jednotkou plochy S [m²]; vyjadruje sa Fourierovým zákonom

$$\vec{q} = \frac{\vec{Q}}{S} \quad [\text{W.m}^{-2}]$$

Podľa Fourierovho zákona sa teplo šíri v smere teplotného spádu, t.j. v opačnom smere ako grad t , preto vektory „grad t “ a „ \vec{q} “ ležia na tej istej normále k izotermickej ploche majú vzájomne opačný zmysel; zohľadňuje sa to znamienkom *mínus*.

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{S} = -\lambda \text{ grad } t$$

Základné pojmy:

$$-\lambda u'' = f$$

je lineárna diferenciálna rovnica 2. rádu, nehomogénna - Poissonova rovnica - napr. stacionárna rovnica vedenia tepla s pravou stranou (zdroj tepla)

$$-\lambda u'' = 0$$

je lineárna diferenciálna rovnica 2. rádu, homogénna - Laplaceova rovnica - stacionárna RVT bez pravej strany.

$$-\lambda u'' = f$$

$$u(0) = u_0$$

$$u(L) = u_L$$

je Dirichletova úloha - lineárna obyčajná diferenciálna rovnica s Dirichletovými okrajovými podmienkami.

Podobne

$$-\lambda u'' = f$$

$$u'(0) = u_0$$

$$u'(L) = u_L$$

je Neumanova úloha

$$-\lambda u'' = f$$

$$u'(0) + u(0) = u_0$$

$$u'(L) + u(L) = u_L$$

Newtonov úloha

$$-\lambda u'' = f$$

$$u(0) = u_0$$

$$u'(L) = u_L$$

zmiešaná úloha

Príklad 1:

a./ Riešte numericky - metódou konečných diferencií s krokom $\pi/10$ **Dirichletovu úlohu** s homogénnymi okrajovými podmienkami.

b./ Numerické riešenie realizujte pomocou systému Mathematica, vykreslite graf a porovnajte s analytickým riešením.

$$u'' = -\sin(x) \quad (1)$$

$$u(0) = 0 \quad (2)$$

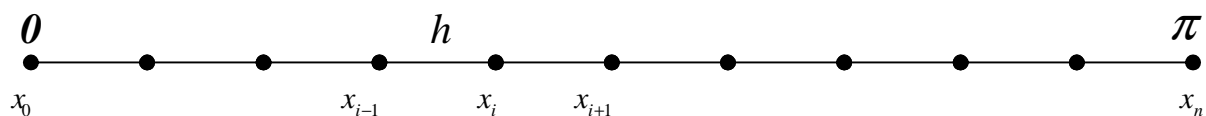
$$u(\pi) = 0 \quad (3)$$

Riešenie:

a/

Hľadanou funkciou je funkcia $u(x)$

- oblasť rozdelíme na 10 deliacich intervalov: dĺžky h



Obr.2.2: Diferenčná sieť pre jednorozmernú úlohu

- Riešenie hľadáme vo **vnútorných** uzlových bodoch, pričom okrajové podmienky prepíšeme do **vonkajších** uzlov:

$$u(x_0) = u(0) = 0$$

$$u(x_n) = u(\pi) = 0$$

Metóda konečných diferencií – metóda sietí (diferenčná metóda) používa aproximácie prvých a druhých derivácií odvodených z Taylorovho rozvoja, všeobecne:

$$f(x, a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} \cdot f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} \cdot f'''(a)(x-a)^3 + O(x-a)^4$$

Následne pre rozvoj funkcie $u(x_{i+1})$ v bode x_i :

$$u(x_{i+1}, x_i) = u(x_i) + u'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2!} u''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{1}{3!} u'''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^3 + \dots \quad (4)$$

a pre rozvoj funkcie $u(x_{i-1})$ v bode x_i :

$$u(x_{i-1}, x_i) = u(x_i) + u'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + \frac{1}{2!} u''(x_i)(x_{i-1} - x_i)^2 + \frac{1}{3!} u'''(x_i)(x_{i-1} - x_i)^3 + \dots \quad (5),$$

čo možno prepísať do tvaru

$$u(x_{i-1}, x_i) = u(x_i) - u'(x_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{2!} u''(x_i)(x_i - x_{i-1})^2 - \frac{1}{3!} u'''(x_i)(x_i - x_{i-1})^3 + \dots \quad (5')$$

Ak krok je ekvidistančný: $(x_i - x_{i-1}) = (x_{i+1} - x_i) = h$

potom použitím prvých štyroch členov Taylorovho rozvoja

$$(4)+(5') \Rightarrow u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} \quad (6),$$

$$(4)-(5') \Rightarrow u'(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}))}{2h} \quad (7),$$

$$(4) \Rightarrow u'(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} \quad (8).$$

V diferenciálnej rovnici (1) nahradíme deriváciu diferenciou a dostávame diferenčné rovnice pre jednotlivé uzly siete:

$$\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} \approx -\sin(x_i) \quad \text{pre } i=1, \dots, n-1$$

s hodnotami v krajných uzloch siete

$$u(x_0) = u(0) = 0$$

$$u(x_n) = u(\pi) = 0$$

Z (1), (2), (3) získavame system lineárnych rovníc:

1.rovnica :

$$\frac{u(x_0) - 2u(x_1) + u(x_2)}{h^2} \approx -\sin(x_1)$$

resp. (presunom všetkých známych hodnôt na pravú stranu)

$$\frac{-2u(x_1) + u(x_2)}{h^2} \approx -\frac{u(x_0)}{h^2} - \sin(x_1)$$

i - ta rovnica pre $i = 2, \dots, n - 2$

$$\frac{u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}))}{h^2} \approx -\sin(x_i)$$

n - 1. rovnica :

$$\frac{u(x_{n-2}) - 2u(x_{n-1}) + u(x_n)}{h^2} \approx -\sin(x_{n-1})$$

$$\frac{u(x_{n-2}) - 2u(x_{n-1})}{h^2} \approx -\frac{u(x_n)}{h^2} - \sin(x_{n-1})$$

Maticový zápis sústavy:

$$A \cdot \vec{u} = \vec{b}$$

A je matica sústavy :

$$\begin{array}{cccccccccc} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

\vec{u} je vektor neznámych,

\vec{b} je vektor pravých strán (*i - ta súradnica: $\vec{b}_i = \sin(\pi \frac{i}{n+1})$*).

b/

1D metóda sietí v systéme MATHEMATICA

```
(*Riešenie ODR y''=-Sin[x] s okrajovými podmienkami y[0]=0,  
y[Pi]=0*)
```

```
(*počet vnútorných deliacich bodov=počet neznámych:*)
```

```
n=10;
```

```
(*Poznámka: Počet deliacich intervalov bude n+1*)
```

```
(*matica sústavy lineárnych rovníc:*)
```

```
mA=Table[Switch[i-j,1,1,-1,1,0,-2,_,0],{i,n},{j,n}];
```

```
MatrixForm[%]
```

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

```
h=Pi/(n+1);(*dĺžka podintervalu pri ekvidistantnom delení*)
```

```
(*vektor pravých strán:*)
```

```
b=Table[Sin[Pi*i/(n+1)],{i,n}];
```

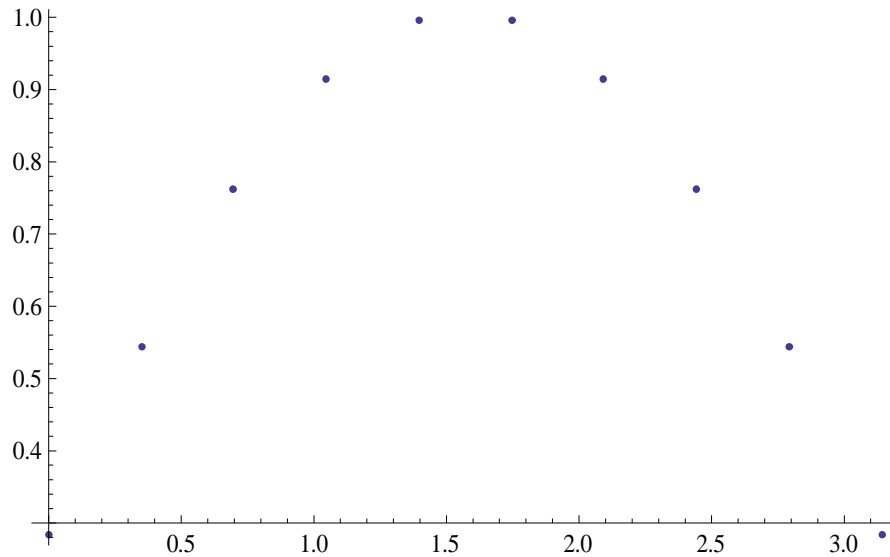
```
{0.281733,0.540641,0.75575,0.909632,0.989821,0.989821,0.909632,  
0.75575,0.540641,0.281733}
```

```
(*Riešenie systému lineárnych rovníc pre plnú maticu*)
```

```
priblizneR=N[LinearSolve[-1/h^2*mA,b]]
```

```
{0.283655,0.544331,0.760908,0.91584,0.996577,0.996577,0.91584,  
0.760908,0.544331,0.283655}
```

```
ListPlot[priblizneR,DataRange ->{0,Pi}]
```

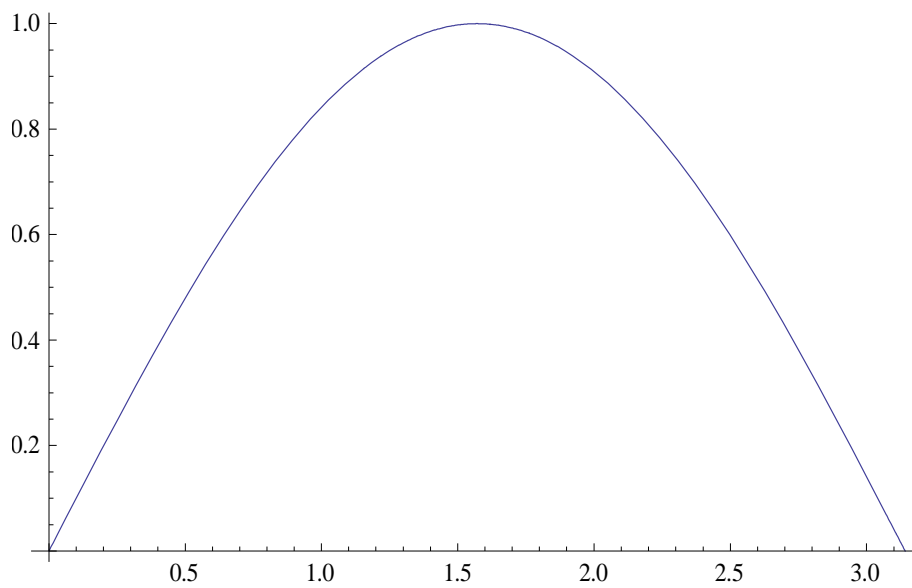


(*porovnanie s presným riešením*)

```
presneR=DSolve[{y''[x]==Sin[x],y[0]==0,y[Pi]==0},y,x]
```

```
{{y->Function[{x},Sin[x]]}}
```

```
Plot[Sin[x],{x,0,Pi}]
```



3. Parciálne diferenciálne rovnice. FDM vo viacdimezióálnych fyzikálnych úlohách.

Parciálne derivácie a parciálne diferenciálne rovnice sú aktuálne pre funkciu viacerých premenných. Podobne ako v 1D, aj vo viacerých dimenziách z Taylorovho radu môžeme odvodiť vzťahy pre približné vyjadrenie prvej a druhej parciálnej derivácie:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{h^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1})}{k^2}$$

pričom

h je evidistantný krok v smere x a k je evidistantný krok v smere y .

Príklad 2:

a./ Na štvorci $\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$ riešte numericky, metódou konečných diferencíí **Laplaceovu rovnice**

$$\Delta u = 0 \tag{9}$$

s okrajovými podmienkami

$$f1 = 0 \quad \text{pre } \mathbf{y} = 0 \wedge \mathbf{x} \in \langle 0,1 \rangle \tag{10}$$

$$f2 = y^2 \quad \text{pre } \mathbf{x} = 0 \wedge \mathbf{y} \in \langle 0,1 \rangle \tag{11}$$

$$f3 = 4(x - 0.5)^2 \quad \text{pre } \mathbf{x} = 1 \wedge \mathbf{y} \in \langle 0,1 \rangle \tag{12}$$

$$f4 = \sin(5) \quad \text{pre } \mathbf{x} = 0 \wedge \mathbf{y} \in \langle 0,1 \rangle \tag{13}$$

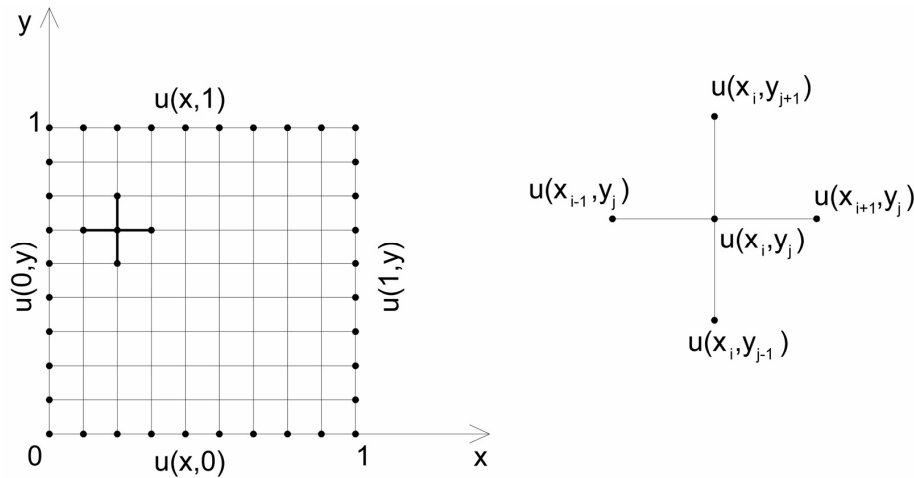
b./ Numerické riešenie pomocou systému Mathematica realizujte pre 10 deliacich intervalov smere x aj v smere y

Riešenie:

a./

Použitie diferenčnej metódy znamená nahradenie derivácií v rovnici (9) diferenciami. Pritom druhú deriváciu v smere x nahradíme diferenciou v smere x a druhú deriváciu v smere y diferenciou v smere y , použijeme rovnaký krok v oboch smeroch, označíme ho h :

Hľadanou funkciou je funkcia $u(x,y)$. Hľadáme jej numerickú hodnotu, podobne ako v príklade 1, vo vnútorných uzloch siete (81 uzlov), vid' obr. 3.3,



Obr. 3.1a: Diferenčná sieť na oblasti b: diferenčná schéma

$$\frac{u(x_{i-1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)}{h^2} + \frac{u(x_i, y_{j-1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j+1})}{h^2} \approx 0 \quad (14)$$

pričom hodnoty v okrajových uzloch siete dopočítame z okrajových podmienok.

Podobne, ako v príklade 1, vytvoríme maticový systém 81 lineárnych rovníc o 81 neznámych. Základná matica bude päťdiagonálna, bloková (v programe Mathematica sa bloková matica vytvára z podmatic príkazom BlockMatrix)

b./

```
(*2d Laplaceova rovnica na stvorci, Dirichletove OP f1-f4*)
```

```
a = 4; (*Dlžka strany stvorca*)
```

```
n = 3;
```

```
h = a / (n + 1);
```

```
f1[x_] := 4;
```

```
f2[y_] := y^2 + 8 y + 64;
```

```
f3[x_] := x^3 + 8 x + 16;
```

```
f4[y_] := y^2;
```

```
f0r = Table[f1[i * h], {i, 0, n}];
```

```

fns = Table[f2[i + h], {i, 0, n}];

fnr = Table[f3[i + h], {i, 0, n}];

f0s = Table[f4[i + h], {i, 0, n}];

c = Table[Switch[i - j, -1, -1, 0, 4, 1, -1, _, 0], {i, n - 1}, {j, n - 1}];

id = IdentityMatrix[n - 1];

nul = Table[0, {n - 1}, {n - 1}];

A = ArrayFlatten[Table[Switch[i - j, -1, -id, 0, c, 1, -id, _, nul],
    {i, n - 1}, {j, n - 1}]];

b = Flatten[{Take[f0r, {2, n}], Table[0, {n - 1}, {n - 3}], Take[fnr, {2, n}]}] +
    Flatten[Table[{f0s[[i]], Table[0, {n - 3}], fns[[i]], {i, 2, n}}];

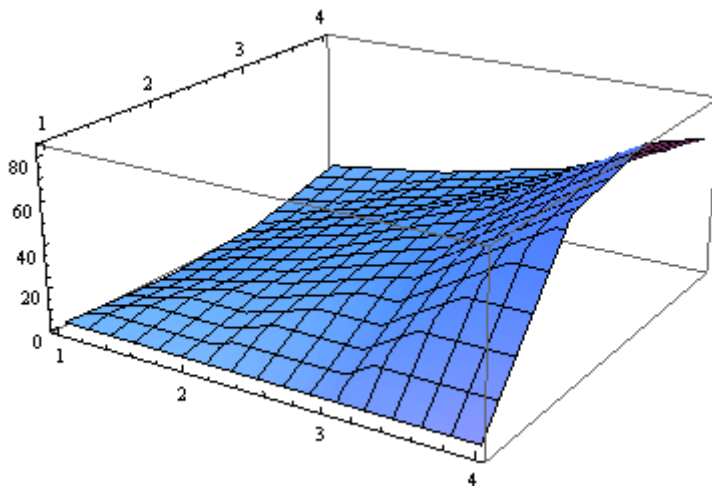
ux = LinearSolve[A, b];

x1 = Partition[ux, n - 1];

ylist =
    Partition[
        Flatten[{f0r, Table[{f0s[[i + 1]], x1[[i]], fns[[i + 1]]}, {i, 1, n - 1}],
            fnr}], n + 1];

ListPlot3D[ylist, PlotRange -> All]

```



```

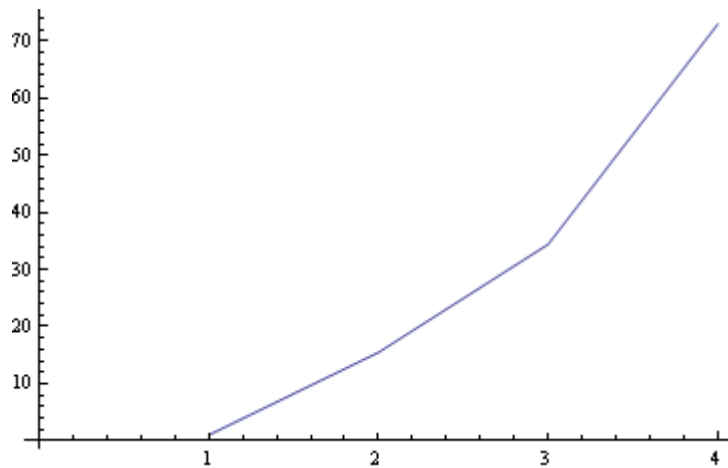
aprox = Table[0, {Length[ylist]}];

Table[aprox[[n + 2 - i]] = ylist[[i]], {i, 1, Length[ylist]}];

BarChart3D[aprox]

```


ListPlot[ylist[[2]], Joined -> True]



Príklad 3:

a./ Na intervale $\langle 0,1 \rangle$ v čase 12 min. riešte numericky, metódou konečných diferencií **difúznú rovnicu**

$$\Delta u + f(x) = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{15}$$

s okrajovými podmienkami

$$u(0,t) = 0 \tag{16}$$

$$u(1,t) = 1$$

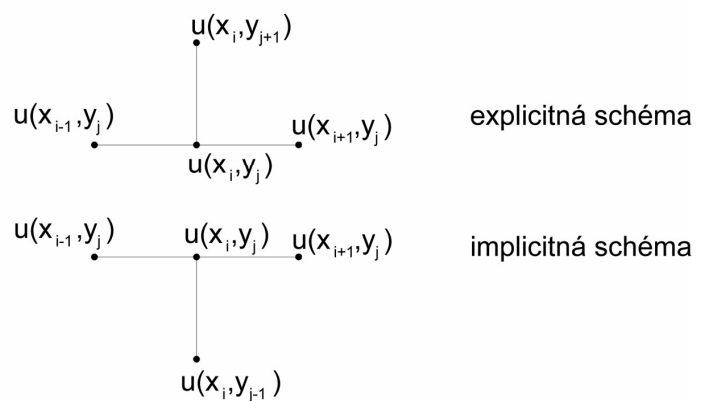
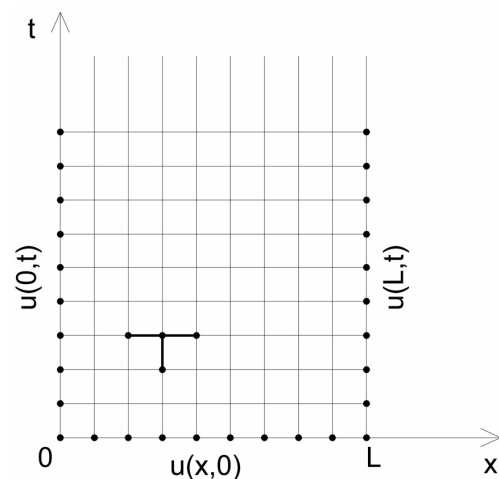
a s počiatočnou podmienkou

$$u(x,0) = x \tag{17}$$

b./ Riešte v programe Mathematica v 200 časových krokoch (po 0.001 hod)

Riešenie:

a./



Obr. 3.2: Rozdelenie oblasti a numerická schéma

(18)

Nahradíme derivácie v rovnici (15) diferenciami. Druhú deriváciu nahradíme diferenciou (6)

a prvú deriváciu podľa času (implicitná schéma) prvou (doprednou) diferenciou (8) :

(Použijeme implicitnú schému vzhľadom na čas)

$$\frac{u(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_{j+1}))}{h^2} + f(x_i) \approx \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{h}$$

Matica bude trojdiagonálna pre každý časový krok.

b./

(*Difuzna rovnica*)

i1 = 0; i2 = 1; d1 = 0; d2 = 1;

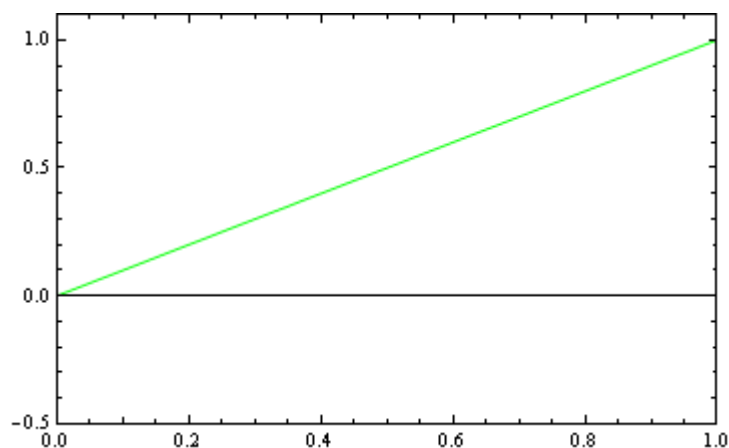
u0[x_] := x;

f[x_] := 20 * Sin[5 * Pi * x / 2];

y1 = -0.5; y2 = 1.1;

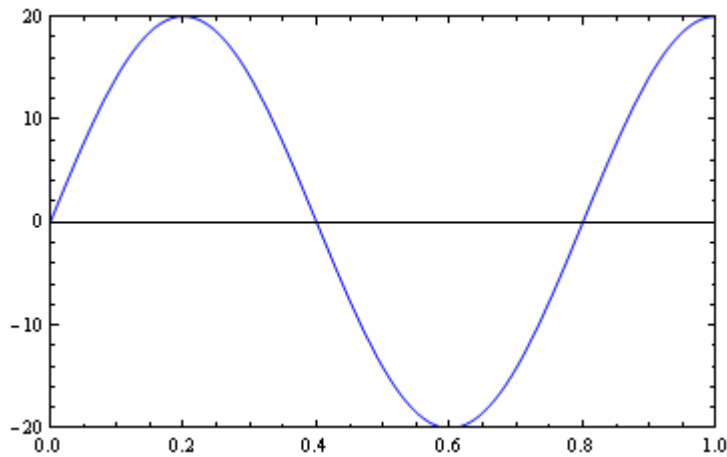
g1 = Plot[u0[x], {x, i1, i2}, PlotRange -> {{i1, i2}, {y1, y2}}, Frame -> True, PlotStyle -> RGBColor[0, 1, 0]]

(*Pociatocny stav*)



Plot[f[x], {x, i1, i2}, PlotRange -> {{i1, i2}, {-20, 20}}, Frame -> True, PlotStyle -> RGBColor[0, 0, 1]]

(*zdrojova funkcia- prava strana rovnice*)



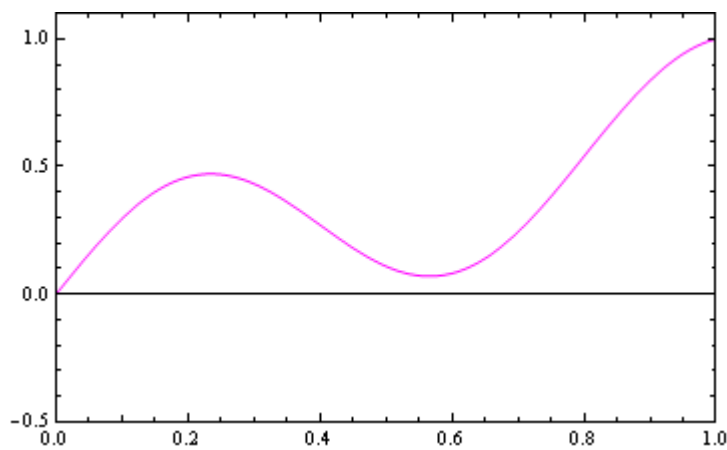
```
sol = DSolve[{-v''[x] == f[x], v[i1] == d1, v[i2] == d2}, v, x]
```

$$\left\{ \left\{ v \rightarrow \text{Function}\left[\left\{ x \right\}, \frac{-16x + 5\pi^2 x + 16 \sin\left[\frac{5\pi x}{2}\right]}{5\pi^2} \right] \right\} \right\}$$

```
equil = v[x] /. sol
```

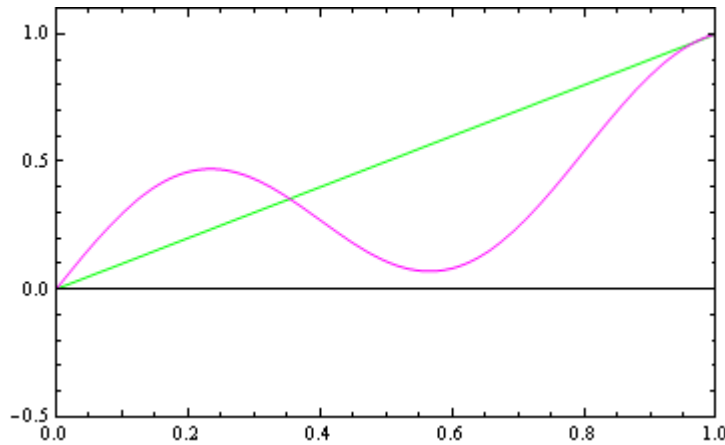
$$\left\{ \frac{-16x + 5\pi^2 x + 16 \sin\left[\frac{5\pi x}{2}\right]}{5\pi^2} \right\}$$

```
g2 = Plot[equil, {x, i1, i2}, PlotRange -> {{i1, i2}, {y1, y2}}, Frame -> True, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 1]
(*stacionarne riesenie-stav po ustalenii*)
```



```
graf[0] = Show[g1, g2]
```

```
(*pociatocny stav speje k stacionarnemu rieseniu*)
```



```

n = 20;
h = (i2 - i1) / n;
k = 0.001; pck = 200;
a = -k/h^2; b = 1 + 2 k/h^2;
prcast = Join[{k*f[h] - a*d1}, Table[k*f[i*h], {i, 2, n - 2}], {k*f[(n - 1)*h] - a*d2}]

{0.00765367, 0.0141421, 0.0184776, 0.02, 0.0184776, 0.0141421,
 0.00765367, 0, -0.00765367, -0.0141421, -0.0184776, -0.02, -0.0184776,
 -0.0141421, -0.00765367, 0, 0.00765367, 0.0141421, 0.418478}

predch = Table[u0[i*h], {i, 1, n - 1}]

{1/20, 1/10, 3/20, 1/5, 1/4, 3/10, 7/20, 2/5, 9/20, 1/2, 11/20, 3/5, 13/20, 7/10, 3/4, 17/20, 9/10, 19/20}

xs = Table[i1 + i*h, {i, 0, n}]

{0, 1/20, 1/10, 3/20, 1/5, 1/4, 3/10, 7/20, 2/5,
 9/20, 1/2, 11/20, 3/5, 13/20, 7/10, 3/4, 17/20, 9/10, 19/20, 1}

(*Needs tridiagonal*)
m = Table[Switch[j - i, -1, a, 0, b, 1, a, _, 0], {i, n - 1}, {j, n - 1}];

Do[d = predch + prcast; u[j] = LinearSolve[m, d];
predch = u[j], {j, 1, pck}]

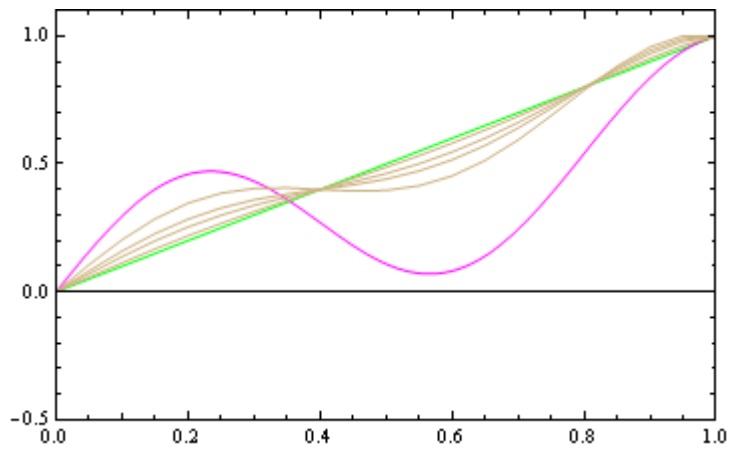
u[5]

{0.0821616, 0.159427, 0.227645, 0.284042, 0.327645, 0.359427,
 0.382161, 0.4, 0.417838, 0.44057, 0.472346, 0.515928, 0.572263,
 0.640294, 0.71702, 0.79769, 0.875923, 0.943469, 0.989471}

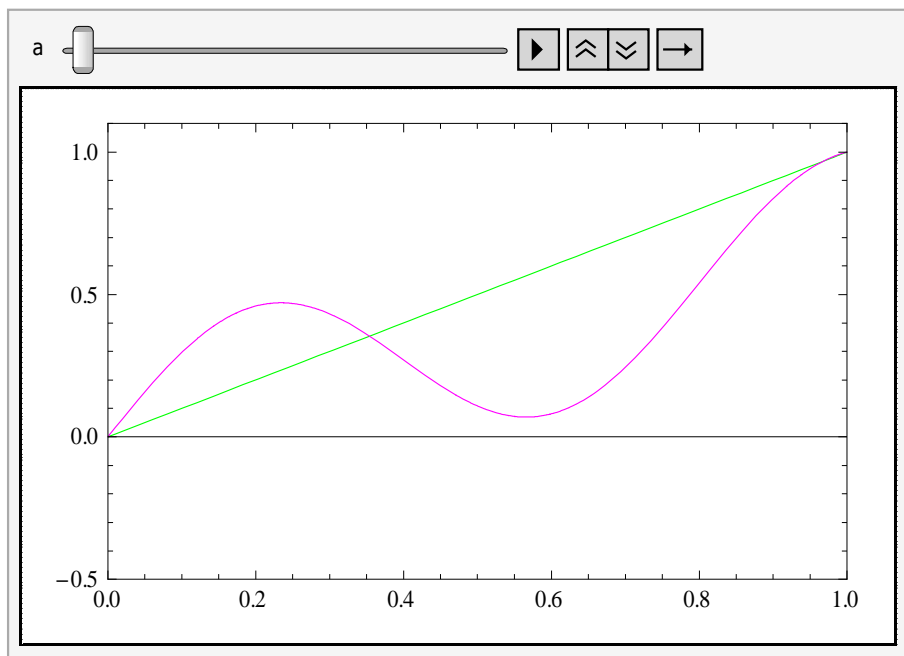
Do[ys = Join[{d1}, u[j], {d2}]; z = Table[{xs[[i]], ys[[i]]}, {i, 1, n + 1}];
graf[j] = ListPlot[z, Joined -> True, PlotRange -> {{i1, i2}, {y1, y2}},
Frame -> True, PlotStyle -> RGBColor[0.8, 0.7, 0.5]], {j, 1, pck}]

```

```
Show[graf[0], graf[1], graf[3], graf[5], graf[10]]
```



```
Animate[graf[a], {a, 0, 200, 1}, AnimationRunning -> False]
```



4. Parciálne diferenciálne rovnice. FEM – finite element method – metóda konečných prvkov.

Metóda konečných prvkov podobne ako metóda konečných diferencií, je založená na hľadaní diskrétného riešenia okrajového problému namiesto analytického. Aj keď technika prevedenia diferenciálnej rovnice na systém lineárnych rovníc je odlišná ako pri FDM, predsa samotná realizácia výpočtu, pretože maticové systémy sú veľmi rozsiahle, závisí od možností počítača, programu i použitej metódy na riešenie systému lineárnych rovníc. Pritom metóda nevyžaduje použitie štruktúrovanej siete, a preto sa dá použiť pre zložitejšie oblasti, sieť sa môže, napr. zahustiť v mieste pôsobenia lokálneho zaťaženia, prípadne ak v niektorom mieste oblasti potrebujeme spresniť riešenie, ap.

Existuje viacero programov založených na FEM, ktoré umožňujú jej pohodlné využitie iba na základe dobrého matematického modelu fyzikálnej úlohy, teda bez hlbšieho preniknutia do jej matematických princípov.

Tvarové funkcie, aproximácia na elemente

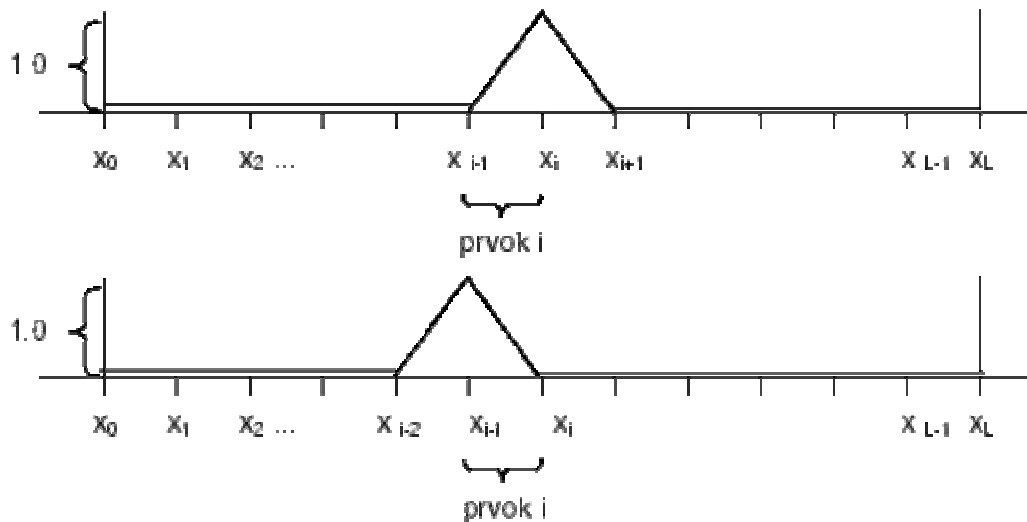
Spojité funkcie **na elemente** sa dá s ľubovoľnou presnosťou aproximovať polynómami dostatočne vysokého stupňa. Podobne ako v *Ritz-Galerkinovej metóde*, sa vyjadruje v analytickom tvare, ktorý obsahuje členy s neznámou funkciou vyjadrenou v jednotlivých uzlových bodoch i :

$$f = \sum_{i=0}^N f_i \phi_i \quad (19)$$

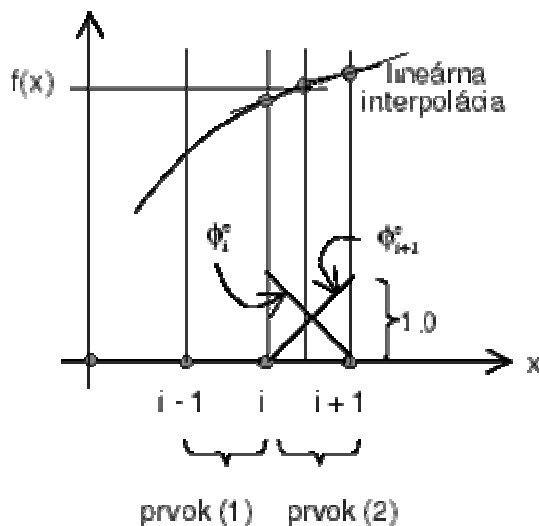
Táto rovnica vyjadruje interpoláciu lokálneho riešenia v bode (x, y, z) v čase t pomocou hodnôt v uzlových bodoch f_i . Funkcia $\phi(x, y, z)$ je interpolačná funkcia (tvarová funkcia).

Tvarová funkcia môže byť ľubovoľná. Najčastejšie sa však používa funkcia v tvare lokálne definovaného polynómu pre každý prvok. Tvarová funkcia nadobúda nulové hodnoty vo všetkých uzloch okrem jedného.

$$\phi_i = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < x_{i-1} \\ \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & \text{pre } x_{i-1} \leq x \leq x_i \text{ (prvok 1)} \\ 1 & \text{pre } x = x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & \text{pre } x_i \leq x \leq x_{i+1} \text{ (prvok 2)} \\ 0 & \text{pre } x > x_{i+1} \end{cases} \quad (20)$$



Obr. 4.1: Príklad tvarovej funkcie – po častiach lineárna funkcia pre jednorozmernú úlohu



Obr. 4.2: Lineárna interpolácia na prvku

V 1D prípade a ak ako tvarové funkcie uvažujeme **po častiach lineárne polynómy**:

Nech prvok(1) a prvok(2) z obr.4.2 sú definované ako úsečky \$(x_i - x_{i-1})\$ a \$(x_i - x_{i+1})\$ so spoločným uzlovým bodom \$i\$. Na nich funkciu \$f(x)\$ vyjadríme pomocou lineárnej interpolačnej funkcie.

Funkčnú hodnotu v oblasti prvku (2) v bode \mathbf{x} patriacom prvku môžeme vyjadriť z rovnice interpolačnej priamky pomocou hodnôt funkcie f v uzlových bodoch:

$$f(\mathbf{x}) - f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

$$f(\mathbf{x}) = f_{i+1} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_i}{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i} + f_i \frac{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}}{\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i} \quad (21)$$

$$f(\mathbf{x}) = f_{i+1} \phi_{i+1}^{(2)} + f_i \phi_i^{(2)}$$

Podobne pre prvok (1) platí:

$$f(\mathbf{x}) - f_{i-1} = \frac{f_i - f_{i-1}}{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i-1})$$

$$f(\mathbf{x}) = f_i \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i-1}}{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}} + f_{i-1} \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}}{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}} \quad (22)$$

$$f(\mathbf{x}) = f_i \phi_i^{(1)} + f_{i-1} \phi_{i-1}^{(1)}$$

Lokálna tvarová interpolačná funkcia ϕ_i^e nadobúda hodnoty medzi 0 a 1 (obr. 4.2).

Funkcia $f(x)$ na celej oblasti s N uzlovými bodmi sa vyjadrí nasledovne:

$$f = \sum_{i=0}^N f_i \phi_i(x) = f_{i-1} \phi_{i-1}(x) + f_i \phi_i \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \quad (23)$$

Variačná formulácia

Koeficienty aproximujúceho polynómu sú získané pomocou slabej (variačnej) formulácie diferenciálnej rovnice na elemente.

Rovnici

$$L(\bar{f}) = 0 \quad (24)$$

na oblasti Ω , prislúcha slabá formulácia

$$\iiint \phi_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \mathfrak{R} \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y} \, d\mathbf{z} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, i_{\max} \quad (25)$$

kde

\bar{f} je presné riešenie

f je variačné riešenie

$$L(f) = \mathfrak{R} \quad (26)$$

je tzv. reziduum, pretože

$$L(\bar{f}) \neq 0$$

Príklad 4:

a./ Galerkinovou metódou konečných prvkov riešte rovnice difúzie:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + A_1 \frac{\partial f}{\partial x} &= A_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= A_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial t} - A_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \mathfrak{R} \end{aligned} \quad (27)$$

na oblasti

$$\Omega = \{(x, t) : 0 \leq x \leq X \wedge t \geq 0\}$$

s počiatočnou podmienkou:

$$f(x, 0) = f_0(x)$$

a okrajovými podmienkami

$$f(0, t) = a$$

$$f(X, t) = b$$

b./ Urobte počítačovú implementáciu.

Riešenie:

a./

Nech je oblasť $\langle 0, X \rangle$ diskretizovaná na L jednorozmerných lineárnych prvkov a $L + 1$ uzlových bodov. Riešenie hľadáme v tvare:

$$f(x, t) = \sum_{i=1}^{i=\max} f_i \phi_i(x)$$

Keďže metóda konečných prvkov sa aplikuje iba v priestore, časová derivácia v rovnici sa vyjadří tiež pomocou interpolačnej funkcie:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{i=1}^{i_{\max}} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i \phi_i(x)$$

Podmienková rovnica pre určenie hodnôt f_i je:

$$\int_0^1 \phi_j(x) \left(\frac{\partial f}{\partial t} - A_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dx = 0$$

$$\int_0^1 \phi_j(x) \frac{\partial f}{\partial t} dx - \int_0^1 \phi_j(x) A_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx = 0$$

Druhý integrál sa rieši per-partes:

$$\int_0^1 \phi_j(x) \frac{\partial f}{\partial t} dx - A_2 \left[\phi_j \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx \right] = 0$$

Po dosadení okrajových podmienok je prvý člen v zátvorke rovný nule takže zostane:

$$\int_0^X \phi_j(x) \frac{\partial f}{\partial t} dx + A_2 \int_0^X \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} dx = 0$$

Integrál na intervale $\langle 0, X \rangle$ sa rozdelí na súčet integrálov na prvkoch. Tam, kde je tvarová funkcia nenulová bude platiť pre vnútorné uzlové body oblasti:

$$\int_0^X \phi_j(x) \frac{\partial f}{\partial t} dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i^{(1)} \left[\phi_i^{(2)} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{i-1} + \phi_i^{(1)} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i \right] dx +$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i+1}^{(2)} \left[\phi_{i+1}^{(2)} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i + \phi_{i+1}^{(1)} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{i+1} \right] dx =$$

$$\left[\frac{\Delta x_i}{6} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{i-1} + \frac{\Delta x_i}{3} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i \right] +$$

$$\left[\frac{\Delta x_{i+1}}{3} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i + \frac{\Delta x_{i+1}}{6} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{i+1} \right]$$

$$\int_0^X \phi_j(x) \frac{\partial f}{\partial t} dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i^{(1)} \left[\phi_i^{(2)} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{i-1} + \phi_i^{(1)} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i \right] dx +$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_{i+1}^{(2)} \left[\phi_{i+1}^{(2)} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i + \phi_{i+1}^{(1)} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{i+1} \right] dx =$$

$$\left[\frac{\Delta x_i}{6} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{i-1} + \frac{\Delta x_i}{3} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i \right] + \left[\frac{\Delta x_{i+1}}{3} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i + \frac{\Delta x_{i+1}}{6} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{i+1} \right]$$

Po vyjadrení derivácií lineárnej interpolačnej funkcie, za predpokladu rovnako veľkých prvkov Δx sa systém rovníc, resp. diskretizovaná rovnica vyjadrí v tvare:

$$\frac{1}{6} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{i-1} + \frac{2}{3} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_i + \frac{1}{6} \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{i+1} - \frac{A_2 (f_{i-1} - 2f_i + f_{i+1})}{\Delta x^2} = 0$$

V tejto rovnici sa vyjadrí časová derivácia s krokom dopredu v jednotlivých bodoch $i-1$, i , $i+1$. Výraz na pravej strane sa dá vyjadriť z funkčných hodnôt v čase m alebo v čase $m+1$.

Obe sa môže zaviesť i tzv. koeficient implicity β (ak je $\beta = 0$ je schéma explicitná, ak je $\beta = 1$, je schéma implicitná):

$$\frac{1}{6} \left(\frac{\Delta f_{i-1}^{m+1}}{\Delta t} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{\Delta f_i^{m+1}}{\Delta t} \right) + \frac{1}{6} \left(\frac{\Delta f_{i+1}^{m+1}}{\Delta t} \right) =$$

$$A_2 \left[\frac{(1-\beta)(f_{i-1}^m - 2f_i^m + f_{i+1}^m)}{\Delta x^2} + \frac{\beta(f_{i-1}^{m+1} - 2f_i^{m+1} + f_{i+1}^{m+1})}{\Delta x^2} \right]$$

kde je

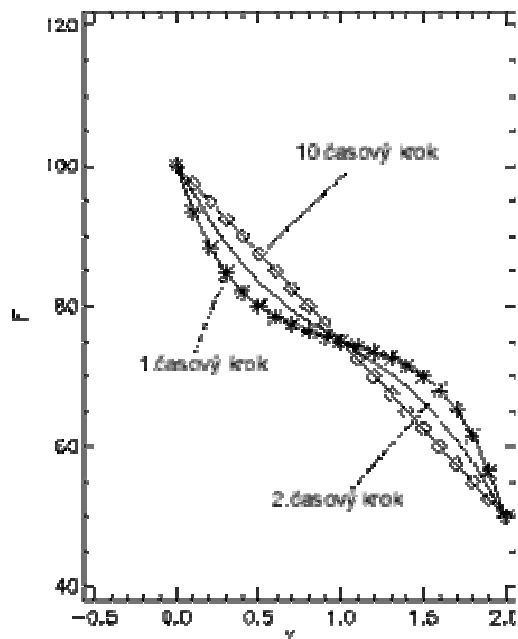
$$\Delta f_i^{m+1} = f_i^{m+1} - f_i^m \quad \text{a pod.}$$

Pre čisto implicitnú schému z tejto rovnice odvodíme:

$$\left(\frac{A_2 \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{1}{6} \right) f_{i-1}^{m+1} - \left(\frac{2A_2 \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{2}{3} \right) f_i^{m+1} + \left(\frac{A_2 \Delta t}{\Delta x^2} - \frac{1}{6} \right) f_{i+1}^{m+1} =$$

$$-f_i^m - \left(\frac{1}{6} f_{i-1}^m - \frac{1}{3} f_i^m + \frac{1}{6} f_{i+1}^m \right)$$

Schéma bodov, ktoré vstupujú do riešenia zodpovedá Crank-Nicolsonovej implicitnej schéme. Prakticky to znamená, že sa zostaví v každom časovom kroku trojdiagonálny systém lineárnych algebraických rovníc pre výpočet funkčných hodnôt v čase $m + 1$.



Obr. 4.3: Implementácia metódy konečných prvkov na príklad rovnice vedenia tepla (počiatočné podmienky $f = 75$; okrajové podmienky: $x = 0, f = 100$ a $x = 2, f = 50, A_2 = 1$; $\Delta x = 0.1$ a $\Delta t = 0.1$)

Program s implementáciou Crank-Nicolsonovej schémy v metóde konečných prvkov ukazuje nasledovný príklad:

```
[frame=lines,framesep=3mm,fontsize=\small,label=Program \ref{metodyprg5}:Crank-
Nicolson FEM]
    program crankfem
    parameter (imax=21)
    dimension x(imax),f(imax),ftemp(imax)
    dimension a(imax),b(imax),c(imax),r(imax)
    data f1,f2,fini,dx,dt,
c---initial conditions
    iter=0
    do 10 i=1,imax
        f(i)=fini
10    x(i)=dx*float(i-1)
c---boundary conditions
        f(1)=f1
        f(imax)=f2
c---time marching loop
20    iter=iter+1
```

```

do 30 i=1,imax
30  ftemp(i)=f(i)
do 40 i=2,imax-1
a(i)=a2*dt/dx**2-1./6.
b(i)=-(2./3.+2.*a2*dt/dx**2)
c(i)=a(i)
40  r(i)=-ftemp(i)-(ftemp(i-1)/6.-ftemp(i)/3.+ftemp(i+1)/6.)
r(2)=r(2)-a(2)*f(1)
r(imax-1)=r(imax-1)-c(imax-1)*f(imax)

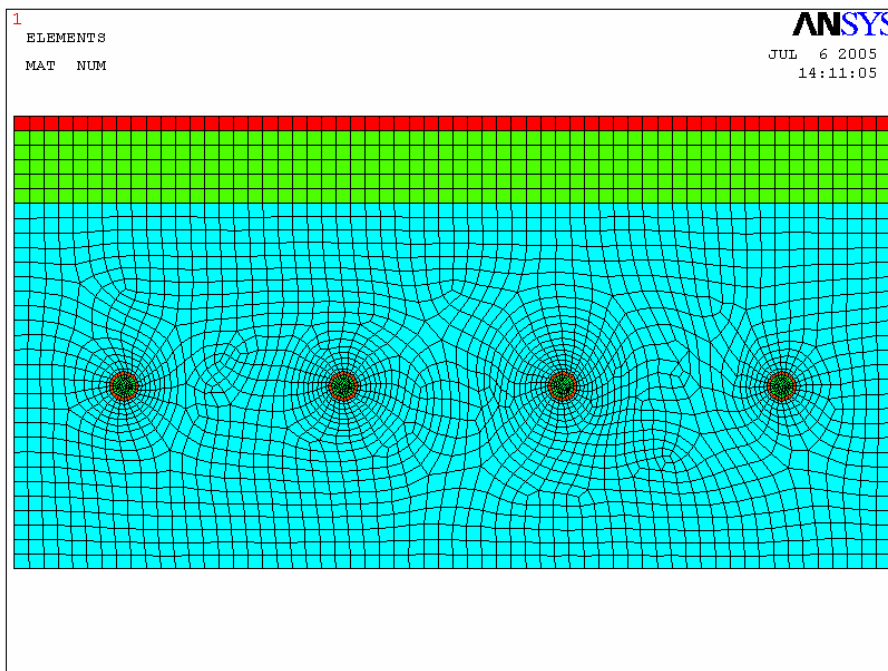
call trid(2,imax-1,a,b,c,f,r)
if(iter.lt.itermax) goto 20
c---end time marching loop and output
write(*,*)x,f
stop
end

```

Poznámka k diskretizácii

Priestor, v ktorom sa numericky riešia určujúce diferenciálne rovnice, sa najprv pokryje sieťou bodov. Sieť bodov môže byť

- štruktúrovaná (typická pre FDM)
- neštruktúrovaná.



Obr. 4.4: Diskretizácia oblasti – neštruktúrovaná sieť

Pri výpočtoch vo veľmi komplikovaných priestoroch nie je možné dostatočne presne vypočítať fyzikálnu veličinu, ak je výpočet založený na štruktúrovanej sieti. Štruktúra bodov neumožní dostatočne presne diskretizovať hranice oblasti, alebo oblasti, kde sa silne menia fyzikálne veličiny. V takýchto prípadoch je oblasť pokrytá výpočtovými bodmi bez viditeľnej štruktúry, vid' obr. 4.4. Kritériom pre ich rozmiestnenie je hlavne požiadavka numerickej presnosti výpočtu derivácií a implementácia okrajových podmienok na obtekaných stenách.

5. ANSYS – program využívajúci FEM pre parciálne diferenciálne rovnice. Príklady použitia.

Základné fázy výpočtu v systéme ANSYS:

- prepossesing
- solution
- postprocessing

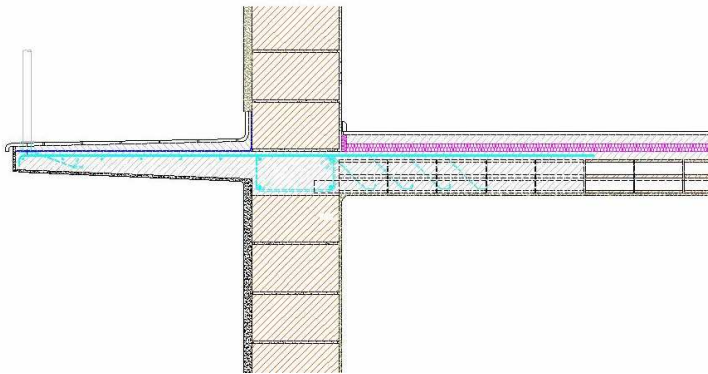
Preprocessing zahŕňa tvorbu matematického modelu, definovanie geometrie, diskretizácie, okrajových podmienok a materiálových charakteristík.

Solution znamená riešenie. Ak úloha je stacionárna, spustí sa výpočet bez predchádzajúceho nastavovania (current load step). Ak ide o nestacionárnu úlohu, musia sa najskor vytvoriť tzv load step súbory, v ktorých sa nastavujú parametre pre jednotlivé časové kroky. Toto sa dá urobiť „ručne“ alebo pomocou makra.

Postprocessing umožňuje prezeranie a spracovanie výsledkov, grafické i dátové výstupy.

Príklad 5:

Nájdite kritické miesto s minimálnou teplotou na vnútornom povrchu fragmentu stavebnej konštrukcie



Obr. 4.5: Detail fragmentu stavebnej konštrukcie – rez - 2D teplotné pole

Riešenie:

Na geometricky pomerne komplikovanej oblasti, vid' obr. 4.5, riešime zmiešanú úlohu – 2D Laplaceovu rovnicu

$$\Delta u = 0$$

s okrajovými podmienkami:

$$\begin{aligned}
 q_{ce} &= h_e (T_{se} - T_e) && \text{na vonkajších povrchoch} \\
 q_{ci} &= h_e (T_{se} - T_e) && \text{na vnútorných povrchoch} \\
 \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 && \text{na povrchoch, pozdĺž ktorých konštrukcia pokračuje}
 \end{aligned}$$

kde

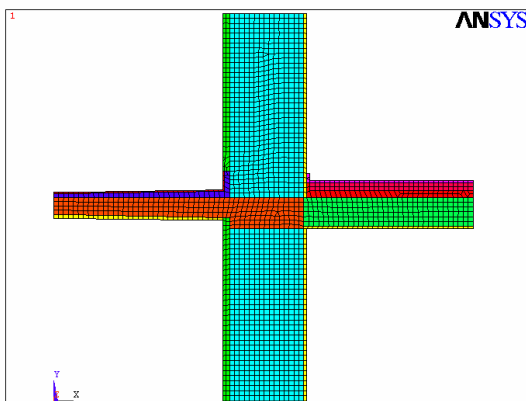
q_c hustota tepelného toku vymeneného konvekciou medzi vzduchom a povrchom konštrukcie [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$]

h_c súčiniteľ prestupu tepla [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$]

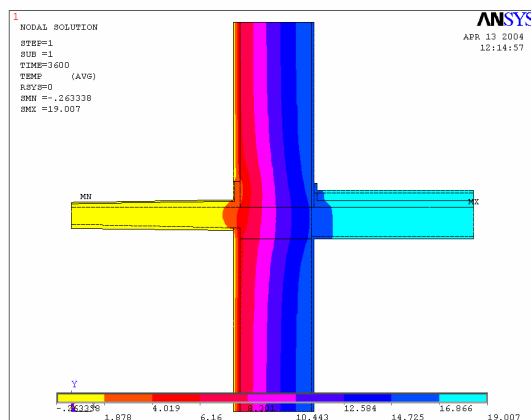
T_s teplota povrchu [K]

T_i, T_e teplota vnútorného, vonkajšieho vzduchu [K]

Vytvoríme, prípadne importujeme geometriu, navrhujeme typ a rozmer elementov, priradíme materiálové charakteristiky a okrajové podmienky. Vypočítame.



Obr. 4.6: Zjednodušenie geometrie a diskretizácia oblasti



Obr. 4.6: Grafický výstup – izotermy teplotného poľa

Práca v programovom systéme ANSYS nie je celkom jednoduchá a vyžaduje určitú zručnosť. Prostredie programu je anglické. Veľmi užitočnou pomôckou pre získanie základnej zručnosti práce môžu byť príklady - tzv. Ansys tutorials – podrobne rozpracované fyzikálne úlohy rôznorodých typov, ktoré sa prípadne dajú využiť ako základ pre riešenie vlastnej úlohy. Popis jedného takého tutorialu ponúka príklad 6.

Príklad 6:

Tuhnutie oceľového odliatku v pieskovej forme (Solidification of a Casting)

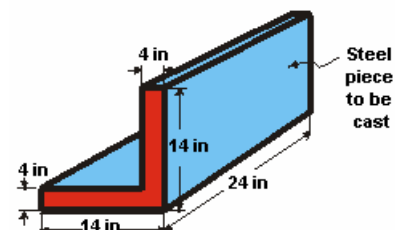
Riešenie podľa ANSYS tutorials

1 Popis problému:

Nasledujúca tabuľka popisuje typ riešeného problému: Ide o teplotnú úlohu so zmenou fázy, nelineárny nestacionárny termodynamický proces, počas ktorého sa fyzikálne charakteristiky podstatne menia. Čas trvania od začiatku tvorby grafického modelu až po spracovanie výsledkov je 60 – 90 minút, odporúčaný typ elementu je Plane 55, sú vymenované súvisiace helpové balíky,

Applicable ANSYS Products:	ANSYS Multiphysics, ANSYS Mechanical, ANSYS ED
Level of Difficulty:	moderate
Interactive Time Required:	60 to 90 minutes
Discipline:	thermal
Analysis Type:	nonlinear transient
Element Types Used:	PLANE55
ANSYS Features Demonstrated:	conduction, convection, phase change, selecting, solution control, time-history postprocessing, use of a "get function"
Applicable Help Available:	Transient Thermal Analysis in the Thermal Analysis Guide , PLANE55 in the Elements Reference .

Cieľom je sledovanie časového priebehu rozloženia teploty v odliatku s profilom písmena L (rozмеры sú ponechané v amerických jednotkách) a v pieskovej forme počas tuhnutia ocele počas cca. 4 hodín. Medzi formou a okolitým vzduchom udržiavanej konštantnej teploty prebieha konvekcia, vo vnútri formy, v odliatku,



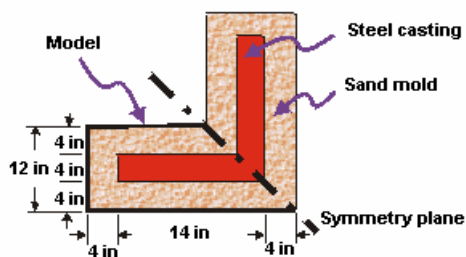
ako aj na ich rozhraní prebieha kondukcia.

2. Fyzikálne parametre

Ďalšia tabuľka udáva materiálové charakteristiky piesku, ocele (závislé od teploty), teplotu okolitého vzduchu a koeficient prestupu tepla z piesku do vzduchu:

<i>Material Properties for Sand</i>	
Conductivity (KXX)	0.025 Btu/(hr-in-°F)
Density (DENS)	0.054 lb/in ³
Specific heat (C)	0.28 Btu/(lb-°F)
<i>Conductivity (KXX) for Steel</i>	
at 0°F	1.44 Btu/(hr-in-°F)
at 2643°F	1.54
at 2750°F	1.22
at 2875°F	1.22
<i>Enthalpy (ENTH) for Steel</i>	
at 0°F	0.0 Btu/in ³
at 2643°F	128.1
at 2750°F	163.8
at 2875°F	174.2
<i>Initial Conditions</i>	
Temperature of steel	2875 °F
Temperature of sand	80 °F
<i>Convection Properties</i>	
Film coefficient	0.014 Btu/(hr-in ² -°F)
Ambient temperature	80 °F

3. Prístup a predpoklady:



Prevedieme dvojdimenzionálnu analýzu problému, využijeme symetriu podľa osi $y = -x$: Tepelnotechnické parametre piesku (koeficient vedenia tepla, merná hmotnosť a špecifické teplo) sa v predpokladanom rozsahu teplôt nebudú meniť. Naopak, tepelnotechnické parametre ocele

(koeficient vedenia tepla, entalpia) sa s teplotou podstatne menia, medzi tabuľkovo zadanými hodnotami sa vykoná lineárna interpolácia. Sálanie zanedbáme. Časový krok bude automaticky generovaný, t. j. v čase zmeny fázy bude výrazne kratší.

4. Nastavenie preferencií na Thermal

Nastavenie preferencií na Thermal bude mať za následok redukciu grafického rozhrania na optimálne pre tepelnotechnické úlohy:

1. **Main Menu> Preferences**
2. (check) “Individual discipline(s) to show in the GUI” = Thermal
3. [OK]

5. Geometria

Tento tutorial neponúka tvorbu geometrie cez body (keypoints), čiary (lines) a plochy (areas). Načítava hotovú geometriu zo súboru:

1. **Utility Menu> File> Read Input from ...**
2. File name: casting.inp

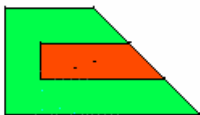
UNIX version:

```
/ansys_inc/v110/ansys/data/models/casting.inp
```

PC version:

```
\Program Files\Ansys Inc\V110\ANSYS\data\models\casting.inp
```

3. [OK]



6. Zadávanie materiálových charakteristík

Definujme piesok ako materiál č. 1 a zadajme jeho materiálové charakteristiky (nie sú závislé od teploty) – koeficient tepelnej vodivosti 0.28):

1. **Main Menu> Preprocessor> Material Props> Material Models**
2. (double-click) “Thermal”, then “Conductivity”, then “Isotropic”
3. “KXX” = 0.025
4. [OK]
5. (double-click) “Specific Heat”
6. “C” = 0.28
7. [OK]
8. (double-click) “Density”
9. “DENS” = 0.54
10. [OK]

Kovový odliatok – materiál č. 2 – má koeficient tepelnej vodivosti a entalpiu závislú od teploty. Zadávajú sa tabiľkou pre štyri hodnoty teploty:

Koeficient tepelnej vodivosti:

11. **Material> New Model**
12. “Define Material ID” = 2
13. [OK]
14. (double-click) “Isotropic”
15. [Add Temperature] three times to create fields for the four temperatures.
16. “T1” = 0
17. “T2” = 2643
18. “T3” = 2750
19. “T4” = 2875
20. “KXX” at “T1” = 1.44
21. “KXX” at “T2” = 1.54
22. “KXX” at “T3” = 1.22
23. “KXX” at “T4” = 1.22

Skopírujeme do klipboardu štyri teploty, ktoré použijeme pri zadávaní entalpie.

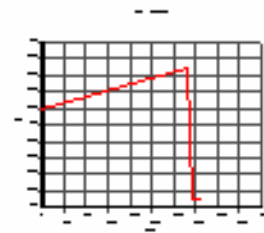
24. Select the temperatures by holding the left mouse button and dragging across the temperature row so that the row is highlighted.
25. [Ctrl] then [c] to copy the temperatures.
26. [OK]

Entalpia:

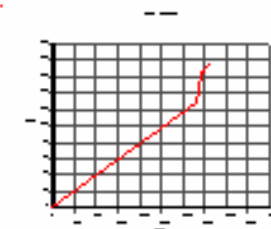
27. (double-click) “Enthalpy”
28. [Add Temperature] three times to create fields for the four temperatures.
29. Paste the temperatures into the dialog box by highlighting the T1 temperature field, and pressing [Ctrl] then [v].
30. “ENTH” at “T1” = 0
31. “ENTH” at “T2” = 128.1
32. “ENTH” at “T3” = 163.8
33. “ENTH” at “T4” = 174.2
34. [OK]

Graf entalpie v závislosti od teploty:

1. (double-click) “Thermal conduct. (iso)” under **Material Model Number 2**.
2. [Graph]
3. [OK]



4. (double-click) “Enthalpy” under the right or left window.
5. [Graph]
6. [OK]
7. **Material> Exit**
8. Toolbar: **SAVE_DB**



7. Typ elementu:

1. **Main Menu> Preprocessor> Element Type> Add/Edit/Delete**
2. [Add ...]
3. “Thermal Solid” (left column)
4. “Quad 4node 55” (right column)
5. [OK]
6. [Close]

7. Toolbar: **SAVE_DB**

8. Diskretizácia - meshing

1. **Utility Menu> Plot> Areas**

Nastavenie veľkosti elementov sa ponechá na systém, pričom našou snahou je (aby bola použiteľná aj školská verzia [ANSYS ED](#)), aby počet elementov bol čo najmenší. Nastavíme teda stupeň “drsnosti” delenia na 4:

2. **Main Menu> Preprocessor> Meshing> MeshTool**

3. (check) “Smart Size”

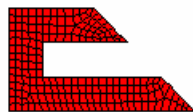
4. (slide) “Fine Course” = 4

5. [Mesh]

6. Ukážeme na plochu, ktorá predstavuje pieskovú formu, vyberieme a diskretizujeme.

(Plocha sa selektuje centroidne, to znamená cca do ťažiska)

7. [OK]



Skôr, než budeme diskretizovať oblasť predstavujúcu odliatok, nastavíme materiál č. 2

8. (drop down in MeshTool) “Element Attributes” = Global, then [Set]

9. (drop down) “Material number” = 2

10. [OK]

11. **Utility Menu> Plot> Areas**

12. [Mesh] in MeshTool

13. Pick area A4

14. [OK]



15. [Close] in MeshTool

16. **Utility Menu> Plot> Elements**

Zapneme číslovanie materiálov:

17. **Utility Menu> PlotCtrls> Numbering**

18. (drop down) “Elem / Attrib numbering” = Material numbers

19. [OK]

Väčšinou stačí rozlíšenie pomocou farieb:

20. **Utility Menu> PlotCtrls> Numbering**

21. (drop down) “Numbering shown with” = Colors only

22. [OK]

Tlačítko SAVE_DB používajme často:

23. Toolbar: **SAVE_DB**

9. Okrajové podmienky, zaťaženia

Aplikujeme konvekciu na čiarach predstavujúcich stykové plochy medzi pieskovou formou a okolitým vzduchom:

1. **Utility Menu> Plot> Lines**

2. **Main Menu> Preprocessor> Loads> Define Loads> Apply> Thermal> Convection> On Lines**

3. Pick the three lines that are exposed to ambient air.

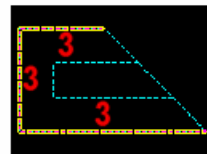
4. [OK]

5. “Film coefficient” = 0.014

6. “Bulk temperature” = 80

7. [OK]

8. Toolbar: **SAVE_DB**



Implicitná hodnota okrajových podmienok je nulová Neumannova podmienka. Ak teda na ostatných okrajových hranách (čiary symetrie) nezadáme nič, zostáva v platnosti nulový tok.

10. Nastavenie nestacionárnosti úlohy:

1. **Main Menu> Solution> Analysis Type> New Analysis**

2. (check) "Type of analysis" = Transient
3. [OK]
4. (check) "Solution method" = Full
5. [OK]

11.. Kontrola / nastvenie radiacich parametrov riešenia

1. Main Menu> Solution> Load Step Opts> Solution Ctrl

Všimnime si implicitnú hodnotu Solution Control. Je nastavená na ON. Na tomto mieste tutorial odporúča využiť help a nastudovať príslušnú časť pre lepšie pochopenie nastavení:

2. [Help] then read the details on Solution Control.
3. If the help information replaced the tutorial, click on the Back button to return to the tutorial. If the help information appears in a separate window, you can close or minimize that window.
4. [Cancel] to remove the dialog box.

12:Zadanie počiatocnej podmienky.

Počiatočná podmienka predstavuje počiatocné rozloženie teplôt v sústave (odliatok, forma, vzduch). Forma má na začiatku 80°F v celom svojom objeme a roztavený 2875°F. Počiatocnú podmienku zadávame priamo do uzlov, preto je nevyhnutné vedieť dobrearábať s príkazom Select. Príkaz sa nachádza v užívateľskom menu. Nezabudnime, že jeho účinnosť trvá až pokiaľ nevykonáme unselect, prípadne iný select. Preto pre prehľadnosť ďalšej práce použijeme príkaz ***select Everything***, ktorý opätovne „vyberí všetko“

Pri zadávaní počiatocných teplôt do uzlov postupujeme nasledovne:

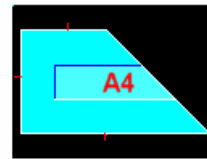
- vyberieme plochu (select area)
- zadáme počiatocnú podmienku do všetkých jej uzlov
- invert selection otočí selekciu
- zadáme počiatocnú podmienku do ostatných uzlov

Najskôr vykreslime plochy:

1. **Utility Menu> Plot> Areas**
2. **Utility Menu> Select> Entities**
3. (first drop down) “Areas”
4. [OK]
5. Pick area A4, which is the casting.
6. [OK]

Vyberme požadovanú plochu

7. **Utility Menu> Select> Everything Below> Selected Areas**



Vykreslime všetky jej prislúchajúce uzly

8. **Utility Menu> Plot> Nodes**



Aplikujeme počiatočnú hodnotu teploty 2875 do všetkých zobrazených uzlov:

9. **Main Menu> Solution> Define Loads> Apply> Initial Condit'n> Define**
10. [Pick All] to use *selected* nodes.
11. (drop down) “DOF to be specified” = TEMP
12. “Initial value of DOF” = 2875
13. [OK]
14. **Utility Menu> Select> Entities**
15. (first drop down) “Nodes”
16. (second drop down) “Attached to”
17. (check) “Areas, all”
18. [Invert] This is an action command; the selected set of nodes is immediately inverted.
19. [Cancel] to close the dialog box.
20. **Utility Menu> Plot> Nodes**
21. **Main Menu> Solution> Define Loads> Apply> Initial Condit'n> Define**
22. [Pick All] to use all selected nodes.
23. “Initial value of DOF” = 80
24. [OK]



25. **Utility Menu> Select> Everything**

26. Toolbar: **SAVE_DB**

13: Čas, časový krok a súvisiace parametre.

Stupňovité okrajové podmienky simulujú náhly kontakt tekutého kovu s formou. Program volí automatický časový krokovač, ktorý flexibilne nastavuje časový krok (v čase zmeny fázy bude krok kratší). Maximálnu a minimálnu dĺžku kroku zadáme.

1. **Main Menu> Solution> Load Step Opts> Time/Frequenc> Time-Time Step**

2. “Time at end of load step” = 4

Toto reprezentuje 4 hodiny:

3. “Time step size” = 0.01

4. (check) “Stepped or ramped b. c.” = Stepped

5. “Minimum time step size” = 0.001

6. “Maximum time step size” = 0.25

7. [OK]

14. Výstupný súbor

1. **Main Menu> Solution> Load Step Opts> Output Ctrls> DB/Results File**

2. (check) “File write frequency” = Every substep

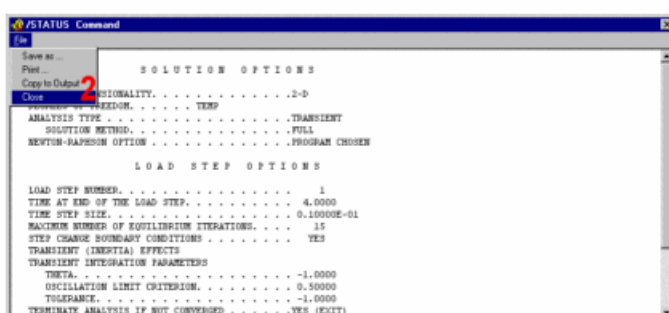
3. [OK]

4. Toolbar: **SAVE_DB**

15. Riešenie.

1. **Main Menu> Solution> Solve> Current LS**

2. Review the information in the status window, then choose. **File> Close (Windows)**, or **Close (X11/Motif)**, to close the window.

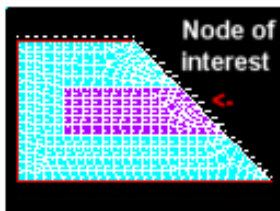


3. [OK] to initiate the solution.
4. [Close] when the solution is done.

16. Správa výsledkov.

Na prezeranie a spracovanie výsledkov použijeme time-history postprocessor. Najprv nadefinujeme premenné, ktoré potrebujeme prezerať:

1. **Utility Menu> PlotCtrls> Numbering**
2. (check) “Node numbers” = On
3. (drop down) “Numbers shown with” = Colors & numbers
4. [OK]
5. **Utility Menu> Plot> Elements**



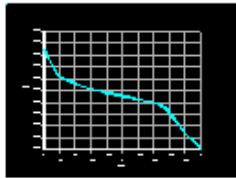
Chceme sledovať priebeh teploty v strede odliatku so súradnicami (16,6,0).

6. **Utility Menu> Parameters> Scalar Parameters**
7. “Selection”=cntr_pt = node (16,6,0)
8. [Accept]
9. [Close]
10. **Main Menu> TimeHist Postproc**
11. [+] to add data.
12. (double-click) “Nodal Solution”, then “DOF Solution”, then “Temperature”
13. “Variable Name” = center

14. [OK]
15. Type `cntr_pt` in the picker, then press Enter.
16. [OK] in the picker.
17. **File> Close**

Nakreslime priebeh teploty v čase:

1. **Main Menu> TimeHist Postpro> Graph Variables**
2. “1st variable to graph” = 2
3. [OK] to plot the results at `cntr_point` as a function of time.



Všimnime si, že v samotnom priebehu tuhnutia sa teplota mení iba veľmi málo. – medzi 2643°F a 2750°F.

17. Nastavenie parametrov pre animáciu výsledkov

Animácia solidifikácie:

Nastavme animáciu najskôr na 3 základné kontúry – prvá bude predstavovať tekutý kov (teplota väčšia než 2750 °F), druhá reprezentuje tuhú kov (teplota menej ako 2643 °F), tretia všetko medzi tým.

1. **Main Menu> General Postproc> Read Results> First Set**
2. **Utility Menu> PlotCtrls> Numbering**
3. (check) “Node numbers” = Off
4. (drop down) “Elem / Attrib numbering” = No numbering
5. (drop down) “Replot upon OK/Apply?” = Do not replot
6. [OK]
7. **Utility Menu> Plot> Elements**
8. **Utility Menu> PlotCtrls> Style> Contours> Non_uniform Contours**
9. “V1” = 2643

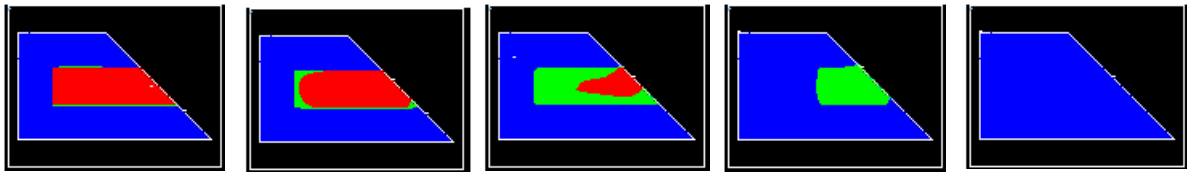
10. "V2" = 2750
11. "V3" = 3000
12. [OK]

Step 17: Animate the results.

17. Animácia výsledkov

Pre 3 kontúry:

1. **Utility Menu> PlotCtrls> Animate> Over Time**
2. "Number of animation frames" = 30
3. (check) "Auto contour scaling" = Off
4. [Ok]

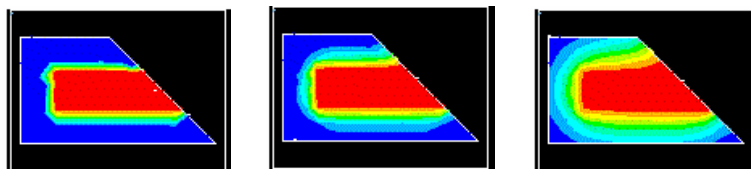


5. Make choices in the Animation Controller (not shown), if necessary, then [Close].

Použitím príkazu [/CVAL](#) nastavíme kontúry na implicitnú hodnotu a môžeme sledovať vývoj celej škály teplôt.

6. Type /CVAL, then press Enter
7. **Utility Menu> PlotCtrls> Animate> Over Time**
8. [OK]

Pre prednastavený počet kontúr:

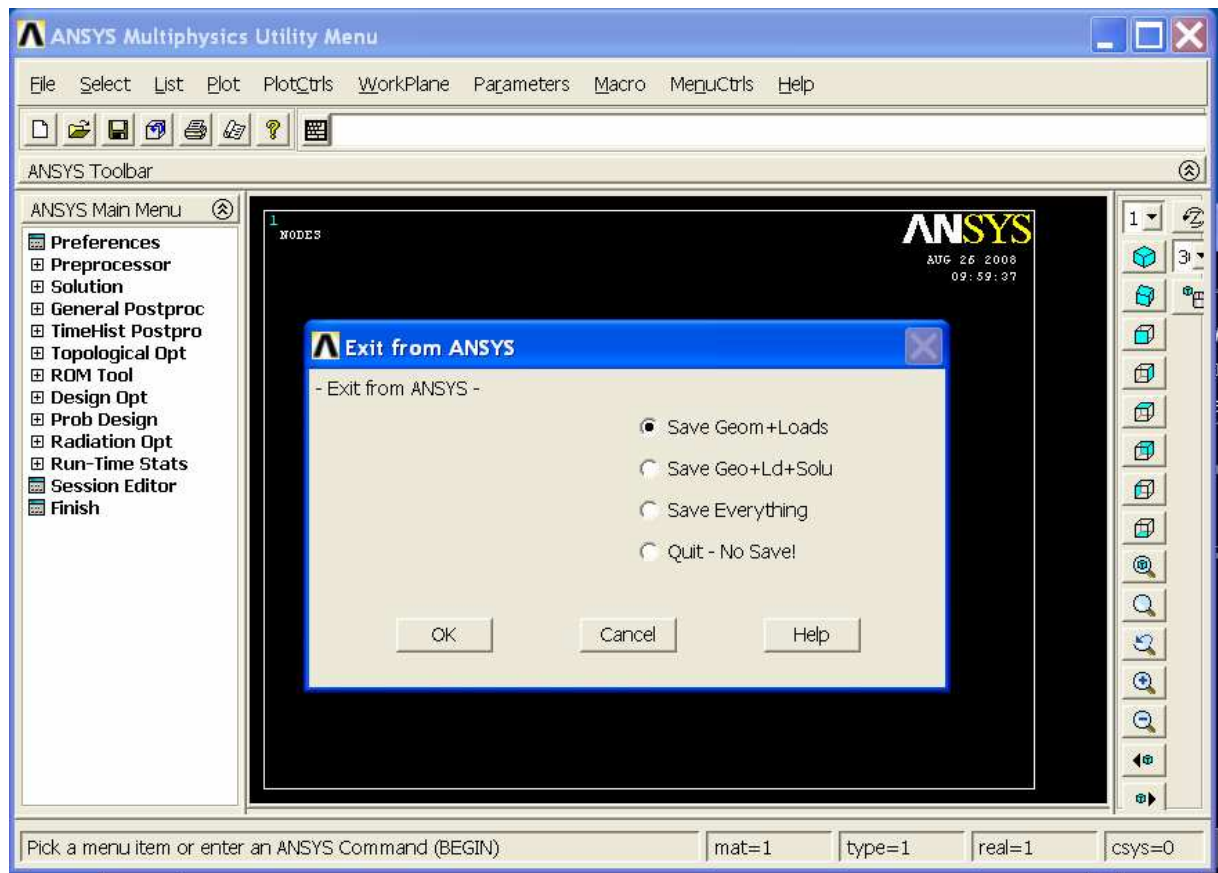


9. Make choices in the Animation Controller (not shown), if necessary, then [Close].

18. Ukončenie práce v ANSYS-e

1. Toolbar: **QUIT**

2. Vyberieme jednu z možností pre uloženie



3. [OK]

Ak ukončíme prácu a zatvoríme program ANSYS, animácie máme k dispozícii nezávisle a dajú sa spúšťať príslušnými prehliadačmi.

Použitá literatúra

- [1] Ansys tutorials – ANSYS 11.0. Documentation for ANSYS
- [2] M. Halahya, I. Chmúrny, Z. Sternová: *Thermal Engineering of Buildings. Thermal Protection of Buildings*. Jaga Group, 1998 (in Slovak)
- [3] I. Chmúrny, M. Minárová: *Risk of Mould Growth in Buildings*, Journal of Civil Engineering 2/04
- [4] J. Kalická, M. Komorníková, K. Mikula, D Szokeová: Výpočtový systém Mathematica
- [5] Minárová M.: Deformované teplotné polia a riziko vzniku hygienických problémov. Edícia vedeckých prác Slovenská technická univerzita, Vydavateľstvo STU, Bratislava 2005

RNDr. Mária Minárová, PhD.

NUMERICKÉ METÓDY V INŽINIERSKYCH APLIKÁCIÁCH

Vydala Slovenská Technická univerzita v Bratislave vo Vydavateľstve STU,
Bratislava, Vazovova 5, v roku 2008

Rozsah 50 strán

ISBN 978-870-227-2972-7