Obsah

Kapitola 1

Číselné obory

1.1 Reálne čísla a ich základné vlastnosti

Základné číselné množiny sú čitateľovi určite známe už zo strednej školy. Zavedieme preto len ich označenie:
N- množina všetkých prirodzených čísel.
Prirodzené čísla sú čísla $1, 2, 3, \dots$. Súčet a súčin prirodzených čísel je prirodzené číslo.
Z- množina všetkých celých čísel.
Celé čísla sú všetky čísla, ktoré môžeme vyjadriť ako rozdiel dvoch prirodzených čísel. Súčet, súčin a rozdiel celých čísel je celé číslo.
Q- množina všetkých racionálnych čísel.
Racionálne čísla sú všetky čísla, ktoré je možné vyjadriť ako podiel celého a prirodzeného čísla. Súčet, rozdiel, súčin a podiel racionálnych čísel (okrem delenia nulou) je racionálne číslo.
I- množina všetkých iracionálnych čísel.
Iracionálne čísla sú čísla, ktoré možno vyjadriť v tvare nekonečného neperiodického desatinného zlomku. Napíklad: $\sqrt{3}, \sqrt{2}, \pi$.
R- množina všetkých reálnych čísel.
Zjednotenie množiny racionálnych a iracionálnych čísel tvorí množinu **reálnych čísel**.
Z vyššie uvedeného vyplýva, že medzi jednotlivými číselnými množinami platí nasledujúci vzťah:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}, \quad \mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$$

Množina všetkých reálnych čísel má tieto základné vlastnosti:

1. Je usporiadaná: pre každé dve reálne čísla a, b platí práve jeden zo vzťahov:
   $a = b, \quad a < b, \quad b < a.$

2. Je všade hustá: medzi dvoma ľubovoľnými rôznymi reálnymi číslami a, b, pre ktoré platí $a < b$, existuje aspoň jedno reálne číslo c, pre ktoré platí: $a < c < b$.

3. Je uzavretá vzhľadom na operácie súčtu, súčinu, rozdielu a podielu t.j. súčet, súčin, rozdiel a podiel reálnych čísel je reálne číslo.

4. Množinu **R** možno jednojednoznačne zobraziť na číselnej osi t.j. každému reálnemu číslu možno priradiť jediný bod na číselnej osi a naopak.

Cvičenia

1. Na číselnej osi znázornite reálne čísla:
$3;\ \pi;\ -\pi;\ -1;\ 1+\sqrt{2};\ \frac{5}{3};\ 0,25;\ -\sqrt{3}.$

2. Ktoré z nasledujúcich čísel sú racionálne:
$\sqrt{5}+0,\overline{12};\ \sqrt{2}\sqrt{8};\ \sqrt{3}(\sqrt{3}+2);\ (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2});\ 0,12\,.\,0,\overline{12};\ \sqrt{\frac{6}{18}};\ \sqrt{\frac{27}{75}}.$

3. Usporiadajte dané trojice čísel:
$\frac{22}{7},\pi,\frac{355}{113};\quad \frac{13}{15},\sqrt{7},\frac{16}{6};$
$-\sqrt{2},-1,41,-1,44;\quad -\frac{7}{3},-2,34,-2,31.$

4. Napíšte kladné racionálne číslo menšie ako $0,000001$ a kladné racionálne číslo menšie ako $0,000001.\sqrt{2}$.

5. Zistite, či platia nerovnosti:
$3-\sqrt{2}-\frac{5}{3}>0;$
$4-\sqrt{3}-\frac{7}{3}>0;$
$\pi-8+\ln(2)>0.$

1.1.1 Komplexné čísla

Množinu $\mathbf{C}$ všetkých usporiadaných dvojíc (a,b), kde $a\in\mathbf{R},\ b\in\mathbf{R}$ nazývame množinou **komplexných čísel**, ak pre každé dva prvky $z_1=(a,b),\ z_2=(c,d)$ z množiny $\mathbf{C}$ je definovaná **rovnosť, sčítanie** a **násobenie** takto:

1. $z_1=z_2$ práve vtedy, keď $a=c,\ b=d$,
2. $z_1+z_2=(a+c,b+d)$,
3. $z_1\cdot z_2=(ac-bd,ad+bc)$.

Pre sčítanie a násobenie kompexných čísel platí asociatívny a komutatívny zákon. Násobenie komplexných čísel je distributívne vzhľadom na sčítanie komplexných čísel.
Nech $z=(a,b)$ je komplexné číslo. Potom číslo $a\in\mathbf{R}$ nazývame **reálnou časťou** a číslo $b\in\mathbf{R}$ **imaginárnou časťou** komplexného čísla z. Označujeme ich takto: $a=\mathrm{Re}\ z,\ b=\mathrm{Im}\ z$.
Komplexné číslo $(a,0)$ stotožňujeme s reálnym číslom $a:(a,0)=a$. Komplexné číslo $(0,b)$, kde $b\neq0$, nazývame **rýdzoimaginárnym číslom**. Číslo $(0,1)$ nazývame **imaginárnou jednotkou** a označujeme ho $(0,1)=\mathrm{i}$. Komplexné číslo $z=(a,b)$ píšeme aj v tvare:

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)\cdot(0,1)=a+\mathrm{i}b.$$

Komplexné číslo $a-\mathrm{i}b$ nazývame **komplexne združeným** ku komplexnému číslu $a+\mathrm{i}b$. **Absolútnou hodnotou** alebo **modulom** komplexného čísla $z=a+\mathrm{i}b$ nazývame číslo

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Ak pre komplexné číslo z platí: $|z|=1$, nazývame ho **komplexnou jednotkou**. Každú komplexnú jednotku z možno písať v tvare:

$$z=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha,$$

kde α je reálne číslo. Toto číslo označujeme aj $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ a platí:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha.$$

Argumentom komplexného čísla $z = a + ib$, kde $z \neq 0$, nazývame číslo $\varphi = \operatorname{Arg} z$, pre ktoré platí:

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ak $z = 0$, tak $\operatorname{Arg} z = 2k\pi$, kde k je celé číslo. Ak pre číslo φ platí: $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, nazývame ho **hlavnou hodnotou argumentu** a ozančujeme ho $\arg z$.
Každé komplexné číslo z možno vyjadriť v **goniometrickom tvare**:

$$z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

kde $\varphi = \arg z$, alebo v exponenciálnom tvare:

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},$$

kde $\varphi = \arg z$.

Veta 1.1 *Pre číslo i platí:*

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1.$$

1.2 Číselné množiny

Číselnou množinou nazývame takú množinu, ktorej všetky prvky sú čísla.

Majme číselnú množinu X. Nech M je také číslo z X, že pre všetky $x \in X$ platí $x \leq M$. Číslo M nazývame **maximum množiny** X a označujeme ho $\max X$.

Nech m je také číslo z množiny X, že pre všetky $x \in X$ platí $m \leq x$. Číslo m nazývame **minimum množiny** X a označujeme ho $\min X$.

Každá konečná číselná množina má maximum a minimum.

Číselná množina X sa nazýva **zhora ohraničená**, ak existuje také číslo B, že pre každé číslo $x \in X$ platí $x \leq B$. Číselná množina X sa nazýva **zdola ohraničená**, ak existuje také číslo b, že pre každé číslo $x \in X$ platí $b \leq x$. Číslo B nazývame **horným ohraničením množiny** X a číslo b nazývame **dolným ohraničením množiny** X. Množina ohraničená zdola aj zhora sa nazýva **ohraničená**. Najmenšie horné ohraničenie množiny X sa nazýva **supremum množiny** X a označujeme ho $\sup X$. Najväčšie dolné ohraničenie množiny X sa nazýva **infimum množiny** X a označujeme ho $\inf X$. Majú tieto vlastnosti:

1. Pre každé $x \in X$ platí $\sup X \geq x$, $\inf X \leq x$

2. Pre každé $\varepsilon > 0$ existujú čísla $x_1 \in X$ a $x_2 \in X$, pre ktoré platí

$$x_1 \geq \sup X - \varepsilon, \quad x_2 \leq \inf X + \varepsilon$$

3. Ak množina X je ohraničená zhora, tak má supremum. Ak množina X je ohraničená zdola, tak má infimum.

4. Ak $\sup X \in X$, tak $\sup X = \max X$. Ak $\inf X \in X$, tak $\inf X = \min X$.

Nech a, b sú reálne čísla a nech $a < b$. Množinu čísel x, pre ktoré platí :
$a < x < b$ nazývame **otvoreným intervalom** a označujeme ho (a, b). Pre takýto interval platí: $a = \inf(a, b),\ b = \sup(a, b)$. Minimum a maximum neexistuje.
$a \leq x \leq b$ nazývame **uzavretým intervalom** a označujeme ho $\langle a, b\rangle$. Platí: $a = \min\langle a, b\rangle = \inf\langle a, b\rangle,\ b = \max\langle a, b\rangle = \sup\langle a, b\rangle$.
$a < x \leq b$ nazývame **zľava otvoreným a sprava uzavretým intervalom** a označujeme ho $(a, b\rangle$. Platí: $a = \inf(a, b\rangle,\ b = \sup(a, b\rangle = \max(a, b\rangle$. Minimum neexistuje.
$a \leq x < b$ nazývame **zľava uzavretým a sprava otvoreným intervalom** a označujeme ho $\langle a, b)$. Platí: $a = \min\langle a, b) = \inf\langle a, b),\ b = \sup\langle a, b)$. Maximum neexistuje.
Intervalmi nazývame aj množiny všetkých čísel x určených nerovnosťami:
$a \leq x$, označujeme $\langle a, \infty)$ - zľava uzavretý interval od a do nekonečna. Platí: $a = \min\langle a, \infty) = \inf\langle a, \infty)$. Maximum a supremum neexistuje.
$a < x$, označujeme (a, ∞) - zľava otvorený interval od a do nekonečna. Platí: $a = \inf(a, \infty)$. Minimum, maximum a supremum neexistujú.
$x \leq b$, označujeme $(-\infty, b\rangle$ - sprava uzavretý interval od mínus nekonečna po b. Platí: $b = \max(-\infty, b\rangle = \sup(-\infty, b\rangle$. Minimum a infimum neexistujú.
$x < b$, označujeme $(-\infty, b)$ - sprava otvorený interval od mínus nekonečna po b. Platí: $b = \sup(-\infty, b)$. Maximum, minimum a infimum neexistujú.
Množinu všetkých reálnych čísel môžeme označovať aj $(-\infty, \infty)$.
Okolím čísla a (bodu a) nazývame otvorený interval, ktorý číslo a obsahuje. Označujeme ho $O(a)$.
$\varepsilon-$ **okolie bodu** a je interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, pričom $\varepsilon > 0$.

Pre riešenie nasledujúcich príkladov, kde budeme dokazovať, že nejaké číslo je infimom alebo supremom množiny, nám bude užitočná nasledujúca veta:

Veta 1.2 *Archimedova vlastnosť: Pre ľubovoľné reálne číslo a existuje také prirodzené číslo n, že platí: $n > a$.*

Príklad 1. Nájdime supremum, infimum, maximum a minimum množiny $M = (-\frac{1}{2}, 1\rangle$.

Riešenie: Zo znázornenia danej množiny na číselnej osi usúdime, že supremum množiny je číslo 1 a infimum množiny M je číslo $-\frac{1}{2}$. Ukážeme, že je to tak. Čísla x, ktoré tvoria množinu M, spĺňajú nerovnicu
$$-\frac{1}{2} < x \leq 1. \tag{1.1}$$
Z toho vyplýva, že daná množina je ohraničená a číslo 1 je jedno z horných ohraničení, číslo $-\frac{1}{2}$ je jedno z dolných ohraničení. Ukážeme, že číslo 1 je najmenším horným ohraničením, t.j. $\sup M = 1$. Musí preto spĺňať vlastnosti suprema:
1. $x \leq 1$ pre každé $x \in M$.
2. Ku každému $\varepsilon > 0$ existuje také číslo $x_1 \in M$, pre ktoré platí $x_1 \geq 1 - \varepsilon$. Prvé tvrdenie vyplýva z nerovnosti (1.1). Druhé tvrdenie dokážeme tak, že ak za x_1 vezmeme číslo $1 \in M$, potom pre každé $\varepsilon > 0$ platí $x_1 = 1 \geq 1 - \varepsilon$.
Podobne dokazujeme, že $\inf M = -\frac{1}{2}$:
1. $-\frac{1}{2} < x$, pre všetky $x \in M$ - vyplýva z nerovnosti (1.1).
2. Ak zvolíme $\varepsilon \geq \frac{1}{2}$, potom číslo $x_2 = 0$, tak platí$-\frac{1}{2} + \varepsilon \geq 0 = x_2$. Ak zvolíme $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, potom číslo $-\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = x_2$ je prvkom množiny M, pre ktorý platí $x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < -\frac{1}{2} + \varepsilon$. Z toho vyplýva že $\inf M = -\frac{1}{2}$. Číslo $-\frac{1}{2}$ nie je z množiny M, preto podľa vlastnosti 4 pre infimum množina M nemá

minimum. Číslo $1 = \sup M$ je z množiny M a preto podľa vlastnosti 4 je číslo $1 = \max M$. ♣

Príklad 2. Nájdime supremum, infimum, maximum a minimum množiny M, kde M je množina všetkých čísel tvaru $\frac{n+4}{n+5}$, kde n je prirodzené číslo.

Riešenie: Vypočítame niekoľko prvkov tejto množiny: $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}\ldots$ Z toho usudzujeme, že $\sup M = 1$ a $\inf M = \frac{5}{6}$. Dokážeme to.
Vlastnosť číslo 1 je skutočne splnená:
$\frac{n+4}{n+5} < 1$
Ukážeme druhú vlastnosť: Zvolíme $\varepsilon > 0$. Treba nájsť prvok x_1 z množiny M tak, aby platilo: $x_1 \geq 1 - \varepsilon$.
Keďže x_1 je prvok z M, musí byť tvaru $\frac{n_0+4}{n_0+5}$ pre nejaké $n_0 \in \mathbf{N}$. Potom musí platiť:

$$\frac{n_0 + 4}{n_0 + 5} \geq 1 - \varepsilon,$$

z čoho po úprave dostávame

$$n_0 \geq \frac{5(1-\varepsilon) - 4}{\varepsilon}$$

Z Archimedovej vlastnosti ale takéto n_0 vždy existuje pre ľubovoľné ε. Tým je dokázaná aj druhá vlastnosť suprema, a preto 1 je naozaj supremom množiny M.
Podobne dokážeme, že $\inf M = \frac{5}{6}$. Prvá vlastnosť: Z nerovnosti $n \geq 1$ vyplýva

$$6n - 5n \geq 25 - 24$$

$$6(n+4) \geq 5(n+5)$$

$$\frac{n+4}{n+5} \geq \frac{5}{6}$$

Druhá vlastnosť: Pre každé ε treba nájsť prvok $x_2 = \frac{n_1+4}{n_1+5}$, pre ktorý bude platiť: $\frac{n_1+4}{n_1+5} \leq \frac{5}{6} + \varepsilon$. Stačí ale zvoliť $n_1 = 1$ a potom nerovnosť $\frac{5}{6} \leq \frac{5}{6} + \varepsilon$ platí pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$. Preto $\inf M = \frac{5}{6}$.
Supremum množiny M nepatrí do M, preto množina nemá maximum. Infimum množiny M je prvkom tejto množiny, a preto $\min M = \frac{5}{6}$. ♣

Cvičenia

6. Znázornite nasledujúce intervaly na číselnej osi:
$\langle -1, 3)$; (π, ∞); $(\sqrt{5}, 10\rangle$; $(-\infty, -\frac{3}{2}\rangle$.

7. Nájdite prieniky a zjednotenia intervalov:

a) $\langle -1, 3), \langle 2, \infty)$;	b) $\langle -5, 3), (-7, 1\rangle, (-4, 2)$;
c) $(-123, 0\rangle, (-\sqrt{123}, -1\rangle$;	d) $(-\infty, 3\rangle, (-8, 15)$.

8. Znázornite na číselnej osi všetky $x \in \mathbf{R}$ pre ktoré platí:

a)$x < -4$	d) $x \leq 3$	g) $x \geq -2$
b) $0 \leq x \leq 3$	e) $-1 < x < 3$	h) $2 < x \leq 5$
c) $-\frac{7}{4} \leq x \leq -\frac{3}{4}$	f) $-3 \leq x < 2$	i) $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{3}{2}$.

9. Nájdite maximum, minimum, supremum a infimum (ak existujú) nasledujúcich množín
a) M_1 množina všetkých celých záporných čísel;
b) M_2 je interval $(0, 1)$;
c) M_3 je interval$\langle 0, 1\rangle$;
d) M_4 je množina všetkých racionálnych čísel z intervalu $\langle\sqrt{2}, \sqrt{3}\rangle$;
e) M_5 je interval $\langle -1, \infty)$.

10. Nájdite maximum, minimum, supremum a infimum množiny M, ktorej prvky sú čísla tvaru $1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}$, kde n je prirodzené číslo.

11. Nájdite maximum, minimum, supremum a infimum množiny M, ktorej prvky sú čísla tvaru $\frac{n+2}{n+1}$, kde n je prirodzené číslo.

12. Množina M sa skladá z čísel: $0,2; 0,22; 0,222; 0,2222; \ldots$. Nájdite jej supremum.

1.3 Zobrazenie čísel v počítači.

Realizácia technických výpočtov prebieha spravidla v obore reálnych čísel, ktoré, ako už vieme, predstavujú nekonečnú množinu. V súčasnosti si efektívnosť tejto práce nevieme bez výkonnej výpočtovej techniky ani predstaviť. V tejto súvislosti si ale treba uvedomiť, že množina čísel, s ktorými ľubovoľný počítač pracuje, môže byť síce veľká, ale vždy je konečná. Jej veľkosť určuje architektúra procesorovej jednotky počítača. V praktickej realizácii numerických výpočtov na počítači sa tento problém prejaví v konkrétnom softvérovom vybavení, na ktorom sa úloha realizuje. Môže to byť napríklad kompilátor nejakého programovacieho jazyka (C, Pascal, ...) alebo už hotový užívateľský softvér (DERIVE, MATHEMATICA, EXCEL, ...). Presnosť zobrazenia čísel je v takomto prípade daná výberom typu premennej (pri programovacích jazykoch) alebo sa dá vhodnou voľbou nastaviť na požadovaný počet desatinných miest. Akékoľvek zvyšovanie presnosti zobrazovania čísla je však obmedzené kapacitou pamäte počítača, pričom treba vziať do úvahy aj prácnosť a efektívnosť výpočtu. Každý kompilátor programovacieho jazyka má ošetrenú hornú a dolnú hranicu množiny celých čísel, s ktorými je schopný pracovať. Táto množina je spravidla dosť veľká, aby postačovala na bežné technické výpočty, ale napriek tomu je vždy ohraničená. Pokiaľ sa číslo mimo tejto množiny vyskytne vo výpočtoch, hovoríme o pretečení alebo podtečení.
Množinu všetkých čísel, ktoré sa dajú zobraziť v počítači, označíme M. Dôležitou vlastnosťou množiny M je, že táto množina nie je uzavretá vzhľadom na aritmetické operácie, to znamená, že výsledok nejakej operácie s číslami tejto množiny nemusí byť číslo z množiny M. Nech γ je zobrazenie množiny reálnych čísel do množiny M. Symbolom $\oplus$ označíme aritmetickú operáciu prevádzanú na počítači a symbolom $+$ aritmetickú operáciu nad reálnymi číslami. Dá sa overiť, že pre väčšinu počítačov platí vzťah

$$x \oplus y = \gamma(x + y), \text{ pre } x, y \in M.$$

Pre aritmetické operácie v množine M vo všeobecnosti neplatí asociatívny a distributívny zákon. Jedným z dôsledkov neplatnosti týchto zákonov je fakt, že matematicky úplne ekvivalentné algoritmy môžu pri realizácii na počítači dávať rozdielne výsledky.

Príklad 3. Úlohou je stanoviť výpočtom na počítači súčet

$$\sum_{n=1}^{10000} \frac{1}{n^2} \quad (\approx 1,644834).$$

Pri sčítaní čísel v prirodzenom poradí $((1+\frac{1}{4})+\frac{1}{9})+\ldots$, dostaneme výsledok s chybou
väčšou, ako keď ich sčítame v opačnom poradí
$((\frac{1}{10000^2}+\frac{1}{9999^2})+\frac{1}{9998^2})+\ldots$
pri tej istej presnosti zobrazenia čísel v počítači.
V prvom prípade sa totiž od určitého n súčet už nemení. ♣

Všeobecne pri sčítaní podobných súčtov, kde sa absolútna hodnota sčítancov líši o niekoľko rádov, platí, že pre dosiahnutie vyššej presnosti musíme sčitovať od členov s najmenšou absolútnou hodnotou k členom s najvyššou absolútnou hodnotou. V praxi však tento efekt nemusí mať vždy rozhodujúci význam.

1.4 Zdroje chýb

Reálny technický problém môžeme vyriešiť napríklad experimentálne (meraním) alebo pomocou matematických prostriedkov. Pri matematickom riešení problému je na začiatku nutné najskôr sformulovať matematický model daného problému, teda **matematickú úlohu**. Pod touto úlohou rozumieme jednoznačný a zrozumiteľný funkčný vzťah medzi danými a hľadanými objektami. Pri vytváraní matematického modelu reálneho problému musíme vždy prikročiť k určitej idealizácii skutočnosti. Rozdiel riešenia idealizovaného problému a riešenia skutočného reálneho problému nazývame **chybou matematického modelu**. Z veľkosti tejto chyby môžeme spätne posúdiť vhodnosť alebo nevhodnosť zvoleného matematického modelu.
Postup na získanie riešenia matematickej úlohy môže byť tiež rôzny. V tejto súvislosti hovoríme o **exaktných, približných a numerických metódach**. Numerik — optimista si zvyčajne kladie otázku, aké presné sú vypočítané výsledky, kým numerik — pesimista sa spytuje, akej chyby sme sa dopustili. Tieto dve otázky sú, samozrejme, o tom istom, pretože skutočne len veľmi zriedkavo dosiahneme presné riešenie s presnými dátami. Ak na riešenie matematickej úlohy použijeme metódu, ktorá nám neposkytne presné riešenie, potom chybu, ktorej sa dopustíme voláme **chybou metódy.** Príkladom takejto chyby môže byť chyba, ktorej sa dopustíme, ak za limitu nekonečnej postupnosti vezmeme niektorý jej člen s dostatočne veľkým indexom. Pomocou numerických metód sa daná matematická úloha prevedie na úlohu jednoduchšiu. **Numerická úloha** je jasný a zrozumiteľný popis funkčného vzťahu medzi **konečným** počtom **vstupných** a **výstupných** dát. Numerická úloha je teda taký matematický model reálneho problému, ktorý môže byť zrealizovaný na počítači. Rozdiel riešenia matematickej a numerickej úlohy nazývame **chybou aproximácie**. Ide tiež o prípad chyby metódy. Príkladom takýchto chýb sú:

- Výpočet elementárnej funkcie (napr. $\sin(x)$) z prvých n členov jej nekonečného Taylorovho radu.
- Aproximácia výpočtu určitého integrálu funkcie súčtom konečného počtu hodnôt (napr. lichobežníkové pravidlo).
- Riešenie diferenciálnej rovnice tým, že derivácie nahradíme ich aproximáciami (napr. diferenčnými podielmi).

K posúdeniu presnosti výsledkov musíme ešte vziať do úvahy **chyby vo vstupných dátach**, ktoré sú dané jednak chybami merania dát a jednak sú spôsobené zobrazením vstupných údajov do množiny počítača. Príkladom takýchto chýb môžu byť napríklad nepresnosti v zadávaní fyzikálnych konštánt (tie sú ale spravidla zanedbateľné) alebo chyby v empirických hodnotách, ktoré môžu byť zdrojom vážnych chýb a treba ich starostlivo preskúmať. Keďže tieto empirické chyby bývajú obvykle náhodné,

ich analytické vyšetrenie býva väčšinou dosť obtiažne.
Nakoniec sú to **chyby zaokrúhľovacie**, kde zahrňujeme všetky nepresnosti spôsobené realizáciou algoritmu v počítači, vrátane nepresného vykonávania aritmetických operácií. Podobne ako empirické chyby vo vstupných údajoch, aj zaokrúhľovacia chyba má náhodný charakter, a preto nie je ľahké ju vyšetriť.
Vo výpočtoch pri hľadaní riešenia sme často nútení nahradiť číslo x

jeho približnou hodnotou $\bar{x}$. Číslo $\bar{x}$ potom nazývame **aproximáciou čísla** x a platí:

Presné číslo = aproximácia + chyba

Príklad 4.

$$\sqrt{2} = 1,414214 + \text{ chyba}$$

$$\pi = 3,1415926536 + \text{ chyba}$$

♣

Tento rozdiel $x - \bar{x} = \Delta x$ nazývame **absolútnou chybou aproximácie** $\bar{x}$. Číslo $\varepsilon(\bar{x}) \geq 0$, pre ktoré platí

$$|x - \bar{x}| \leq \varepsilon(\bar{x}),$$

nazývame **odhadom absolútnej chyby**.
Presné číslo x sa nachádza v intervale

$$\bar{x} - \varepsilon(\bar{x}) \leq x \leq \bar{x} + \varepsilon(\bar{x}).$$

Číslo

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{x - \bar{x}}{x}, \quad x \neq 0,$$

nazývame **relatívnou chybou aproximácie** $\bar{x}$. Relatívna chyba sa často uvádza v percentách. V praxi, najmä ak je presná hodnota neznáma, často namiesto nej v podiele používame jej aproximáciu

$$\frac{\Delta x}{\bar{x}} = \frac{x - \bar{x}}{\bar{x}}, \quad \bar{x} \neq 0. \tag{1.2}$$

Príklad 5. Bežná aproximácia $\sqrt{2}$ je číslo $1,414$. Potom relatívna chyba je

$$\frac{0,002}{1,414} = 0,00014.$$

♣

Číslo $\delta(\bar{x})$, pre ktoré platí

$$\left|\frac{x - \bar{x}}{x}\right| \leq \frac{\varepsilon(\bar{x})}{|x|} = \delta(\bar{x}),$$

nazývame **odhadom relatívnej chyby**.
Vzhľadom na vzťah (1.2) platí nasledujúci odhad:

$$\bar{x}(1 - \delta(\bar{x})) \leq x \leq \bar{x}(1 + \delta(\bar{x}))$$

Príklad 6. Pre $x = \pi = 3,14159\ldots$, $\bar{x} = 3,14$ je $\Delta x = 0,00159\ldots$, $\varepsilon(\bar{x}) = 2.10^{-3}$. Ďalej

$$\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{\Delta x}{\bar{x}} \approx 0,0506\%.$$

♣

Príklad 7. Uhol nameraný s pomocou teodolitu je v rozpätí $22°20'30" \pm 30"$. Aká je relatívna chyba merania?

Riešenie:

$$\frac{\Delta x}{\bar{x}} = \frac{30"}{22°20'30"} \cdot 100\% = 0,004\%$$

♣

Príklad 8. Obsah štvorca je $25,16\ cm^2$ s presnosťou do $0,01\ cm^2$. S akou relatívnou chybou môžeme určiť stranu štvorca?

Riešenie: Hľadaná strana je $x = \sqrt{25,16}$. Relatívna chyba strany štvorca je

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\sqrt{25,16 + 0,01} - \sqrt{25,16}}{\sqrt{25,16}} \cong \frac{1}{2}\frac{0,01}{25,16} = 0,0002.$$

♣

Veta 1.3 *Nech sú čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aproximáciami čísel $X_1, X_2, \ldots, X_n$ a také, že pre každú aproximáciu najväčšia možná chyba je E. Potom najväčšia možná chyba pre sumu $x_i, i = 1, \ldots, n$ je $n.E$.*

1.5 Chyby aritmetických operácií.

Budeme predpokladať, že vykonávame presné aritmetické operácie s nepresnými číslami, teda s aproximáciami. Ďalej budeme predpokladať, že poznáme chyby, resp. odhady chýb týchto aproximácií. Budeme vyšetrovať, s akou presnosťou sa dá stanoviť výsledok, teda aká je jeho chyba, resp. jej odhad. Nech

$$x_i = \bar{x}_i + \Delta x_i, \quad |\Delta x_i| \le \varepsilon_i, \quad \left|\frac{\Delta x_i}{x_i}\right| \le \delta_i, \quad i = 1, 2,$$

kde ε_i resp. δ_i je odhad absolútnej, resp. relatívnej aproximácie $\bar{x}_i$.

- Ak je $\bar{u} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$ *aproximácia súčtu* $u = x_1 + x_2$, potom

  $$u = \bar{x}_1 + \Delta x_1 + \bar{x}_2 + \Delta x_2 = \bar{u} + \Delta u,$$

  kde

  $$\Delta u = \Delta x_1 + \Delta x_2,$$

  a platí

  $$|\Delta u| \le |\Delta x_1| + |\Delta x_2| \le \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

- Ak je $\bar{v} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ *aproximácia rozdielu* $v = x_1 - x_2$, potom
$$\Delta v = \Delta x_1 - \Delta x_2,$$
a platí
$$|\Delta v| \leq |\Delta x_1| + |\Delta x_2| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

- Ak je $\bar{w} = \bar{x}_1\bar{x}_2$ *aproximácia súčinu* $w = x_1x_2$, potom
$$w = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\Delta x_2 + \bar{x}_2\Delta x_1 + \Delta x_1\Delta x_2 = \bar{w} + \Delta w,$$
položíme
$$\Delta w \approx \bar{x}_1\Delta x_2 + \bar{x}_2\Delta x_1,$$
(člen $\Delta x_1\Delta x_2$ neuvažujeme), potom platí
$$|\Delta w| \leq |\bar{x}_1|\varepsilon_1 + |\bar{x}_2|\varepsilon_2.$$

- Ak je $\bar{z} = \bar{x}_1/\bar{x}_2$ *aproximácia podielu* $z = x_1/x_2$, potom
$$z = \frac{\bar{x}_1 + \Delta x_1}{\bar{x}_2 + \Delta x_2} = \bar{z} + \Delta z,$$
kde
$$\Delta z = \frac{\bar{x}_2\Delta x_1 - \bar{x}_1\Delta x_2}{\bar{x}_2(\bar{x}_2 + \Delta x_2)} \approx \frac{\bar{x}_2\Delta x_1 - \bar{x}_1\Delta x_2}{\bar{x}_2^2},$$
a platí
$$|\Delta z| \leq \frac{|\bar{x}_2|\varepsilon_1 + |\bar{x}_1|\varepsilon_2}{|\bar{x}_2|^2}.$$

Pre relatívne chyby môžeme z vyššie uvedených vzťahov odvodiť

- $$\frac{\Delta u}{u} \approx \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}\frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}\frac{\Delta x_2}{x_2},$$
$$|\frac{\Delta u}{u}| \leq \frac{1}{|\bar{x}_1 + \bar{x}_2|}(|\bar{x}_1|\delta_1 + |\bar{x}_2|\delta_2).$$

- $$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}\frac{\Delta x_1}{x_1} - \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}\frac{\Delta x_2}{x_2},$$
$$|\frac{\Delta v}{v}| \leq \frac{1}{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}(|\bar{x}_1|\delta_1 + |\bar{x}_2|\delta_2).$$
Upozorňujeme tu na fakt, že pri odčítaní blízkych čísel má na veľkosť relatívnej chyby rozdielu rozhodujúci význam číslo $\frac{1}{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}$.

- $$\frac{\Delta w}{w} \approx \frac{\bar{x}_1\Delta x_2 + \bar{x}_2\Delta x_1}{\bar{x}_1\bar{x}_2} = \frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2} + \frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1},$$
$$|\frac{\Delta w}{w}| \leq \delta_1 + \delta_2.$$

- $$\frac{\Delta z}{z} \approx \frac{\Delta x_1}{\bar{x}_1} - \frac{\Delta x_2}{\bar{x}_2},$$

$$|\frac{\Delta z}{z}| \leq \delta_1 + \delta_2.$$

Nech je x reálne číslo, ktoré má nekonečné dekadické vyjadrenie. Hovoríme, že číslo $x^{(d)}$, ktoré má d desatinných miest, je správne zaokrúhlenou hodnotou čísla x, ak je zaokrúhľovacia chyba ε taká, že

$$|\varepsilon| = |x - x^{(d)}| \leq \frac{1}{2}.10^{-d}$$

Príklad 9. Nech $x = 6,7439966\ldots$, potom je $x^{(3)} = 6,744$ a $x^{(7)} = 6,7439967$. ♣

Ak je $\bar{x}$ ľubovoľná aproximácie presnej hodnoty x, potom hovoríme, že k-te desatinné číslo je *platné*, ak platí:

$$|x - \bar{x}| \leq \frac{1}{2}.10^{-k}.$$

Pri správne zaokrúhlenom čísle je teda každé miesto platné.

Príklad 10. Nech je číslo $0,1492$ správne na štyri desatinné čísla. Inými slovami, to znamená, že ide o aproximáciu skutočnej hodnoty, ktorá leží niekde v intervale medzi $0,14915$ a $0,14925$. V takomto prípade aproximácia má štyri platné číslice. Podobne číslo $14,92$ má dve platné desatinné miesta a štyri platné číslice, za predpokladu, že jeho chyba neprevýši $0,005$. ♣

Príklad 11. Ak je $x = \pi, \bar{x} = 0,31415.10^1$, potom

$$|\frac{x - \bar{x}}{x}| \leq 3.10^{-5} \leq 0,5.10^{-4},$$

$$|x - \bar{x}| \leq 10^{-4} \leq 0,5.10^{-3}.$$

V tomto prípade má $\bar{x}$ len štyri platné číslice a aproximácia $3,1415$ má tri platné desatinné miesta. ♣

Ak je počet platných číslic $n > 1$, potom za limitnú relatívnu chybu aproximácie $\bar{x}$ s prvou platnou cifrou k možno vziať číslo

$$\delta = \frac{1}{2k}(\frac{1}{10})^{n-1}.$$

Ak pre odhad relatívnej chyby δ platí

$$\delta \leq \frac{1}{2(k+1)}(\frac{1}{10})^{n-1},$$

potom číslo $\bar{x}$ má n platných číslic. Na uvedenom príklade vidíme súvislosť medzi počtom platných číslic a relatívnou chybou aproximácie: zväčšovanie chyby sa prejaví stratou platných číslic a obrátene. Preto sa vo výpočtoch vyhýbame rozdielom blízkych čísel, pri ktorých práve ku tejto strate platných čísel dochádza.

Príklad 12. Koľko platných číslic má číslo $A = 3,7563$ ak relatívna chyba je 1%?

Riešenie: Prvá platná číslica je 3 a keďže relatívna chyba je $0,01$, potom platí

$$0,01 \leq \frac{1}{2.4}(\frac{1}{10})^{n-1},$$

odkiaľ $n = 2$. Preto číslo A má dve platné číslice. A môžeme zapísať v tvare $A = 3,8$. ♣

Príklad 13. Nech

$$x_1 = 0,5010278, \quad \bar{x}_1 = 0,5010,$$
$$x_2 = 0,5007812, \quad \bar{x}_2 = 0,5008,$$

potom

$$|\Delta x_1| = 0,278.10^{-4} \leq 0,5.10^{-4},$$
$$|\frac{\Delta x_1}{x_1}| \leq 0,5.10^{-3},$$
$$|\Delta x_2| = 0,188.10^{-4} \leq 0,5.10^{-4},$$
$$|\frac{\Delta x_2}{x_2}| \leq 0,5.10^{-4}.$$

Vypočítame rozdiel uvedených čísel:

$$v = x_1 - x_2 = 0,2466.10^{-3}, \; \bar{v} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0,2.10^{-3},$$
$$|\Delta v| \leq 0,5.10^{-4}.$$
$$|\frac{\Delta v}{v}| \leq 1,9.10^{-1}.$$

Výstupná relatívna chyba je teda v porovnaní s relatívnymi chybami vstupných údajov omnoho väčšia. ♣

Príklad 14. Je daná kvadratická rovnica

$$x^2 - 56x + 1 = 0$$

s koreňmi $x_1 = 28 + \sqrt{783}$ a $x_2 = 28 - \sqrt{783}$. Ak vypočítame $\sqrt{783}$ na päť platných číslic (t.j. s chybou menšou ako $0,5.10^{-3}$ $\sqrt{783} = 27,982$), máme: $x_1 = 55,982$, $x_2 = 0,018$. Absolútna chyba koreňov nie je väčšia ako $0,0005$. Ale pre relatívnu chybu platí:

$$|\frac{\Delta x_1}{x_1}| \leq 0,5.10^{-5}; \quad |\frac{\Delta x_2}{x_2}| \leq 0,8.10^{-2}.$$

Koreň x_1 je určený na päť platných číslic a koreň x_2 len na dve platné číslice. Ak chceme aj druhý koreň vypočítať presnejšie, máme dve možnosti:

- vypočítať $\sqrt{783}$ na desať platných číslic, čo je náročnejšie na pamäť počítača aj na čas.
- Koreň x_2 vypočítať iným algoritmom, čo predpokladá, že taký algoritmus poznáme; napríklad z vlastnosti koreňov pre túto rovnicu

  totiž platí:

  $x_1 \cdot x_2 = 1$. Preto:

$$x_2 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{55,982} = 0,01786288.$$

♣

Cvičenia

13. Vypočítajte plochu obdĺžnika so stranami $92,73 \pm 0,01$ metrov a $94,5 \pm 0,01$ metrov. Vypočítajte relatívnu chybu výsledku a počet platných číslic.

14. Nájdite odhad relatívnej chyby výpočtu povrchu zrezaného kužeľa, ak jeho polomery majú veľkosť $R = 23,64 \pm 0,01$cm, $r = 17,31 \pm 0,01$cm, jeho výška je $l = 10,21 \pm 0,01$cm a $\pi = 3,14$.

1.6 Úlohy a algoritmy

Medzi matematickými a aj numerickými úlohami sa stretávame aj s takými, ktorých riešenia sú veľmi citlivé na zmeny vo vstupných údajoch. Znamená to, že aj malé zmeny vo vstupných údajoch spôsobia veľké zmeny v riešeniach. Je preto užitočné rozdeliť matematické úlohy z hľadiska tejto "citlivosti" na dve skupiny.
Úloha, ktorá má nasledujúce vlastnosti

1. má jediné riešenie
2. toto riešenie spojite závisí na vstupných údajoch,

sa nazýva **korektná úloha**.
Tento pojem sme z matematického hľadiska nedefinovali veľmi presne, pretože nie je povedané, čo je to "spojite závisí". Na exaktné vysvetlenie tohoto pojmu by boli potrebné aspoň minimálne znalosti z teórie funkcionálnych priestorov a tie presahujú obsah tejto publikácie. Voľne povedané, ak množinu vstupných údajov vyberáme z nejakého okolia "skutočných" vstupov (dopustíme sa napríklad chyby pri meraní), potom množina výstupných údajov bude z nejakého okolia "skutočného" riešenia úlohy. Toto okolie však môže byť dosť "veľké".
Veľkú triedu nekorektných úloh tvoria nejednoznačné úlohy. Nekorektnosť úlohy býva často zapríčinená aj jej nekorektnou formuláciou.
Zaujíma nás teraz "veľkosť" okolia výstupných údajov z druhej vlastnosti.
Hovoríme, že úloha je **dobre podmienená**, ak malé zmeny vo vstupných údajoch vyvolajú len malé zmeny vo výstupných údajoch (riešení). Ak máme dvojicu vstupných dát x a $x+\triangle x$ a im odpovedajúce výstupné dáta sú y a $y+\triangle y$, potom číslo

$$C_p = \frac{\frac{||\triangle y||}{||y||}}{\frac{||\triangle x||}{||x||}}$$

nazývame **číslo podmienenosti úlohy**. V tomto vzťahu výraz $||.||$ znamená normu v nejakom vhodnom priestore. Napríklad, ak je vstup aj výstup reálne číslo, je to absolútna hodnota tohoto čísla, v prípade, že ide o vektory, jedná sa o normu príslušných vektorov (pojem absolútna hodnota pozri časť 1.8).
V praxi väčšinou nevieme stanoviť presne toto číslo, iba jeho odhad. Ak je odhad čísla $C_p \approx 1$, hovoríme o (veľmi) **dobre podmienených** úlohách. Pre veľké hodnoty C_p hovoríme o **zle podmienených** úlohách.
Povieme si teraz niečo o postupoch, ktorými úlohy riešime. **Algoritmom numerickej metódy** rozumieme jasný a jednoznačný popis konečnej postupnosti operácií, pomocou ktorých m-tici čísel z určitej množiny **vstupných dát** jednoznačne priradí n-ticu **výstupných dát** (výsledkov). Operáciami rozumieme aritmetické a logické operácie, ktoré môže vykonávať počítač.

Pri realizácii konkrétneho numerického algoritmu na počítači sa dopúšťame chýb v aritmetických operáciách. Tieto chyby sa objavia vždy, aj keby boli vstupné údaje presné. Preto vzniká problém, ako posúdiť citlivosť každého konkrétneho algoritmu na zaokrúhľovacie chyby včítane chýb vo vstupných údajoch. Ak sa chceme vyvarovať nezmyselných výsledkov, musíme si vyberať algoritmy málo citlivé na tieto chyby. Takéto algoritmy budeme nazývať **stabilné**.

Medzi známymi numerickými algoritmami významnú úlohu majú tzv. **iteračné procesy**. Používame ich spravidla vtedy, keď potrebujeme stanoviť limitnú hodnotu vhodne zvolenej postupnosti medzivýsledkov. Spravidla ich popisuje **iteračná formula**, t.j. pravidlo, ako pomocou jedného (1-krokový iteračný proces) alebo viacerých (viackrokový iteračný proces) predchádzajúcich medzivýsledkov možno vypočítať nasledujúci medzivýsledok. Jednokrokový iteračný proces môžeme zapísať formulou typu

$$x_n = F(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

K zahájeniu tohoto iteračného procesu potrebujeme poznať len jednu hodnotu (napríklad x_0) a postupne vypočítame

$$x_1 = F(x_0),\ x_2 = F(x_1), \ldots, x_k = F(x_{k-1}), \ldots.$$

Členy postupnosti $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ nazývame **iteráciami** alebo **postupnými aproximáciami**. Pretože žiadny algoritmus nemôže obsahovať nekonečne veľa krokov, musíme proces určený iteračnou formulou pre nejaké $n = N$ ukončiť. Potom x_N bude len **približnou hodnotou** (**aproximáciou**). Číslo N spravidla nevyberáme dopredu, ale určujeme takzvanú **zastavovaciu podmienku**. Táto podmienka obyčajne znie: Pokračuj vo výpočte podľa iteračnej formuly, pokiaľ bude

$$|x_k - x_{k-1}| \geq \delta,$$

kde δ je nejaké vopred zvolené (malé) číslo.
Ak sa dá iteračný proces zapísať iteračnou formulou typu

$$x_{n+p} = F(x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+p-1}),\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

hovoríme o **p-krokovom iteračnom procese**. K zahájeniu výpočtu potrebujem poznať p hodnôt, napríklad $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$.

1.7 Nerovnice

Pre prácu s nerovnosťami a nerovnicami platia tieto základné vlastnosti:

1. Ak $a < b$ a $b < c$, potom $a < c$ (**tranzitívnosť**).
2. Ak $a < b$ a c je ľubovoľné, potom $a + c < b + c$.
3. Ak $a < b$ a $c < d$, potom $a + c < b + d$.
4. Ak $a < b$ a $m > 0$, potom $am < bm$; ak $a < b$ a $m < 0$, potom $am > bm$.
5. Ak $a < b$ a $c < d$, kde a, b, c, d sú kladné čísla, potom $ac < bd$.
6. Ak $0 < ab$, potom je $0 < a, 0 < b$, alebo $a < 0, b < 0$.
7. Ak $ab < 0$, potom je $0 < a, b < 0$, alebo $a < 0, 0 < b$.

8. Ak $0 < b,\ -b < a < b$, potom je $a^2 < b^2$. Ak $0 < b, a^2 < b^2$, je $-b < a < b$.

9. Ak je $0 < a$ a $a^2 < b^2$, potom platí: alebo $0 < a < b$ alebo $b < -a < 0$.

Tieto vlastnosti ostanú v platnosti aj keď znak $<$ nahradíme znakom $\leq$.
Lineárna nerovnica s jednou neznámou x má tvar:

$$ax + b\ N\ 0, \tag{1.3}$$

kde $a \neq 0, b$ sú reálne čísla a N je niektorý zo znakov $<, >, \leq, \geq, \neq$.
Kvadratická nerovnica s jednou neznámou je nerovnica tvaru:

$$ax^2 + bx + c\ N\ 0 \tag{1.4}$$

kde $a \neq 0$ a N je opäť niektorý zo znakov $<, >, \leq, \geq, \neq$.
Riešením nerovnice (1.3) alebo (1.4) nazývame množinu všetkých čísel, ktoré keď dosadíme do nerovnice namiesto neznámej x dostaneme pravdivú nerovnosť medzi číslami.
Systém lineárnych nerovníc s jednou neznámou má tvar

$$\begin{aligned} a_1x + b_1\ &N\ 0 \\ a_2x + b_2\ &N\ 0 \\ &\vdots \\ a_nx + b_n\ &N\ 0, \end{aligned} \tag{1.5}$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú rôzne od nuly.
Nech riešenia jednotlivých nerovníc systému (1.5) sú $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Potom riešenie systému (1.5) je $M = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_n$.
Ekvivalentnými nerovnicami nazývame také nerovnice, ktorých množiny riešení sú rovnaké množiny. Úpravy, pomocou ktorých z danej nerovnice dostaneme ekvivalentnú, nazývame *ekvivalentnými úpravami.*
Pri riešení nerovníc používame vlastnosti 1.–9. a to tak, že z danej nerovnice dostávame ekvivalentné nerovnice, ktoré už vieme riešiť.
Kvadratickú nerovnicu (1.4) možno riešiť úpravou na tvar

$$(x + \frac{b}{2a})^2\ N\ \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \tag{1.6}$$

Pri riešení tejto nerovnice môžu nastať tieto tri prípady:

1. $D = b^2 - 4ac > 0$, nerovnicu (1.6) môžeme riešiť napríklad úpravou na tvar

   $$a(x - \alpha)(x - \beta)\ N\ 0,$$

   kde α, β sú korene rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Nerovnicu riešime ďalej podľa vlastností 5. a 6.

2. $D = b^2 - 4ac = 0$. Potom nerovnica (1.6) nemá riešenie, ak N značí $<$; nerovnica (1.6) má riešenie $(-\infty, \infty)$, ak N značí $\geq$; nerovnica (1.6) má riešenie $x = -\frac{b}{2a}$, ak N značí $\leq$; nerovnica (1.6) má riešenie všetky reálne čísla okrem čísla $-\frac{b}{2a}$, ak N značí $\neq$ alebo $>$.

3. $D = b^2 - 4ac < 0$. Potom nerovnica (1.6) nemá riešenie, ak N značí $<$ alebo $\leq$; nerovnica (1.6) má riešenie $(-\infty, \infty)$, ak N značí $>, \geq$ alebo $\neq$.

Príklad 15. Riešme nerovnicu:

$$\frac{3-x}{5} < \frac{2x-8}{3} - \frac{3x-1}{2}$$

Riešenie: Podľa vlastnosti 4. dostaneme po vynásobení oboch strán nerovnice číslom 30 ekvivalentnú nerovnicu:

$$18 - 6x < 20x - 80 - 45x + 15,$$

odkiaľ

$$18 - 6x < -25x - 65.$$

K obom stranám nerovnice pripočítame výraz $25x - 18$ a podľa vlastnosti 2. dostaneme

$$19x < -83.$$

Vynásobením tejto nerovnice číslom $\frac{1}{19}$ dostaneme

$$x < -\frac{83}{19}.$$

Riešením tejto nerovnice sú čísla z intervalu $(-\infty, -\frac{83}{19})$. Pri riešení sme robili len ekvivalentné úpravy, preto nájdené riešenie je aj riešením pôvodnej nerovnice. ♣

Príklad 16. Riešme nerovnicu:

$$x^2 - 5x + 6 < 0.$$

Riešenie: Pretože $D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 = 1 > 0$, danú nerovnicu riešime tak, že trojčlen $x^2 - 5x + 6$ rozložíme na súčin koreňových činiteľov. Korene kvadratickej rovnice $x^2 - 5x + 6 = 0$ sú čísla 2 a 3. Preto platí $x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$. Dostávame

$$(x-3)(x-2) < 0.$$

Táto nerovnica je podľa vlastnosti 7. ekvivalentná s jedným z nasledujúcich dvoch systémov

$$x - 3 > 0, \quad x - 2 < 0 \tag{1.7}$$

alebo

$$x - 3 < 0, \quad x - 2 > 0 \tag{1.8}$$

Riešením systému (1.7) je prienik $(-\infty, 2) \cap (3, \infty) = \emptyset$. Riešením systému (1.8) je prienik $(-\infty, 3) \cap (2, \infty) = (2, 3)$. Riešením pôvodnej nerovnice preto je $\emptyset \cup (2, 3) = (2, 3)$. ♣

Cvičenia

15. Riešte nerovnice:

a) $\frac{12-x}{x-4} > 0$; d) $\frac{x+1}{x+3} < \frac{x+5}{x+6}$;
b) $\frac{5-2x}{x-7} \geq 3$; e) $\frac{x(x+1)}{(x-1)(x-2)} \geq 0$;
c) $\frac{(x+2)(x-3)}{x(x-4)} \leq 0$ f) $\frac{x+1}{x-2{,}5} \leq 2$.

16. Riešte nerovnice:

a) $x^2 - 2x + 5 < 0$; d) $2x^2 - 2x < 0$;
b) $x^2 + 14x - 24 < 0$; e) $6x^2 + 13x + 6 < 0$;
c) $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$; f) $8x^2 - 23 \leq 0$.

1.8 Absolútna hodnota reálneho čísla

Nech $a \in \mathbf{R}$. **Absolútnu hodnotu** čísla a označujeme $|a|$ a rozumieme ňou číslo

$$|a| = a, \text{ ak } a \geq 0;$$

$$|a| = -a, \text{ ak } a < 0.$$

Nech a, b sú reálne čísla. Potom platí:

1. $|a| = \max\{a, -a\}$
2. $|a| = |-a|$
3. $a \leq |a|$
4. $|a| = \sqrt{a^2}$
5. $|ab| = |a||b|$
6. $|a^n| = |a|^n$, pre každé prirodzené číslo n
7. $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$
8. $|a+b| \leq |a| + |b|$ (trojuholníková nerovnosť)
9. $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

Geometrický význam absolútnej hodnoty reálneho čísla a je vzdialenosť obrazu čísla a na číselnej osi od začiatku. Vzdialenosť bodu a od bodu b na číselnej osi je preto $|b - a|$.

Príklad 17. Riešme rovnicu:

$$|x + 3| = \frac{1}{5}.$$

Riešenie: Najskôr rovnicu upravíme tak, aby neobsahovala absolútnu hodnotu. Uvažujeme dva prípady:
a) $x + 3 \geq 0$, potom $|x + 3| = x + 3$ a daná rovnica je ekvivalentná so systémom

$$x + 3 \geq 0 \tag{1.9}$$
$$x + 3 = \frac{1}{5}. \tag{1.10}$$

Riešením nerovnice (1.9) je interval $\langle -3, \infty)$. Riešením rovnice (1.10) je číslo $x = -\frac{14}{5}$. Preto riešením systému (1.9), (1.10) je prienik týchto množín: $\langle -3, \infty) \cap \{-\frac{14}{5}\} = \{-\frac{14}{5}\}$.
b) $x + 3 < 0$, potom $|x + 3| = -(x + 3)$ a daná rovnica je ekvivalentná so systémom

$$x + 3 < 0 \tag{1.11}$$
$$-(x + 3) = \frac{1}{5}. \tag{1.12}$$

Riešením nerovnice (1.11) je interval $(-\infty, -3)$. Riešením rovnice (1.12) je číslo $x = -\frac{16}{5}$. Preto riešením systému (1.11), (1.12) je prienik týchto množín: $(-\infty, -3) \cap \{-\frac{16}{5}\} = \{-\frac{16}{5}\}$.
Riešením danej rovnice sú teda čísla $-\frac{14}{5}, -\frac{16}{5}$. ♣

Príklad 18. Riešme nerovnicu:

$$|x+1| < |x+3| \tag{1.13}$$

Riešenie: Keďže množina všetkých riešení je podmnožinou reálnych čísel, budeme uvažovať všetky možné prípady, ktoré môžu nastať. Sú to tieto štyri:

$$\text{a) } x+1 \geq 0 \text{ a } x+3 \geq 0,$$
$$\text{b) } x+1 < 0 \text{ a } x+3 < 0,$$
$$\text{c) } x+1 \geq 0 \text{ a } x+3 < 0,$$
$$\text{d) } x+1 < 0 \text{ a } x+3 \geq 0.$$

pre prípad a) platí: $|x+1| = x+1,\ |x+3| = x+3$. Nerovnica (1.13) je ekvivalentná so systémom nerovníc

$$x+1 \geq 0$$
$$x+3 \geq 0$$
$$x+1 < x+3.$$

Riešením tohoto systému sú všetky čísla x, pre ktoré platí súčasne $x \geq -1, x \geq -3$ (tretia nerovnica je splnená pre ľubovoľné reálne číslo). Riešením je teda prienik intervalov $\langle -1, \infty) \cap \langle -3, \infty) = \langle -1, \infty)$.
V prípade b) platí: $|x+1| = -(x+1),\ |x+3| = -(x+3)$. Nerovnica (1.13) je ekvivalentná so systémom nerovníc

$$x+1 < 0$$
$$x+3 < 0$$
$$-(x+1) < -(x+3).$$

čiže

$$x < -1,\ x < -3,\ -1 < -3.$$

Keďže riešením poslednej nerovnice je $\emptyset$, celý uvedený systém nemá riešenie.
V prípade c) platí: $|x+1| = x+1,\ |x+3| = -(x+3)$. Nerovnica (1.13) je ekvivalentná so systémom

$$x+1 \geq 0$$
$$x+3 < 0$$
$$x+1 < -(x+3).$$

Riešením tohoto systému sú všetky čísla x, pre ktoré platia súčasne všetky tri nerovnice: $x \geq -1,\ x < -3, x < -2$; to jest prienik intervalov $\langle -1, \infty) \cap (-\infty, -3) \cap (-\infty, -2) = \emptyset$. V tomto prípade teda systém nemá riešenie.
V prípade d) platí: $|x+1| = -(x+1),\ |x+3| = x+3$. Nerovnica (1.13) je ekvivalentná so systémom

$$x+1 < 0$$
$$x+3 \geq 0$$
$$-(x+1) < x+3.$$

Riešením tohoto systému sú všetky čísla x, pre ktoré súčasne platí: $x < -1,\ x \geq -3, x > -2$; to jest prienik intervalov $(-\infty, -1) \cap \langle -3, \infty) \cap (-2, \infty) = (-2, -1)$. Riešením nerovnice (1.13) je zjednotenie intervalov $\langle -1, \infty) \cup (-2, -1) = (-2, \infty)$. ♣

Cvičenia

17. Vypočítajte:
$|-5|,\ |24|,\ |\pi - 1|,\ |1 - 2\sqrt{2}|,\ |2 - \sqrt{4}|.$

18. Znázornite na číselnej osi množiny všetkých $x \in \mathbf{R}$ pre ktoré platí:

a) $\lvert x\rvert \le 4$	b) $\lvert x\rvert \ge 2$	c) $\lvert x-3\rvert < 2$
d) $\lvert x-5\rvert < 1$	e) $\lvert x+1\rvert \le 3$	f) $\lvert x+\frac{3}{2}\rvert \le \frac{1}{2}$
g) $\lvert x-5\rvert > 5$	h) $\lvert x+3\rvert < 3$	i) $\lvert x-1\rvert \le 0$

19. Ako možno inak napísať podmienky?

a) $-1 < x < 1$; b) $x < -1$ alebo $x > 1$?

20. Riešte nerovnice:
a) $|x+3| \le |x-5|$;
b) $|2x+1| > |x-3|$.

21. Riešte rovnice:

a) $x + |x+3| = 5$; c) $|2x-3| - x = 24$;
b) $x + |x-3| = 5$; d) $|5x+1| - 2x = -2$.

22. Ak platí: $y = \frac{1}{x}$ a $|x-4| < 2$, čo môžeme povedať o hodnotách y ?

23. Nájdite všetky čísla $x \in \mathbf{R}$, ktorých súčet vzdialeností od čísel -3 a 5 a) je menší ako 6; b) je väčší ako 6; c) je rovný 0.

Riešenia cvičení

2. iracionálne, racionálne, iracionálne, racionálne, racionálne, iracionálne, racionálne.
3. $\pi < \frac{355}{113} < \frac{22}{7}$;
$\frac{13}{15} < \sqrt{7} < \frac{16}{6}$;
$-1,44 < -\sqrt{2} < -1,41$;
$-2,34 < -\frac{7}{3} < -2,31$.
5. nie, nie, nie.
7. a) prienik $\langle 2,3)$, zjednotenie $\langle -1,\infty)$,
b) prienik $(-4,1\rangle$, zjednotenie $(-7,3)$,
c) prienik $(-\sqrt{123},-1\rangle$, zjednotenie $(-123,0\rangle$,
d) prienik $(-8,3\rangle$, zjednotenie $(-\infty,15)$.
9. $\max \mathrm{M}_1 = \sup \mathrm{M}_1 = -1$, infimum a minimum neexistujú.
$\sup \mathrm{M}_2 = 1$, $\inf \mathrm{M}_2 = 0$, maximum a minimum neexistujú.
$\max \mathrm{M}_3 = \sup \mathrm{M}_3 = 1$, $\inf \mathrm{M}_3 = \min \mathrm{M}_3 = 0$.
$\sup \mathrm{M}_4 = \sqrt{3}$, $\inf \mathrm{M}_4 = \sqrt{2}$, maximum a minimum neexistujú.
$\inf \mathrm{M}_5 = \min \mathrm{M}_5 = -1$, supremum a maximum neexistujú.
10. $\max \mathrm{M} = \sup \mathrm{M} = 2$, $\min \mathrm{M} = \inf \mathrm{M} = 0$.
11. $\max \mathrm{M} = \sup \mathrm{M} = \frac{3}{2}$, $\inf \mathrm{M} = 1$, minimum neexistuje.

12. $\sup \mathrm{M} = \frac{2}{9}$.
13. $\delta = 0,22\%$, $n = 4$, plocha $= 8763 \pm 2,0$.
14. $\delta = 0,16\%$.
15. a) $(4,12)$
b) $\langle \frac{26}{5}, 7)$
c) $\langle -2,0) \cup \langle 3,4)$
d) $(-9,-6) \cup (-3,\infty)$
e) $(-\infty,-1\rangle \cup \langle 0,1) \cup (2,\infty)$
f) $(-\infty; 2,5) \cup \langle 6,\infty)$
16. a) $\emptyset$
b) $(-\sqrt{73}-7, \sqrt{73}-7)$
c) $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle \cup \langle 2,\infty)$
d) $(0,1)$
e) $(-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3})$
f) $\langle -\frac{\sqrt{46}}{4}, \frac{\sqrt{46}}{4}\rangle$
17. $5,\ 24,\ \pi - 1,\ 2\sqrt{2}-1,\ 0$.
19. a) $|x| < 1$, b) $|x| > 1$.
20. a) $(-\infty, 1\rangle$
b) $(-\infty,-4) \cup (\frac{2}{3},\infty)$
21. a) 1, b) 4, c) 27 a -7, d) $\emptyset$.
22. $y \in (\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$.
23. a) $\emptyset$, b) $\mathbf{R}$, c) $\emptyset$.

Kapitola 2

Analytická geometria

2.1 Úvod

Analytická geometria je oblasť matematiky, v ktorej sa študujú geometrické útvary pomocou ich analytických vyjadrení. Pomocou zvolenej súradnicovej sústavy vieme každý základný geometrický útvar vyjadriť jednoznačne v tvare istej rovnice (prípadne nerovnice). Pritom vzťah medzi príslušným geometrickým útvarom a jeho rovnicou je daný nasledovným pravidlom:

(P) Ľubovoľný bod X leží v danom útvare práve vtedy, ak jeho súradnice spĺňajú rovnicu útvaru.

Na základe tohoto pravidla prienikom útvarov U_1 a U_2 je množina všetkých bodov, ktorých súradnice spĺňajú súčasne rovnice obidvoch týchto útvarov.

2.2 Základy teórie

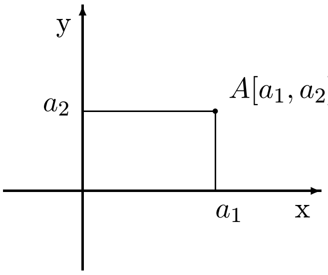
2.2.1 Súradnicová sústava

Karteziánska súradnicová sústava v rovine (v priestore) je sústava dvoch (troch) navzájom na seba kolmých priamok, ktoré voláme **osi** súradnicovej sústavy. Všetky osi súradnicovej sústavy majú spoločný jediný bod, ktorý voláme **začiatok súradnicovej sústavy** a označujeme ho znakom O. Naviac, na každej osi je určená rovnaká jednotka dĺžky. Karteziánska súradnicová sústava je prostriedok, pomocou ktorého každému bodu v rovine (v priestore) vieme jednoznačne priradiť usporiadanú dvojicu (trojicu) reálnych čísel, ktoré voláme súradnice daného bodu. Spôsob priradenia je znázornený na obr. 1 (obr. 2).

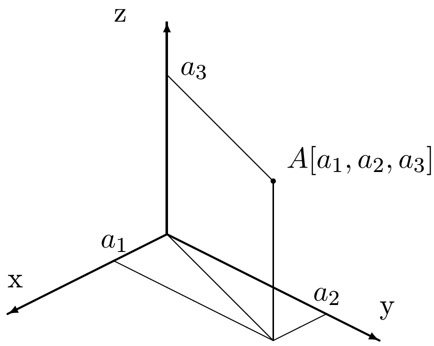
Fakt že bod A má súradnice a_1, a_2, a_3, budeme zapisovať $A[a_1, a_2, a_3]$ alebo $A = [a_1, a_2, a_3]$.

2.2.2 Vektory

Vektor je geometrický objekt, ktorý je určený dĺžkou, smerom a orientáciou. Môžeme si ho predstaviť ako orientovanú úsečku, t. j. úsečku, na ktorej je vyznačený začiatočný a koncový bod. Pritom nesmieme zabudnúť, že dve rôzne orientované úsečky, ktoré majú zhodnú dĺžku (t. j. veľkosť), smer aj orientáciu, predstavujú ten istý vektor, ide o dve rôzne umiestnenia toho istého vektora.



obr. 1



obr. 2

Súradnice vektora sú súradnice jeho koncového bodu v takom umiestnení vektora, keď začiatočný bod je zhodný so začiatkom súradnicovej sústavy. Fakt, že vektor $\boldsymbol{v}$ má súradnice v_1, v_2, v_3 [1] budeme zapisovať $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, v_3]$. Teda, ak $A = [a_1, a_2, a_3]$ a $B = [b_1, b_2, b_3]$, tak vektor so začiatočným bodom A a koncovým bodom B má súradnice $[b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3]$. Preto takýto vektor budeme označovať symbolom $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$. [2]
Polohovým vektorom bodu A rozumieme vektor $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{O}$.
Dĺžka vektora $\boldsymbol{v}$ je vzdialenosť jeho začiatočného a koncového bodu a označujeme ju $||\boldsymbol{v}||$. Platí

$$||\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}|| = d(A, B) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}. \tag{2.1}$$

Nulový vektor je (jediný) vektor, ktorého dĺžka je 0. Budeme ho označovať $\mathbf{0}$. Nulový vektor má všetky súradnice rovné 0.
Jednotkový vektor je každý vektor, ktorého dĺžka je rovná 1. Jednotkový vektor orientovaný v kladnom smere osi x označujeme $\boldsymbol{i}$, jednotkový vektor orientovaný v kladnom smere osi y označujeme $\boldsymbol{j}$, jednotkový vektor orientovaný v kladnom smere osi z označujeme $\boldsymbol{k}$. Vektory $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ tvoria **bázu** trojrozmerného priestoru.
V ďalšom texte predpokladajme, že $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, u_3]$ a $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, v_3]$.
Skalárny násobok vektora $\boldsymbol{v}$ číslom c je vektor $c \cdot \boldsymbol{v}$, pričom:

1. dĺžka vektora $c \cdot \boldsymbol{v}$ je $|c|$ násobkom dĺžky vektora $\boldsymbol{v}$
2. obidva vektory majú rovnaký smer
3.
   - ak $c > 0$, tak $\boldsymbol{v}$ a $c \cdot \boldsymbol{v}$ majú zhodnú orientáciu
   - ak $c < 0$, tak $\boldsymbol{v}$ a $c \cdot \boldsymbol{v}$ majú opačnú orientáciu
   - ak $c = 0$, tak $c \cdot \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.

Namiesto $c \cdot \boldsymbol{v}$ budeme niekedy písať kratšie $c\boldsymbol{v}$. V súradniciach:

$$c \cdot \boldsymbol{v} = [cv_1, cv_2, cv_3]$$

[1] Všetky vzťahy, týkajúce sa súradníc budeme uvádzať pre trojrozmerné vektory. V prípade dvojrozmerných vektorov všetky vzťahy platia s tým, že tretie súradnice zo vzťahu vynecháme alebo považujeme za rovné 0

[2] Niekedy sa stretávame aj s označením $\boldsymbol{AB}$

Vektor $(-1) \cdot \boldsymbol{v}$ voláme vektor opačný k vektoru $\boldsymbol{v}$ a označujeme $-\boldsymbol{v}$. V súradniciach:

$$-\boldsymbol{v} = [-v_1, -v_2, -v_3].$$

Platí: Dva nenulové vektory sú rovnobežné práve vtedy, ak jeden z nich je skalárnym násobkom druhého. Je to práve vtedy, ak podiely ich prvých, druhých aj tretích súradníc sú zhodné.

Príklad 1. Nech $A = [-3, 1, 7]$ a $B = [2, -5, 0]$. Určte dĺžku vektora $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ a súradnice jednotkového vektora rovnako orientovaného v jeho smere.

Riešenie: Najskôr určíme súradnice vektora $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = [2 - (-3), -5 - 1, 0 - 7] = [5, -6, -7].$$

Podľa vzťahu 2.1

$$||\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}|| = \sqrt{5^2 + (-6)^2 + (-7)^2} = \sqrt{25 + 36 + 49} = \sqrt{110}.$$

Označme $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, u_3]$ jednotkový vektor v smere vektora $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$. Keďže $\boldsymbol{u}$ je skalárnym násobkom vektora $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$, existuje také reálne číslo c, že platí

$$u_1 = 5c, \quad u_2 = -6c, \quad u_3 = -7c.$$

Naviac, vektor $\boldsymbol{u}$ má dĺžku 1 a preto platí

$$1 = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 25c^2 + 36c^2 + 49c^2 = 110c^2.$$

Teda

$$c^2 = \frac{1}{110}.$$

Posledná rovnica má práve dve riešenia $c = \pm\frac{1}{\sqrt{110}}$. Hľadaný vektor dostaneme pre hodnotu $c = \frac{1}{\sqrt{110}}$:

$$\boldsymbol{u} = [\frac{5}{\sqrt{110}}, \frac{-6}{\sqrt{110}}, \frac{-7}{\sqrt{110}}].$$

Nakoniec poznamenajme, že jednotkový vektor v smere vektora $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ s opačnou orientáciou dostaneme pre hodnotu $c = \frac{-1}{\sqrt{110}}$. ♣

Príklad 2. Pre ktoré hodnoty čísel p a q sú vektory $\boldsymbol{a} = [-1, p, 4]$ a $\boldsymbol{b} = [q, 2, -3]$ rovnobežné?

Riešenie: Podľa poznámky pred predchádzajúcim príkladom sú vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ rovnobežné práve vtedy, ak platí

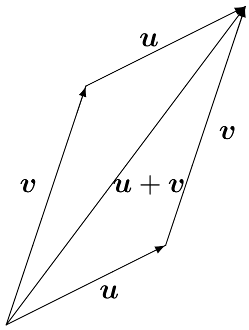
$$\frac{-1}{q} = \frac{p}{2} = \frac{4}{-3}$$

Porovnaním prvého zlomku s tretím a druhého zlomku s tretím dostávame

$$q = \frac{3}{4} \quad a \quad p = \frac{8}{-3}.$$

♣

Súčet vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je vektor $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, ktorý môžeme znázorniť ako uhlopriečku v rovnobežníku so stranami tvorenými vektormi $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, pričom jeho orientácia je znázornená na obr. 3.



obr. 3

V súradniciach:

$$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=[u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3].$$

Rozdiel vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je vektor $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{v})$.
Ak máme dva vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, tak výraz

$$c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}, \quad \text{kde c, d sú ľubovoľné reálne čísla,}$$

je **lineárna kombinácia vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$**.
Podobne, ak máme tri vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$, tak výraz

$$c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}, \quad \text{kde c, d, e sú ľubovoľné reálne čísla,}$$

je **lineárna kombinácia vektorov $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$**.
Čísla c, d, e v lineárnej kombinácii voláme **koeficienty** kombinácie. Pre každú konkrétnu hodnotu koeficientov dostávame konkrétny vektor.

Platí: Ak máme dané v rovine dva nerovnobežné vektory, tak každý vektor tejto roviny sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie dvoch daných vektorov. Ak máme dané v priestore tri vektory, ktoré neležia všetky v jednej rovine, tak každý vektor v priestore sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare lineárnej kombinácie troch daných vektorov.

V dôsledku toho každý vektor sa dá napísať v tvare lineárnej kombinácie vektorov bázy:

$$\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}+u_3\boldsymbol{k}.$$

V tomto vyjadrení sú koeficienty kombinácie zhodné so súradnicami vektora, teda platí

$$\boldsymbol{u}=u_1\boldsymbol{i}+u_2\boldsymbol{j}+u_3\boldsymbol{k} \quad \text{práve vtedy, ak} \quad \boldsymbol{u}=[\mathrm{u}_1,\mathrm{u}_2,\mathrm{u}_3]\ . \tag{2.2}$$

Príklad 3. Vyjadríme vektor [-3,1] ako lineárnu kombináciu vektorov [1,-1] a [2,3].

Riešenie: Hľadáme čísla c a d, pre ktoré platí

$$[-3,1]=c[1,-1]+d[2,3]=[c,-c]+[2d,3d]=[c+2d,-c+3d]\ .$$

Porovnaním prvých a porovnaním druhých súradníc dostávame sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi

$$c+2d=-3 \qquad a \qquad -c+3d=1\ . \tag{2.3}$$

Ich sčítaním sa zruší neznáma c a po vydelení piatimi dostaneme hodnotu $d = \frac{-2}{5}$. Dosadením tejto hodnoty do prvej rovnice dostaneme aj hodnotu druhej neznámej $c = \frac{-11}{5}$. Teda platí

$$[-3,1] = \frac{-11}{5}[1,-1] + \frac{-2}{5}[2,3].$$

♣

Príklad 4. Vyjadríme vektor $[1,2,3]$ ako lineárnu kombináciu vektorov $[1,2,-1]$, $[-2,1,0]$ a $[0,-3,1]$.

Riešenie: Postupujeme podobne ako v predchádzajúcom príklade. Hľadáme také čísla $a,\ b,\ c$, aby platilo

$$[1,2,3] = a[1,2,-1] + b[-2,1,0] + c[0,-3,1] = [a-2b, 2a+b-3c, -a+c].$$

Porovnaním súradníc dostaneme pre čísla $a,\ b,\ c$ tri rovnice

$$a - 2b = 1, \qquad 2a + b - 3c = 2, \qquad -a + c = 3.$$

Keď vyjadríme b z prvej a c z tretej rovnice pomocou a a dosadíme do druhej rovnice, dostaneme rovnicu pre a

$$2a + \frac{a-1}{2} - 3(a+3) = 2$$

s riešením $a = -23$. Dosadením do prvej a tretej rovnice dostávame hodnoty $b = -12$ a $c = -20$. Preto platí

$$[1,2,3] = -23[1,2,-1] - 12[-2,1,0] + -20[0,-3,1].$$

♣

Skalárny súčin vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je číslo $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}|| \cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. V súradniciach:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \tag{2.4}$$

Z definície skalárneho súčinu a z vlastností funkcie cos vyplýva:

- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} > 0$ práve vtedy, ak uhol vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je ostrý.
- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ práve vtedy, ak uhol vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je pravý.
- $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} < 0$ práve vtedy, ak uhol vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je tupý.

Uhol vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, ktorých súradnice poznáme, môžeme vypočítať pomocou vzťahu

$$\cos(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}{\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)} \cdot \sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}}. \tag{2.5}$$

Príklad 5. Vypočítame uhol vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, ak
a) $\boldsymbol{u} = [-2,1]$ *a* $\boldsymbol{v} = [3,4]$
b) $\boldsymbol{u} = [3,-2,4]$ *a* $\boldsymbol{v} = [-2,-5,3]$.

Riešenie: a) Dosadením do vzťahu 2.5 dostaneme

$$cos\,\varphi = \frac{(-2).3 + 1.4}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}.\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{-2}{5\sqrt{5}}.$$

Preto uhol φ vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ má približnú hodnotu $100,3^\circ$.

b) Podobným výpočtom ako v časti a) dostaneme približné hodnoty

$$cos\,\varphi = 0,482 \qquad a \qquad \varphi = 61,2^\circ.$$

♣

Príklad 6. Nájdeme jedotkový vektor kolmý na vektor $\boldsymbol{u} = [3, 2]$.

Riešenie: Najskôr určíme niektorý vektor kolmý na vektor $\boldsymbol{u}$. Vo všeobecnosti, ak hľadáme niektorý vektor kolmý na vektor $[a, b]$, tak môžeme využiť vektor [-b,a], pretože ich skalárny súčin je 0. Takže vektor $\boldsymbol{v} = [-2, 3]$ je komý na vektor $\boldsymbol{u}$. Potom, spôsobom podobným ako v príklade 1 tejto kapitoly nájdeme dve riešenia úlohy

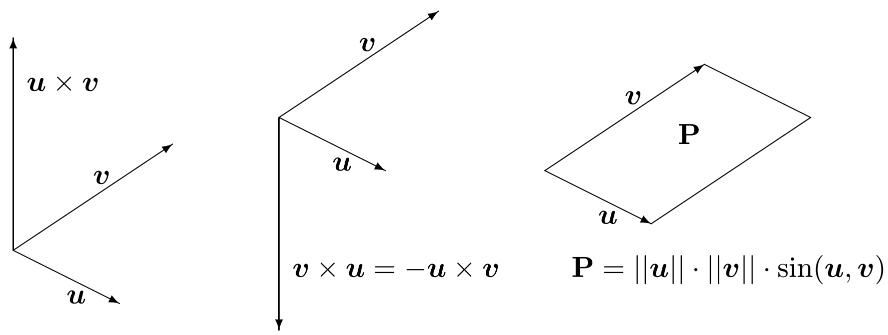
$$\boldsymbol{v_1} = [\frac{-2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}] \quad a \quad \boldsymbol{v_2} = [\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}].$$

♣

Vektorový súčin vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je vektor $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$, ktorý je určený nasledovne

- $||\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|| = ||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}|| \sin(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$
- jeho smer je kolmý na smery obidvoch vektorov $\boldsymbol{u}$ aj $\boldsymbol{v}$
- orientovaný je tak, že usporiadaná trojica vektorov $[\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}]$ tvorí pravotočivú sústavu vektorov

Poznamenajme, že geometrický význam prvej podmienky je ten, že dĺžka vektorového súčinu dvoch vektorov je rovná veľkosti plošného obsahu rovnobežníka vytvoreného týmito vektormi (obr. 4).



obr. 4

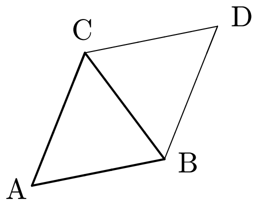
V súradniciach: [3]

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \qquad (2.6)$$

[3]Symbol na pravej strane rovnosti je determinant matice. Pozri kapitolu Lineárna algebra.

Príklad 7. Vypočítame obsah trojuholníka s vrcholmi $A = [3, -1, 5]$, $B = [0, 4, -2]$ a $C = [-3, 3, 1]$.

Riešenie: Doplňme trojuholník ABC na rovnobežník $ABDC$ podľa obr. 5.



obr. 5

Hľadaný obsah je rovný polovici plochy rovnobežníka $ABCD$, ktorá sa rovná dĺžke vektorového súčinu vektorov $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}$. Počítajme

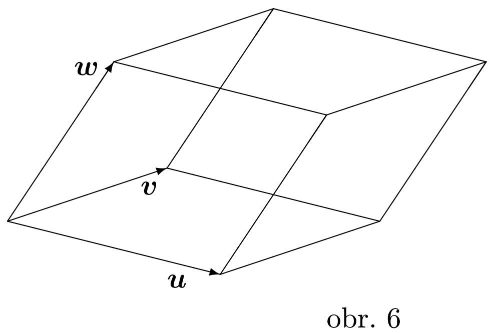
$$(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}) \times (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -3 & 5 & -7 \\ -6 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 8\boldsymbol{i} + 30\boldsymbol{j} + 18\boldsymbol{k}$$

a

$$P = \frac{1}{2}||(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}) \times (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A})|| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 30^2 + 18^2} = \sqrt{322} \approx 17,95.$$

♣

Zmiešaný súčin vektorov $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ je súčin $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$. Ako vidieť z definície, zmiešaný súčin je číslo, závisiace od troch vektorov. Jeho geometrický význam je ten, že jeho absolútna hodnota je rovná veľkosti objemu rovnobežnostena vytvoreného týmito tromi vektormi umiestnenými v spoločnom začiatku (obr. 6).



$$\mathbf{V} = ||(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}||$$

obr. 6

V súradniciach :

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

Príklad 8. Vypočítame objem a obsah povrchu rovnobežnostena $ABCDA_1B_1C_1D_1$, s vrcholom $A[-1,2,-4]$ a s ním susediacimi vrcholmi $B[2,3,0]$, $D[-2,7,-4]$ a $A_1[1,-1,-6]$.

Riešenie: Objem bude rovný absolútnej hodnote zmiešaného súčinu vektorov $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=[3,1,4]$, $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A}=[-1,5,0]$ a $\boldsymbol{A_1}-\boldsymbol{A}=[2,-3,-2]$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -60$$

Preto $V=|-60|=60$. Obsah povrchu vypočítame pomocou vektorových súčinov

$$S = 2(||(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})|| + ||(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{A_1}-\boldsymbol{A})|| +$$

$$+||(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{A})\times(\boldsymbol{A_1}-\boldsymbol{A})||) =$$

$$2(||-20\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+16\boldsymbol{k}|| + ||10\boldsymbol{i}+14\boldsymbol{j}-11\boldsymbol{k}|| + ||-10\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}||) =$$

$$= 2(\sqrt{672}+\sqrt{417}+\sqrt{153}) \approx 117,4.$$

♣

Smerový vektor priamky p je každý vektor rovnobežný s priamkou p.
Normálový vektor priamky p je každý vektor kolmý na priamku p.
Smerový vektor roviny α je každý vektor rovnobežný s rovinou α.
Normálový vektor roviny α je každý vektor kolmý na rovinu α.
Poznamenajme, že ak niektorý vektor je smerovým alebo normálovým vektorom priamky alebo roviny, tak aj jeho ľubovoľný nenulový skalárny násobok je taký. To znamená, že každá priamka alebo rovina má nekonečne veľa smerových a normálových vektorov. Dôležité však je, že

- ak máme určenú priamku v rovine, tak **smery** jej **normálového** a **smerového** vektora sú **jednoznačne určené**

- ak máme určenú priamku v priestore, tak **smer** jej **smerového** vektora je **jednoznačne určený**, avšak má **nekonečne veľa normálových** vektorov **rôznych smerov**

- ak máme určenú rovinu v priestore, tak **smer** jej **normálového** vektora je **jednoznačne určený**, avšak má **nekonečne veľa smerových** vektorov **rôznych smerov**.

2.2.3 Rovnice rovinných útvarov

Vo všeobecnosti **rovnica rovinného útvaru** je rovnica s dvomi neznámymi x a y, ktorá určuje tento útvar spôsobom nazvaným v úvode kapitoly ako pravidlo

(P) Ľubovoľný bod $X=[x,y]$ roviny leží v danom útvare práve vtedy, ak jeho súradnice x a y spĺňajú rovnicu útvaru.

Spôsob, akým získame rovnicu útvaru, závisí od toho aké informácie o útvare máme k dispozícii. V rôznych situáciách dostávame rôzne typy rovníc.

Normálová rovnica priamky

Predpokladajme, že poznáme súradnice jendého bodu X_0 danej priamky a niektorý jej normálový vektor $\boldsymbol{n}$. Potom ľubovoľný bod roviny X leží na danej priamke práve vtedy, ak vektory $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X_0}$ a $\boldsymbol{n}$ sú navzájom kolmé. Na základe uvedených vlastností skalárneho súčinu dostávame normálovú rovnicu priamky:

$$(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X_0}) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \ . \tag{2.8}$$

Ak túto rovnicu rozpíšeme v súradniciach, dostaneme všeobecnú rovnicu danej priamky.

Všeobecná rovnica priamky

je rovnica v tvare

$$ax + by + c = 0, \quad \text{kde a, b, c sú reálne čísla.} \tag{2.9}$$

Ich geometrický význam je ten, že $\boldsymbol{n} = [a, b]$ je normálový vektor priamky a číslo $-c$ je rovné skalárnemu súčinu polohového vektora ľubovoľného bodu priamky s normálovým vektorom $[a, b]$, t.j.,ak X je ľubovoľný bod priamky, tak $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{O}) \cdot \boldsymbol{n} = -c$. Poznamenajme ešte, že číslo $|c|$ je priamo úmerné vzdialenosti priamky od začiatku súradnicovej sústavy.
Polroviny určené touto priamkou majú nerovnice

$$ax + by + c \leq 0 \quad a \quad ax + by + c \geq 0. \tag{2.10}$$

Príklad 9. Napíšeme všeobecnú rovnicu priamky určenej bodmi $A[2, 5]$ a $B[-1, 3]$. Napíšeme tiež rovnicu polroviny určenej touto priamkou a bodom $C[-5, -3]$.

Riešenie: Hľadaná rovnica priamky má tvar $ax + by + c = 0$, kde a, b, c sú konkrétne reálne čísla, ktoré potrebujeme nájsť. Keďže body A a B ležia na priamke, ich súradnice spĺňajú hľadanú rovnicu, čo vedie k dvom rovniciam pre čísla a, b, c

$$2a + 5b + c = 0 \qquad a \qquad -a + 3b + c = 0.$$

Sčítaním prvej a dvojnásobku druhej rovnice dostávame $b = -\frac{3}{11}c$. Dosadením za b do druhej rovnice dostávame $a = \frac{2}{11}c$. Teda sústava má nekonečne veľa riešení, ktoré dostaneme ľubovoľnou voľbou hodnoty c. Ak zvolíme napríklad $c = 11$, dostaneme celočíselné hodnoty $a = 2$ a $b = 3$. Hľadaná rovnica je

$$2x - 3y + 11 = 0.$$

Pri tejto príležitosti poznamenajme, že aj ľubovoľný nenulový násobok tejto rovnice (zodpovedajúci inej voľbe hodnoty c) je rovnicou tej istej priamky.
Na určenie znamienka nerovnice hľadanej polroviny dosadíme do ľavej strany rovnice priamky súradnice bodu C a výsledok porovnáme s pravou stranou:

$$2.(-5) - 3.(-3) + 11 = 10 > 0.$$

Polrovina je určená nerovnicou $2x - 3y + 11 \geq 0$. ♣

Smernicová rovnica priamky

je rovnica v tvare

$$y = kx + q, \quad \text{kde k, q sú reálne čísla.} \tag{2.11}$$

Číslo k sa volá **smernica** priamky a je rovné tangensu uhla priamky s kladným smerom osi x. Smernica priamky vyjadruje relatívnu zmenu závislej premennej y pri zmene nezávislej premennej x. Číslo q je $y-$ová súradnica priesečníka priamky s osou y. Rovnica priamky so smernicou k prechádzajúcej bodom $[x_0, y_0]$ je

$$y - y_0 = k(x - x_0)\ .$$

Parametrické rovnice priamky

Ak poznáme jeden bod priamky X_0 a jej smerový vektor $\boldsymbol{s}$, tak ľubovoľný bod X leží na danej priamke práve vtedy, ak vektory $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X_0}$ a $\boldsymbol{s}$ sú navzájom rovnobežné. Potom ale existuje reálne číslo t (jednoznačne určené bodom X), pre ktoré platí: $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X_0} = t\boldsymbol{s}$. Ak túto rovnicu rozpíšeme v súradniciach, dostávame parametrické rovnice priamky:

$$x = x_0 + s_1 t; \quad y = y_0 + s_2 t, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2.12}$$

Číslo t sa volá parameter, $X_0 = [x_0, y_0]$ je niektorý bod priamky a $\boldsymbol{s} = [s_1, s_2]$ je smerový vektor priamky. Parametrické rovnice tejto priamky sa tiež píšu vo vektorovom tvare

$$[x, y] = [x_0 + s_1 t,\ y_0 + s_2 t], \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2.13}$$

Polpriamka určená bodom $X_0 = [x_0, y_0]$ a smerovým vektorom $\boldsymbol{s} = [s_1, s_2]$ má parametrické rovnice

$$[x, y] = [x_0 + s_1 t,\ y_0 + s_2 t], \quad t \in \langle 0, \infty). \tag{2.14}$$

Úsečka AB, kde $A = [a_1, a_2]$ a $B = [b_1, b_2]$ má parametrické rovnice

$$[x, y] = [a_1 + (b_1 - a_1)t,\ a_2 + (b_2 - a_2)t], \quad t \in \langle 0, 1\rangle. \tag{2.15}$$

Príklad 10. Napíšeme všeobecnú, smernicovú a parametrické rovnice priamky so smernicou $-\frac{1}{2}$ a prechádzajúcej bodom $P[3, -2]$.

Riešenie: Smernicová rovnica priamky má tvar $y = -\frac{1}{2}x + q$, pričom súradnice bodu P ju spĺňajú

$$-2 = -\frac{1}{2}.3 + q, \quad \text{teda } q = -\frac{1}{2}.$$

Hľadaná smernicová rovnica je $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. Keď v tejto rovnici prenesieme výraz na pravej strane na ľavú stranu, dostaneme rovnicu všeobecnú

$$\frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2} = 0.$$

Ak chceme, aby koeficienty rovnice boli celé čísla, vynásobíme rovnicu číslom 2

$$x + 2y + 1 = 0.$$

Na určenie parametrických rovníc potrebujeme súradnice smerového vektora priamky, pričom z poslednej rovnice poznáme jej normálový vektor $\boldsymbol{n} = [1,2]$. Môžeme preto pracovať so smerovým vektorom $\boldsymbol{s} = [-2,1]$, ktorý spolu s bodom P určí parametrické rovnice

$$[x,y] = [3-2t, -2+t].$$

♣

Príklad 11. Sú dané body $A[6,-1]$ a $B[-4,5]$. Napíšeme rovnicu úsečky AB a nájdeme súradnice takého bodu C na úsečke AB aby platilo $d(A,C) = 2.d(B,C)$.

Riešenie: Parametrické rovnice úsečky sú

$$[x,y] = [6-10t, -1+6t], \quad t \in \langle 0,1 \rangle.$$

Bod C leží v dvoch tretinách úsečky smerom od bodu A k bodu B, preto jeho súradnice dostaneme pre hodnotu parametra $t = \frac{2}{3}$ dosadením do parametrických rovníc. $C = [-\frac{2}{3}, 3]$. ♣

Rovnice kužeľosečiek

Kružnica so stredom $S = [x_0, y_0]$ a polomerom r má rovnicu

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2. \tag{2.16}$$

Elipsa so stredom $S = [x_0, y_0]$ a polosami dĺžok a,b má rovnicu

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{2.17}$$

Hyperbola so stredom $S = [x_0, y_0]$ a poloosami dĺžok a,b má rovnicu

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1, \quad \text{ak je hlavná os v smere osi x} \tag{2.18}$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1, \quad \text{ak je hlavná os v smere osi y.} \tag{2.19}$$

Parabola s vrcholom $V = [x_0, y_0]$ a parametrom p má rovnicu

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0), \quad \text{ak je os paraboly v smere osi y} \tag{2.20}$$

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0), \quad \text{ak je os paraboly v smere osi x.} \tag{2.21}$$

Príklad 12. Nájdeme všetky čísla c, pre ktoré bod $P[c,-4]$ leží na elipse s rovnicou $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$. Pre ktoré čísla d existuje bod so súradnicami $[c,d]$ na tejto elipse?

Riešenie: Dosadením súradníc bodu P do rovnice elipsy dostaneme rovnicu pre neznámu hodnotu c

$$\frac{(c-3)^2}{4} + \frac{(-4+2)^2}{9} = 1$$

Po úprave

$$(c-3)^2 = \frac{20}{9}$$

dostávame dve riešenia $c = 3 + \frac{2\sqrt{5}}{3}$ a $c = 3 - \frac{2\sqrt{5}}{3}$.
Pre číslo d existuje na danej elipse bod so súradnicami $[c, d]$ práve vtedy, ak rovnica

$$\frac{(c-3)^2}{4} + \frac{(d+2)^2}{9} = 1$$

s neznámou c má riešenie. Po podobnej úprave ako v prvej časti dostaneme

$$9(c-3)^2 = 36 - 4(d+2)^2$$

Táto rovnica má riešenie práve vtedy, ak je na pravej strane nezáporné číslo

$$36 - 4(d+2)^2 \geq 0.$$

Táto nerovnica platí práve vtedy, ak $(d+2)^2 \leq 9$. Riešením poslednej nerovnice sú všetky čísla $d \in \langle -5, 1 \rangle$.
Na druhú otázku môžeme nájsť odpoveď aj jednoduchším spôsobom, keď si uvedomíme, že stred danej elipsy je v bode $[3, -2]$ a dĺžka jej poloosi v smere osi y je 3. Preto y-ové súradnice všetkých bodov tejto elipsy sú v intervale $\langle -5, 1 \rangle$. ♣

Príklad 13. Nájdeme rovnicu paraboly s vrcholom $V[5, -2]$ prechádzajúcej bodom $P[2, 3]$ s osou rovnobežnou s osou x. Nájdeme tiež na parabole bod súmerný s bodom P podľa osi paraboly.

Riešenie: Do vzťahu 2.21 dosadíme za hodnoty x_0 a y_0 súradnice vrchola V a za hodnoty x a y súradnice bodu P. Dostaneme tak rovnicu, ktorá určí parameter paraboly

$$(3 - (-2))^2 = 2p(2 - 5)$$

s riešením $p = -\frac{25}{6}$. Hľadaná rovnica je

$$(y+2)^2 = -\frac{25}{3}(x - 5).$$

Keďže os paraboly je rovnobežná s osou x, bod súmerne združený s bodom P podľa osi paraboly má tú istú x-ovú súradnicu 2 rovnako ako bod P. Jeho y-ovú súradnicu nájdeme ako riešenie rovnice

$$(y+2)^2 = -\frac{25}{3}(2 - 5)$$

rôzne od čísla 3, ktorým je číslo -7. Súmerný bod s bodom P má súradnice $[2, -7]$. ♣

2.2.4 Rovnice priestorových útvarov

Normálová rovnica roviny

Podobnou úvahou ako pre priamku v rovine dostávame normálovú rovnicu roviny určenej bodom X_0 a normálovým vektorom $\boldsymbol{n}$

$$(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X_0}) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \tag{2.22}$$

Ak sú súradnice normálového vektora $\boldsymbol{n} = [a, b, c]$ a určujúceho bodu $P[x_0, y_0, z_0]$, rozpísaním do súradníc dostávame

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{2.23}$$

Po úprave dostávame všeobecnú rovnicu roviny.

Všeobecná rovnica roviny

je rovnica v tvare

$$ax + by + cz + d = 0, \quad \text{kde a, b, c, d sú reálne čísla.} \tag{2.24}$$

Ich geometrický význam je podobný ako vo všeobecnej rovnici priamky v rovine: $\boldsymbol{n} = [a, b, c]$ je normálový vektor roviny a číslo $-d$ je rovné jeho skalárnemu súčinu s polohovým vektorom ľubovoľného bodu roviny.
Polpriestory určené touto rovinou majú nerovnice

$$ax + by + cz + d \leq 0 \quad \text{a} \quad \mathrm{ax + by + cz + d \geq 0.} \tag{2.25}$$

Príklad 14. Nájdeme všeobecnú rovnicu roviny prechádzajúcej bodmi $A[-1, 3, 0]$, $B[2, 4, 8]$ a $C[0, -4, 1]$. Zistíme, pre ktoré číslo d leží bod $D[d, 10, -1]$ v tejto rovine.

Riešenie: Na určenie všeobecnej rovnice roviny potrebujeme jej normálový vektor a jej jeden bod. Jej normálový vektor je kolmý na vektory $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}$, môžeme teda použiť ich vektorový súčin. Ten vypočítame podľa vzťahu 2.6

$$(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}) \times (\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \text{2 - (-1)} & \text{4 - 3} & \text{8 - 0} \\ \text{0 - (-1)} & \text{-4 - 3} & \text{1 - 0} \end{vmatrix} = 57i + 5j - 22k.$$

Keďže bod $A[-1, 3, 0]$ leží v hľadanej rovine, jej rovnica má tvar $57(x + 1) + 5(y - 3) - 22z = 0$. Po roznásobení

$$57x + 5y - 22z + 42 = 0.$$

Bod D leží v tejto rovine práve vtedy, ak platí

$$57d + 5.10 - 22.(-1) + 42 = 0,$$

teda pre hodnotu $d = -2$.
♣

Poznamenajme, že rovnicu roviny sme mohli tiež hľadať podobným spôsobom ako rovnicu priamky danej dvomi bodmi, t.j. dosadením súradníc daných bodov do všeobecnej rovnice roviny a riešením sústavy lineárnych rovníc.
Iná možnosť riešenia predchádzajúceho príkladu je založená na nasledujúcej všeobecnej úvahe. Predpokladajme, že máme nájsť všeobecnú rovnicu roviny určenej tromi bodmi $A[x_0, y_0, z_0]$, $B[x_1, y_1, z_1]$ a $C[x_2, y_2, z_2]$. Ľubovoľný bod $X[x, y, z]$ leží v tejto rovine práve vtedy, ak trojica vektorov $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A}$ umiestnená v spoločnom začiatku A leží v tej istej rovine. To platí práve vtedy, ak tieto vektory nevytvoria skutočný rovnobežnosten, ale jeho priemet do roviny, inak povedané objem vytvoreného rovnobežnostena bude 0. Použitím vzťahu 2.7 dostávame

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.26}$$

Parametrické rovnice roviny

Ak poznáme jeden bod roviny X_0 a tiež jej dva nerovnobežné smerové vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{s}$, tak ľubovoľný bod X priestoru leží v danej rovine práve vtedy, ak vektor $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X_0}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{s}$. To znamená, že existujú také reálne čísla t a u, že platí

$$\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X_0} = t\boldsymbol{r} + u\boldsymbol{s}.$$

Rozpísaním tejto rovnice v súradniciach dostávame parametrické rovnice roviny určenej bodom $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$ a smerovými vektormi $\boldsymbol{r} = [r_1, r_2, r_3]$ a $\boldsymbol{s} = [s_1, s_2, s_3]$

$$[x, y, z] = [x_0 + tr_1 + us_1, y_0 + tr_2 + us_2, z_0 + tr_3 + us_3] \tag{2.27}$$

V tejto rovnici parametre t a u sú ľubovoľné reálne čísla. Poznamenajme ešte, že vo väčšine prípadov je práca s parametrickými rovnicami roviny dosť komplikovaná a preto sa prakticky nepoužívajú.

Príklad 15. Overíme, či bod $P[11, 1, -12]$ leží v rovine určenej parametrickými rovnicami $[x, y, z] = [2 - 3t + u, -1 - t, 2t - 3u]$.

Riešenie: Bod P leží v danej rovine práve vtedy, ak existujú také čísla t a u, pre ktoré platí

$$11 = 2 - 3t + u, \quad 1 = -1 - t, \quad -12 = 2t - 3u.$$

Z druhej rovnice vidíme, že ak také čísla existujú, tak $t = -2$. Dosadením tejto hodnoty do prvej a tretej rovnice dostaneme dve rovnice pre u. Prvá z nich má riešenie $u = 3$, kým druhá má riešenie $u = \frac{8}{3}$. Preto bod P neleží v danej rovine. Ak by mali posledné dve rovnice to isté riešenie, bod by v rovine ležal. ♣

Parametrické rovnice priamky v priestore

sú analogické tým v rovine. Ich vektorový tvar pre priamku určenú bodom $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$ a smerovým vektorom $\boldsymbol{s} = [s_1, s_2, s_3]$ je

$$[x, y, z] = [x_0 + s_1t,\ y_0 + s_2t,\ z_0 + s_3t], \quad t \in \mathbf{R}. \tag{2.28}$$

Priamka v priestore nemá všeobecnú rovnicu, pretože v priestore nie je možné jednoznačne určiť smer jej normálového vektora.

Príklad 16. Napíšeme rovnicu priamky kolmej na rovinu s rovnicou $3x + 2y - 5z + 1 = 0$ a prechádzajúcej bodom $P[-4, 0, 2]$.

Riešenie: Keďže hľadaná priamka je kolmá na danú rovinu, ako jej smerový vektor môžeme použiť normálový vektor roviny. Parametrické rovnice priamky preto sú

$$[x, y, z] = [-4 + 3t, 2t, 2 - 5t].$$

♣

Rovnica guľovej plochy

Guľová plocha určená stredom $S = [x_0, y_0, z_0]$ a polomerom r má rovnicu

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2. \tag{2.29}$$

2.2.5 Vzájomná poloha geometrických útvarov

V tejto ako aj v nasledujúcich častiach sa budeme zaoberať vzájomnou polohou viacerých (väčšinou dvoch) geometrických útvarov. Určenie tejto polohy obsahuje odpovede na otázky:

- Je prienik daných útvarov prázdny alebo neprázdny?
- Ak je prienik neprázdny, koľko obsahuje bodov?
- Ak prienik obsahuje nekonečne veľa bodov, akú množinu tieto body tvoria?

Najskôr si uvedomme, že hlavným princípom pri hľadaní odpovedí na tieto otázky je modifikácia už spomínaného pravidla (P):

> (P') Ľubovoľný bod $X = [x, y, z]$ leží v prieniku daných útvarov práve vtedy, ak jeho súradnice x, y a z spĺňajú rovnice všetkých daných útvarov.

Na základe tohoto pravidla analytické riešenie úlohy spočíva v riešení sústavy rovníc daných objektov. Podľa počtu riešení tejto sústavy určíme typ vzájomnej polohy útvarov.
Niekedy je vhodné pred samotným riešením sústavy porovnať vzťah určujúcich vektorov, ktorý naznačí o aký typ vzájomnej polohy ide. Napríklad, ak máme v rovine jednu priamku určenú všeobecnou rovnicou a druhú priamku určenú parametrickými rovnicami, pričom normálový vektor jednej je rovnobežný so smerovým vektorom druhej, tak dané priamky sú na seba kolmé.
Inokedy, napríklad v prípade dvoch priamok v priestore, ktorých rovnice nemajú spoločné riešenie, je potrebná informácia o ich smerových vektoroch na rozlíšenie, či ide o priamky rovnobežné alebo mimobežné.

Príklad 17. Určíme vzájomnú polohu priamok p a q v rovine, ak

$$p: \quad [x, y] = [1 - t, 2 - 3t] \quad a \quad q: \quad 2x + 6y + 3 = 0.$$

Riešenie: Smerový vektor $\boldsymbol{s} = [-1, -3]$ priamky p je rovnobežný s normálovým vektorom $\boldsymbol{n} = [2, 6]$ priamky q, pretože $\frac{-1}{2} = \frac{-3}{6}$. Priamky p a q sú kolmé. ♣

Príklad 18. Určíme všetky čísla b a c, pre ktoré priamka

$$p: \quad [x, y, z] = [-3 - 5t, 1 + 4t, b + 2t]$$

leží v rovine

$$\pi: \quad 6x - 2y + cz - 7 = 0.$$

Riešenie: Priamka p leží v rovine π práve vtedy, ak jej smerový vektor $\boldsymbol{s} = [-5, 4, 2]$ je kolmý na normálový vektor $\boldsymbol{n} = [6, -2, c]$ roviny a súčasne bod $[-3, 1, b]$ priamky leží v rovine. Podmienka kolmosti je splnená, ak

$$(-5).6 + 4.(-2) + 2.c = 0, \text{ teda pre } \quad \mathrm{c} = 19.$$

Druhá podmienka je splnená, ak

$$6.(-3) - 2.1 + 19.b - 7 = 0, \text{ teda pre } \quad \mathrm{b} = \frac{27}{19}.$$

♣

Príklad 19. Určíme vzájomnú polohu priamok
$p: \ [x, y, z] = [2 - 3t, -5, 2t]$ a $q: \ [x, y, z] = [-1 + 4u, 3 - u, -3u]$.

Riešenie: Smerové vektory $\boldsymbol{s_p} = [-3, 0, 2]$ a $\boldsymbol{s_q} = [4, -1, -3]$ sú rôznobežné, preto priamky sú buď rôznobežné alebo mimobežné. Rôznobežné sú práve vtedy, ak majú spoločný bod a to je práve vtedy, ak existujú také čísla t a u, pre ktoré platí

$$2 - 3t = -1 + 4u, \quad -5 = 3 - u, \quad 2t = -3u.$$

Z druhej rovnice vyplýva, že ak také čísla existujú, tak $u = 8$. Dosadením do tretej rovnice dostávame $t = -12$. Dosadením obidvoch čísel do prvej rovnice dostávame $38 = 31$, čo nie je pravda. Preto sústava rovníc nemá riešenie, v dôsledku čoho priamky nemajú spločný bod a teda sú mimobežné. ♣

V prípade určovania vzájomnej polohy priamky a kužeľosečky, priamky a guľovej plochy, roviny a guľovej plochy nemáme k dispozícii dvojicu určujúcich vektorov a preto sa obmedzíme na riešenie sústavy, ktorá pozostáva z jednej kvadratickej a jednej lineárnej rovnice, alebo z jednej kvadratickej a niekoľkých lineárnych parametrických rovníc. V prvom prípade vyjadríme z lineárnej rovnice niektorú premennú a dosadíme do kvadratickej, v druhom dosadíme hodnoty x, y, (z) z parametrických rovníc do kvadratickej. Podľa počtu riešení dostávame typ vzájomnej polohy.

Príklad 20. Určíme vzájomnú polohu priamky $p: \ [x, y] = [1 + t, 4 + 2t]$ a kružnice $k:$ $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Riešenie: Dosadíme za x a y z rovnice priamky do rovnice roviny

$$(1 + t + 2)^2 + (4 + 2t - 3)^2 = 25.$$

Po úprave dostaneme kvadratickú rovnicu pre t

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

s riešeniami $t_1 = -3$ a $t_2 = 1$. Keď tieto dve hodnoty dosadíme do rovníc priamky, dostaneme súradnice spoločných bodov priamky a kružnice $P[-2, -2]$ a $Q[2, 6]$. ♣

Príklad 21. Je daná hyperbola $h: \ \frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{12} = 1$. Nájdeme všetky čísla k, pre ktoré existuje k tejto hyperbole dotyčnica so smernicou k.

Riešenie: Najskôr si uvedomíme, že dotyčnica so smernicou k k danej hyperbole h existuje práve vtedy, ak existuje dotyčnica so smernicou k k hyperbole $h': \ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$, ktorá vznikne posunutím hyperboly h. Dosadíme za y zo smernicovej rovnice všeobecnej priamky $p: \ y = kx + q$ do rovnice hyperboly h'

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(kx + q)^2}{12} = 1.$$

Túto rovnicu upravíme na tvar kvadratickej rovnice s neznámou x a parametrami k a q

$$(3-k^2)x^2 - 2kqx - (q^2+12) = 0.$$

Uvedomme si, že pre dané hodnoty parametrov k a q sú prípadnými riešeniami poslednej rovnice x-ové súradnice spoločných bodov priamky p a hyperboly h'. Priamka p je pritom dotyčnicou hyperboly h' práve vtedy, ak rovnica má jediné riešenie a to je vtedy, ak jej diskriminant je 0. Našou úlohou je preto zistiť všetky čísla k, pre ktoré existuje také číslo q, že

$$D = (-2kq)^2 + 4(3-k^2)(q^2+12) = 0.$$

Po úpravách dostaneme $k^2 = \frac{q^2}{4} + 3$. Na pravej strane poslednej rovnice môžeme rôznymi voľbami hodnoty q dostať všetky čísla z intervalu $\langle 3, \infty)$. Preto všetky možné hodnoty k sú také, že k^2 je z toho istého intervalu. Riešením sú všetky čísla $k \in (-\infty, -\sqrt{3}\rangle \cup \langle\sqrt{3}, \infty)$. ♣

Príklad 22. Nájdeme rovnicu dotykovej roviny ku guľovej ploche $g: \ (x-3)^2+(y+1)^2+(z-6)^2 = 24$ v bode $T[-1, 1, 4]$.

Riešenie: Z geometrie vieme, že spojnica stredu guľovej plochy s dotykovým bodom je kolmá na dotykovú rovinu. Preto vektor $\boldsymbol{T} - \boldsymbol{S}$, kde $S[3, -1, 6]$ je stred guľovej plochy, je normálový vektor hľadanej roviny, ktorej rovnicu dostávame zo vzťahu 2.23

$$-4(x+1) + 2(y-1) - 2(z-4) = 0$$

a po úprave

$$2x - y + z - 1 = 0.$$

♣

2.2.6 Uhly

Odchýlka (uhol) dvoch priamok, dvoch rovín alebo priamky a roviny je číslo z intervalu $\langle 0°, 90°\rangle$. Jeho hodnotu môžeme vypočítať z hodnôt vektorov určujúcich príslušné priamky alebo roviny a z podmienky uvedenej v predchádzajúcej vete. Vo všeobecnosti môžeme povedať, že ak z rovníc priamok alebo rovín, o ktorých uhol sa jedná, získame informáciu o dvoch vektoroch toho istého typu (t.j. obidva sú normálové alebo obidva sú smerové), použijeme na výpočet uhlu vzťah

$$\cos\ \alpha = |\cos\,(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})|, \quad \alpha \in \langle 0°, 90°\rangle \tag{2.30}$$

naopak, v prípade, keď z rovníc získame informáciu o dvoch vektoroch rôznych typov, použijeme vzťah

$$\sin\ \alpha = |\cos\,(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})|, \quad \alpha \in \langle 0°, 90°\rangle \tag{2.31}$$

Príklad 23. Vypočítame odchýlku priamok $p: \ 2x - 4y + 7 = 0$ a $q: \ [x, y] = [1-t, -3+2t]$.

Riešenie: Použijeme vzťah

$$\sin\alpha = |\cos([2,-4],[-1,2])| = |\frac{2.(-1)+(-4).2}{\sqrt{20}\sqrt{5}}| = 1$$

Z toho vyplýva, že $\alpha = \arcsin(1) = 90°$, teda dané priamky sú na seba kolmé. ♣

Príklad 24. Vypočítame odchýlku rovín $\pi_1: \ 2x+5y-3z+11=0$ a $\pi_2: \ -3x+y+2z-6=0$.

Riešenie:

$$\cos\alpha = |\cos([2,5,-3],[-3,1,2])| = |\frac{-7}{\sqrt{38}\sqrt{14}}| = \frac{7}{2\sqrt{133}}.$$

Preto $\alpha = \arccos(\frac{7}{2\sqrt{133}}) \approx 72,33°$. ♣

Príklad 25. Vypočítame odchýlku priamky

$$p: \ [x,y,z] = [2-t, 4t, 1+3t]$$

a roviny

$$\pi: \ 5x+2z-1=0.$$

Riešenie:

$$\sin\alpha = |\cos([5,0,2],[-1,4,3])| = |\frac{1}{\sqrt{29}\sqrt{26}}|$$

Preto $\alpha = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{754}}) \approx 2,1°$. ♣

2.2.7 Vzdialenosti

Vzdialenosť dvoch daných bodov vypočítame podľa vzťahu (2.1). Bežne sú známe jednoduché vzťahy na výpočet **vzdialenosti bodu od priamky v rovine** a **vzdialenosti bodu od roviny** v priestore. Obidva vzťahy sú navzájom veľmi podobné:

Vstupné informácie	**Výsledná vzdialenosť**
Bod $X_0=[x_0,y_0]$ a priamka p určená rovnicou $ax+by+c=0$	$d(X_0,p) = \frac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$
Bod $X_0=[x_0,y_0,z_0]$ a rovina α určená rovnicou $ax+by+cz+d=0$	$d(X_0,\alpha) = \frac{\lvert ax_0+by_0+cz_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

V obidvoch prípadoch čitateľ zlomku na pravej strane dostaneme tak, že do príslušnej rovnice dosadíme súradnice príslušného bodu a vytvoríme absolútnu hodnotu, v menovateli je dĺžka normálového vektora určeného koeficientami príslušnej priamky, resp. roviny.

Príklad 26. Vypočítame vzdialenosť bodu $P[-7,3]$ od priamky $p: \ [x,y] = [-2+3t, 1-t]$.

Riešenie: Najskôr nájdeme všeobecnú rovnicu priamky p. Jej normálové vektory sú kolmé k jej smerovému vektoru $[3,-1]$, napríklad vektor $\boldsymbol{n} = [1,3]$. Preto všeobecná rovnica priamky p po úprave je

$$p: \ x+3y-1=0.$$

Teraz použijeme vzťah pre vzdialenosť bodu od priamky v rovine

$$d(P,p) = \frac{|1.(-7)+3.3-1|}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

♣

Príklad 27. Rovina
$$\pi:\ 7x - 5y + 5z + 2 = 0$$
pretína guľovú plochu
$$g:\ (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 11$$
v kružnici k. Vypočítame polomer kružnice k a napíšeme rovnicu dotykovej roviny π' ku guľovej ploche g rovnobežnej s rovinou π.

Riešenie: Najskôr si určíme vzdialenosť stredu $S[2,-3,-4]$ guľovej plochy od roviny π
$$d = \frac{|7.2 - 5.(-3) + 5.(-4) + 2|}{\sqrt{7^2 + (-5)^2 + 5^2}} = \frac{\sqrt{11}}{3}.$$
Označme hľadaný polomer r, stred kružnice k znakom C a zvoľme ľubovoľný bod P na kružnici k. Trojuholník SPC je pravuohlý s pravým uhlom pri vrchole C, odvesnami d a r a preponou rovnou polomeru guľovej plochy $\sqrt{11}$. Podľa Pytagorovej vety platí
$$r^2 = 11 - \frac{11}{9} = \frac{88}{9}$$
a $r = \frac{2\sqrt{22}}{3}$.
Keďže hľadaná rovina π' je rovnobežná s rovinou π, jej rovnica je
$$7x - 5y + 5z + d = 0,$$
pre isté číslo d, ktoré máme nájsť. Keďže vzdialenosť stredu S guľovej plochy od jej dotykovej roviny je rovná polomeru, dostávame rovnicu
$$\frac{|7.2 - 5.(-3) + 5.(-4) + d|}{\sqrt{99}} = \sqrt{11},$$
po úprave
$$|d + 9| = 33$$
s dvomi riešeniami $d_1 = 24$ a $d_2 = -42$. Hľadané roviny sú dve
$$\pi':\ 7x - 5y + 5z + 24 = 0 \quad a \quad \pi'':\ 7x - 5y + 5z - 42 = 0.$$

♣

Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok v rovine určíme tak, že na ľubovoľnej z nich určíme ľubovoľný bod a vypočítame jeho vzdialenosť od druhej priamky.
Vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín určíme tak, že na ľubovoľnej z nich určíme ľubovoľný bod a vypočítame jeho vzdialenosť od druhej roviny.
Vzdialenosť priamky rovnobežnej s rovinou určíme tak, že na priamke určíme ľubovoľný bod a vypočítame jeho vzdialenosť od roviny.
Vzdialenosť bodu od priamky v priestore je rovná vzdialenosti tohoto bodu od jeho kolmého priemetu na danú priamku. Praktický výpočet vzdialenosti bodu A od priamky p prevedieme v štyroch krokoch:

1. Vyjadríme všeobecný vektor $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{A}$, kde P je ľubovoľný bod priamky P v závislosti od parametra priamky,
2. nájdeme tú (jedinú) hodnotu parametra, pre ktorú je tento vektor kolmý na smerový vektor priamky p,
3. dosadíme vypočítanú hodnotu parametra do vyjadrenia všeobecného vektora,
4. hľadaná vzdialenosť je rovná dĺžke takto získaného vektora.

Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok v priestore určíme tak, že na ľubovoľnej z nich si zvolíme ľubovoľný bod a postupujeme podľa predchádzajúceho prípadu.

Príklad 28. Vypočítame vzdialenosť rovnobežných rovín $\pi: \ x-2y+3z-6=0$ a $\pi':$ $2x-4y+6z+6=0$.

Riešenie: Zvoľme napríklad $[-3,0,0]\in\pi'$ a vypočítajme jeho vzdialenosť od π

$$d=\frac{|-3-6|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{9}{\sqrt{14}}=\frac{9\sqrt{14}}{14}$$

♣

Príklad 29. Vypočítame vzdialenosť bodu $Q[-2,3,1]$ od priamky $p:[x,y,z]=[9+4t,-2-t,$ $2+3t]$.

Riešenie:

1. Všeobecný vektor $\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}$ má vyjadrenie
$$\boldsymbol{P}-\boldsymbol{Q}=[11+4t,-5-t,1+3t].$$
2. Tento vektor je kolmý na smerový vektor $\boldsymbol{s}=[4,-1,3]$ priamky p práve vtedy, ak
$$4(11+4t)-1(-5-t)+3(1+3t)=0.$$
Hľadaná hodnota parametra je preto $t=-2$.
3. Po dosadení dostávame súradnice konkrétneho vektora
$$\boldsymbol{P_0}-\boldsymbol{Q}=[3,-3,-5].$$
4. Hľadaná vzdialenosť je
$$d=||\boldsymbol{P_0}-\boldsymbol{Q}||=\sqrt{9+9+25}=\sqrt{43}.$$

♣

Vzdialenosť dvoch mimobežných priamok určíme v štyroch krokoch:

1. vyjadríme všeobecný vektor spájajúci ľubovoľný bod jednej priamky s ľubovoľným bodom druhej priamky v závislosti od parametrov obidvoch priamok,
2. nájdeme tie (jednoznačne určené) hodnoty parametrov, pre ktoré je tento vektor kolmý na smerové vektory obidvoch priamok,

3. dosadíme takto získané parametre do vyjadrenia všeobecného vektora,

4. hľadaná vzdialenosť sa rovná dĺžke takto získaného vektora.

Príklad 30. Vypočítame vzdialenosť prieniku p rovín $\pi:\ x+2y+z-5=0$ a $\mu:\ x-2y-3z-1=0$ od priamky $q:\ [x,y,z]=[-6+3t,-3,-2t]$.

Riešenie: Najskôr určíme vzájomnú polohu daných priamok. Smerový vektor priamky p je kolmý na normálové vektory obidvoch rovín, ktoré ju obsahujú. Je ním teda ľubovoľný násobok vektorového súčinu

$$[1,2,1]\times[1,-2,-3]=[-4,4,-4].$$

Kvôli jednoduchosti budeme pracovať s vektorom

$$\boldsymbol{s_p}=[1,-1,1].$$

Parametrické rovnice priamky p dostaneme voľbou ľubovoľného spoločného bodu rovín π a μ, napríklad bodu so súradnicami $[5,-1,2]$

$$p:\ [x,y,z]=[5+s,-1-s,2+s].$$

Z rovníc priamok p a q vidíme, že sú buď rôznobežné alebo mimobežné. Priamka q pretína rovinu π v bode so súradnicami $[45,-3,-34]$, ktorý neleží v rovine μ. Preto priamka q nepretína priamku p a obidve sú mimobežné.

1. Ak A je ľubovoľný bod priamky p a B je ľubovoľný bod priamky q, tak vektor $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=[-11+3t-s,-2+s,-2-2t-s]$.

2. Vektor $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}$ je kolmý na obidva smerové vektory $\boldsymbol{s_p}=[1,-1,1]$ a $\boldsymbol{s_q}=[3,0,-2]$ práve vtedy, ak
$$1(-11+3t-s)-1(-2+s)+1(-2-2t-s)=0$$
a súčasne
$$3(-11+3t-s)+0(-2+s)-2(-2-2t-s)=0.$$
Po úprave a riešení sústavy rovníc dostaneme hodnoty $s=-3$ a $t=2$.

3. Dosadením vypočítaných hodnôt parametrov dostávame konkrétny vektor $\boldsymbol{B_0}-\boldsymbol{A_0}=[-2,-5,-3]$.

4. Hľadaná vzdialenosť mimobežiek p a q je
$$d=||\boldsymbol{B_0}-\boldsymbol{A_0}||=\sqrt{(-2)^2+(-5)^2+(-3)^2}=\sqrt{38}.$$

♣

Na záver poznamenajme, že existujú aj iné spôsoby ako riešiť vyššie popísané úlohy.

Cvičenia.

1. sú dané vektory $\boldsymbol{a} = [-4, 1, 3]$ a $\boldsymbol{b} = [\mathbf{1}, \mathbf{-2}, \mathbf{3}]$. Nájdite vektory $\mathbf{2}\boldsymbol{a} + \mathbf{3}\boldsymbol{b}$, $\mathbf{-4}\boldsymbol{a}$, $\frac{3}{4}\boldsymbol{a} + \frac{-2}{3}\boldsymbol{b}$, $\frac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||}$.

2. Sú dané body $A = [-1, 2, 4]$, $B = [5, -2, 1]$ a $C = [1, 3, 0]$. Nájdite vektory $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$, $3(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{A})$, $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}) + (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})$, $3(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{C}) - 2(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})$ a zistite ich dĺžky.

3. Vyjadrite vektor $\boldsymbol{v}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\boldsymbol{a} = [5, 3, -1]$ a $\boldsymbol{b} = [-2, 0, 1]$, ak

a) $\boldsymbol{v} = [0, 0, 0]$,

b) $\boldsymbol{v} = [1, -1, -2]$,

c) $\boldsymbol{v} = [4, 0, -2]$.

4. Nájdite všetky jednotkové vektory kolmé k vektoru $\boldsymbol{a} = [-3, 4]$.

5. Nájdite všetky jednotkové vektory kolmé k obidvom vektorom $\boldsymbol{u} = [0, -1, 2]$ a $\boldsymbol{v} = [3, 2, -1]$.

6. Vypočítajte uhol vektorov

a) $[3, 4]$ a $[-2, 6]$

b) $[1, 4, -2]$ a $[2, -2, -3]$,

c) $[1, 1, -1]$ a $[-1, 2, 3]$.

7. Vypočítajte veľkosti uhlov a dĺžky strán v trojuholníku ABC, ak

a) $A = [1, -2],\ B = [4, 6],\ C = [1, 3]$,

b) $A = [-1, -1, -2],\ B = [0, -2, 4],\ C = [1, -4, 0]$.

8. Vypočítajte obsahy trojuholníkov z predchádzajúceho príkladu.

9. Vypočítajte objem a obsah povrchu rovnobežnostena, v ktorom bod $A = [1, -3, 4]$ je spojený hranami s bodmi $B = [-2, 0, -1],\ D = [3, -1, 0]$ a $A_1 = [0, 4, -2]$.

10. Napíšte všeobecnú, smernicovú a parametrické rovnice priamky, ktorá je určená tak, že

a) prechádza bodmi $A = [1, -4],\ B = [4, 3]$,

b) prechádza bodom $A = [-3, 0]$ a je rovnobežná s priamkou $q:\ y = 3x - 5$,

c) prechádza bodom $A = [3, -2]$ a je kolmá na priamku $q:\ [x, y] = [4 - 2t, -1 + t]$,

11. Zistite spoločné body úsečky u a priamky $p:\ 2x - 3y + 6 = 0$, ak

a) $u:\ x = 1 - 2t,\ y = -2 + 3t, \quad t \in \langle -1, 2 \rangle$,

b) $u:\ x = 1 - 2t,\ y = -2 + 3t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$,

c) $u:\ x = 3 + 3t,\ y = 4 + 2t, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle$.

12. Nájdite súradnice ťažiska a priesečníka výšiek v trojuholníku ABC, ak $A = [-2, -1],\ B = [-1, 3],\ C = [5, 2]$.

13. Nájdite rovnice kružnice opísanej trojuholníku ABC z predchádzajúceho príkladu.

14. Určte typ kužeľosečky a súradnice jej stredu (vrcholu)

a) $4x^2 + 4y^2 - 16y + 10 = 0$,

b) $3x^2 + y^2 - 6x + 3y = 0$,

c) $2x^2 - 5y^2 + 8x + 7 = 0$,

d) $3y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$,

e) $x^2 + 2y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$.

15. Určte polohu bodu P vzhľadom k elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, ak

a) $P = [-2, 1]$,

b) $P = [-1, -4]$,

c) $P = [2, -\frac{2\sqrt{5}}{3}]$.

16. Je daná hyperbola $\frac{(x-2)^2}{5} - \frac{(y+3)^2}{10} = -1$.

a) Nájdite všetky body, ktorých prvá súradnica je 5 a ležia na hyperbole,

b) nájdite všetky priesečníky hyperboly s osou o_y,

c) nájdite všetky hodnoty x_0, pre ktoré existuje na hyperbole bod s prvou súradnicou rovnou x_0,

d) nájdite všetky hodnoty y_0, pre ktoré existuje na hyperbole bod s druhou súradnicou rovnou y_0.

17. Nájdite spoločné body priamky $p: \ x - 2y = 0$ s

a) elipsou $\frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y+1)^2}{2} = 1$,

b) parabolou $x + 3 = -4(y + 1)^2$,

c) hyperbolou $(x + 2)^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.

18. Nájdite rovnicu dotyčnice ku

a) kružnici $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ v bode $T = [2, -2]$,

b) parabole $x = -2(y + 1)^2 + 4$ v bode $T = [2, 0]$,

c) hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ v bode $T = [-\sqrt{5}, 2]$.

19. Nájdite všetky hodnoty čísla k, pre ktoré má priamka $p: \ y = k(x - 4)$ aspoň jeden spoločný bod s

a) kružnicou $x^2 + y^2 = 5$,

b) parabolou $x - 4 = 4(y - 1)^2$,

c) hyperbolou $x^2 - y^2 = -1$.

20. Koľko bodov môže mať spoločných priamka s kužeľosečkou?

21. Nájdite všobecnú rovnicu roviny určenej

a) bodmi $A = [-1, 1, 0], \ B = [3, 0, -1], \ C = [1, 2, 3]$,

b) bodom $A = [0, 0, 0]$ a priamkou $p: \ [x, y, z] = [1 - t, 1 + t, -3t]$ na rovinu kolmou,

c) rovnobežnými priamkami $p: \ [x, y, z] = [-1 + 2t, t, 4 - t]$ a $p: \ [x, y, z] = [3 - 2u, -1 - u, u]$.

d) rôznobežnými priamkami $p: \ [x, y, z] = [-1 + 2t, 1 + t, 2 - t]$ a $p: \ [x, y, z] = [3 - 2u, -1 + u, u]$.

22. Nájdite rovnice priamky určenej

a) bodmi $A = [-1, 4, 1]$ a $B = [2, 0, 3]$,

b) bodom $A = [3, -2, 1]$ a rovnobežnou priamkou $p: \ [x, y, z] = [1 - 2t, 3t, -4]$,

c) bodom $A = [1, 1, 1]$ a rovinou $\varrho: \ 3x - 2y + 5z - 1 = 0$, ktorá je na ňu kolmá,

d) bodom $A = [-2, 0, 7]$, pričom hľadaná priamka je rôznobežná so všetkými tromi súradnicovými osami.

23. Nájdite rovnicu guľovej plochy, ktorá je určená

a) stredom $S = [-2, 1, 4]$ a prechádza začiatkom súradnicovej sústavy,

b) tým, že sa dotýka roviny $x = 0$ v bode $T = [0, -2, 3]$ a jej stred leží v rovine $x - y + 2z = 4$,

c) polomerom $r = 4$, dotýka sa roviny $2x + 2y + z = 0$ a jej stred leží na priamke $p: \ [x, y, z] = [1 + t, -t, -1 + t]$.

24. Popíšte vzájomnú polohu dvojíc priamok

a) $p: \ [x, y, z] = [-2t, 7 + 4t, -11]$ a $q: \ [x, y, z] = [-2 + u, -2u, 0]$,

b) $p: \ [x, y, z] = [2 - 3t, t, -1 + t]$ a $q: \ [x, y, z] = [2 + u, -2 - u, 4u]$,

c) $p: \ [x, y, z] = [2 - t, 2t, 1 - t]$ a $q: \ [x, y, z] = [u, -u, -13 + 4u]$,

d) $p: \ [x, y, z] = [2 + t, 2t, 1 - t]$ a $q: \ [x, y, z] = [6 - 3u, 8 - 6u, -3 + 3u]$.

25. Napíšte rovnice polpriamky, ktorá leží v rovinách $2x - y + 7 = 0, \quad x + 2y - z + 1 = 0$ a v polpriestore $x + y + z \geq 0$.

26. Popíšte vzájomnú polohu dvoch rovín

a) $x - 2y + z = 3$ a $-2x + 4y - 2z + 6 = 0$,

b) $x - 2y + z + 3 = 0$ a $-2x + 4y - 2z + 6 = 0$,

c) $x - 2y + z - 3 = 0$ a $2x + 4y - 2z + 6 = 0$.

27. Popíšte vzájomnú polohu priamky $p: \ [x, y, z] = [2 - 3t, -1 + t, 2t]$ a roviny

a) $\varrho: \ 3x + y + 2z - 4 = 0$,

b) $\varrho: \ x - y + 2z + 7 = 0$,

c) $\varrho: \ x - y + 2z - 3 = 0$.

28. Napíšte rovnice úsečky, ktorej koncové body ležia na priamke $p: \ [x, y, z] = [-6-4t, 1+t, 8+7t]$ a súčasne na guľovej ploche $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 2)^2 = 18$.

29. Napíšte rovnicu dotykovej roviny ku guľovej ploche $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 36$

a) v bode $T = [0, 5, 0]$,

b) rovnobežnej s rovinou $x - 2y + 2z - 7 = 0$,

c) kolmej na priamku $p: \ [x, y, z] = [2 + 2t, -1 + t, -2t]$.

30. Vypočítajte odchýlku

a) priamky $p: \ [x, y, z] = [2 - t, -1 + 4t, 3]$ a priamky $q: \ [x, y, z] = [-1, 5 - 2u, 1 + u]$,

b) priamky $p: \ [x, y, z] = [1 + 2t, -3t, -3 - t]$ a roviny $\varrho: \ x + 2y - 4z + 11 = 0$, c) roviny $\varrho:\ x-2y+2z=0$ a roviny $\nu:\ x+4y-z+5=0$.

31. Vypočítajte odchýlku priamky $p:\ [x,y,z]=[-1+t,4,2-\sqrt{3}t]$ od všetkých troch osí súradnicovej sústavy a od všetkých troch rovín, určených dvojicami osí.

32. Vypočítajte vzdialenosti

a) bodu $P=[-1,4,7]$ od roviny $\varrho:\ 3x-5y+z-9=0$,

b) dvoch rovín $\varrho:\ -x+2y+z=7$ a $\nu:\ 3x-6y-3z=0$,

c) priamky $p:\ [x,y,z]=[t,-1-3t,5]$ a roviny $\varrho:\ 3x+y-2z+11=0$,

d) rovnobežných priamok $p:\ [x,y,z]=[3t,-2t,-1+t]$ a $q:\ [x,y,z]=[5-3u,1+2u,-u]$,

e) mimobežných priamok $p:\ [x,y,z]=[3t,-2t,1+t]$ a $q:\ [x,y,z]=[5-u,1+2u,-3u]$.

33. Os mimobežiek je priamka rôznobežná s obidvomi mimobežkami a kolmá na každú z nich. Určte rovnicu osi mimobežiek $p:\ [x,y,z]=[3+2t,6+t,-4-3t]$ a $q:\ [x,y,z]=[-4+4u,-2+u,2-u]$.

34. Je daný štvorsten $ABCD$, kde $A=[-3,-2,5],\ B=[-3,0,2],\ C=[-2,4,-3],\ D=[-7,6,6]$.

a) Vypočítajte najväčšiu odchýlku dvoch hrán štvorstena,

b) vypočítajte najmenšiu odchýlku dvoch stien štvorstena,

c) vypočítajte najmenšiu odchýlku hrany a steny štvorstena,

d) vypočítajte najmenšiu vzdialenosť vrchola od protiľahlej steny štvorstena,

e) vypočítajte najmenšiu vzdialenosť dvoch mimobežných hrán štvorstena,

f) vypočítajte obsah povrchu a objem štvorstena.

35. Vypočítajte obsah kruhu, ktorý je prienikom roviny $2x+y-4z+1=0$ a gule $(x-3)^2+(y+1)^2+z^2\le 9$.

Výsledky cvičení.

1. $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=[-5,-4,15]$, $\quad -4\boldsymbol{a}=[16,-4,-12]$,
$\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{-2}{3}\boldsymbol{b}=[-\frac{11}{3},\frac{25}{12},\frac{1}{4}]$, $\quad \frac{\boldsymbol{a}}{||\boldsymbol{a}||}=[-\frac{4}{\sqrt{26}},\frac{1}{\sqrt{26}},\frac{3}{\sqrt{26}}]$.

2. $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=[6,-4,-3]$, $\quad 3(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{A})=[6,3,-12]$,
$(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})+(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A})=[10,-9,-2]$, $\quad 3(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C})-2(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})=[-14,7,10]$.

3. a) $0.\boldsymbol{a}+0.\boldsymbol{b}$ b) nedá sa vyjadriť c) $-2\boldsymbol{b}$.

4. $[\frac{4}{5},\frac{3}{5}]$ a $[-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}]$.

5. $[-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}]$ a $[\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}}]$.

6. a) $55,3^\circ$ b) 90° c) 108°.

7. a) $a=3\sqrt{2}$, $b=5$, $c=\sqrt{73}$, $\alpha=20,6^\circ$, $\beta=24,4^\circ$, $\gamma=135^\circ$,
b) $a=\sqrt{21}$, $b=\sqrt{17}$, $c=\sqrt{38}$, $\alpha=48^\circ$, $\beta=42^\circ$, $\gamma=90^\circ$.

8. a) $7,5$ b) $\frac{\sqrt{357}}{2}$.

9. $V = 80$ a $S = 2(\sqrt{632} + \sqrt{782} + 16\sqrt{3})$.

10. a) $7x - 3y - 19 = 0$, $y = \frac{7}{3}x - \frac{19}{3}$, $[x, y] = [1 + 3t, -4 + 7t]$,
b) $3x - y + 9 = 0$, $y = 3x + 9$, $[x, y] = [-3 + t, 3t]$,
c) $2x - y - 8 = 0$, $y = 2x - 8$, $[x, y] = [3 + t, -2 + 2t]$.

11. a) $[-\frac{15}{13}, \frac{16}{13}]$, b) $\emptyset$, c) $u \subset p$.

12. $T = [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$, $V = [-\frac{31}{25}, \frac{89}{25}]$.

13. $k: \left(x - \frac{81}{50}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{50}\right)^2 = \frac{18241}{1250}$.

14. a) kružnica, $S = [0, 2]$, b) elipsa, $S = [1, -\frac{3}{2}]$,
c) hyperbola, $S = [-2, 0]$, d) parabola, $V = [\frac{1}{8}, -\frac{1}{2}]$,
e) prázdna množina.

15. a) P leží vo vnútri elipsy, b) P leží zvonku elipsy,
c) P leží na elipse.

16. a) $[5, -3 + 2\sqrt{7}]$ a $[5, -3 - 2\sqrt{7}]$, b) $[0, -3 + \sqrt{18}]$ a $[0, -3 - \sqrt{18}]$,
c) $x_0 \subset \mathbf{R}$, d) $y_0 \subset (-\infty, -3 - \sqrt{10}) \cup (-3 + \sqrt{10}, \infty)$.

17. a) $[0, 0]$, b) $\emptyset$, c) $[\frac{-16+2\sqrt{22}}{7}, \frac{-8+\sqrt{22}}{7}]$ a $[\frac{-16-2\sqrt{22}}{7}, \frac{-8-\sqrt{22}}{7}]$.

18. a) $3x - 4y - 14 = 0$, b) $x + 4y - 2 = 0$, c) $\sqrt{5}x + 2y + 1 = 0$.

19. a) $k \in \langle -\sqrt{\frac{5}{11}}, \sqrt{\frac{5}{11}} \rangle$, b) $k \in \langle -\frac{1}{16}, \infty)$,
c) $k \in (-\infty, -\sqrt{\frac{1}{17}} \rangle \cup \langle \sqrt{\frac{1}{17}}, \infty)$.

20. Žiaden, jeden alebo dva.

21. a) $x + 7y - 3z - 6 = 0$, b) $x - y + 3z = 0$,
c) $5x - 4y + 6z - 19 = 0$, d) $x + 2z - 3 = 0$.

22. a) $[x, y, z] = [-1 + 3t, 4 - 4t, 1 + 2t]$,
b) $[x, y, z] = [3 - 2t, -2 + 3t, 1]$,
c) $[x, y, z] = [1 + 3t, 1 - 2t, 1 + 5t]$,
d) $[x, y, z] = [2t, 0, -7t]$.

23. a) $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 21$,
b) $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$,
c) $(x - 1 - 2\sqrt{2})^2 + (y + 2\sqrt{2})^2 + (z + 1 - 2\sqrt{2})^2 = 16$.

24. a) Priamky sú rovnobežné, b) priamky sú mimobežné,

c) priamky sú rôznobežné, pretínajú sa v bode $[4, -4, 3]$,
d) priamky sú totožné.

25. $[x, y, z] = [-3 + t, 1 + 2t, 5t]$, $t \geq -\frac{1}{4}$.

26. a) Roviny sú zhodné, b) roviny sú rovnobežné,
c) roviny sú rôznobežné, pretínajú sa v priamke $[x, y, z] = [0, 1 + t, 5 + 2t]$.

27. a) Priamka je s rovinou rôznobežná, prienik je bod $[\frac{5}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}]$,
b) priamka je s rovinou rovnobežná, c) priamka leží v rovine.

28. $[x, y, z] = [-6 - 4t, 1 + t, 8 + 7t],\ t \in \langle -2, -1 \rangle$.

29. a) $2x + 2y - z - 10 = 0$,
b) $x - 2y + 2z + 20 = 0$ a $x - 2y + 2z - 16 = 0$,
c) $2x + y - 2z + 29 = 0$ a $2x + y - 2z - 7 = 0$.

30. a) $29{,}8°$, b) $0°$, c) $45°$.

31. Odchýľky od osí $o_x,\ o_y,\ o_z$ sú postupne $60°,\ 90°,\ 30°$.
Odchýľky od rovín $\varrho_{x,y}, \varrho_{x,z}, \varrho_{y,z}$ sú postupne $60°,\ 0°,\ 30°$.

32. a) $d = \frac{5\sqrt{35}}{7}$, b) $d = \frac{7\sqrt{6}}{6}$, c) $d = 0$,
d) $d = \sqrt{13}$, e) $d = \sqrt{6}$.

33. $[x, y, z] = [-t, -1 + 5t, 1 + t]$.

35. $S = \frac{153\pi}{21}$.

Kapitola 3

Lineárna algebra

3.1 Matice

3.1.1 Úvod

Zo strednej školy viete, že **matica typu** $m \times n$ je sústava mn čísiel usporiadaných v tvare obdĺžnikovej "tabuľky" s m riadkami a n stĺpcami. Ako príklad uvádzame nasledujúce tri matice, ktoré majú postupne typ 1×3, $m \times 1$, a 3×4:

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi & c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a+b+c & uv & x-y & 27 \\ a+b & u+v & z & 216 \\ a & 3u+vw & xyz & 1966 \end{pmatrix}$$

Matice je obvyklé pomenúvať tučne sádzanými veľkými písmenami, a ich prvky sú potom označené zodpovedajúcim malým písmenom s dvoma indexami (riadkovým a stĺpcovým). Všeobecná matica typu $m \times n$ môže teda byť označená a opísaná napr. nasledujúcim spôsobom:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix} \quad ;$$

prvok v i-tom riadku a j-tom stĺpci je označený symbolom c_{ij}. Pre úsporu miesta uvedenú maticu stručne zapisujeme v tvare $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times n}$.

3.1.2 Riadkové operácie

Pri riešení sústav lineárnych rovníc ste na strednej škole používali tri základné operácie: výmena dvoch rovníc, vynásobenie ľubovoľnej rovnice nenulovou konštantou, a pripočítanie nejakého násobku jednej rovnice k inej rovnici. Ako uvidíme neskôr, metódy riešenia sústav lineárnych rovníc sa výhodne formulujú práve v reči matíc. Preto je užitočné zaviesť analógie uvedených operácií aj na maticiach. Pôjde o nasledovné tri tzv. **riadkové operácie**:

O1: Vzájomná výmena niektorých dvoch riadkov matice.

O2: Vynásobenie niektorého riadku nenulovou konštantou.

O3: Pripočítanie násobku jedného riadku matice k inému riadku.

Príklad 1. Nižšie uvedená matica $\mathbf{B}$ vznikla z matice $\mathbf{A}$ postupnou aplikáciou nasledujúcich troch riadkových operácií: Vynásobením druhého riadku konštantou -1, pripočítaním trojnásobku tretieho riadku k prvému riadku, a napokon výmenou druhého a tretieho riadku.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & a & -b & 0 \\ 1 & -2 & c & -d \\ 1 & x & y & z \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3x+a & 3y-b & 3z \\ 1 & x & y & z \\ -1 & 2 & -c & d \end{pmatrix}.$$

Dve matice nazveme **ekvivalentné**, ak jednu možno utvoriť z druhej pomocou konečnej postupnosti riadkových operácií O1, O2, O3. Pre ekvivalenciu matíc rezervujeme symbol $\cong$; pre matice z nášho príkladu teda platí $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

3.1.3 Gaussov tvar matice

Nasledujúci pojem má v teórii matíc (a následne v lineárnej algebre) výsadné postavenie. Hovoríme, že matica je v **Gaussovom tvare**, ak sú splnené nasledujúce štyri podmienky:

G1. Prvý ľavý nenulový prvok v každom riadku je rovný 1. (Tomuto prvku hovoríme *vedúca jednotka* v riadku.)

G2. Každý prvok v stĺpci *pod* vedúcou jednotkou je rovný 0.

G3. Vedúca jednotka v každom riadku sa nachádza vpravo od vedúcich jednotiek vo všetkých vyššie položených riadkoch.

G4. Prípadné riadky obsahujúce samé nuly nasledujú až za všetkými riadkami obsahujúcimi vedúce jednotky.

Naviac, hovoríme, že matica je v **redukovanom Gaussovom tvare**, ak spolu s horeuvedenými štyrmi podmienkami je splnená aj piata:

G5. Každý prvok v stĺpci *nad* vedúcou jednotkou je rovný 0.

Dá sa pomerne ľahko ukázať, že každá matica je ekvivalentná s nejakou maticou v Gaussovom tvare. Inak povedané, pre každú maticu existuje postupnosť riadkových operácií, pomocou ktorej je možné danú maticu upraviť tak, aby spĺňala podmienky G1-G4.

Príklad 2. Z nasledujúcich štyroch matíc prvé dve *nie sú* v Gaussovom tvare (prečo?). Tretia je v Gaussovom tvare (ale nie v redukovanom), zatiaľ čo posledná je v redukovanom Gaussovom tvare.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & j \\ 0 & 1 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Je dôležité uvedomiť si, že *Gaussov tvar matice nie je určený jednoznačne.* To znamená, že začnúc s rovnakou maticou, dve nezávislé osoby môžu aplikovaním dvoch rôznych postupností riadkových operácií dospieť k dvom rôznym Gaussovým tvarom, a oba výsledky môžu byť správne.

Podstatne ťažšie je dokázať, že *každá matica je ekvivalentná s* **jedinou** *maticou v* **redukovanom** *Gaussovom tvare.*

3.1.4 Výpočet Gaussovho tvaru matice

Na výpočet Gaussovho tvaru matice možno použiť nasledujúci jednoduchý algoritmus:

A1: Ak matica má všetky riadky nulové, tak je automaticky v Gaussovom tvare. V opačnom prípade vyberieme taký riadok, v ktorom nenulový prvok má najmenší stĺpcový index (je "najviac vľavo"), a pomocou riadkovej operácie O1 tento riadok presunieme na prvé miesto.

A2: Použitím riadkovej operácie O2 vytvoríme v prvom riadku vedúcu jednotku, a postupným aplikovaním riadkových operácií O3 dosiahneme, aby v stĺpci pod touto vedúcou jednotkou boli všetky prvky rovné nule.

A3: Odmyslíme si prvý riadok a zopakujeme predchádzajúce dva kroky algoritmu na takto vzniknutej "menšej" matici. Postup rekurzívne opakujeme až kým nedostaneme maticu v Gaussovom tvare.

Redukovaný Gaussov tvar sa pomocou uvedeného algoritmu dostane tak, že v kroku *A2* sa pomocou postupného používania riadkovej operácie O3 postaráme o to, aby sme vynulovali aj prvky v stĺpci *nad* vedúcou jednotkou.

Príklad 3. Nasleduje ukážka použitia algoritmu pre úpravu matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 & -2 \\ 3 & -4 & 5 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

do Gaussovho tvaru. Keďže prvok najviac vľavo v prvom riadku je (vedúca) jednotka, prejdeme rovno na krok A2, čiže na vytvorenie núl pod touto jednotkou. To dosiahneme tak, že pripočítame dvojnásobok prvého riadku k druhému riadku, (-3)-násobok prvého riadku k tretiemu riadku, a napokon (-2)-násobok prvého riadku ku poslednému riadku. Tak dostaneme z pôvodnej matice s riadkami R_1, R_2, R_3 a R_4 novú (ekvivalentnú) maticu s nezmeneným prvým riadkom a novým druhým, tretím a štvrtým riadkom R_2', R_3' a R_4'. Symbolicky, vykonanie uvedených riadkových operácií typu O3 označíme takto: $R_2' = R_2 + 2R_1$, $R_3' = R_3 + (-3)R_1$, a $R_4' = R_4 + (-2)R_1$. Potom prejdeme na krok A3, čiže ignorujeme prvý riadok a kroky A1 a A2 znova aplikujeme na druhom až štvrtom riadku vzniknutého medzivýsledku, atď. Celý postup (spolu so symbolickým znázornením použitých riadkových operácií) je uvedený nižšie:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 & -2 \\ 3 & -4 & 5 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2' = R_2 + 2R_1 \\ R_3' = R_3 + (-3)R_1 \\ R_4' = R_4 + (-2)R_1 \end{array}$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_3' = \frac{1}{2}R_3 \\ R_2 \leftrightarrow R_3' \end{array}$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_3' = \frac{1}{6}R_3 \\ R_4' = R_4 + (-3)R_3' \end{array}$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \quad .$$

Matica $\mathbf{B}$ je Gaussovým tvarom matice $\mathbf{A}$; samozrejme $\mathbf{B} \cong \mathbf{A}$.

Ak by sme chceli dostať **redukovaný** Gaussov tvar matice $\mathbf{A}$, je potrebné splniť aj podmienku G5, teda vynulovať všetky prvky nad vedúcimi jednotkami v matici $\mathbf{B}$. Výpočet by teda formálne pokračoval napr. takto:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_2' = R_2 + (-2)R_3 \\ R_1' = R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 11/3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -10/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_1' = R_1 + 2R_2$$

$$\cong \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -10/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{C} \quad .$$

Matica $\mathbf{C}$ je redukovaným Gaussovým tvarom pôvodnej matice $\mathbf{A}$.

Na tomto mieste by sme radi upozornili, aké dôležité je dobré ovládanie uvedeného algoritmu na určenie (redukovaného) Gaussovho tvaru matice — ten je totiž základom pre riešenie väčšiny úloh v tejto podkapitole (a neskôr úloh na riešenie sústav lineárnych rovníc).

Na Gaussov tvar matice sa viaže ďalší dôležitý pojem. Pod **hodnosťou matice** rozumieme počet nenulových riadkov v Gaussovom tvare danej matice. Hodnosť matice $\mathbf{A}$ budeme označovať symbolom $h(\mathbf{A})$. Pozor — hodnosť $h(\mathbf{A})$ sa nemusí vždy rovnať počtu nenulových riadkov matice $\mathbf{A}$! Na to, aby sme stanovili hodnosť matice $\mathbf{A}$, treba ju najprv pomocou riadkových operácií upraviť do Gaussovho tvaru, a v ňom spočítať počet nenulových riadkov; ten môže často byť menší ako počet nenulových riadkov v pôvodnej matici! Tak napr. pre hodnosť matice $\mathbf{A}$ z predchádzajúceho príkladu platí $h(\mathbf{A}) = 3$, pretože jej Gaussov tvar (matica $\mathbf{B}$) má 3 nenulové riadky.

Dá sa dokázať, že pre každú maticu $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ platí: $h(\mathbf{A}) \leq min\{m, n\}$.

3.1.5 Algebraické operácie s maticami

K základným algebraickým operáciám s maticami patria vynásobenie matice konštantou, súčet matíc, a súčin matíc. Uvedieme tu aj definíciu transponovanej matice a jej vzťah k algebraickým operáciám.

Násobok matice konštantou. Ak $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ je matica a d je konštanta, tak d-násobok matice $\mathbf{A}$ je matica $d\mathbf{A} = [d.a_{ij}]_{m\times n}$. (Zjednodušene, každý prvok matice sa vynásobí rovnakou konštantou d.)

Súčet matíc. Súčet matíc je definovaný len pre matice rovnakého typu: Ak $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ a $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m\times n}$ sú dve matice typu $m \times n$, ich súčet je matica $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m\times n}$, pričom $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. (Jednoducho povedané, pri súčte matíc sa sčítajú prvky na rovnakých miestach).

Súčin matíc. Najkomplikovanejšia je definícia súčinu matíc; maticu $\mathbf{A}$ možno (sprava) vynásobiť maticou $\mathbf{B}$ len vtedy, ak počet *stĺpcov* matice $\mathbf{A}$ sa rovná počtu *riadkov* matice $\mathbf{B}$. Postup je nasledovný: Ak $\mathbf{A} = [a_{ik}]_{m\times \ell}$ a $\mathbf{B} = [b_{kj}]_{\ell\times n}$ sú matice typu $m \times \ell$ a $\ell \times n$, ich súčinom je matica $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ typu $m \times n$, ktorej i, j-ty prvok vypočítame pomocou vzťahu

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{i\ell}b_{\ell j} \quad .$$

Inak povedané, $[i,j]$-ty prvok matice $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ je skalárnym súčinom i-teho riadku matice $\mathbf{A}$ s j-tym stĺpcom matice $\mathbf{B}$.

Pre počítanie s maticami platia analógie pravidiel platných pre algebraické operácie s reálnymi číslami: komutatívny a asociatívny zákon pre sčítanie matíc, distributívny zákon pre násobenie vzhľadom k sčítaniu, a asociatívny zákon pre násobenie matíc. Násobenie matíc vo všeobecnosti *nie je* komutatívne.

Nech $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je matica typu $m \times n$. Maticu $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ typu $n \times m$ nazveme **transponovanou** k matici $\mathbf{A}$, ak $b_{ij} = a_{ji}$ pre $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$. Voľne povedané, riadky pôvodnej matice sa stávajú stĺpcami v transponovanej matici (a naopak). Pre transponovanú maticu používame označenie $\mathbf{B} = \mathbf{A}^T$. Je zrejmé, že $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Transponované matice súvisia s algebraickými operáciami nasledovne:

$$(d\mathbf{A})^T = d(\mathbf{A}^T)\ ,\quad (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T\ ,\quad (\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T\ .$$

Príklad 4. Vypočítajme maticu $\mathbf{D} = (\mathbf{AB} - 2\mathbf{C})^T$, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\ , \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\ , \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Riešenie: Keďže počet stĺpcov matice $\mathbf{A}$ sa rovná počtu riadkov matice $\mathbf{B}$, má zmysel počítať ich súčin $\mathbf{AB}$ (čo bude matica typu 2×2) a podľa našej definície platí:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2).0 + 0.1 + 3.(-1) & (-2).3 + 0.(-1) + 3.2 \\ 1.0 + (-2).1 + 0.(-1) & 1.3 + (-2).(-1) + 0.2 \end{pmatrix}\ ,$$

a teda

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\ .$$

Pre maticový výraz $\mathbf{AB} - 2\mathbf{C} = \mathbf{AB} + (-2)\mathbf{C}$ tak dostávame:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\ .$$

Teraz už stačí len transponovať poslednú maticu (t.j. vypísať jej riadky ako stĺpce) a máme hľadanú maticu $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{D} = (\mathbf{AB} - 2\mathbf{C})^T = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\ .$$

3.1.6 Štvorcové matice; pojem inverznej matice

Matica $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m\times n}$ sa nazýva **štvorcová**, ak $m = n$, t.j. ak má rovnaký počet riadkov a stĺpcov. Medzi štvorcovými maticami významnú úlohu hrá matica, pre ktorú je $a_{ii} = 1$ pre $1 \le i \le n$, a $a_{ij} = 0$ ak $i \ne j$; táto matica sa nazýva **jednotková** a označujeme ju $\mathbf{I}_n$. Jednotková matica má pri násobení matíc postavenie analogické číslu 1 pri násobení reálnych čísiel: $\mathbf{AI}_n = \mathbf{I}_n\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

Hovoríme, že štvorcová matica $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ je **regulárna**, ak jej hodnosť je rovná n. V opačnom prípade (ak hodnosť je menšia ako n) sa matica $\mathbf{A}$ nazýva **singulárna**. Vzťah medzi regulárnymi maticami, riadkovými operáciami a jednotkovou maticou je obsiahnutý v nasledujúcom užitočnom tvrdení: Štvorcová matica typu $n \times n$ je regulárna práve vtedy, keď jej redukovaný Gaussov tvar je $\mathbf{I}_n$.

Štvorcová matica $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ sa nazýva **trojuholníková**, ak buď $a_{ij} = 0$ pre všetky $i > j$ (v takom prípade hovoríme o hornej trojuholníkovej matici), alebo $a_{ij} = 0$ pre všetky $i < j$ (dolná trojuholníková matica).

Pre štvorcové matice sa zavádza mimoriadne dôležitý pojem tzv. inverznej matice. Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ sú štvorcové matice typu $n \times n$. Hovoríme, že $\mathbf{B}$ je **inverzná matica** k matici $\mathbf{A}$, ak $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$.

Hoci (ako sme už uviedli) násobenie matíc nie je vo všeobecnosti komutatívne, v tomto prípade platí: ak $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$, tak aj $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$. Dá sa ukázať, že ak matica $\mathbf{B}$ s uvedenou vlastnosťou existuje, tak je už určená jednoznačne.

Pre inverznú maticu používame označenie $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Dá sa dokázať nasledujúce dôležité tvrdenie: Ku štvorcovej matici $\mathbf{A}$ existuje inverzná matica práve vtedy, keď $\mathbf{A}$ je regulárna matica.

Inverzná matica súvisí s operáciami súčinu a transponovania nasledovne. Ak $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sú štvorcové matice rovnakého typu a ak k obom existujú inverzné matice, tak

$$(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T \quad , \quad (\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \ .$$

Upozorňujeme, že analogické tvrdenie *neplatí* pre súčet matíc!

3.1.7 Výpočet inverznej matice

Na výpočet inverznej matice (prípadne na vylúčenie jej existencie) možno použiť nasledujúci jednoduchý algoritmus (jeho zdôvodnenie bude neskôr jasné z kapitoly o riešení sústav lineárnych rovníc). Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica typu $n \times n$.

I1: Utvoríme maticu $\mathbf{C}$ typu $n \times 2n$ tak, že prvých n stĺpcov bude tvorených maticou $\mathbf{A}$, a zvyšných n stĺpcov bude tvorených jednotkovou maticou $\mathbf{I}_n$; symbolicky, $\mathbf{C} = [\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$.

I2: Maticu $\mathbf{C}$ upravíme na redukovaný Gaussov tvar, ktorý označíme $\mathbf{C}'$. Ak prvých n stĺpcov tejto novej matice $\mathbf{C}'$ nevytvára jednotkovú maticu, tak ku pôvodnej matici $\mathbf{A}$ *neexistuje* inverzná matica. V opačnom prípade platí: $\mathbf{C}' = [\mathbf{I}_n|\mathbf{A}^{-1}]$, t.j. zvyšných n stĺpcov novej matice $\mathbf{C}'$ nám automaticky poskytne inverznú maticu.

Príklad 5. Vypočítajme inverznú maticu (ak vôbec existuje) k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & -5 & 8 \\ -2 & 6 & -10 \end{pmatrix} .$$

Riešenie: Podľa kroku I1 utvoríme najprv maticu $\mathbf{C} = [\mathbf{A}|\mathbf{I}_n]$ pridaním jednotkovej matice $\mathbf{I}_3$ k matici $\mathbf{A}$. Túto novú maticu $\mathbf{C}$ typu 3×6 potom podľa I2 upravujeme na redukovaný Gaussov tvar tak ako v 3.1.4:

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & -4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & -10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1' = \frac{1}{2}R_1 \\ R_2' = R_2 + (-3)R_1' \\ R_3' = R_3 + 2R_1' \end{array}$$

$$\cong \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & 3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3' = R_3 + (-2)R_2 \\ R_1' = R_1 + 2R_2 \end{array}$$

$$\cong \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 1 & -5/2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_3' = -\frac{1}{2}R_3 \\ R_2' = R_2 + R_3' \\ R_1' = R_1 + (-1)R_3' \end{array}$$

$$\cong \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -7/2 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -1/2 \end{array} \right) = \mathbf{C}' \ .$$

Podľa algoritmu platí: Ak v Gaussovom tvare $\mathbf{C}'$ v ľavej polovici vznikne jednotková matica, tak potom pravá polovica matice $\mathbf{C}'$ predstavuje inverznú maticu k pôvodnej matici $\mathbf{A}$. Teda $\mathbf{A}^{-1}$ existuje, a

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & 1/2 \\ -7/2 & 2 & -1/2 \\ -2 & 1 & -1/2 \end{pmatrix} \ .$$

3.1.8 Definícia determinantu štvorcovej matice

Posledným dôležitým pojmom, ktorý tu vysvetlíme, je pojem determinantu. Ak $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je štvorcová matica typu $n \times n$, tak jej **determinant** je isté presne definované číslo, ktoré označujeme symbolom $|\mathbf{A}|$. Keďže ide o pomerne komplikovanú záležitosť, najprv zavedieme pomocné označenie. Symbolom $\mathbf{A}_{ij}$ označíme štvorcovú maticu typu $(n-1) \times (n-1)$, ktorá vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynechaním jej i-teho riadku a j-teho stĺpca. Samotný determinant $|\mathbf{A}|$ teraz definujeme rekurzívne takto: Ak $n = 1$, tak determinant matice $\mathbf{A} = [a_{11}]$ typu 1×1 je jednoducho $|\mathbf{A}| = a_{11}$. Ak $n \geq 2$, tak pre každý riadkový index i platí:

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{i+1} a_{i1} |\mathbf{A}_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |\mathbf{A}_{i2}| + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} |\mathbf{A}_{in}| \ . \tag{3.1}$$

Analogicky, ak j je ľubovoľný stĺpcový index, tak platí:

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{1+j} a_{1j} |\mathbf{A}_{1j}| + (-1)^{2+j} a_{2j} |\mathbf{A}_{2j}| + \ldots + (-1)^{n+j} a_{nj} |\mathbf{A}_{nj}| \ . \tag{3.2}$$

Uvedené vzťahy nazývame aj *rozvojom determinantu podľa i-teho riadku, resp. j-teho stĺpca.*

Fakt, že výpočet determinantu nezávisí od konkrétneho výberu riadkového indexu i v (3.1) alebo stĺpcového indexu j v (3.2), je jedno z magických tvrdení teórie matíc!

Aplikovaním uvedenej definície na matice typu 2×2 a 3×3 ihneď dostávame:

1. Ak $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je matica typu 2×2, tak

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ .$$

2. Pre maticu $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ typu 3×3 máme

$$|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \ .$$

K uvedeným pravidlám existujú užitočné mnemotechnické pomôcky. (Pozri obrázok 3.1.)

Upozorňujeme, že tieto pomôcky nemajú jednoduché zovšeobecnenie pre počítanie determinantov matíc typu $n \times n$ ak $n \geq 4$. Rovnako, čitateľ by si mal dobre uvedomiť, že determinanty sú definované len pre *štvorcové matice.*

Príklad 6. Pomocou definície vypočítajme determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \\ -4 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & -4 & 5 \\ -3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Riešenie: Použijeme rozvoj podľa štvrtého riadku (pretože obsahuje najviac núl), čiže v (3.1) položíme $i = 4$:

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{4+1}.(-3).|\mathbf{A}_{41}| + (-1)^{4+2}.0.|\mathbf{A}_{42}| + (-1)^{4+3}.2.|\mathbf{A}_{43}| + (-1)^{4+4}.0.|\mathbf{A}_{44}| \ .$$

Obr. 3.1: Determinanty matíc 2. a 3. stupňa

Teraz vypočítame determinanty matíc $\mathbf{A}_{41}$ a $\mathbf{A}_{43}$. Keďže

$$\mathbf{A}_{41} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & -4 & 5 \end{pmatrix} ,$$

podľa pravidla počítania determinantu 3×3 máme

$$|\mathbf{A}_{41}| = (-2).(-3).5 + 5.(-1).(-3) + 3.2.(-4) - 3.(-3).(-3) - (-2).(-1).(-4) - 5.2.5$$

a teda $|\mathbf{A}_{41}| = -48$. Podobne, keďže

$$\mathbf{A}_{43} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} ,$$

máme analogicky

$$|\mathbf{A}_{43}| = 1.2.5 + (-2).(-1).2 + 3.(-4).(-3) - 3.2.2 - 1.(-1).(-3) - (-2).(-4).5 = -5 \ .$$

Napokon, vynechaním nulových sčítancov dostávame:

$$|\mathbf{A}| = (-1)^{4+1}.(-3).|\mathbf{A}_{41}| + (-1)^{4+3}.2.|\mathbf{A}_{43}| = 3.(-48) - 2.(-5) = -134 \ .$$

3.1.9 Determinant a riadkové operácie

Z mnohých vlastností determinantu uvedieme nasledujúcich päť, ktoré zároveň umožňujú jeho rýchly výpočet (v kombinácii s metódou v predchádzajúcej časti):

D1: Ak $\mathbf{B}$ je matica, ktorá vznikne z $\mathbf{A}$ aplikáciou jednej riadkovej operácie O1, tak $|\mathbf{B}| = -|\mathbf{A}|$.

D2: Nech matica $\mathbf{B}$ vznikne z $\mathbf{A}$ pomocou riadkovej operácie O2, t.j. tak, že niektorý riadok matice $\mathbf{A}$ sa vynásobí konštantou c. Potom $|\mathbf{B}| = c.|\mathbf{A}|$.

D3: Aplikáciou riadkovej operácie O3 sa determinant nemení.

D4: Ak v matici $\mathbf{A}$ je niektorý riadok násobkom iného riadku, tak $|\mathbf{A}| = 0$.

D5: Ak $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n\times n}$ je trojuholníková matica, tak jej determinant je súčinom jej diagonálnych prvkov, čiže $|\mathbf{A}| = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Poznámka. Pravidlá analogické D1–D4 platia aj pre *stĺpce* a stĺpcové operácie s maticami.

Z uvedeného ihneď vyplýva, že determinant štvorcovej matice **A** typu $n \times n$ možno počítať napr. nasledovne: Použitím krokov *A1–A3* upravíme maticu **A** do Gaussovho tvaru — to bude automaticky trojuholníková matica, ktorej determinant je (podľa D5) súčinom jej diagonálnych prvkov. Pri výpočte nezabúdame zmeniť znamienko determinantu pri každej výmene dvoch riadkov (pravidlo D1) a vynásobiť determinant konštantou pri každom použití riadkovej operácie O2 (pravidlo D2).

Bystrý čitateľ iste ľahko nájde mnohé zjednodušenia tohoto algoritmu. Napríklad, vytváranie vedúcej jednotky v každom riadku nie je postatné; ak pri úpravách vznikne nulový riadok, je — podľa D4 — determinant automaticky rovný nule; na vhodnom mieste (mnoho núl v niektorom riadku alebo stĺpci) môže byť výhodné prejsť k rozvoju determinantu podľa 3.1.8, atď.

Dôsledkom uvedeného algoritmu a tvrdení v 3.1.6 je nasledujúci závažný fakt: K štvorcovej matici **A** existuje inverzná matica práve vtedy, keď $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Príklad 7. Kombináciou rôznych metód vypočítajme determinant

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Riešenie: Pri výpočte budeme používať kódovanie riadkových resp. stĺpcových operácií podobne ako v 3.1.4 (riadky označujeme R_i, stĺpce S_j); súčasne v zátvorke budeme uvádzať, ktoré pravidlo na výpočet determinantu používame:

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad S_1 \leftrightarrow S_3 \ (D1)$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} R_2' = R_2 + (-1)R_1 \\ R_3' = R_3 + (-3)R_1 \\ R_4' = R_4 + (-2)R_1 \end{matrix} \quad (D3)$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & -7 \\ 0 & -5 & -1 & -3 \end{vmatrix} \qquad (3.2) \to S_1$$

$$= -1.(-1)^{1+1}. \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -2 & -7 \\ -5 & -1 & -3 \end{vmatrix} \qquad S_1 \leftrightarrow S_2 \ (D1)$$

$$= + \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & -7 \\ -1 & -5 & -3 \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} R_2' = R_2 + 2R_1 \\ R_3' = R_3 + R_1 \end{matrix} \quad (D3)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & -3 & -4 \end{vmatrix} \qquad R_2 \leftrightarrow R_3 (D1)$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} \qquad (D5)$$
$$= -(1.(-3).(-9)) = -27 \ .$$

3.1.10 Výpočet inverznej matice pomocou determinantov

Popri metóde uvedenej v 3.1.7 je možné inverznú maticu vypočítať aj pomocou determinantov. Táto metóda má značný teoretický význam; pre praktické počítanie je vhodná len pre matice typu najviac 4×4.

Nech $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ je štvorcová matica typu $n \times n$. Ako už vieme z 3.1.9, ak $|\mathbf{A}| = 0$, tak ku matici $\mathbf{A}$ neexistuje inverzná matica. Preto v ďalšom predpokladáme $|\mathbf{A}| \neq 0$. Rovnako ako pri definícii determinantu, nech $\mathbf{A}_{ij}$ označuje štvorcovú maticu typu $(n-1) \times (n-1)$, ktorá vznikne z matice $\mathbf{A}$ vynechaním jej i-teho riadku a j-teho stĺpca. Potom platí:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \, [b_{ij}]_{n\times n} \ , \ \text{kde} \quad b_{ij} = (-1)^{i+j} |\mathbf{A}_{ji}| \ . \tag{3.3}$$

(Pozor na zámenu poradia indexov!)

Pre regulárnu maticu $\mathbf{A}$ typu 2×2 z uvedeného ihneď vyplýva nasledujúca formula:

$$\text{Ak} \ \ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \ , \ \ \text{tak} \ \ \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \ .$$

Príklad 8. Pomocou determinantov vypočítajme inverznú maticu (ak existuje) ku matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix} \ .$$

Riešenie: Použitím vzorčeka pre výpočet determinantu 3×3 (pozri 3.1.8) zistíme, že $|\mathbf{A}| = 7$, a preto k danej matici existuje inverzná matica. Podľa (3.3) jej prvky sú $(-1)^{i+j}|\mathbf{A}_{ji}|/|\mathbf{A}|$ pre $1 \leq i, j \leq 3$, teda

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} |\mathbf{A}_{11}| & -|\mathbf{A}_{21}| & |\mathbf{A}_{31}| \\ -|\mathbf{A}_{12}| & |\mathbf{A}_{22}| & -|\mathbf{A}_{32}| \\ |\mathbf{A}_{13}| & -|\mathbf{A}_{23}| & |\mathbf{A}_{33}| \end{pmatrix} \ .$$

Ako vieme, matice $\mathbf{A}_{ji}$ získame z pôvodnej matice $\mathbf{A}$ vynechaním j-teho riadku a i-teho stĺpca; preto

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Po výpočte uvedených 9 determinantov typu 2×2 (použitím vzorčeka z 3.1.8) napokon dostaneme:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -28 & 16 & 1 \\ -7 & 2 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 16/7 & 1/7 \\ -1 & 2/7 & 1/7 \\ 1 & -5/7 & 1/7 \end{pmatrix} \ .$$

O správnosti výpočtu sa presvedčte skúškou — t.j. priamym vynásobením ukážte, že naozaj platí $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_3$.

3.1.11 Dôležité vzt'ahy medzi uvedenými pojmami

Okrem vzt'ahov uvedených v predchádzajúcich častiach upozorníme ešte na nasledujúce súvislosti maticových operácií s determinantom a inverznou maticou.

Nech $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sú štvorcové matice rovnakého typu. Potom $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$, čiže determinant súčinu matíc je rovný súčinu príslušných determinantov. (Pozor — analogické pravidlo *neplatí* pre súčet matíc!) Ďalej, $|\mathbf{A}^T| = |\mathbf{A}|$, t.j. transponovaním matice sa determinant nemení. Napokon, ak $|\mathbf{A}| \neq 0$, tak $|\mathbf{A}^{-1}| = 1/|\mathbf{A}|$.

Zakončíme azda najdôležitejším tvrdením, ktoré zhrňuje vlastnosti ekvivalentné regulárnosti matíc.

Nech $\mathbf{A}$ je štvorcová matica typu $n \times n$. Nasledujúce vlastnosti sú ekvivalentné:

(1) Matica $\mathbf{A}$ je regulárna.

(2) Matica $\mathbf{A}$ je ekvivalentná s jednotkovou maticou $\mathbf{I}_n$.

(3) Matica $\mathbf{A}$ má hodnost' rovnú n.

(4) Determinant matice $\mathbf{A}$ je rôzny od nuly: $|\mathbf{A}| \neq 0$.

(5) K matici $\mathbf{A}$ existuje inverzná matica.

(6) Pre každú $n \times 1$ maticu $\mathbf{b}$ má sústava rovníc $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jediné riešenie.

Cvičenia

1. Upravte nasledujúce matice do Gaussovho tvaru, a potom do redukovaného Gaussovho tvaru:

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad (b)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$(c)\quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 & -6 & -4 \\ -2 & -4 & -5 & 4 & 3 \\ 6 & 12 & 15 & -12 & -18 \end{pmatrix} \quad ; \qquad (d)\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

2. Zistite, či nasledujúce matice **A** a **B** sú ekvivalentné (oprite sa o poslednú vetu v podkapitole 3.1.3):

$$(a)\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix} \quad , \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 3 & 9 & -6 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$(b)\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6 & -5 \end{pmatrix} \quad , \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$(c)\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad , \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

3. Vypočítajte hodnosť nasledujúcich matíc:

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ -1 & 10 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \qquad (b)\quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad ;$$

$$(c)\quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \qquad (d)\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

4. Vypočítajte hodnotu maticového výrazu, ak **A**, **B** sú matice z úlohy **2**(b):
(a) $2\mathbf{A} - 3\mathbf{B}$
(b) $\mathbf{B}^T\mathbf{B} - \mathbf{A}\mathbf{A}^T$
(c) $\mathbf{A}.\mathbf{B}^T - \mathbf{B}.\mathbf{A}^T$

5. Zistite, ktoré z nasledujúcich matíc sú regulárne:

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad (b)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad (c)\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Metódou z podkapitoly 3.1.7 (úprava matice na redukovaný Gaussov tvar) vypočítajte inverzné matice k nasledujúcim maticiam:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Kombináciami rôznych metód vypočítajte determinanty nasledujúcich matíc:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 5 & -6 & 4 & 8 \\ 7 & -8 & 8 & 9 \\ -1 & 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Pomocou determinantov vypočítajte inverzné matice k nasledujúcim maticiam:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

9. Kontrolné otázky:

(a) Je pravda, že ak štvorcová matica $\mathbf{A}$ je v Gaussovom tvare, tak $\mathbf{A}$ je trojuholníková matica? Je pravdivé opačné tvrdenie?

(b) Je pravda, že pre každé dve štvorcové matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ rovnakého typu platí: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$?

(c) Je pravda, že inverzná matica k trojuholníkovej matici (ak vôbec existuje) je opäť trojuholníková matica?

(d) Je pravda, že pre každú štvorcovú maticu $\mathbf{A}$ a každú konštantu d platí: $|d\mathbf{A}| = d.|\mathbf{A}|$? (Pozor — toto *nie je* pravidlo D2 z 3.1.9!)

3.1.12 Riešenia

1. Uvádzame vždy najprv Gaussov tvar a potom redukovaný Gaussov tvar matice:

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$(b)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$(c)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(d)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Áno. (b) Nie. (c) Nie.

3. (a) 2. (b) 3. (c) 2. (d) 3.

4.

$$(a)\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 11 \end{pmatrix}; \quad (b)\ \text{nedefinovaný}; \quad (c)\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. (a) regulárna, (b) regulárna, (c) regulárna

6.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & 3 & -1 \\ -1 & -3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -4 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1/5 & 1/5 \\ -1 & 4/5 & -1/5 \\ 3 & -8/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

7. $|\mathbf{A}| = -6$; $|\mathbf{B}| = -18$; $|\mathbf{C}| = 120$.

8.

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}^{-1}\ \text{neexistuje}; \quad \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{156}\begin{pmatrix} 9 & 13 & 25 \\ 18 & -26 & -2 \\ 3 & 39 & -9 \end{pmatrix}.$$

9. (a) Áno; opačné tvrdenie neplatí. (b) Nie. (c) Áno. (d) Nie.

Kapitola 4

Riešenie sústav lineárnych rovníc

4.1 Úvod

Z predchádzajúcej kapitoly už vieme, čo je matica. Matice typu $1 \times n$ a $n \times 1$ nazývame **vektory** (riadkové, stĺpcové). Tento pojem logicky nadväzuje a rozširuje pojem vektora definovaného v kapitole 2.

Nech $m, n \in \mathbf{N}$, $a_{ij} \in \mathbf{R}$ pre $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $b_i \in \mathbf{R}$ pre $i = 1, \ldots, m$ sú dané čísla. Potom **sústavou m lineárnych rovníc s n neznámymi** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nazývame systém rovníc

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1+ & \ldots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & \ldots & +a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+ & \ldots & +a_{mn}x_n = & b_m. \end{array} \tag{4.1}$$

Jednotlivé rovnice sú matematickým vyjadrením podmienok, ktorým musia vyhovovať neznáme x_1, x_2,. . . ,x_n. To, že sa jedná o sústavu rovníc znamená, že tieto podmienky musia byť splnené súčasne. V súlade so stredoškolskou terminológiou sa pri malom počte neznámych tieto niekedy označujú ako x, y prípadne z.

Riešením sústavy (4.1) nazývame n reálnych čísel $r_1, r_2, \ldots, r_n$ tej vlastnosti, že po ich dosadení za $x_1, x_2, \ldots, x_n$ v (4.1) dostaneme m platných rovností medzi číslami.

Riešiť sústavu (4.1) znamená nájsť všetky riešenia tejto sústavy.

Ak definujeme maticu **A** typu $m \times n$ s prvkami a_{ij} pre $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $\mathbf{A} = (a_{ij})$, vektory **x**, **b** typu $n \times 1$ resp. $m \times 1$ takto:

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T, \mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T,$$

tak môžeme sústavu (4.1) zapísať v tvare

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \tag{4.2}$$

Maticu **A** nazývame **matica sústavy** (4.1) , vektor **b** tiež **pravá strana sústavy** (4.1).
Riešením (4.2) nazývame vektor $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)^T$, pre ktorý platí rovnosť vektorov **Ar** a **b**.
Zápisy sústavy v tvare (4.1) a (4.2) sú zrejme ekvivalentné.

Maticu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

nazývame **rozšírená matica** sústavy (4.1) a označujeme ju $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

Medzi číslami m a n nie je vo všeobecnosti žiadny súvis. Ak $m > n$,tak sústava rovníc sa nazýva **preurčená**. Ak $m < n$,tak sústava rovníc sa nazýva **nedourčená**. Ak v (4.1) je $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, tak odpovedajúcu sústavu m lineárnych rovníc o n neznámych nazývame **homogénna sústava rovníc**. Je teda tvaru

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}. \tag{4.4}$$

Hned vidieť, že táto sústava rovníc má vždy riešenie $r_1 = 0$, $r_2 = 0$, $\ldots$,$r_n = 0$, t. j. nulový vektor

$$\mathbf{r} = (0, 0, \ldots, 0)^T.$$

Takéto riešenie nazývame **triviálnym riešením** (4.4).

Už na sústave dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych sa dajú demonštrovať všetky možnosti týkajúce sa riešiteľnosti, ktoré môžu nastať pre sústavu (4.1). Pre sústavu (4.1) môže nastať práve jedna z týchto možností:

- má práve jedno riešenie
- má nekonečne veľa riešení
- nemá žiadne riešenie.

Základným teoretickým výsledkom týkajúcim sa riešiteľnosti (4.1) je nasledujúca **Frobeniusova veta**.
Sústava (4.1) ma riešenie práve vtedy, ak hodnosť matice sústavy je rovná hodnosti rozšírenej matice sústavy, t. j. ak platí

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

Vzhľadom na to, že hodnosť matice už viete určiť, tak iba uvedieme, že nezisťujeme zvlášť hodnosť matice sústavy a zvlášť hodnosť rozšírenej matice sústavy. Pracujeme iba s rozšírenou maticou sústavy, pričom si v nej pre prehľad oddelíme posledný stĺpec zvislou čiarou (odtiaľ pochádza aj označenie $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

Príklad 1. Zistite, či sústava rovníc

$$\begin{array}{rcrcr} -2x_1 & + & x_2 & = & -1 \\ x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ -6x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array}$$

je riešiteľná.

Riešenie: Budeme pracovať s "maticou"

$$\left(\begin{array}{rr|r} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

a zisťujeme jej hodnosť. Známym spôsobom postupne dostávame:

$$\left(\begin{array}{rr|r} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -6 & 3 & 3 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -6 & 3 & 3 \end{array}\right) \cong \ldots \cong \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Teda $h(\mathbf{A}) = 2$, $h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$. Nakoľko $2 \neq 3$, sústava nie je riešiteľná. ♣

Zovšeobecnením sústavy (4.1) je **sústava m lineárnych rovníc s n neznámymi s parametrom (parametrami)**. Ku takejto sústave sa dostaneme vtedy, ak niektorý (alebo niektoré) z koeficientov a_{ij}, b_i závisí známym spôsobom od istého parametra, a teda môže nadobúdať nekonečne veľa alebo iba konečne veľa reálnych hodnôt. Môže nás zaujímať, ako tento parameter ovplyvňuje riešenie sústavy, riešiteľnosť sústavy alebo počet riešení sústavy atď.

Parametre budeme v dalšom označovať s, t, u.

Typický príklad by teda mohol byť:vyšetriť, ako zavisí riešenie sústavy rovníc

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & s \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = & t \end{array}$$

s, $t \in \mathbf{R}$, na hodnotách s, t. Ak by sme takýto vzťah našli, tak postupným dosadzovaním potrebných hodnôt parametrov s, t dostávame odpovedajúce riešenia. Sústava s parametrom je vo všeobecnosti teda zložitejší problém ako sústava (4.1) Frobeniusovu vetu môžeme samozrejme použiť aj pre sústavu s parametrom. Následná analýza riešiteľnosti však može byť značne náročná.

Cvičenia

1. Zistite, či $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ je riešením sústavy rovníc

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 5x_2 & = & 7 \\ 6x_1 & - & 3x_2 & = & 4 \end{array} .$$

2. Zistite, či vektory $(1,1,5)^T$, $(1,2,5)^T$, $(1,1,3)^T$ sú riešením sústavy rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcl} 6x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 9 \end{array} .$$

3. Zistite, či vektory $(0,-2)^T$, $(1,-1)^T$, $(4,4)^T$, $(4,2)^T$, $(2,0)^T$ sú riešením sústavy rovníc

$$\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & - & 2x_2 & = & 4 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & = & 8 \end{array} .$$

4. Uveďte geometrickú interpretáciu sústavy dvoch lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcl} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{array}$$

z hľadiska jej riešiteľnosti. Ako sa zmenia vaše závery v prípade, že platí $b_1 = b_2 = 0$? Pokúste sa o analógiu pre sústavu troch lineárnych rovníc o troch neznámych x, y, z. (Návod: aký geometrický útvar je popísaný rovnicou $ax + by + c = 0$ a jej analógiou v trojrozmernom priestore?)

5. Napíšte sústavy dvoch lineárnych rovníc s dvomi neznámymi, ktoré majú vlastnosť: a) má práve jedno riešenie , b) nemá riešenie , c) má nekonečne veľa riešení .

6. Vyriešte nasledovné sústavy lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 4,127x_2 & = & 15,441 \\ x_1 & + & 1,370x_2 & = & 5,147 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 4,122x_2 & = & 15,441 \\ x_1 & + & 1,374x_2 & = & 5,147 \end{array} .$$

7. Použitím Frobeniusovej vety zistite, či nasledovné sústavy lineárnych rovníc sú riešiteľné:

a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & -9 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & = & 11 \\ 5x_1 & + & 12x_2 & + & 6x_3 & = & 29 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \\ x_1 & & & - & x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 7 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 7 \\ 11x_1 & - & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 10 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 4 \\ 5x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 8 \end{array} .$$

4.2 Riešenie sústav lineárnych rovníc s regulárnou maticou

Uvažujme o sústave n lineárnych rovníc s n neznámymi tvaru

$$\begin{array}{rcrl} a_{11}x_1+ & \dots & +a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1+ & \dots & +a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1+ & \dots & +a_{nn}x_n = & b_n. \end{array} \tag{4.5}$$

Pre vhodne definovanú maticu $\mathbf{A}$ typu $n \times n$, vektory $\mathbf{b}$, $\mathbf{x}$ typu $n \times 1$ môžeme túto sústavu zapísať aj v tvare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Nech $|\mathbf{A}| \neq 0$. Potom sústava (4.5) má práve jedno riešenie $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)^T$.

4.2.1 Cramerovo pravidlo

Ak označíme $D \equiv |\mathbf{A}|$ a D_1, D_2 , ..., D_n determinanty tých matíc, ktoré sme dostali z matice $\mathbf{A}$ tak, že sme v nej postupne nahradili prvý stĺpec vektorom $\mathbf{b}$, druhý stĺpec vektorom $\mathbf{b}$, až n-tý stlpec vektorom $\mathbf{b}$, tak platí:

$$r_1 = \frac{D_1}{D}, r_2 = \frac{D_2}{D}, \ldots, r_n = \frac{D_n}{D}.$$

Takýto spôsob určenia riešenia sústavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s regulárnou maticou $\mathbf{A}$ ($|\mathbf{A}| \neq 0$) sa nazýva **Cramerovo pravidlo**.

Príklad 2. Zistite, či sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcr} 1x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 8 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

je možné riešiť Cramerovým pravidlom a ak áno, určte jej riešenie týmto pravidlom.

Riešenie: V našom prípade je $n = 3$ a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nakoľko je $|\mathbf{A}| = 14 \neq 0$, môžeme použiť Cramerovo pravidlo. Postupne dostávame

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 10 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 14$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 42,$$

a preto $r_1 = 14/14$, $r_2 = 28/14$, $r_3 = 42/14$. Riešením sústavy je teda vektor $\mathbf{r} = (1, 2, 3)^T$. ♣

Príklad 3. Zistite, či sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & = & 4 \end{array}$$

je možné riešiť Cramerovým pravidlom a ak áno, určte jej riešenie týmto pravidlom.

Riešenie: Zrejme v našom prípade je $n = 2$ a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nakoľko je $\mid \mathbf{A} \mid = 0$, nemôžeme použiť Cramerovo pravidlo. Všimnite si, že sústava má riešenie. Je ich nekonečne veľa, sú to vektory tvaru $(t, 2-2t)^T$, kde t je ľubovoľné reálne číslo. Cramerovo pravidlo nám neumožňuje tieto riešenia nájsť. ♣

Príklad 4. Zistite, či sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 8 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \end{array}$$

je možné riešiť Cramerovým pravidlom a ak áno, určte jej riešenie týmto pravidlom.

Riešenie: V našom prípade sa jedná o sústavu dvoch lineárnych rovníc o troch neznámych. Cramerovo pravidlo nám neumožňuje túto sústavu riešiť. ♣

Cvičenia

8. Zistite, či je možné riešiť nasledovné sústavy rovníc Cramerovým pravidlom a ak áno, určte ich riešenie týmto pravidlom:

a)

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & + & 4x_2 & = & 2 \\ x_1 & - & 3x_2 & = & 7 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 6x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & = & 0 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 6x_2 & = & -2 \\ x_1 & - & 3x_2 & = & 4 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 8x_1 & - & 3x_2 & + & 6 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 1 & = & 0 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 4x_2 & = & 6 \\ x_1 & - & x_2 & = & 5 \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & x_2 & = & 5 \\ 6x_1 & + & 2x_2 & = & 7 \end{array}$$

h)

$$\begin{array}{rcrcr} 5x_1 & - & 4x_2 & = & 8 \\ 3x_1 & + & x_2 & = & 15 \end{array}$$

ch)

$$\begin{array}{rcrcr} 3,14x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ \pi x_1 & + & x_2 & = & 4 \end{array} .$$

9. Zistite, či je možné riešiť nasledovné sústavy rovníc Cramerovým pravidlom a ak áno, určte ich riešenie týmto pravidlom:

a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 9 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & & & = & 5 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 11 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 7 \\ 11x_1 & - & 4x_2 & - & 3x_3 & = & 10 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & & & + & 3x_3 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 11 \\ x_1 & - & 5x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \\ 3x_1 & + & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 7x_3 & & & = & -2 \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 7 \end{array}$$

h)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array} .$$

Cramerovo pravidlo nám umožňuje aj čiastočne odpovedať na otázku o riešiteľnosti sústav lineárnych rovníc s parametrami.

Príklad 5. Zistite, pre aké hodnoty parametra s má sústava lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcl} sx_1 & + & 2x_2 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = & 3 \end{array}$$

práve jedno riešenie a určte ho Cramerovým pravidlom.

Riešenie: Podľa Cramerovho pravidla bude mať táto sústava rovníc práve jedno riešenie pre tie s, pre ktoré platí

$$\begin{vmatrix} s & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4s - 6 \neq 0.$$

Teda pre $s \in \mathbf{R} - \{\frac{3}{2}\}$ má sústava práve jedno riešenie a platí preň:

$$r_1 = \frac{1}{2s-3}, r_2 = \frac{3(s-2)}{2(2s-3)}.$$

♣

Na záver ešte poznamenajme, že ak $D = 0$ a aspoň jeden z determinantov $D_1, D_2, \ldots, D_n$ je rôzny od nuly, tak sústava (4.5) nemá riešenie.

Cvičenia

10. Zistite, pre aké hodnoty parametrov s, t, u majú nasledovné sústavy lineárnych rovníc práve jedno riešenie a určte ho Cramerovým pravidlom:

a)

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & sx_2 & = & 1 \\ tx_1 & + & 4x_2 & = & 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcl} sx_1 & + & tx_2 & = & 1 \\ tx_1 & + & sx_2 & = & 3 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & = & 2 - s - t \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = & 1 + s \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rcrcrcl} sx_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & u \\ tx_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 2 - s \\ & & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 1 - t \\ & & & & x_3 & = & 2 - s + u \end{array} \quad .$$

4.2.2 Využitie inverznej matice

Uvažujme opäť o sústave (4.5). Kedže matica $\mathbf{A}$ sústavy je regulárna, tak existuje práve jedno riešenie tejto sústavy. Teda platí rovnosť

$$\mathbf{Ar} = \mathbf{b}.$$

Nakoľko matica $\mathbf{A}$ je regulárna, tak existuje ku nej inverzná matica $\mathbf{A^{-1}}$ tej vlastnosti, že platí

$$\mathbf{A^{-1}}.\mathbf{A} = \mathbf{A}.\mathbf{A^{-1}} = \mathbf{I_n}.$$

Pre vektor $\mathbf{A^{-1}b}$ zrejme potom platí

$$\mathbf{A}(\mathbf{A^{-1}b}) = (\mathbf{AA^{-1}})\mathbf{b} = \mathbf{I_n b} = \mathbf{b}.$$

Teda z jednoznačnosti riešenia dostávame, že

$$\mathbf{r} = \mathbf{A^{-1}b}.$$

Ku tomuto vyjadreniu riešenia sme sa dostali tak, že sme obe strany rovnosti $\mathbf{Ar} = \mathbf{b}$ zľava vynásobili maticou $\mathbf{A^{-1}}$.

Príklad 6. Zistite, či sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & x_2 & = & 7 \\ x_1 & - & x_2 & = & 2 \end{array}$$

je možné riešiť pomocou inverznej matice a ak áno, nájdite jej riešenie touto metódou.

Riešenie: Pre

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

môžeme danú sústavu rovníc zapísať v tvare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Zrejme $n = 2$. Pretože $\mid \mathbf{A} \mid = -3 \neq 0$ je matica $\mathbf{A}$ regulárna a existuje ku nej inverzná matica. Metódami uvedenými v časti o určovaní inverznej matice sa dá zistiť, že

$$\mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Preto

$$\mathbf{r} = \mathbf{A^{-1}b} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

♣

Príklad 7. Zistite, či sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & = & 4 \end{array}$$

je možné riešiť pomocou inverznej matice a ak áno, nájdite jej riešenie touto metódou.

Riešenie: Pre vhodne definovanú maticu $\mathbf{A}$ tejto sústavy platí, že jej determinant je rovný nule. Preto nemôžeme danú sústavu rovníc riešiť pomocou inverznej matice. Všimnite si, že sústava nie je riešiteľná. ♣

Príklad 8. Zistite, či sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

je možné riešiť pomocou inverznej matice a ak áno, nájdite jej riešenie touto metódou.

Riešenie: Matica sústavy nie je štvorcová, a preto nemôžeme danú sústavu riešiť pomocou inverznej matice. ♣

Inverznú maticu môžeme využiť aj v komplikovanejších úlohách.

Príklad 9. Zistite, či existuje matica $\mathbf{X}$ tak, aby platil vzťah

$$\mathbf{X}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a ak áno, určte ju.

Riešenie: Označme

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

matice typu 2×2. Ak matica $\mathbf{X}$ existuje, tak je nutne typu 2×2. Nech platí

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Z rovnice $\mathbf{XA{=}B}$ roznásobením dospejeme ku sústave lineárnych rovníc tvaru:

$$\begin{array}{rcrrcrcl} 3x_1 & + & x_2 & & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & & = & 1 \\ & & & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \quad . \end{array}$$

Teda existencia, neexistencia, jednoznačnosť prípadne viacznačnosť určenia matice $\mathbf{X}$ je ekvivalentná tomu, či vyššie uvedená sústava rovníc má, alebo nemá riešenie, prípadne koľko riešení tejto sústavy existuje. Aj keď je to sústava 4 rovníc o 4 neznámych, sú to vlastne dve sústavy dvoch rovníc o dvoch neznámych s tou istou maticou sústavy, ale rôznymi pravými stranami. Na ich riešenie by sme mohli použiť Cramerovo pravidlo (prečo ?).

Ak si uvedomíme, že matica $\mathbf{A}$ je regulárna ($|\mathbf{A}| = 7$), tak existuje ku nej inverzná matica $\mathbf{A^{-1}}$. Z predpokladanej rovnosti $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$ vynásobením sprava $\mathbf{A^{-1}}$ dostávame explicitné vyjadrenie matice $\mathbf{X}$ v tvare $\mathbf{X} = \mathbf{BA^{-1}}$. Teda existuje jediná taká matica $\mathbf{X}$ a ľahko zistíme, že pre ňu platí:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/7 & -2/7 \\ -1/7 & 3/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/7 & 1/7 \\ 1/7 & 4/7 \end{pmatrix}.$$

♣

Cvičenia

11. Zistite, či je možné riešiť nasledovné sústavy lineárnych rovníc pomocou inverznej matice a ak áno, nájdite ich riešenie touto metódou.

a)
$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & x_2 & = & 5 \\ x_1 & - & x_2 & = & 3 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & 2 \\ -2x_1 & + & 6x_2 & = & 5 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 9 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & = & 7 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 10x_1 & & & + & 20x_3 & = & 60 \\ & & 20x_2 & & & = & 60 \\ 20x_1 & & & + & 68x_3 & = & 176 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & + & 3x_3 & = & 4 \\ & & 4x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 7 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & & & - & 2x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 5x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array}$$

g)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

h)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & & & + & 10x_3 & = & 1 \\ & & 10x_2 & & & = & 2 \\ 10x_1 & & & + & 5x_3 & = & 3 \end{array}$$

i)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & & & & & = & 12 \\ & & 2x_2 & & & = & 3 \\ & & & & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

j)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & -6 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & & & x_3 & = & 4 \end{array}$$

k)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & & & = & 3 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & & & = & 7 \\ 5x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 8 \end{array} .$$

12. Zistite, či existuje matica **X** tak, aby platili nižšie uvedené rovnice. Ak áno, určte maticu **X**.

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

f)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

g)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \mathbf{X} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

h)

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3\mathbf{X} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{X}$$

4.2.3 Gaussova eliminačná metóda

Príklad 10. Zistite, či sústava lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \\ & - & 3x_2 & + & 6x_3 & = & -3 \\ & & & - & 12x_3 & = & -3 \end{array}$$

je riešiteľná a ak áno, nájdite jej riešenie.

Riešenie: Determinant odpovedajúcej matice sústavy je $(2)(-3)(-12) \neq 0$, a preto má sústava jediné riešenie. Iste ste si všimli, že z poslednej rovnice ľahko dostávame $r_3 = -3/-12 = 1/4$. Z predposlednej potom platí $-3x_2 + 6(1/4) = -3$, a teda $r_2 = 3/2$. Konečne z prvej rovnice dostávame, že $r_1 = 3/2$. Potom $\mathbf{r} = (1/4, 3/2, 1/4)^T$. ♣

Tento spôsob riešenia sústavy rovníc takéhoto tvaru sa nazýva **spätná substitúcia**.

Sústavy lineárnych rovníc $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$ sa nazývajú **ekvivalentné** , ak každé riešenie sústavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je riešením sústavy $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$ a každé riešenie sústavy $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$ je riešením sústavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Prechod od sústavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ku ekvivalentnej sústave $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$ realizujeme pomocou **ekvivalentných úprav**.

Uvažujme opäť o sústave (4.5). **Gaussova eliminačná metoda** (GEM) riešenia sústavy (4.5) je založená na tom, že od sústavy lineárnych rovníc $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ prejdeme ku ekvivalentnej sústave rovníc $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$, pričom matica $\mathbf{C}$ má vlastnosť

$$c_{ij} = 0 \qquad \text{pre } i > j, c_{ii} \neq 0.$$

Matica $\mathbf{C}$ je teda regulárna horná trojuholníková matica. Spätnou substitúciou túto sústavu vyriešime a dostaneme tak riešenie pôvodnej sústavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Ekvivalentné úpravy, ktoré používame pri GEM sú:

- G2: vynásobenie niektorej rovnice sústavy (t. j. jej pravej i ľavej strany) nenulovým číslom
- G3: pripočítanie násobku jednej rovnice sústavy ku inej rovnici sústavy (pripočítavame odpovedajúce si členy).

Všimli ste si, že nebola uvedená ekvivalentná úprava G1?

Príklad 11. GEM riešte sústavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \\ x_1 & - & x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array} .$$

Riešenie: Pretože $|\mathbf{A}| \neq 0$ (presvedčte sa), má sústava práve jedno riešenie. Pomocou ekvivalentných úprav chceme dospieť ku sústave $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$, pričom matica $\mathbf{C}$ bude mať štruktúru:

$$\begin{pmatrix} \clubsuit & \clubsuit & \clubsuit \\ 0 & \clubsuit & \clubsuit \\ 0 & 0 & \clubsuit \end{pmatrix}$$

a na diagonále nenulové prvky.

Vynásobme prvú rovnicu sústavy číslom $(-1/2)$ a pripočítajme ju ku druhej rovnici. Dostaneme sústavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \\ & - & 3x_2 & + & 6x_3 & = & -3 \\ 4x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array} .$$

Analogicky, ak vynásobíme prvú rovnicu číslom (-2) a pripočítame ju ku tretej rovnici, dostaneme sústavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \\ & - & 3x_2 & + & 6x_3 & = & -3 \\ & - & 7x_2 & + & 2x_3 & = & -10 \end{array} .$$

Teraz už platí, že prvky prvého stĺpca odpovedajúcej matice sústavy, až na prvok v pozícii $(1,1)$, sú nulové.

Vynásobením druhej rovnice číslom $7/(-3)$ a pripočítaním ku tretej rovnici konečne dostaneme

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 6 \\ & - & 3x_2 & + & 6x_3 & = & -3 \\ & & & - & 12x_3 & = & -3 \end{array} .$$

To je ale sústava s takou maticou, akou sme si želali. Túto sústavu sme spätnou substitúciou riešili v predchádzajúcom príklade. Preto vieme, že $\mathbf{r} = (1/4, 3/2, 1/4)^T$.
♣

Vráťme sa ku všeobecnej sústave (4.5). Sformulujeme všeobecnú stratégiu pri GEM.

Prepokladajme, že prvok $a_{11} \neq 0$. Pripočítaním vhodných násobkov prvej rovnice ku zostávajúcim $(n-1)$ rovniciam dosiahneme, že koeficienty pri x_1 v týchto rovniciach budú nulové. Postupne budeme prvú rovnicu násobiť číslami

$$\frac{-a_{21}}{a_{11}}, \frac{-a_{31}}{a_{11}}, \ldots, \frac{-a_{n1}}{a_{11}}.$$

Tým sa dostaneme ku sústave tvaru

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}^{(1)}x_2 & + & a_{23}^{(1)}x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\
 & & a_{32}^{(1)}x_2 & + & a_{33}^{(1)}x_3 & + & \ldots & + & a_{3n}^{(1)}x_n & = & b_3^{(1)} \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & a_{n2}^{(1)}x_2 & + & a_{n3}^{(1)}x_3 & + & \ldots & + & a_{nn}^{(1)}x_n & = & b_n^{(1)}
\end{array} .$$

Horný index naznačuje, že sme ukončili prvý krok GEM.

V druhom kroku GEM, za predpokladu že $a_{22}^{(1)} \neq 0$, budeme pracovať iba so zostávajúcimi $(n-1)$ rovnicami. Vynásobením druhej rovnice číslami

$$\frac{-a_{32}^{(1)}}{a_{22}}, \frac{-a_{42}^{(1)}}{a_{22}}, \ldots, \frac{-a_{n2}^{(1)}}{a_{22}}$$

známym postupom dospejeme ku sústave

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}^{(1)}x_2 & + & a_{23}^{(1)}x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\
 & & & & a_{33}^{(2)}x_3 & + & \ldots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\
 & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & a_{n3}^{(2)}x_3 & + & \ldots & + & a_{nn}^{(2)}x_n & = & b_n^{(2)}
\end{array} .$$

Ďalej pokračujeme analogicky.

Za predpokladu,že

$$a_{11} \neq 0, a_{22}^{(1)} \neq 0, a_{33}^{(2)} \neq 0, \ldots, a_{n-1n-1}^{(n-2)} \neq 0,$$

sa po $(n-1)$ krokoch konečne dostaneme ku sústave

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}^{(1)}x_2 & + & a_{23}^{(1)}x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}^{(1)}x_n & = & b_2^{(1)} \\
 & & & & a_{33}^{(2)}x_3 & + & \ldots & + & a_{3n}^{(2)}x_n & = & b_3^{(2)} \\
 & & & & & & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & & & & & \ddots & a_{nn}^{(n-1)}x_n & = & b_n^{(n-1)}
\end{array} .$$

Pre maticu $\mathbf{C}$ tejto sústavy zrejme platí $c_{ij} = 0$ pre $i > j$ a $|\mathbf{C}| = a_{11}.a_{22}^{(1)}.\ldots.a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$, lebo $|\mathbf{A}| \neq 0$. Tým je skončená prvá časť GEM. Nasleduje druhá časť, riešenie sústavy $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$ spätnou substitúciou.

Čísla $a_{kk}^{(k-1)}$ pre $k = 1, 2, \ldots, n-1$ nazývame **pivot** k -teho kroku GEM. Pritom $a_{11}^{(0)} \equiv a_{11}$.

Existujú dve triedy matíc $\mathbf{A}$, pre ktoré takto popísaná GEM je realizovateľná.

- Nech $\mathbf{A}$ je matica sústavy (4.5). Nech platí

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|$$

(matica $\mathbf{A}$ sa vtedy nazýva **diagonálne dominantná**),
$|\mathbf{A}| \neq 0$. Potom GEM je realizovateľná.

(Ak pre aspoň jedno i platí

$$|a_{ii}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}|,$$

tak matica $\mathbf{A}$ sa nazýva **ostro diagonálne dominantná**.)

- Nech $\mathbf{A}$ je matica sústavy (4.5). Nech $\mathbf{A} = \mathbf{A^T}$ (matica $\mathbf{A}$ je teda symetrická). Nech pre všetky nenulové vektory $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T \neq \mathbf{0}$ platí

$$\mathbf{y^T A y} \equiv \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j > 0$$

(matica $\mathbf{A}$ sa vtedy nazýva **kladne definitná**). Potom je GEM realizovateľná.

Diagonálna dominantnosť je ľahko verifikovateľná. O mnohých sústavách lineárnych rovníc, ktoré vznikajú pri riešení praktických problémov sa vie, že matica sústavy je kladne definitná, prípadne je známa podmienka, väčšinou ľahko splniteľná na to, aby matica sústavy bola kladne definitná.

Sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

nemôžeme riešiť GEM. Vadí nám samozrejme číslo 0 pri x_1 v prvej rovnici. Iste ste sami prišli na to, že môžeme definovať ďalšiu ekvivalentnú úpravu:

- G1: vzájomná výmena niektorých dvoch rovníc sústavy.

Pridaním tejto ekvivalentnej úpravy sa značne rozšírila trieda rovníc $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, na ktoré môžeme úspešne použiť GEM. Ako uvidíme v časti o numerických metódach riešenia sústav lineárnych rovníc, má úprava G1 aj ďalší, tiež podstatný význam. Je nutné používať G1 aj v iných situáciach, ako sa vyskytla v predchádzajúcej sústave rovníc.

Pri použití GEM nie je nutné preverovať podmienku, či $|\mathbf{A}| \neq 0$. Na základe známych vlastností determinantov platí: ak $|\mathbf{A}| \neq 0$, tak aj $|\mathbf{C}| \neq 0$. (A teda, ak $|\mathbf{C}| = 0$, tak aj $|\mathbf{A}| = 0$.)Pre regulárnosť matice $\mathbf{A}$ je totiž podstatné iba to, že $|\mathbf{A}| \neq 0$ a nie akú má nenulovú hodnotu.

Ekvivalentné úpravy G1, G2, G3 nápadne pripomínajú riadkové operácie O1, O2, O3, ktoré sa používali pri vytvorení Gaussovho tvaru matice. Stačí len "zrušiť" neznáme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a pracovať s rozšírenou maticou $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$. Po nájdení jej Gaussovho tvaru je potrebné zas "pripísať si" neznáme $x_1, x_2, \ldots, x_n$ za odpovedajúce koeficienty a máme sústavu $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$. Technický rozdiel, (ktorý ale vymizne, ak použijeme spätnú substitúciu), je ten, že Gaussov tvar matice vyžadoval vedúce jednotky, kým GEM vyžaduje, aby vedúce prvky (pivoty) ako analógie vedúcich jednotiek boli rôzne od nuly. Samozrejme, že použitím G2 by sme dosiahli, aby boli jednotkami.

Jedna z modifikácií GEM sa nazýva **Gaussova — Jordanova** eliminačná metóda. Tá vyžaduje, aby sme sa od sústavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ cez sústavu $\mathbf{Cx} = \mathbf{d}$ dostali ku sústave $\mathbf{Ex} = \mathbf{f}$, pričom matica $\mathbf{E}$ je diagonálna s $e_{ii} \neq 0$. Súvis s redukovaným Gaussovým tvarom matice je už zrejmý.

Cvičenia

13. Gaussovou eliminačnou metódou určte riešenia nasledovných sústav lineárnych rovníc.

a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 11 \\ -x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & = & 32 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & = & 42 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 10 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -4 \\ 6x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -1 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & -3 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 6x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & -10 \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ 8x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \end{array}$$

h)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -3 \end{array}$$

i)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 20 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 11 \\ 2x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 40 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 37 \end{array}$$

4.2.4 Maticové rovnice

V časti o využití inverznej matice sme riešili aj úlohy typu **AX=B** pre vhodné definované matice **A, X, B**.

Ku takejto rovnici by sme sa dostali, ak by sme potrebovali riešiť istý počet sústav s jednou maticou sústavy, ale s rôznymi pravými stranami:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{Ax} = \mathbf{b}^{(2)}, \dots, \mathbf{Ax} = \mathbf{b}^{(k)}.$$

Ak **A** je regulárna matica, tak prvá myšlienka by bola určiť $\mathbf{A^{-1}}$ a odpovedajúce riešenia dostať v tvare:

$$\mathbf{r}^{(l)} = \mathbf{A^{-1}b}^{(l)} \qquad\qquad l = 1, 2, \dots, k.$$

Podrobná analýza však ukazuje, že je výhodnejšie použiť princíp GEM aj na takúto úlohu.

Zo stĺpcových vektorov $\mathbf{b}^{(1)}, \dots, \mathbf{b}^{(k)}$ zostrojíme maticu

$$\mathbf{B} = (\mathbf{b}^{(1)}, \dots, \mathbf{b}^{(k)})$$

zapísaním jednotlivých stĺpcov za sebou. **Vhodne** označíme neznáme a vytvoríme z nich maticu **X**. Dostaneme sa tak ku maticovej rovnici **AX=B**. Ďalej je výhodné postupovať tak, ako je uvedené v závere časti o GEM, t.j. pracovať iba s rozšírenou maticou sústavy $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ a využívať ekvivalentné úpravy G1, G2, G3. Nesmieme zabudnúť na to, že na pravej strane máme viacero stĺpcov, a preto treba každý z nich upravovať. Spätnou substitúciou, pričom berieme do úvahy odpovedajúce si stĺpce neznámych a pravých strán, dostaneme riešenie.

Príklad 12. Riešte sústavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}^{(l)}$, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pre vektory pravých stran

$$\mathbf{b}^{(1)} = (1, 4, 1)^T, \mathbf{b}^{(2)} = (2, 2, 1)^T.$$

Riešenie: Ak označíme x_{11}, x_{21}, x_{31} neznáme pre pravú stranu $\mathbf{b}^{(1)}$, x_{12}, x_{22}, x_{32} neznáme pre pravú stranu $\mathbf{b}^{(2)}$ a vytvoríme z nich maticu **X** :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix},$$

tak máme riešiť maticovú rovnicu $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$. Napíšte si ju! Po "odstránení" neznámych dostaneme rozšírenú maticu tvaru:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Známymi úpravami dospejeme ku matici tvaru:

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 2 & 0 & -4 & -6 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 7/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right).$$

Ak by sme si zas "pripísali" neznáme, tak od sústavy $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ sme sa dostali ku sústave $\mathbf{CX} = \mathbf{D}$. Urobte tak! Matica $\mathbf{C}$ má vlastnosti požadované v GEM. Spätnou substitúciou, ak berieme do úvahy prvý stĺpec matice $\mathbf{D}$, dostaneme

$$\mathbf{r}^{(1)} = (3, -5, 3)^T$$

a ak berieme do úvahy druhý stĺpec matice $\mathbf{D}$, konečne dostaneme

$$\mathbf{r}^{(2)} = (2, -2, 1)^T.$$

Samozrejme, že sme mohli pokračovať až po redukovaný Gaussov tvar matice $\mathbf{A}$ a nebolo by potrebné robiť spätnú substitúciu. Z hľadiska počtu operácií to je však nevýhodné. ♣

Na riešení maticovej rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, pre vhodnú voľbu matice $\mathbf{B}$, je založená jedna z metód na určenie $\mathbf{A^{-1}}$. Pre inverznú maticu (predpokladáme, že existuje) platí $\mathbf{A}.\mathbf{A^{-1}} = \mathbf{I_n}$. Teda $\mathbf{B} = \mathbf{I_n}$. Aby sa nemusela robiť spätná substitúcia, je nutné upraviť maticu $\mathbf{A}$ na redukovaný Gaussov tvar. Potom už vedľa nej napísaná matica je inverznou maticou ku matici $\mathbf{A}$. Príklad na takýto postup bol uvedený v časti 3.1.7 o určovaní inverznej matice.

4.2.5 Realita riešenia sústav

Je podstatný rozdiel v tom, či riešime sústavu lineárnych rovníc, ktorá vznikla na základe istého reálneho problému alebo bola, tak ako je to v prípade doteraz uvádzaných sústav, určená len pre potreby ozrejmenia si niektorých metód na ich riešenie. V praxi sa často vyskytujú úlohy, v ktorých je potrebné riešiť také sústavy lineárnych rovníc, ktoré majú rádovo stovky neznámych. Preto efektívnosť algoritmu ich riešenia môžeme posudzovať aj podľa toho, koľko si vyžaduje aritmetických operácií. Z tohto hľadiska je Cramerovo pravidlo neefektívnou metódou. Tak isto, pokiaľ to nie je nutné, sa vyhýbame určovaniu inverznej matice. Význam Cramerovho pravidla a využitie inverznej matice je skôr v teoretických úvahách, v elegantnosti vyjadrenia riešenia. V prípade malého počtu neznámych (povedzme pre $n < 4$) je Cramerovo pravidlo a inverzná matica vhodnou metódou. Gaussovu eliminačnú metódu je možné zapisovať v takom tvare, ktorý dokáže identifikovať niektoré prípadné chyby riešiteľa, a teda je vhodný pre realizáciu GEM na kalkulačke. Všeobecne sa takýto postup doporučuje, ak nechceme alebo nemôžeme využívať výpočtovú techniku, pre $n \leq 10$. Časť súčasného software na riešenie sústav lineárnych rovníc je založená na Gaussovej eliminačnej metóde a jej početných modifikáciách. To ale znamená používať počitač na riešenie sústav lineárnych rovníc. Významným faktorom, ktorý dokáže ovplyniť efektívnosť metódy, je využitie špecifických vlastností matice sústavy (napríklad pásovosť alebo riedkosť matice). Tieto techniky však ďaleko presahujú rámec týchto skrípt. Efektívnosť algoritmu môžeme posudzovať aj podľa presnosti vypočítaného riešenia. V súčasnosti môže pôsobiť tento pojem zavádzajúco, a preto doporučujeme čitateľovi oboznámiť sa s ním v časti o numerických metódach riešenia sústav lineárnych rovníc.

4.3 Homogénne sústavy

Uvažujme teraz o homogénnej sústave m lineárnych rovníc s n neznámymi

$$\begin{array}{rcrl} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n = & 0 \\ a_{21}x_1 + & \dots & + a_{2n}x_n = & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n = & 0. \end{array} \tag{4.6}$$

Pri riešení homogénnych sústav spojíme postup použitý pri GEM (a pri zisťovaní hodnosti matice) s tvrdeniami o počte riešení. Označme **A** odpovedajúcu maticu sústavy (4.6). Sústava (4.6) má vždy triviálne riešenie $\mathbf{r} = (0, 0, \ldots, 0)^T$.

- Nech $h(\mathbf{A}) = n$. Potom (4.6) má iba triviálne riešenie.

Príklad 13. Riešte sústavu rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 7x_3 & = & 0 \quad . \end{array}$$

Riešenie: Známymi úpravami sa dostaneme ku ekvivalentnej sústave

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 15x_3 & = & 0 \\ & & & - & 134x_3 & = & 0 \quad . \end{array}$$

Vidíme,že $h(\mathbf{A}) = 3$, a teda sústava má iba triviálne riešenie. Spätná substitúcia nám iba potvrdí tento záver. ♣

- Nech $h(\mathbf{A}) = p < n$. Potom sústava (4.6) má nekonečne veľa riešení.

Postupom známym z GEM dospejeme ku ekvivalentnej sústave rovníc. Z nej je možné vybrať p rovníc a v nich vybrať p neznámych (nazývame ich **hlavné neznáme**) tak, že submatica z odpovedajúcich koeficientov má determinant rôzny od nuly. Tento výber však nemusí byť jednoznačný. Zvyšné rovnice neuvažujeme a zvyšných $(n - p)$ neznámych považujeme za parametre a dáme ich na pravú stranu takto vzniknutej sústavy. Dostali sme teda sústavu p lineárnych rovníc s p hlavnými neznámymi a $(n-p)$ parametrami. Z tejto sústavy vieme už jednoznačne určiť, v závislosti na parametroch, hlavné neznáme. Pritom zvyčajne postupujeme tak, že jeden parameter zvolíme rovný 1 a ostatné 0 a nájdeme odpovedajúce riešenie $\mathbf{w}$. Takto skonštruujeme $(n - p)$, nutne lineárne nezávislých riešení pôvodnej sústavy:

$$\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}, \ldots, \mathbf{w}^{(n-p)}$$

a pomocou nich **všeobecné riešenie** homogénnej sústavy v tvare

$$\sum_{i=1}^{n-p} \alpha_i \mathbf{w}^{(i)}.$$

Pritom α_i sú ľubovolné reálne čísla.

Platí, že pre každú voľbu α_i dostávame riešenie sústavy (4.6) a naopak, každé riešenie (4.6) sa dá vyjadriť ako lineárna kombinácia vektorov $\mathbf{w}^{(i)}$.

Príklad 14. Riešte homogénnu sústavu rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \quad . \end{array}$$

Riešenie: Poslednú rovnicu vydelíme tromi a vymeníme ju s prvou rovnicou. Potom už ľahko dospejeme ku ekvivalentnej sústave rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & - & x_2 & - & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \quad . \end{array}$$

Vidno, že $h(\mathbf{A}) = 2 \equiv p < 4 \equiv n$.

Pri možnej voľbe $x_3 = s$, $x_4 = t$ dostaneme sústavu dvoch rovníc s dvomi hlavnými neznámymi x_1, x_2 a parametrami s, t:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & = & -s & + & t \\ & - & x_2 & = & 4s & - & 5t \end{array} .$$

Pre $s = 1, t = 0$ je odpovedajúce riešenie

$$\mathbf{w}^{(1)} = (3, -4, 1, 0)^T$$

a pre $s = 0, t = 1$ je odpovedajúce riešenie

$$\mathbf{w}^{(2)} = (-4, 5, 0, 1)^T.$$

Všeobecné riešenie homogénnej sústavy je teda tvaru

$$\alpha_1 \mathbf{w}^{(1)} + \alpha_2 \mathbf{w}^{(2)} = \alpha_1 (3, -4, 1, 0)^T + \alpha_2 (-4, 5, 0, 1)^T$$

pre α_1, $\alpha_2 \in \mathbf{R}$.

Ak by sme si zvolili za hlavné premenné x_1, x_3 a za parametre x_2, x_4 (je to možné), tak dostaneme ekvivalentnú sústavu

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_3 & = & -s & + & t \\ & - & 4x_3 & = & s & - & 5t \end{array}$$

a odpovedajúce všeobecné riešenie tej istej homogénnej sústavy by bolo tvaru

$$\beta_1 \mathbf{v}^{(1)} + \beta_2 \mathbf{v}^{(2)} = \beta_1 (-1/4, 0, 5/4, 1)^T + \beta_2 (-3/4, 1, -1/4, 0)^T$$

pre β_1, $\beta_2 \in \mathbf{R}$.

Táto nejednoznačnosť všeobecného riešenia je daná tým, že vektory

$$\left(\mathbf{w}^{(1)}, \mathbf{w}^{(2)}\right) \quad a \quad \left(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}\right)$$

tvoria dve rôzne bázy toho istého lineárneho priestoru riešení pôvodnej sústavy.[1]

♣

Na záver uvedieme užitočné tvrdenie. Ak v homogénnej sústave lineárnych rovníc je $m = n$, tak nutnou a postačujúcou podmienkou existencie nenulového (netriviálneho) riešenia je $|\mathbf{A}| = \mathbf{0}$.

Cvičenia

14. Určte netriviálne riešenia nasledovných sústav homogénnych rovníc

a)

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$$

b)

$$0x_1 + 2x_2 + 0x_3 = 0$$

c)

$$\begin{array}{ccccccccc} 9x_1 & + & 21x_2 & - & 15x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\ 12x_1 & + & 28x_2 & - & 20x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \end{array}$$

[1] Bližšie sa s pojmom báza môže čitateľ oboznámiť v literatúre, napr. Kluvánek, Mišík, Švec: Matematika 1.

d)

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{rcrcl} 2x_1 & + & 3x_2 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 6x_2 & = & 0 \end{array}$$

f)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & 5x_3 & = & 0 \end{array}$$

g)

$$\begin{array}{rcrcrcl} 5x_1 & + & 2x_2 & - & 18x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 8x_3 & = & 0 \end{array}$$

h)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 6x_2 & + & 10x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \end{array}$$

i)

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & - & 26x_3 & + & 22x_4 & = & 0 \\ x_1 & & & - & 8x_3 & + & 7x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

j)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \end{array}$$

4.4 Všeobecné sústavy

Uvažujme konečne o všeobecnej sústave m lineárnych rovníc s n neznámymi

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + & \dots & + a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & \dots & + a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \dots & + a_{mn}x_n = & b_m \end{array} \tag{4.7}$$

zapísanej pre vhodne definovanú maticu $\mathbf{A}$, vektory $\mathbf{x}$,$\mathbf{b}$ aj v tvare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Vieme, že nutná a postačujúca podmienka pre to, aby sústava (4.7) mala riešenie, je $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$. Nech sústava (4.7) má riešenie. Ak $h(\mathbf{A}) = n$, tak (4.7) má jediné riešenie. Ak $h(\mathbf{A}) < n$, tak (4.7) má nekonečne veľa riešení. Tieto tvrdenia spolu s postupom použitým pri GEM (a pri zisťovaní hodnosti matice) a spôsobom riešenia homogénnej sústavy rovníc využívame pri riešení (4.7).

- Prípad $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = n$.

Príklad 15. Zistite, či sústava rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -5 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 10 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 7x_3 & = & -9 \end{array}$$

má riešenie a ak áno, určte ho.

Riešenie: Známym spôsobom dospejeme ku ekvivalentnej sústave

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -5 \\ & & x_2 & - & 13x_3 & = & 1 \\ & & & - & 134x_3 & = & 35 \end{array} .$$

Vidno, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$, a preto existuje jediné riešenie tejto sústavy. Spätná substitúcia len potvrdzuje toto tvrdenie. Preto $\mathbf{r} = (77/134, -321/134, -35/134)^T$.

♣

- Prípad $h(\mathbf{A}) \neq h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$.

Príklad 16. Zistite, či sústava rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

má riešenie a ak áno, určte ho.

Riešenie: Ihneď dostávame

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & & & = & 0 \\ & - & x_2 & & & = & -2 \end{array} .$$

Potom $h(\mathbf{A}) = 2$,$h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3$, a preto sústava nemá riešenie. Nemuseli sme použiť Frobeniusovu vetu. Z ekvivalentnej sústavy vidno, že je sporná. Nemôže súčasne platiť $-x_2 = 0$ a $-x_2 = -2$. ♣

- Prípad $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \equiv p < n$.

V tomto prípade má sústava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nekonečne veľa riešení. Všetky riešenia sú tvaru

$$\mathbf{r} = \mathbf{w} + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n-p}} \alpha_{\mathbf{i}} \mathbf{w}^{(i)},$$

kde

* $\mathbf{w}$ je nejaké riešenie sústavy $\mathbf{Ax{=}b}$
* $\mathbf{w}^{(i)}$ sú lineárne nezávislé riešenia odpovedajúcej homogénnej sústavy rovníc $\mathbf{Ax{=}0}$, pre $i = 1, \ldots, n-p$
* $\alpha_i \in \mathbf{R}$ pre $i = 1, \ldots, n-p$.

Často sa hovorí, že riešenie **r** je v tvare súčtu **partikulárneho** (nejakého) riešenia sústavy **Ax=b** a všeobecného riešenia odpovedajúcej homogénnej sústavy **Ax=0**. Pri troche zručnosti sa tieto dve úlohy dajú riešiť spoločne.

Príklad 17. Zistite, či sústava lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & 6 \end{array}$$

má riešenie a ak áno, určte ho.

Riešenie: Známym spôsobom dospejeme ku ekvivalentnej sústave

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 2 \\ & - & x_2 & - & 4x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \end{array} .$$

Vidno, že $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 2 = p$. Teda sústava má nekonečne veľa riešení.

V časti o homogénnych sústavach sme zistili, že dve lineárne nezávislé riešenia odpovedajúcej homogénnej sústavy lineárnych rovníc sú $\mathbf{w}^{(1)} = (3, -4, 1, 0)^T$ a $\mathbf{w}^{(2)} = (-4, 5, 0, 1)^T$. Za parametre sme pritom zvolili neznáme x_3 a x_4 .

Nejaké (partikulárne) riešenie **Ax=b** dostaneme z ekvivalentnej sústavy

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & = & 2 & -s & + & t \\ & - & x_2 & = & & 4s & - & 5t \end{array}$$

najjednoduchšie tak, že v nej zvolíme za parametre $s = t = 0$. Dostávame sústavu

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ & - & x_2 & = & 0 \end{array} .$$

Potom už $\mathbf{w} = (2, 0, 0, 0)^T$. Teda všeobecné riešenie sústavy rovníc je tvaru

$$(2, 0, 0, 0)^T + \alpha_1(3, -4, 1, 0)^T + \alpha_2(-4, 5, 0, 1)^T,$$

kde α_1, $\alpha_2 \in \mathbf{R}$. Všimnite si, že za partikulárne riešenie sústavy **Ax=b** sme mohli zvoliť aj vektor $(1, 1, 1, 1,)^T$. Potom by bolo všeobecné riešenie tvaru

$$(1, 1, 1, 1)^T + \beta_1(3, -4, 1, 0)^T + \beta_2(-4, 5, 0, 1)^T.$$

Dosadením sa dá zistiť, že $(-3, 6, 1, 2)^T$ je tiež riešením sústavy. Môžeme ho vyjadriť ako

$$(2, 0, 0, 0)^T + 1(3, -4, 1, 0)^T + 2(-4, 5, 0, 1)^T,$$

ale aj

$$(1, 1, 1, 1)^T + 0(3, -4, 1, 0)^T + 1(-4, 5, 0, 1)^T.$$

♣

Cvičenia

15. Zistite, či nasledujúce sústavy sú riešiteľné a ak áno, nájdite ich riešenie.

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 12x_3 & = & 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 7x_1 & - & 4x_2 & - & 2x_3 & = & -6 \\ 16x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 5x_1 & - & 15x_2 & + & 7x_3 & = & 10 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 3 \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & - & 9x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 13x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 8x_3 & - & 2x_4 & = & -7 \end{array}$$

g)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \\ 7x_1 & + & 14x_2 & + & 20x_3 & + & 27x_4 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 10x_2 & + & 16x_3 & + & 19x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & + & 13x_4 & = & 5 \end{array}$$

h)
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & & & & = & -6 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & = & 2 \\ 4x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & + & 5x_4 & - & 9x_5 & = & -5 \end{array}$$

4.5 Numerické riešenie sústav lineárnych rovníc

4.5.1 Priame metódy

Riešiť sústavu lineárnych rovníc $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s regulárnou maticou rádu n, kde n je veľké číslo (rádovo tisíce aj viac), je v technickej praxi veľmi častá úloha. Táto úloha sa dnes už, samozrejme, realizuje na počítači. V posledných desaťročiach bolo vypracovaných niekoľko veľmi úspešných algoritmov na ich riešenie. Vzhľadom na dôležitosť akú majú lineárne systémy v praxi, tejto problematike sa v matematických aj programátorských kruhoch ešte stále venuje veľká pozornosť.
Metódu riešenia sústav $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ktorá vedie k riešeniu (až na zaokrúhľovacie chyby) po konečnom

počte krokov, nazývame **priama metóda**. Základným princípom priamych metód je **eliminácia** neznámych, ktorú už poznáme. Priame metódy využívame hlavne pre plné matice. Sú to také matice, ktorých väčšina prvkov je nenulová.
Vzhľadom na to, že riešenia trojuholníkových sústav ako aj Gaussova eliminačná metóda boli vysvetlené už v predchádzajúcich častiach, tu si rozoberieme len ich algoritmické a numerické aspekty. Riadkové úpravy prevádzané GEM môžeme interpretovať ako postupné násobenie matice **A transformačnými maticami** $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_{n-1}$, kde

$$\mathbf{T}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_{k+1,k} & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_{k+2,k} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_{n,k} & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

kde

$$m_{ik} = -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}},\ i = k+1, k+2, \ldots, n$$

sú multiplikátory k-teho kroku.
Označujeme
$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^{(0)} = (a_{ij}^{(0)}),\ \mathbf{T}_1\mathbf{A}^{(0)} \equiv \mathbf{A}^{(1)} = (a_{ij}^{(1)}), \ldots, \mathbf{T}_k\mathbf{A}^{(k-1)} \equiv \mathbf{A}^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}), \ldots, \mathbf{T}_{n-1}\mathbf{A}^{(n-2)} \equiv \mathbf{A}^{(n-1)} \equiv \mathbf{U}$;
$\mathbf{b} \equiv \mathbf{b}^{(0)},\ \mathbf{b}^{(1)} \equiv \mathbf{T}_1\mathbf{b}^{(0)}, \ldots, \mathbf{b}^{(k)} \equiv \mathbf{T}_k\mathbf{b}^{(k-1)},\ \ldots \mathbf{b}^{(n-1)} \equiv \mathbf{T}_{n-1}\mathbf{b}^{(n-2)}$. Po realizácii všetkých $n-1$ krokov eliminácie dostávame redukovanú maticu sústavy a stĺpec pravých strán (pozri časť Gaussova eliminačná metóda). Tú označíme **U** a stĺpec pravých strán bude **y**. Máme:

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^{(n-1)} = \mathbf{T}\mathbf{A}^{(0)},\ \ \mathbf{y} = \mathbf{b}^{(n-1)} = \mathbf{T}\mathbf{b}^{(0)},$$

kde

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{(n-1)}\mathbf{T}_{(n-2)} \ldots \mathbf{T}_2\mathbf{T}_1.$$

Matica **T** je regulárna, a preto existuje jej inverzná matica $\mathbf{T}^{-1}$, ktorú označíme **L**. Pre túto maticu platí:

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -m_{21} & 1 & \dots & \dots & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -m_{n1} & -m_{n2} & \dots & -m_{n-1,n} & 1 \end{pmatrix}.$$

To teda znamená, že matica **A** sa dá rozložiť na súčin dolnej (**L**) a hornej (**U**) trojuholníkovej matice. Platí:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{U}.$$

Stanovenie matíc **L** a **U** nazývame **trojuholníkovým rozkladom** alebo **LU rozkladom**. K danej matici **A** môžeme určiť viacero trojuholníkových rozkladov podľa toho, ako volíme diagonálne prvky matice **L**.

Príklad 18. Urobme pre danú maticu LU rozklad:

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 7 & 44 \end{pmatrix}$$

Riešenie: Danú maticu vieme rozložiť dvojakým spôsobom:

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 7 & 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

alebo

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 7 & 44 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

♣

Platí veta o jednoznačnosti rozkladu:

Veta 4.1 *Trojuholníkový rozklad regulárnej matice* $\mathbf{A}$ *je určený jednoznačne diagonálnymi prvkami matice* $\mathbf{L}$ *a môže byť určený Gaussovou elimináciou.*

V časti o GEM sme už spomínali triedy matíc, kedy môže byť GEM (a teda aj trojuholníkový rozklad) realizovaný. Existujú aj matice, pre ktoré sa GEM nedá realizovať. Aj tento fakt je dôvodom pre modifikácie GEM.
Ďalším dôvodom modifikácií GEM sú numerické aspekty GEM. Ich pôvod je hlavne v nepresnosti aritmetických operácií realizovaných na počítači (viď kapitola Reálne čísla, časť Chyby aritmetických operácií). Tieto nepresnosti spôsobia, že namiesto skutočných matíc rozkladu $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$ vypočítame $\bar{\mathbf{L}}$ a $\bar{\mathbf{U}}$, pričom $\bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{U}} \neq \mathbf{A}$. Ak teraz označíme $\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{U}}$, zaujíma nás rozdiel $\mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}}$. Existujú matice chýb $\mathbf{E}$ a $\mathbf{F}$, pre ktoré platí:

$$\bar{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{E}, \quad \bar{\mathbf{U}} = \mathbf{U} + \mathbf{F}.$$

Potom

$$\mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{LU} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{EU} - \mathbf{LF} - \mathbf{EF}.$$

Odtiaľ plynie dôležitý záver: Ak pri realizácii GEM vychádzajú pre multilpikátory alebo prvky redukovanej matice sústavy veľké čísla, sú tiež prvky matice $\mathbf{L}$ veľké čísla a preto rozdiel $\mathbf{A} - \bar{\mathbf{A}}$ (hlavne pre veľké n) môže byť rádovo mnohonásobne väčší ako je chyba $\mathbf{E}$ a $\mathbf{F}$. Preto aj rozdiel presného a vypočítaného riešenia môže byť neprijateľne veľký. V takomto prípade hovoríme, že GEM je numericky **nestabilná**.
Tieto dva dôvody nás vedú k modifikovaným metódam GEM. Tou modifikáciou bude **eliminácia s výberom hlavného prvku**. Prvok, ktorého prostredníctvom určujeme multiplikátory k-teho kroku, budeme nazývať **hlavným prvkom (pivotom)** k-teho kroku. Pri transformačnej matici $\mathbf{T}_k$ sme ho označili $a_{(k,k)}^{(k-1)}$. Rovnicu, z ktorej vyberáme hlavný prvok k-teho kroku, nazývame **hlavnou rovnicou** k-teho kroku. Aby sme minimalizovali zaokrúhľovacie chyby, je vhodné vyberať za hlavné prvky také prvky matice $\mathbf{A}^{(k)}$, ktoré majú čo najväčšiu absolútnu hodnotu. Chyba sa v takomto prípade pri ďalších násobeniach u GEM ďalej nezväčšuje. Ak vyberáme v danej fáze hlavný prvok zo všetkých prvkov, ktoré prichádzajú do úvahy, hovoríme o algoritme GEM s **úplným výberom hlavného prvku**. Ak vyberáme hlavný prvok len z niektorých prvkov (napr. len z jedného riadku alebo stĺpca matice) hovoríme o algoritme GEM s **čiastočným výberom hlavného prvku**.

Príklad 19. Riešme sústavu

$$\begin{array}{rcrcr} 0,0001x_1 & + & 1,00x_2 & = & 1,00 \\ 1,00x_1 & + & 1,00x_2 & = & 2,00 \end{array}$$

za predpokladu, že všetky operácie a zaokrúhľovania robíme na tri platné miesta. Je to úloha, ktorá nám umožní ukázať citlivosť jednotlivých algoritmov na zaokrúhľovacie chyby. Najskôr aplikujeme algoritmus GEM, teda bez výberu hlavného prvku. Pre multiplikátor m_{21} bude preto platiť: $m_{21} = -10^4$. Tento násobok prvej rovnice pripočítame k druhej. Dostávame (pracujeme na tri platné miesta):

$$\begin{array}{rcrcr} 0,0001x_1 & + & 1,00x_2 & = & 1,00 \\ & - & 10000x_2 & = & -10000 \end{array}$$

Odtiaľ potom máme aproximáciu riešenia (označíme ju $\mathbf{x}_c$).

$$\mathbf{x}_c = (0,000; 1,00)^T.$$

Ak za hlavný prvok zvolíme číslo v pozícii $(2,1)$ v matici (to jest hlavná rovnica prvého kroku bude druhá rovnica), potom $m_{21} = -\frac{0,0001}{1,00} = -0,0001$.
Dostávame redukovanú maticu v tvare:

$$\begin{array}{rcrcr} & & 1,00x_2 & = & 1,00 \\ 1,00x_1 & + & 1,00x_2 & = & 2,00. \end{array}$$

Jej riešením je vektor $\mathbf{x}_c = (1,00; 1,00)^T$. Porovnanie s presnejšou aproximáciou riešenia pôvodnej sústavy (označíme ju ako $\mathbf{x}_t$) $\mathbf{x}_t = (1,00010; 0,99990)^T$ ukazuje, ktorý z použitých algoritmov sa ukázal ako lepší.

Metóda LU rozkladu

Už vieme, za akých podmienok možno regulárnu maticu $\mathbf{A}$ rozložiť na súčin trojuholníkových matíc $\mathbf{L} = (l_{ij})$ a $\mathbf{U} = (u_{ij})$, to jest platí :

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU}.$$

Metóda riešenia sústavy lineárnych rovníc LU- rozkladom spočíva v tom, že najskôr stanovíme matice $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$ a potom riešime dve sústavy

$$\mathbf{Ly} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{Ux} = \mathbf{y}.$$

V dolnej trojuholníkovej matici $\mathbf{L}$ volíme na diagonále jedničky, to jest $l_{ii} = 1, i = 1, 2, \ldots, n$ a $\mathbf{U}$ je horná trojuholníková matica. Ako stanovíme prvky matíc $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$, si ukážeme na nasledujúcom príklade.

Príklad 20. Chceme vypočítať prvky matíc

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

tak, aby platila rovnosť

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 19 \\ 6 & 27 & 50 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Podľa definície súčinu matíc musí platiť:

$$\begin{aligned} 2 &= \mathbf{r}_1(\mathbf{L})\mathbf{s}_1(\mathbf{U}) = 1.u_{11}, \text{ a preto } u_{11} = 2, \\ 4 &= \mathbf{r}_2(\mathbf{L})\mathbf{s}_1(\mathbf{U}) = l_{21}.u_{11}, \text{ a preto } l_{21} = 2, \\ 6 &= \mathbf{r}_3(\mathbf{L})\mathbf{s}_1(\mathbf{U}) = l_{31}.u_{11}, \text{ a preto } l_{31} = 3, \end{aligned}$$

z toho dostávame

$$\mathbf{s}_1(\mathbf{L}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_1(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ďalej

$$\begin{aligned} 5 &= \mathbf{r}_1(\mathbf{L})\mathbf{s}_2(\mathbf{U}) = 1.u_{12}, \text{ a preto } u_{12} = 5, \\ 13 &= \mathbf{r}_2(\mathbf{L})\mathbf{s}_2(\mathbf{U}) = l_{21}.u_{12} + u_{22}, \text{ a preto } u_{22} = 3, \\ 27 &= \mathbf{r}_3(\mathbf{L})\mathbf{s}_2(\mathbf{U}) = l_{31}.u_{12} + l_{32}.u_{22}, \text{ a preto } l_{32} = 4, \end{aligned}$$

$$\mathbf{s}_2(\mathbf{L}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_2(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} 6 &= \mathbf{r}_1(\mathbf{L})\mathbf{s}_3(\mathbf{U}) = 1.u_{13}, \text{ a preto } u_{13} = 6, \\ 19 &= \mathbf{r}_2(\mathbf{L})\mathbf{s}_3(\mathbf{U}) = l_{21}.u_{13} + u_{23}, \text{ a preto } u_{23} = 7, \\ 50 &= \mathbf{r}_3(\mathbf{L})\mathbf{s}_3(\mathbf{U}) = l_{31}.u_{13} + l_{32}.u_{23} + u_{33}, \text{ a preto } u_{33} = 4, \end{aligned}$$

$$\mathbf{s}_3(\mathbf{L}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s}_3(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix},$$

Takže máme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & 13 & 19 \\ 6 & 27 & 50 \end{pmatrix}.$$

Z tohoto príkladu vidíme, že matice **L** a **U** počítame po stĺpcoch. Vo všeobecnosti máme

$$a_{ij} = \mathbf{r}_i(\mathbf{L})\mathbf{s}_j(\mathbf{U})$$

a odtiaľ pre $i \leq j$ dostávame

$$a_{ij} = l_{i1}u_{1j} + l_{i2}u_{2j} + \ldots + l_{i,i-1}u_{i-1,j} + 1.u_{ij}$$

a pre $i > j$ máme

$$a_{ij} = l_{i1}u_{1j} + l_{i2}u_{2j} + \ldots + l_{i,j-1}u_{j-1,j} + l_{ij}u_{jj}.$$

Vo vzorcoch je $l_{ik} = 0$, pokiaľ $i < k$, a $u_{kj} = 0$ pre $k > j$. Z prvého vzorca vypočítame u_{ij} pre $i = 1, 2, \ldots, j$ a z druhého l_{ij} pre $i = j+1, j+2, \ldots, n$.
Výhoda metódy LU- rozkladu je značná hlavne v prípadoch, keď riešime viac sústav s rôznymi pravými stranami a rovnakou maticou. Spravíme najskôr rozklad matice **A** a v ďalšom už len počítame sústavy s trojuholníkovými maticami.

Cvičenia

16. Riešte sústavy lineárnych rovníc $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 8 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 25 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Použite metódu LU -rozkladu, GEM a aj GEM s výberom hlavného prvku.

4.5.2 Iteračné metódy

Pre ľahšie pochopenie tejto časti je vhodné oboznámiť sa so základnými poznatkami o iteračných metódach, ktoré sa nachádzajú v kapitole Reálne čísla, časti Algoritmy.
Tieto metódy sú užitočné pri riešení (spravidla) veľkých sústav lineárnych rovníc postupným približovaním sa k presnému riešeniu. Špeciálne iteračné metódy sa tiež používajú pre spresnenie riešenia získaného eliminačnou metódou. Princíp iteračnej metódy najskôr budeme ilustrovať na jednoduchom príklade:

Príklad 21. Iteračnou metódou chceme nájsť riešenie sústavy rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcr} 11x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 15 \\ x_1 & + & 10x_2 & + & 2x_3 & = & 16 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 8x_3 & = & 1 \end{array}$$

alebo

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Sústavu musíme najskôr upraviť na tvar vhodný na vykonávanie iterácií. Urobíme to tak, že z každej rovnice vyčleníme jednu neznámu tak, aby sme na ľavej strane dostali celý vektor $\mathbf{x}$ a ostatné členy dáme na pravú stranu. Napríklad:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{11}(15 - 2x_2 - x_3) \\ x_2 &= \tfrac{1}{10}(16 - x_1 - 2x_3) \\ x_3 &= \tfrac{1}{8}(-1 + 2x_1 + 3x_2) \end{aligned}$$

to jest

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{15}{11} \\ \frac{8}{5} \\ -\frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Označme maticu tohto zápisu $\mathbf{H_J}$. Iná možnosť, ako upraviť pôvodnú sústavu na tvar vhodný pre iterácie, môže byť:

$$\begin{aligned} x_1 &= 15 - 10x_1 - 2x_2 - x_3 \\ x_2 &= 16 - x_1 - 9x_2 - 2x_3 \\ x_3 &= -1 + 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 \end{aligned}$$

to jest

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -2 & -1 \\ -1 & -9 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Maticu tohto zápisu označíme $\mathbf{H_B}$. Týchto možností je nekonečne veľa, ale len niektoré vedú ku konvergentným postupnostiam. (Keďže pracujeme s postupnosťami vektorov, konvergenciu v tomto prípade chápeme po zložkách). Z týchto dvoch upravených sústav dostávame rekurentné vzťahy tak, že k neznámym na ľavej strane pripíšeme index $k+1$ a k neznámym na pravej strane zas index k. Máme

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{11}(15 - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{10}(16 - x_1^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{8}(-1 + 2x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)}) \end{aligned} \tag{4.8}$$

to jest

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{H_J}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g_J}$$

alebo

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= 15 - 10x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} - x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} &= 16 - x_1^{(k)} - 9x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} &= -1 + 2x_1^{(k)} + 3x_2^{(k)} - 7x_3^{(k)} \end{aligned} \tag{4.9}$$

to jest

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{H_B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g_B}.$$

Teraz zvolíme $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T$, napríklad $(0,0,0)^T$. Dosadíme tieto počiatočné hodnoty do pravej strany odvodených rekurentných vzťahov (4.8) a vypočítame:

$$\mathbf{x}^{(1)} = (\frac{15}{11}, \ \frac{16}{10}, \ -\frac{1}{8})^T.$$

Ak budeme takto ďalej pokračovať využívajúc opäť vzťahy (4.8), dostávame:

$$\mathbf{x}^{(2)} = (1,0840; \ 1,4886; \ 0,81590)^T,$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = (1,0188; \ 1,3284; \ 0,70422)^T.$$

Po vykonaní niekoľkých ďalších iterácií dospejeme k približnému riešeniu

$$\mathbf{x_c} = (1,056; \ 1,364; \ 0,651)^T.$$

Ak budeme počítať analogicky podľa rekurentných vzťahov (4.9), dostávame:

$$\mathbf{x}^{(1)} = (15, \ 16, \ -1)^T,$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = (-166; \ -145; \ 84)^T,$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = (1881; \ 16551; \ -1990)^T.$$

Tu sú jednotlivé zložky vektorov značne rozptýlené a je pravdepodobné, že postupnosť iterácií diverguje. ♣

Z tohoto príkladu vidíme, že nie každý ľubovoľne vytvorený rekurentný vzťah je vhodný pre výpočet, pretože nie každá postupnosť ním získaných iterácii konverguje. Pozrime sa preto na problém hľadania vhodných iteračných metód trochu všeobecnejšie.

Uvažujme lineárnu sústavu rovníc s regulárnou reálnou maticou sústavy

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{4.10}$$

a predpokladajme, že existuje jediné riešenie tejto sústavy: $\mathbf{r} = \mathbf{A^{-1}b}$. Rovnicu (4.10) prepíšeme na tvar vhodný pre iterácie

$$\mathbf{x} = \mathbf{Hx} + \mathbf{g} \tag{4.11}$$

tak, aby jej riešením bol tiež vektor $\mathbf{r} = \mathbf{A^{-1}b}$. Maticu $\mathbf{H}$ nazývame **iteračnou maticou**.
Zostrojíme postupnosť iterácií $\mathbf{x}^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})^T$ podľa vzorca

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{Hx}^{(k)} + \mathbf{g}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots \tag{4.12}$$

Ak existuje $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*$, (definíciu limity pozri kapitola Limita funkcie), potom prechodom k limite vo vzťahu (4.12) dostaneme $\mathbf{x}^* = \mathbf{Hx}^* + \mathbf{g}$, a teda $\mathbf{x}^*$ je riešením rovnice (4.11). Z nášho predpokladu vyplýva, že $\mathbf{x}^* = \mathbf{r}$ a iterácia $\mathbf{x}^{(k)}$ je aproximáciou $\mathbf{r}$.
Okrem predpísania iteračného vzťahu musíme ešte pripojiť inštrukciu, ako iteračný proces zahájiť, t.j. voľbu $\mathbf{x}^{(0)}$ (viď časť Algoritmy v kapitole Reálne čísla) a ako ho ukončiť. Ukončenie procesu zabezpečíme splnením jednej z nasledujúcich podmienok:

1. stanovíme počet iterácií, ktoré chceme vypočítať
2. stanovíme podmienku zastavenia: zvolíme číslo $\delta > 0$ (dostatočne malé) a výpočet ukončíme, ak bude splnená napríklad podmienka:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|^2} < \delta.$$

Jacobiho metóda
Pri vysvetlení tejto metódy pôjde o zovšeobecnenie postupu z predchádzajúceho príkladu. Napíšeme i-tu rovnicu sústavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.13}$$

Ak je $a_{ii} \neq 0$, dostávame

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{ij}x_j \right), \ i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.14}$$

Teda z i-tej rovnice sme vypočítali neznámu x_i. **Jacobiho iteračná formula** je tvaru:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right), \ k = 0, 1, \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.15}$$

alebo maticovo

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{H_J}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g_J}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4.16}$$

kde

$$\mathbf{H_J} = \begin{pmatrix} 0, & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \ldots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \ldots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g_J} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \ldots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

Príklad 22. Riešme sústavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ Jacobiho metódou, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Riešenie: Výsledky zapíšeme do tabuľky. Vidíme, že iterácie konvergujú dosť pomaly. (Porovnajte s príkladom 6!)

$\mathbf{x}^{(0)}$	$\mathbf{x}^{(1)}$	$\mathbf{x}^{(3)}$	$\mathbf{x}^{(4)}$	$\mathbf{x}^{(5)}$	$\mathbf{x}^{(6)}$	$\mathbf{x}_t$
0	0,25	0,4375	0,46875	0,48438	0,49219	0,5
0	0,50	0,6875	0,71875	0,73438	0,74219	0,75
0	0,00	0,1875	0,21875	0,23438	0,24219	0,25
0	0,25	0,4375	0,46875	0,48438	0,49219	0,5

♣

Gauss-Seidelova metóda

Opäť použijeme rozpis i-tej rovnice (4.13) a (4.14), ale rozpíšeme ho do nasledujúcej podoby

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \right), \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.17}$$

V tejto metóde využijeme fakt, že pri i-tej rovnici riešenia $(k+1)$-vej iterácie poznáme okrem celého vektora $\mathbf{x}^{(k)}$ aj prvých $i-1$ zložiek vektora $k+1$ -vej iterácie. A teda tieto výpočty môžeme využiť. Preto iteračné indexy tejto metódy zapíšeme takto:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} \right), \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.18}$$

Gauss-Seidelova iteračná formula v maticovom tvare vyzerá nasledovne:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{H_S}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{g_S}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.19}$$

Konkrétna podoba matice $\mathbf{H_S}$ a vektora $\mathbf{g_S}$ sa dajú stanoviť pomocou prvkov a_{ij} matice $\mathbf{A}$.

Príklad 23. Sústavu z predchádzajúceho príkladu budeme riešiť Gauss -Seidelovou metódou.

Riešenie: Budeme mať iteračné vzorce:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \tfrac{1}{4}(1 + x_2^{(k)} + x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} &= \tfrac{1}{4}(2 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} &= \tfrac{1}{4}(x_1^{(k+1)} + x_4^{(k)}) \\ x_4^{(k+1)} &= \tfrac{1}{4}(1 + x_2^{(k+1)} + x_3^{(k+1)}) \end{aligned}$$

Výsledky opäť zapíšeme do tabuľky. Vidíme, že iterácie konvergujú a v porovnaní s Jacobiho metódou, konvergujú rýchlejšie.

$\mathbf{x}^{(0)}$	$\mathbf{x}^{(1)}$	$\mathbf{x}^{(2)}$	$\mathbf{x}^{(3)}$	$\mathbf{x}^{(4)}$	$\mathbf{x}^{(5)}$	$\mathbf{x}_t$
0	0,25	0,40625	0,47656	0,49414	0,49854	0,5
0	0,5625	0,70312	0,73828	0,74707	0,74927	0,75
0	0,0625	0,20312	0,23828	0,24707	0,24927	0,25
0	0,40625	0,47656	0,49414	0,49854	0,49963	0,5

♣

Teraz sa budeme venovať konvergencii a odhadu chyby uvedených iteračných metód.
Označíme **vektor chyby k-tej iterácie**

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{r}.$$

Z doteraz povedaného vieme:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \mathbf{g}, \text{ a } \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{H}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{g},$$

po odčítaní týchto vzťahov dostaneme:

$$\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{H}\mathbf{e}^{(k-1)} = \ldots = \mathbf{H}^k\mathbf{e}^{(0)}.$$

Pretože $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{r}$ práve keď $\lim_{k\to\infty} \mathbf{e}_{(k)} = \mathbf{0}$ (nulový vektor), musíme vyšetriť konvergenciu noriem mocnín $\mathbf{H}^k$ matice $\mathbf{H}$ k nule.

Veta 4.2 *(Konvergenčná) Iterácie* $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{H}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{g}$ *konvergujú pre ľubovoľné* $\mathbf{x}^{(0)}$ *teda* $\lim_{k\to\infty} \mathbf{H}^k\mathbf{e}^{(0)} = \mathbf{0}$*, práve keď*

$$\rho(\mathbf{H}) = \max_i |\lambda_i(\mathbf{H})| < 1, \tag{4.20}$$

kde číslo $\rho(\mathbf{H})$ *sa nazýva* **spektrálny polomer** *matice* $\mathbf{H}$ *a* $\lambda_i(\mathbf{H})$ *sú vlastné čísla matice* $\mathbf{H}$. [2]

Poznámka. Pretože $\mathbf{e}^{(k)}$ je lineárna funkcia $\mathbf{e}^{(k-1)}$, hovoríme, že konvergencia uvedeného iteračného procesu je **lineárna**.

Veta 4.3 *(Postačujúca podmienka konvergencie). Ak platí podmienka*

$$||\mathbf{H}|| \leq q < 1, \tag{4.21}$$

potom postupnosť $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$*, určená formulou* $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{H}\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{g}$*, konverguje pri ľubovoľnej voľbe vektora* $\mathbf{x}^{(0)}$ *a je*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = (\mathbf{I} - \mathbf{H})^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{x}_t,$$

kde $\mathbf{I}$ *je jednotková matica a* $||.||$ *označuje normu matice.*

Norma matice je nezáporné reálne číslo napr. ak $\mathbf{A} = \{\mathbf{a_{ij}}\}_{\mathbf{i,j=1}}^{\mathbf{n}}$, potom

$$||A|| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Podmienky (4.20) a (4.21) sa v praxi dosť ťažko overujú, preto je vhodné sformulovať postačujúce podmienky konvergencie metód priamo vzhľadom k matici $\mathbf{A}$.
Dajú sa ukázať nasledujúce kritériá konvergencie:

[2] Definíciu vlastného čísla pozri kapitolu 5, Vlastné čísla a vlastné vektory matice.

Veta 4.4 *Ak má matica* $\mathbf{A}$ *vlastnosť ostrej diagonálnej dominantnosti, potom Jacobiho aj Gauss-Seidelova metóda konvergujú pre ľubovoľnú začiatočnú hodnotu vektora* $\mathbf{x}^{(0)}$.
Ak je matica $\mathbf{A}$ *symetrická a kladne definitná, potom Gauss-Seidelova metóda konverguje pre ľubovoľný začiatočný vektor* $\mathbf{x}^{(0)}$.

Poznámka. Vlastnosti matíc uvedené vo vete pozri paragraf Gaussova eliminačná metóda.

Cvičenia

17. Riešte sústavu

$$\begin{pmatrix} 5,21 & 1,51 & -2,37 \\ 1,72 & -2,97 & 0,21 \\ 2.01 & 0,92 & 3,89 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,68 \\ 6,21 \\ 7,78 \end{pmatrix}$$

a) Jacobiho metódou;
b) Gauss-Seidelovou metódou.
Výsledok ukončite podmienkou pre $\delta = 10^{-4}$. Voľte $\mathbf{x}^{(0)} = (1,-1,1)^T$.

18. Riešte sústavu

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gauss-Seidelovou metódou.

19. Výpočtom ukážte, že pre sústavu

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Jacobiho metóda nedáva vhodné výsledky, zatiaľ čo Gauss-Seidelova metóda konverguje (riešenie $\mathbf{r} = (1,1,1)^T$).

20. Výpočtom ukážte, že pre sústavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jacobiho metóda konverguje, zatiaľ čo Gauss-Seidelova metóda nedáva dobré výsledky. (riešenie $\mathbf{r} = (1,1,1)^T$).

21. Riešte sústavu

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Jacobiho aj Gauss-Seidelovou metódou. Posúďte rýchlosť konvergencie (riešenie je $\mathbf{r} = (1,2,2,1)^T$).

Výsledky cvičení

1. Nie.
2. Nie, áno, nie.
3. Áno, nie, áno, nie, nie.
4. Vzájomná poloha dvoch priamok v rovine. Tie sú buď totožné (sústava má nekonečne veľa riešení), rovnobežné (sústava nemá riešenie) alebo sa pretínajú v jednom bode (sústava má práve jedno riešenie). V prípade $b_1 = b_2 = 0$, sú to priamky prechádzajúce začiatkom súradnej sústavy. Majú buď jeden spoločný bod, alebo sú totožné. Vzájomná poloha troch rovín v priestore.
5. Napríklad :
a) $x + y = 1, x - y = 3$,
b) $x + y = 1, 2x + 2y = 3$,
c) $x + y = 1, 2x + 2y = 2$.
6. Prvá sústava má jediné riešenie $\mathbf{r} = (5147/1000, 0)^T$. Druhá sústava má nekonečne veľa riešení.Pre $t \in \mathbf{R}$, sú to vektory tvaru $\mathbf{r} = (5147/1000 - (687/500)t, t)^T$.
7.
a) Nie je riešiteľná,
b) je riešiteľná,
c) nie je riešiteľná,
d) je riešiteľná,
e) nie je riešiteľná,
f) nie je riešiteľná.
8.
a) $\mathbf{r} = (34/19, -33/19)^T$,
b) nie je možné riešiť Cramerovým pravidlom,
c) nie je možné riešiť Cramerovým pravidlom,
d) $\mathbf{r} = (-3/20, 8/5)^T$,
e) nie je možné riešiť Cramerovým pravidlom,
f) $\mathbf{r} = (14, 9)^T$,
g) nie je možné riešiť Cramerovým pravidlom,
h) $\mathbf{r} = (4, 3)^T$,
ch) $\mathbf{r} = (100/(50\pi - 157), 4(25\pi - 157)/(50\pi - 157))^T$.
9.
a) $\mathbf{r} = (-1, 2, 3)^T$,
b) nie je možné riešiť Cramerovým pravidlom,
c) nie je možné riešiť Cramerovým pravidlom,
d) $\mathbf{r} = (2, 1, -3)^T$,
e) $\mathbf{r} = (1, -2, 3)^T$,
f) $\mathbf{r} = (4, 1, -3)^T$,
g) nie je možné riešiť Cramerovým pravidlom,
h) $\mathbf{r} = (0, 0, 0)^T$.
10.
a) $s, t : (4 - st) \neq 0$,$\mathbf{r} = (4/(4 - st), -t/(4 - st))^T$,
b) $s, t : (s^2 - t^2) \neq 0$,$\mathbf{r} = ((s - 3t)/(s^2 - t^2), (3s - t)/(s^2 - t^2))^T$,
c) s, t ľubovoľné ,$\mathbf{r} = ((9s + 4t - 3)/7, -(5s + 3t - 4)/7)^T$,
d) s ľubovoľné, $t : t \neq -1$, $\mathbf{r} = ((u + 3)/(t + 1), ((s(u + 3) + t(3u - 2) - 11)/(t + 1), (s(u + 3) + 2(t(u - 1) - 4))/(t + 1))^T$,
e) s, t, u ľubovoľné $\mathbf{r} = ((t - u - 1)/2, (4s - t - 4u - 7)/3, u - s + 2)^T$.

11.
a) $\mathbf{r} = (2, -1)^T$,
b) $\mathbf{r} = (11, 9/2)^T$,
c) $\mathbf{r} = (31/7, -15/7)^T$,
d) $\mathbf{r} = (2, 3, 2)^T$,
e) $\mathbf{r} = (53/22, 7/22, -3/11)^T$,
f) $\mathbf{r} = (7/11, -3/22, 21/22)^T$,
g) $\mathbf{r} = (5, 3, -2)^T$,
h) $\mathbf{r} = (5/16, 1/5, -1/40)^T$,
i) $\mathbf{r} = (4, 3/2, 1/5)^T$,
j) $\mathbf{r} = (-12, 9, 4)^T$,
k) $\mathbf{r} = (3/2, 5/8, -3/4)^T$.
12.
a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,
b) pre každé $s, t \epsilon \mathbf{R}$ je riešením matica
$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} (1-3s)/2 & (4-3t)/2 \\ s & t \end{pmatrix}$,
c) taká matica $\mathbf{X}$ neexistuje,
d) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 14/23 & -15/23 \\ -10/23 & 14/23 \end{pmatrix}$,
e) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,
f) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & -1/5 & 4/5 \\ 1/2 & -7/10 & 13/10 \end{pmatrix}$,
g) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -11/32 & 23/32 \\ -1/16 & 5/16 \end{pmatrix}$,
h) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3/2 & -5/2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
13.
a) $\mathbf{r} = (-7/3, 4/3, 2/3)^T$,
b) $\mathbf{r} = (44/9, 71/9, 94/9)^T$,
c) $\mathbf{r} = (3, -2, 2)^T$,
d) $\mathbf{r} = (1, 2, -1)^T$,
e) $\mathbf{r} = (1, 1, 1)^T$,
f) $\mathbf{r} = (2, -3, -2)^T$,
g) $\mathbf{r} = (1, 1, -1, -1)^T$,
h) $\mathbf{r} = (-1/2, -3/16, 7/16, -1/4)^T$,
i) $\mathbf{r} = (1, 2, 2, 0)^T$.

14.
a) $\mathbf{r} = \alpha_1(1, 0, 0, 0)^T + \alpha_2(0, 1, 0, 0)^T + \alpha_3(0, 0, 1, 0)^T + \alpha_4(0, 0, 0, 1)^T$,
b) $\mathbf{r} = \alpha_1(1, 0, 0)^T + \alpha_2(0, 0, 1)^T$,
c) $\mathbf{r} = \alpha_1(1, 0, 3/5, 0)^T + \alpha_2(0, 1, 7/5, 0)^T$,
d) má iba triviálne riešenie,

e) $\mathbf{r} = \alpha_1(1, -2/3)^T$,
f) $\mathbf{r} = \alpha_1(8/9, 13/18, 1)^T$,
g) $\mathbf{r} = \alpha_1(2, 4, 1)^T$,
h) má iba triviálne riešenie
i) $\mathbf{r} = \alpha_1(8, -6, 1, 0)^T + \alpha_2(-7, 5, 0, 1)^T$,
j) $\mathbf{r} = \alpha_1(-1/2, -1/2, 1)^T$.

V nasledujúcich výsledkoch nie sú žiadne obmedzenia na α_i.

15.

a) Sústava nie je riešiteľná,
b) $\mathbf{r} = (-2, 0, 4)^T$,
c) $\mathbf{r} = (0, 3/2, 0)^T + \alpha_1(0, -1/2, 1)^T$,
d) $\mathbf{r} = (0, -2/3, 0)^T + \alpha_1(1, 1/3, 0)^T$,
e) $\mathbf{r} = (1, 0, 1, 2)^T + \alpha_1(2, 1, 0, 0)^T$,
f) $\mathbf{r} = (-3, 26/3, 4/3, 0)^T + \alpha_1(0, 2/3, 1/3, 1)^T$,
g) $\mathbf{r} = (1, -1, -1, 1)^T$,
h) Sústava nie je riešiteľná.

Kapitola 5

Vlastné čísla a vlastné vektory matice

5.1 Úvod

Nech $\mathbf{A}=(a_{ij})$ je štvorcová matica typu $n \times n$, kde $a_{ij} \in \mathbf{R}$, pre všetky $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Číslo $\lambda \in \mathbf{C}$ nazývame **vlastným číslom matice A**, ak sústava lineárnych rovníc tvaru

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \tag{5.1}$$

má okrem triviálneho riešenia aj nenulové riešenie. Príslušné nenulové riešenie budeme teraz označovať $\mathbf{v}$. Zrejme závisí od $\mathbf{A}$ a λ. Nazýva sa **vlastný vektor matice A odpovedajúci vlastnému číslu** λ.

S úlohou určiť vlastné čísla a vlastné vektory danej matice sa stretávame v celom rade technických aplikácií, ale aj v "čistej" matematike.

Sústavu (5.1) môžeme zapísať aj v tvare

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I_n})\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{5.2}$$

pritom $\mathbf{I_n}$ je jednotková matica typu $n \times n$.

5.2 Vlastné čísla

Nutná a postačujúca podmienka preto, aby sústava (5.2) mala nenulové riešenie je, aby $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I_n}| = 0$. To je podmienka, z ktorej budeme určovat vlastné čísla.

Príklad 1. Určte vlastné čísla matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Riešenie: Odpovedajúca homogénna sústava je tvaru

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a podmienka $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I_n}| = 0$ je, aby

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Po určení determinantu dostávame pre λ rovnicu

$$(1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Jej korene sú $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$. To sú teda aj vlastné čísla danej matice. ♣

Podmienka $|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I_n}| = 0$ sa pomocou **charakteristického polynómu matice A**

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) \equiv |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I_n}|$$

formuluje aj v tvare

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = 0.$$

Platí, že $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$ je polynóm n-tého stupňa s reálnymi koeficientami premennej λ. Odtiaľ vidno, že každá štvorcová matica typu $n \times n$ má práve n vlastných čísiel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Pritom každé vlastné číslo počítame toľkokrát, koľko je jeho násobnosť ako koreňa polynómu $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$.

Napriek tomu, že matica $\mathbf{A}$ má reálne koeficienty, môžu byť niektoré jej vlastné čísla, keďže sú to korene $p_{\mathbf{A}}(\lambda)$, komplexnými číslami.

Príklad 2. Určte vlastné čísla matice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Riešenie: Ľahko zistíme, že $p_{\mathbf{A}}(\lambda)=\lambda^2 + 1$, a preto vlastné čísla sú $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$.
♣

Ak $\mathbf{A} = \mathbf{A^T}$ (teda matica $\mathbf{A}$ je symetrická matica), tak jej vlastné čísla sú reálne. Vlastné čísla diagonálnej matice a trojuholníkovej matice sú rovné diagonálnym prvkom matice. Matica $\mathbf{A}$ je regulárna práve vtedy, ak jej vlastné čísla sú rôzne od nuly.

5.3 Vlastné vektory

Pre dané vlastné číslo λ_0 matice $\mathbf{A}$ odpovedajúce vlastné vektory určíme ako nenulové riešenie homogénnej sústavy

$$(\mathbf{A} - \lambda_\mathbf{0}\mathbf{I_n})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{5.3}$$

Z toho, ako bolo λ_0 určené vieme, že takéto riešenie bude existovať a bude ich nekonečne veľa. Ak λ_0 je komplexné číslo, matica $\mathbf{A} - \lambda_\mathbf{0}\mathbf{I_n}$ má aj komplexné prvky. Sústavami lineárnych rovníc s komplexnými koeficientami sme sa však nezaoberali, a preto budeme určovať vlastné vektory iba pre reálne vlastné čísla.

Príklad 3. Určte vlastné vektory matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Riešenie: Vieme, že vlastné čísla matice sú $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$. Označme

$$\mathbf{v}^{(1)} = (v_1^{(1)}, v_2^{(1)})^T$$

vlastný vektor odpovedajúci vlastnému číslu λ_1. Potom $\mathbf{v}^{(1)}$ je nenulovým riešením sústavy (5.3) t. j. sústavy

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^{(1)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

teda vlastne sústavy rovníc

$$\begin{array}{rcrcl} 2v_1^{(1)} & + & 2v_2^{(1)} & = & 0 \\ 3v_1^{(1)} & + & 3v_2^{(1)} & = & 0 \end{array}.$$

Ekvivalentná sústava je

$$v_1^{(1)} + v_2^{(1)} = 0.$$

Preto vlastný vektor je napríklad vektor $\mathbf{v}^{(1)} = (1, -1)^T$.
Označme

$$\mathbf{v}^{(2)} = (v_1^{(2)}, v_2^{(2)})^T$$

vlastný vektor odpovedajúci vlastnému číslu $\lambda_2 = 4$. Jeho zložky určíme zo sústavy rovníc

$$\begin{array}{rcrcl} -3v_1^{(2)} & + & 2v_2^{(2)} & = & 0 \\ 3v_1^{(2)} & - & 2v_2^{(2)} & = & 0 \end{array} .$$

Riešením je napríklad $\mathbf{v}^{(2)} = (2, 3)^T$. ♣

Vlastné vektory majú ďalšie zaujímavé, z hľadiska matematiky a jej aplikácií, aj užitočné vlastnosti.
Vlastné vektory odpovedajúce rôznym vlastným číslam matice $\mathbf{A}$ sú lineárne nezávislé. Ak matica $\mathbf{A}$ typu $n \times n$ má n rôznych reálnych vlastných čísiel $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, tak odpovedajúce vlastné vektory $\mathbf{v}^{(1)}, \ldots, \mathbf{v}^{(n)}$ sú lineárne nezávislé, a teda tvoria bázu $\mathbf{R}^n$. Táto vlastnosť sa využíva pri diagonalizácii matice. Každému vlastnému číslu symetrickej matice odpovedá p lineárne nezávislých vlastných vektorov. Pritom p je násobnosť tohto vlastného čísla.

Pre nesymetrickú maticu može byť situácia zložitejšia.

Príklad 4. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Potom $p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 - 21\lambda - 45$. Vlastné čísla sú $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = \lambda_3 = -3$. Pre $\lambda_1 = 5$ je odpovedajúci vlastný vektor $(1, 2, -1)^T$. Pre $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ existujú dva lineárne nezávislé vlastné vektory a síce $(-2, 1, 0)^T, (3, 0, 1)^T$.
Ale matica $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ má charakteristický polynóm $p_{\mathbf{B}}(\lambda) = \lambda^2$. Jej vlastné čísla sú $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Odpovedajúci vlastný vektor určíme z podmienky $0v_1 + 1v_2 = 0$. Teda vlastný vektor je tvaru $(v_1, 0)^T$ pre každé $v_1 \neq 0$. V tomto prípade je počet lineárne nezávislých vlastných vektorov menší ako násobnosť odpovedajúceho vlastného čísla. ♣

Cvičenia

1. Určte vlastné čísla nasledujúcich matíc. Ak vlastné čísla sú reálne, tak určte aj odpovedajúce vlastné vektory.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

f)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

g)

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

h)

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

i)

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

j)

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

k)

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 16 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

l)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

m)

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

n)

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -15 \\ -3 & -4 & 9 \\ 5 & 0 & -15 \end{pmatrix}$$

Výsledky cvičení.

1.

a) $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1$, $\mathbf{v}^{(1)} = (0,1)^T$, $\mathbf{v}^{(2)} = (1,0)^T$
b) $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 5$, $\mathbf{v}^{(1)} = (-1,2)^T$, $\mathbf{v}^{(2)} = (2,1)^T$
c) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$, $\mathbf{v}^{(1)} = (0,1)^T$, $\mathbf{v}^{(2)} = (1,0)^T$
d) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$, $\mathbf{v}^{(1)} = (-1,1)^T$, $\mathbf{v}^{(2)} = (1,1)^T$
e) $\lambda_1 = (6-4\sqrt{1}4)/2, \lambda_2 = (6+4\sqrt{1}4)/2$, $\mathbf{v}^{(1)} = ((-2(-2+\sqrt{1}4))/5,1)^T$, $\mathbf{v}^{(2)} = ((2(2+\sqrt{1}4))/5,1)^T$
f) $\lambda_1 = (-3-\sqrt{1}7)/2, \lambda_2 = (-3+\sqrt{1}7)/2$, $\mathbf{v}^{(1)} = ((3-\sqrt{1}7)/2,1)^T$, $\mathbf{v}^{(2)} = ((3+\sqrt{1}7)/2,1)^T$
g) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 7$, $\mathbf{v}^{(1)} = (1,1)^T$, $\mathbf{v}^{(2)} = (-1,1)^T$
h) $\lambda_1 = (1-\sqrt{2}29)/2, \lambda_2 = (1+\sqrt{2}29)/2$, $\mathbf{v}^{(1)} = ((11-\sqrt{2}29)/6,1)^T$, $\mathbf{v}^{(2)} = ((11+\sqrt{2}29)/6,1)^T$
i) $\lambda_1 = -1-i, \lambda_2 = -1+i, \lambda_3 = 0$, $\mathbf{v}^{(3)} = (0,0,1)^T$
j) $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 3$, $\mathbf{v}^{(1)} = (-1,-2,1)^T$, $\mathbf{v}^{(2)} = (3,0,1)^T$, $\mathbf{v}^{(3)} = (-2,1,0)^T$
k) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 8$, $\mathbf{v}^{(1)} = (1,-2,1)^T$, $\mathbf{v}^{(2)} = (1,0,0)^T$, $\mathbf{v}^{(3)} = (5,1,0)^T$
l) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 8$, $\mathbf{v}^{(1)} = (3,0,1)^T$, $\mathbf{v}^{(2)} = (-2,1,0)^T$, $\mathbf{v}^{(3)} = (1,2,-1)^T$
m) $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 9$, $\mathbf{v}^{(1)} = (-1,0,2)^T$, $\mathbf{v}^{(2)} = (0,1,0)^T$, $\mathbf{v}^{(3)} = (3,1,1)^T$
n) $\lambda_1 = -10, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 0$, $\mathbf{v}^{(1)} = (1,-1,1)^T$, $\mathbf{v}^{(2)} = (0,1,0)^T$, $\mathbf{v}^{(3)} = (3,0,1)^T$.

Kapitola 6

Funkcie

6.1 Základné pojmy

6.1.1 Pojem funkcie, obory

V prípade, keď vzťah závislosti medzi veličinami x a y spĺňa podmienku

každá hodnota veličiny x z istej množiny **jednoznačne** určuje hodnotu veličiny y

hovoríme o **funkčnej závislosti** alebo **funkcii**. Veličinu x voláme **nezávislou premennou** a veličinu y voláme **závislou premennou**. V ďalšom texte obidve veličiny nadobúdajú hodnoty z množiny $\mathbf{R}$. Funkcie zapisujeme pomocou matematickej rovnice $y = f(x)$[1]. Poznamenajme, že rovnice $y = 5x + 19$ a $p = 5v + 19$ určujú tú istú funkciu, zmena označenia premenných nemá vplyv na funkciu, **pravidlo priradenia sa nemení**.
Definičný obor funkcie f je množina všetkých prípustných hodnôt nezávislej veličiny, označujeme ho symbolom $D(f)$.
Obor hodnôt funkcie f je množina všetkých hodnôt $f(x)$, kde $x \in D(f)$ a označujeme ju $H(f)$.
Poznámka. Pokiaľ nebude vyslovene uvedené inak, tak v celom ďalšom texte budeme pod funkciou rozumieť len takú funkciu, ktorej definičný obor obsahuje **aspoň** dve rôzne čísla.

Príklad 1. Nájdime definičné obory a obory hodnôt funkcií

a) $g: \ y = x^2 + 3x - 10$,

b) $f: \ y = \sqrt{\frac{3x+2}{5-x}}$.

Riešenie:

a) Definičný obor je $\mathbf{R}$. Obor hodnôt tvorí množina všetkých $r \in \mathbf{R}$, pre ktoré má rovnica $x^2+3x-10 = r$ reálne riešenie. Diskriminant upravenej rovnice $x^2+3x-(10+r) = 0$ je $9+4(10+r)$ a má byť nezáporný. Oborom hodnôt je množina riešení nerovnice $9+4(10+r) \geq 0$, $H(g) = \langle -\frac{49}{4}, \infty)$. Poznamenajme, že príklad sa dá riešit aj inak, doplnením na štvorec.

b) Definičným oborom je množina všetkých riešení nerovnice $\frac{3x+2}{5-x} \geq 0$. Je to množina $D(f) = \langle -\frac{2}{3}, 5)$. Riešením rovnice $\sqrt{\frac{3x+2}{5-x}} = r$ pre $r \geq 0$ (prečo má byť $r \geq 0$?) je $x = \frac{5r^2-2}{r^2+3}$, čo sa dá po vydelení zapísať $x = 5 - \frac{17}{r^2+3}$. Z tohoto vyjadrenia vidieť, že pre všetky $r \geq 0$ platí $x \in \langle -\frac{2}{3}, 5)$. Preto $H(f) = \langle 0, \infty)$.

♣

[1] Kvôli stručnosti sa často používa namiesto "funkcia určená rovnicou $y = f(x)$" jednoduchšie "funkcia $y = f(x)$" alebo $f: \ y = f(x)$

6.1.2 Rovnosť funkcií

Funkcie f a g **sa rovnajú** vtedy a len vtedy, ak

- sa rovnajú ich definičné obory a
- pre každé r z definičného oboru platí $f(r) = g(r)$.

Príklad 2. Zistime, či sa rovnajú funkcie $f:\ y = 1 - 2x$ a $h:\ y = \frac{4-7x-2x^2}{x+4}$.

Riešenie: Funkcie $f:\ y = 1 - 2x$ a $h:\ y = \frac{4-7x-2x^2}{x+4}$ na prvý pohľad nemajú nič spoločné. Ak rozložíme čitateľ funkcie h na súčin dostaneme ekvivalentnú formu predpisu $h:\ y = \frac{(1-2x)(x+4)}{x+4}$. Po vykrátení zlomku na pravej strane sa sú funkcie f a h zdanlivo zhodné. V skutočnosti tomu tak nie je, hoci predpisy určujúce funkcie sú totožné, ich definičné obory sú rôzne, $D(f) = \mathbf{R}$ a $D(h) = \mathbf{R} - \{-4\}$.
♣

6.1.3 Graf funkcie

Graf funkcie f je množina všetkých bodov $[r, f(r)],\ r \in D(f)$ v rovine s karteziánskou súradnicovou sústavou.
Množina bodov v rovine je grafom niektorej funkcie práve vtedy, ak

> každá priamka rovnobežná s osou o_y má s touto množinou spoločný najviac jeden bod.

Preto napríklad kružnica ľubovoľne umiestnená v karteziánskej súradnicovej sústave nie je grafom žiadnej funkcie a parabola je grafom funkcie vtedy a len vtedy, ak jej os je rovnobežná s osou o_y. V praxi býva občas funkcia grafom určená, napríklad pri grafickom zázname závislosti výšky hladiny rieky od času. V každom prípade je v grafe obsiahnutá veľká časť informácie o funkcii. Grafy základných funkcií, s ktorými budeme pracovať sú v časti 6.4.

6.2 Operácie s funkciami

Jedna alebo viac funkcií určujú podľa istých pravidiel ďalšie funkcie.

6.2.1 Zúženie funkcie

Operácia zúženia funkcie spočíva len v ohraničení jej definičného oboru.
Nech f je funkcia a $M \subset \mathbf{R}$. **Zúženie funkcie** f **na množinu** M je funkcia $f_{/M}$ definovaná na množine $M \bigcap D(f)$ vzťahom $g(r) = f(r)$ pre každé $r \in M \bigcap D(f)$.
Napríklad funkcia $y = (\sqrt{x})^2$ je zúžením funkcie $y = x$ na množinu $\langle 0, \infty)$ a tiež v Príklade 2 bola funkcia h zúžením funkcie f.

6.2.2 Algebrické operácie

Súčet, rozdiel a súčin funkcií je definovaný pomomocou príslušnej operácie v každom bode prieniku ich definičných oborov. (Prečo nie aj podiel?)

6.2.3 Zložená funkcia

Ak veličina z je funkčne závislá od veličiny y a táto je funkčne závislá od veličiny x, tak veličina z je funkčne závislá (sprostredkovane cez veličinu y) od veličiny x .
Nech f a g sú funkcie, pre ktoré $M = H(f) \cap D(g) \neq \emptyset$. **Funkcia zložená z funkcií** f a g (v tomto poradí) je funkcia $g \circ f$ definovaná na množine M vzťahom $g \circ f(r) = g(f(r))$ pre každé $r \in M$. Funkcia f sa volá **vnútorná zložka**, funkcia g sa volá **vonkajšia zložka**.

Príklad 3. Nech $f: \ y = \sin x$ a $g: \ y = \sqrt{x}$. Nájdime funkcie $f \circ g$ a $g \circ f$.

Riešenie: Podľa definície $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sin\sqrt{x}$. Definičným oborom tejto funkcie je množina $\langle 0, \infty)$. Podobne $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\sin x) = \sqrt{\sin x}$. Definičným oborom je množina $\bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \langle 2n\pi, (2n+1)\pi \rangle$ (prečo?). ♣

Na tomto príklade je vidieť, že vo všeobecnosti

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

Niekedy je potrebné danú zloženú funkciu rozložiť na jednotlivé zložky (pozri deriváciu zloženej funkcie v nasledujúcej kapitole).

Príklad 4. Rozložme funkciu $f: \ y = tg^3(x - \frac{\pi}{4})$ na zložky.

Riešenie: Postupujeme tak, že si uvedomujeme postupnosť úkonov s hodnotou x:

$$x \quad \xrightarrow{-\frac{\pi}{4}} \quad x - \frac{\pi}{4} \quad \xrightarrow{tg} \quad tg(x - \frac{\pi}{4}) \quad \xrightarrow{(\ )^3} \quad tg^3(x - \frac{\pi}{4}).$$

Preto $f(x) = p \circ q \circ r(x)$, kde $p(x) = x^3$, $q(x) = tg\ x$ a $r(x) = x - \frac{\pi}{4}$. ♣

Príklad 5. Porovnajme funkcie $g \circ h$ a $h \circ g$, ak $g(x) = \sqrt{x}$ a $h(x) = x^2$.

Riešenie: $g \circ h(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ (prečo ?) a $h \circ g(x) = (\sqrt{x})^2 = x_{/\langle 0, \infty)}$. Funkcie sa nerovnajú, funkcia $h \circ g(x)$ je zúžením funkcie $g \circ h(x)$. ♣

6.2.4 Inverzná funkcia

Ak veličina y je funkčne závislá od veličiny x, tak aj veličina x môže (ale nemusí) byť funkčne závislá od veličiny y. Nech f a g sú funkcie, pre ktoré platí

- $g \circ f(r) = r$ pre všetky $r \in D(f)$,
- $f \circ g(s) = s$ pre všetky $s \in D(g)$.

Potom funkcia g je **inverzná funkcia** k funkcii f a označuje sa znakom f^{-1}. Pozor, pre funkcie $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.
Keďže postavenie funkcií f a g v definícii inverznej funkcie je symetrické (t.j. vzájomnou zámenou f a g sa zmysel definície nezmení), platí, že ak g je inverzná k f, tak aj f je inverzná ku g, preto tiež hovoríme o dvojici navzájom inverzných funkcií.

Inverzná funkcia a obory

Navzájom inverzné funkcie majú vymenené obory:

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad \text{a} \quad H(f^{-1}) = D(f).$$

Inverzná funkcia a grafy

Grafy navzájom inverzných funkcií sú súmerné podľa priamky s rovnicou $y = x$.

Pre inverznú funkciu k zloženej funkcii platí pravidlo

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1},$$

ak existuje funkcia na ľubovoľnej zo strán rovnice.
Inverzná funkcia k inverznej funkcii sa rovná pôvodnej funkcii

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

Poznamenajme, že nie každá funkcia má inverznú funkciu. (Pozri časť 6.3.1.)
Keďže inverzná funkcia k funkcii $f: \ y = f(x)$ (ak existuje) vyjadruje závislosť veličiny x od veličiny y, inverznú funkciu hľadáme tak, že z rovnice určujúcej funkciu f vyjadríme x pomocou y: $x = f^{-1}(y)$. Tento výraz sa z dôvodov konvencie zvykne potom prepísať na výraz $y = f^{-1}(x)$ určujúci tú istú funkciu.

Príklad 6. Hľadajme inverzné funkcie k funkciám $f: \ y = 7 - 3x$, $g: \ y = \frac{1-4x}{3x+2}$, $h: \ y = 1 - x^2$ a $i: \ y = \sqrt[3]{9x + 11}$.

Riešenie: Vyjadrením x z rovnice určujúcej funkciu f dostávame $f^{-1}(y) = \frac{7-y}{3}$.
Podobne $g^{-1}(t) = \frac{1-2t}{3t+4}$. Prečo môžeme písať nezávislú premennú t a nie x alebo y?
Ak vyjadríme x z rovnice určujúcej funkciu h, dostaneme $x = \sqrt{1-y}$ alebo $x = -\sqrt{1-y}$. Vidíme, že $D(h) = \mathbf{R}$, ale $H(\sqrt{1-y}) = \langle 0, \infty)$ a $H(-\sqrt{1-y}) = (\infty, 0\rangle$. Funkcia h teda nemá inverznú funkciu, ale $h_1: \ x = \sqrt{1-y}$ je inverzná k funkcii $h_{/\langle 0,\infty)}$ a $h_2: \ x = -\sqrt{1-y}$ je inverzná k funkcii $h_{/(-\infty,0\rangle}$.
Vyjadrením x z rovnice pre i dostávame $i^{-1}(x) = \frac{x^3-11}{9}$. ♣

6.3 Globálne vlastnosti funkcií

sú vlastnosti týkajúce sa chovania funkcie v jej definičnom obore, prípadne v niektorom intervale jej definičného oboru. Pri každej z týchto vlastností si všimneme jej prezentáciu na grafe funkcie, jej chovanie vzhľadom k operáciám definovaným v časti 6.2 a jej vzťah k niektorým iným vlastnostiam v tejto časti. Platnosť niektorých tvrdení ukážeme, overenie platnosti ostatných je námet na teoretické cvičenie pre čitateľa.

6.3.1 Prostá funkcia

Funkcia f je **prostá** ak pre každé dve čísla $r \neq s$ z $D(f)$ platí $f(r) \neq f(s)$.
Pre praktické určenie, či daná funkcia je prostá, je často vhodnejšia ekvivalentná podmienka

$$\text{Ak } f(r) = f(s), \text{ tak } r = s.$$

Prostá funkcia a graf

Funkcia f je prostá práve vtedy, ak

každá priamka rovnobežná s osou o_x pretne graf funkcie f najviac v jednom bode.

Napríklad funkcia $y = x^2$ nie je prostá, ale je prostá v intervale $\langle 0, \infty)$ aj v intervale $(-\infty, 0\rangle$.

Prostá funkcia a operácie

Zúženie prostej funkcie je prostá funkcia.
Ak f a g sú prosté funkcie, tak aj funkcia $f \circ g$ je prostá.
Funkcia má **inverznú** funkciu vtedy a len vtedy, ak je **prostá**.

Príklad 7. Ukážeme platnosť predposledného tvrdenia.

Riešenie: Nech $r \neq s$. Pretože g je prostá, platí $g(r) \neq g(s)$. Pretože f je prostá, platí $f(g(r)) \neq f(g(s))$. Overili sme, že $f \circ g$ je prostá. ♣

6.3.2 Monotónnosť

Funkcia f je **rastúca (neklesajúca,klesajúca,nerastúca)**, ak pre každé dve čísla $r < s$ z $D(f)$ platí $f(r) < f(s)$ $(f(r) \leq f(s),\ f(r) > f(s),\ f(r) \geq f(s))$.
Funkcia f je **monotónna**, ak je buď neklesajúca alebo nerastúca.
Funkcia f je **rýdzo monotónna**, ak je buď rastúca alebo klesajúca.

Monotónnosť a graf

Na grafe sa vlastnosti monotónnosti prejavia tak, že pri zväčšovaní x-ových súradníc bodov grafu y-ové súradnice bodov grafu rastú alebo klesajú podľa príslušnej vlastnosti.

Monotónnosť a operácie

Zúženie monotónnej funkcie je monotónna funkcia.
Súčet dvoch rastúcich funkcií je rastúca funkcia.
Ak je f rastúca, tak $-f$ je klesajúca funkcia a $\frac{1}{f}$ je klesajúca v každom intervale, v ktorom je definovaná.
Funkcia zložená z dvoch rastúcich alebo z dvoch klesajúcich funkcií je rastúca.
Funkcia zložená z rastúcej a klesajúcej funkcie je klesajúca.
Inverzná funkcia k rastúcej funkcii je rastúca.
Analogické tvrdenia platia pre klesajúce funkcie.

Prostá funkcia a monotónnosť

Ak je funkcia rýdzomonotónna, tak je aj prostá. Opačné tvrdenie všeobecne neplatí.

Príklad 8. Ukážeme, že rozdiel klesajúcej a rastúcej funkcie je klesajúca funkcia.

Riešenie: Predpokladajme, že f je klesajúca a g je rastúca funkcia. Nech $r < s$. Potom $f(r) > f(s)$ a $g(r) < g(s)$. Vynásobením druhej nerovnice číslom -1 (pozor mení sa znamienko !) a sčítaním s prvou dostaneme $(f - g)(r) > (f - g)(s)$, čo dokazuje tvrdenie. ♣

6.3.3 Ohraničenosť

Funkcia je **zhora (zdola) ohraničená**, ak je zhora (zdola) ohraničený jej obor hodnôt. Funkcia je **ohraničená**, ak je ohraničená aj zhora aj zdola, t.j. ak je ohraničený jej obor hodnôt.

Ohraničenosť a graf

Na grafe sa táto vlastnosť prejaví tak, že celý graf zhora (zdola) ohraničenej funkcie leží pod (nad) niektorou rovnobežkou s osou o_x a graf ohraničenej funkcie leží celý medzi dvomi rovnobežkami s osou o_x.

Ohraničenosť a operácie

Zúženie zhora ohraničenej funkcie je zhora ohraničená funkcia.
Súčet dvoch zhora ohraničených funkcií je zhora ohraničená funkcia. (Prečo nie aj súčin, rozdiel a podiel?)
Ak je f zhora ohraničená, tak $-f$ je zdola ohraničená (prečo nie aj $\frac{1}{f}$?).
Zložená funkcia (ak existuje) je zhora ohraničená práve vtedy, ak je zhora ohraničená jej vonkajšia zložka.
Analogické tvrdenia platia pre zdola ohraničené a ohraničené funckie. (Pozor! Je súčin dvoch zdola ohraničených funkcií zdola ohraničená funkcia? Je súčin ohraničených funkcií ohraničená funkcia?)

6.3.4 Existencia maxima, minima

Funkcia f má v čísle r maximum (minimum), ak pre každé $x \in D(f)$ platí $f(x) \leq f(r)$ $(f(x) \geq f(r))$.

Existencia maxima, minima a graf

Na grafe funkcie f sa maximum (minimum) prejaví existenciou "najvyššieho" ("najnižšieho") bodu, pričom jeho prvá súradnica je r.

Existencia maxima, minima a operácie

Ak majú obidve funkcie f aj g v čísle r maximum, tak aj ich súčet má v čísle r maximum (prečo nie aj rozdiel, súčin, podiel?).
Ak má funkcia f v čísle r maximum, tak funkcia $-f$ má v čísle r minimum. (Prečo nie aj funkcia $\frac{1}{f}$?)

Ohraničenosť a existencia maxima

Ak má funkcia v niektorom čísle maximum (minimum), tak je zhora (zdola) ohraničená. Opačné tvrdenie všeobecne neplatí: napríklad funkcia $y = |\frac{1}{x}|$ je zdola ohraničená, ale minimum nemá v žiadnom čísle.

6.3.5 Vlastnosti symetrie

Niektoré funkcie majú tú vlastnosť, že ich grafy sú v istom zmysle symetrické.
Funkcia f je **párna**, ak

- Ak $r \in D(f)$, tak aj $-r \in D(f)$ a
- $f(-r) = f(r)$ pre všetky $r \in D(f)$.

Funkcia f je **nepárna**, ak

- Ak $r \in D(f)$, tak aj $-r \in D(f)$ a
- $f(-r) = -f(r)$ pre všetky $r \in D(f)$.

Párne, nepárne funkcie a graf

Graf párnej funkcie je symetrický podľa osi o_y.
Graf nepárnej funkcie je symetrický podľa začiatku súradnicovej sústavy.

Párne, nepárne funkcie a operácie

Súčet aj rozdiel dvoch párnych (nepárnych) funkcií je párna (nepárna) funkcia.
Súčin aj podiel (ak existuje) dvoch párnych aj dvoch nepárnych funkcií je párna funkcia. Súčin aj podiel (ak existuje) párnej a nepárnej funkcie je nepárna funkcia.
Funkcia zložená (ak existuje) z dvoch párnych alebo z dvoch nepárnych je párna.
Funkcia zložená (ak existuje) z párnej a nepárnej funkcie je nepárna.
Funkcia inverzná k párnej funkcii neexistuje (prečo?).
Funkcia inverzná k nepárnej funkcii (ak existuje) je nepárna.
Niektoré vlastnosti funkcií sa navzájom vylučujú.

Príklad 9. Ukážeme, že neexistuje párna monotónna funkcia.

Riešenie: Predpokladajme, že f je párna rastúca funkcia. Zvoľme ľubovoľné číslo $r \in D(f) \cap (0, \infty)$ (prečo také číslo určite existuje?). Keďže f je párna, aj $-r \in D(f)$ a naviac $f(r) = f(-r)$. Keďže f je rastúca a $-r < r$, platí $f(-r) < f(r)$, čo je spor. Preto neexistuje párna rastúca funkcia. Analogickú argumentáciu neexistencie párnej klesajúcej funkcie nechávame na čitateľa. ♣

6.3.6 Periodické funkcie

Hodnoty niektorých funkcií sa pravidelne opakujú.
Funkcia f je **periodická**, ak existuje také číslo a, pre ktoré platí

- Ak $r \in D(f)$, tak aj $r + a \in D(f)$ a
- $f(r + a) = f(r)$ pre všetky $r \in D(f)$.

Ak existuje najmenšie kladné číslo p, pre ktoré platí $f(r + p) = f(r)$ pre všetky $r \in D(f)$, tak toto číslo p voláme **perióda** funkcie f.

Periodické funkcie a graf

Graf periodickej funkcie je zhodný so svojim obrazom pri posunutí o dĺžku periódy v smere osi o_x.

Periodické funkcie a operácie

Súčet, súčin, rozdiel aj podiel (ak existuje) dvoch periodických funkcií s rovnakou periódou p je periodická funkcia. (Čo môžeme povedať o jej perióde?) Zložená funkcia je periodická, ak je periodická jej vnútorná zložka.
Premyslite si: Funkcie $\sqrt{\sin x}$ a $\sin^2 x$ sú periodické (zistite ich periódu), ale funkcie $\sin\sqrt{x}$ a $\sin x^2$ periodické nie sú.
Periodická funkcia nemôže mať inverznú funkciu. (Prečo?)

Príklad 10. Načrtnime graf ľubovoľnej funkcie, ktorá je neohraničená zdola, rastie v intervale $(-1, 1)$, klesá v intervale $(6, 7)$ a je periodická s periódou 5.

Riešenie: Stačí načrtnúť graf hľadanej funkcie v ľubovoľnom intervale dĺžky 5 a potom ho periodicky rozšíriť. Zvoľme interval $(-1, 4)$. Načrtneme rastúci graf v intervale $(-1, 1)$ a klesajúci v intervale $(1, 2)$ (prečo?), pričom v ľavom okolí čísla 2 necháme graf strmo klesať do $-\infty$, aby sme splnili podmienku neohraničenosti zdola. V intervale $(2, 4)$ môžeme graf načrtnúť ľubovoľne, pretože všetky podmienky sú splnené.

Obr. 6.1: Graf funkcie, ktorá spĺňa podmienky príkladu 10

♣

Príklad 11. Popíšme vlastnosti funkcií určených nasledujúcimi rovnicami

$$f(x) = \frac{3x-5}{2-7x},\ g(x) = 3 - \sqrt{5-2x},\ h(x) = x^2 + x + 4$$

Riešenie: Nech $f(r) = f(s)$, teda $\frac{3r-5}{2-7r} = \frac{3s-5}{2-7s}$. Po vynásobení obidvomi menovateľmi a úpravách dostaneme

$$6r - 10 - 21rs + 35s = 6s - 10 - 21rs + 35r,$$

z čoho po ďalších úpravách vyplýva $r = s$, teda f je prostá. Nech $r < s$ sú z $D(f) = (-\infty, \frac{2}{7}) \bigcup (\frac{2}{7}, \infty)$. Nerovnica $f(r) < f(s)$, t.j. $\frac{3r-5}{2-7r} < \frac{3s-5}{2-7s}$ je ekvivalentná s nerovnicou $\frac{s-r}{(2-7s)(2-7r)} > 0$, ktorá platí, ak obidve čísla r a s sú v tom istom intervale, z ktorých sa skladá $D(f)$. Funkcia f je teda rastúca v obidvoch intervaloch $(-\infty, \frac{2}{7})$ a $(\frac{2}{7}, \infty)$, ale **nie je rastúca** (prečo ?). Kvôli určeniu ohraničenosti prepíšme pravidlo určujúce funkciu $f(x) = -\frac{3}{7} + \frac{\frac{29}{7}}{7x-2}$. Prvý člen neovplyvní ohraničenosť, pre hodnoty x blízke číslu $\frac{2}{7}$ nadobúda druhý výraz ľubovoľne malé záporné hodnoty, ak $x \in (-\infty, \frac{2}{7})$ a ľubovoľne veľké kladné hodnoty, ak $x \in (\frac{2}{7}, \infty)$, funkcia nie je ohraničená, nemá teda ani maximum ani minimum.
Ďalej

$$f(-r) = \frac{-3r-5}{2+7r} \neq f(r) \quad \text{a} \quad f(-r) \neq -f(r),$$

funkcia teda nie je párna, ani nepárna, takisto nie je periodická.
Funkcia $g(x) = 3 - \sqrt{5-2x}$ je zložená z troch funkcií

$$g_1: \ y = 5 - 2x, \quad g_2: \ z = \sqrt{y}, \quad \text{a} \quad g_3: \ w = 3 - z.$$

Platí $g(x) = g_3 \circ g_2 \circ g_1(x)$. Pretože všetky tri funkcie sú prosté (to si ľahko overíte), g je prostá. Funkcie g_1 a g_3 sú klesajúce a funkcia g_2 je rastúca, preto výsledná funkcia je rastúca. Pretože $D(g) = (-\infty, \frac{5}{2}\rangle$ a g je rastúca, nadobúda v bode $\frac{5}{2}$ maximálnu hodnotu 3 a je zhora ohraničená. Pre čísla x "blízke" $-\infty$ je $g_1(x)$ "blízke" ∞, $g_2 \circ g_1(x)$ taktiež a následne $g(x)$ je "blízke" $-\infty$. Preto g nie je ohraničená zdola. V dôsledku svojho definičného oboru nemôže byť ani párna ani nepárna a ani periodická.
Keďže graf kvadratickej funkcie je ľahké načrtnúť, vlastnosti funkcie h vyčítame z jej grafu. h nie je prostá, klesá v intervale $-\infty, -\frac{1}{2}$ a rastie v intervale $-\frac{1}{2}, \infty$. Je zdola ohraničená s minimom $\frac{15}{4}$ v bode $-\frac{1}{2}$ a zhora neohraničená. Nemá žiadnu z vlastností symetrie, jej graf je však symetrický podľa priamky $x = -\frac{1}{2}$. ♣

Ako sme sa mohli presvedčiť, niekedy je určovanie vlastností funkcie (aj pomerne jednoduchej) dosť komplikované. Najjednoduchšie je mať predstavu o jej grafe. V nasledujúcej kapitole sú popísané efektívnejšie techniky na určovanie vlastností funkcií.

6.4 Elementárne funkcie

Nasleduje prehľad niekoľkých základných typov funkcií. Prakticky všetky funkcie, s ktorými sa budeme zaoberať, sú vytvorené z týchto funkcií pomocou operácií definovaných v časti 6.2.

6.4.1 Polynomické funkcie

Polynomická funkcia (polynóm, mnohočlen) je funkcia definovaná v množine **R** rovnicou

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

kde reálne čísla $a_0, \ a_1, \ \cdots, a_n, \ a_n \neq 0$ sa volajú **koeficienty polynómu** a celé nezáporné číslo n sa volá **stupeň polynómu**. Koeficient a_n sa volá **vedúci koeficient mnohočlena**
Každý mnohočlen P je možné jednoznačne vyjadriť v tvare **súčinu koreňových činiteľov**, t.j. súčinu

1. vedúceho koeficientu
2. všetkých výrazov typu $(x-r)^k$, kde r je k-násobným koreňom mnohočlena P
3. všetkých výrazov typu $(x^2+px+q)^l$ vytvorených l-násobnými komplexne združenými komplexnými koreňmi mnohočlena P.

Príklad 12. Rozložíme mnohočlen $P(x) = x^4 - 1$ na súčin.

Riešenie:

$$x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1).$$

Výraz v poslednej zátvorke sa už nedá ďalej rozložiť. ♣

Vo všeobecnosti sú vlastnosti polynomických funkcií ťažko popísateľné, najčastejšie sa však stretneme s nasledujúcimi špeciálnymi prípadmi polynómov:

Konštantná funkcia

je funkcia definovaná v **R** rovnicou

$$y = c.$$

Jej graf je priamka rovnobežná s osou o_x.

Obr. 6.2: Graf funkcie $y = 0,7$

Lineárna funkcia

je funkcia definovaná v **R** rovnicou

$$y = kx + q, \quad k \neq 0 \text{ sa volá smernica.}$$

Jej graf je priamka rôznobežná s osou o_x. Lineárna funkcia je

- rastúca, ak $k > 0$
- klesajúca, ak $k < 0$

a pretína os o_y v bode $[0, q]$.

Obr. 6.3: Graf funkcií $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ a $g(x) = -x + 1$

Kvadratická funkcia

je funkcia definovaná v **R** rovnicou

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Jej graf je parabola s osou rovnobežnou s osou o_y. Je otvorená nahor, ak $a > 0$ a nadol, ak $a < 0$. Jej vrchol je v bode $[-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}]$.

Mocninná funkcia

je funkcia definovaná rovnicou

$$f(x) = x^a, \quad \text{kde a je reálne číslo.}$$

Jej vlastnosti a graf závisia od exponentu a, napr.:

- Ak a je párne prirodzené číslo, tak $D(f) = \mathbf{R}$, funkcia je párna, klesajúca v $(-\infty, 0)$, rastúca v $(0, \infty)$.
- Ak a je nepárne prirodzené číslo, tak $D(f) = \mathbf{R}$, funkcia je nepárna, rastúca.
- Ak $a = 0$, tak $f(x) = 1$ pre všetky $x \in \mathbf{R} - \{0\}$ je konštantná funkcia.
- Ak $a = -n$, kde n je prirodzené číslo, tak $D(f) = \mathbf{R} - \{0\}$ a f je klesajúca v $(0, \infty)$ a v intervale $(-\infty, 0)$ je rastúca pre párne n a klesajúca pre nepárne n.
- Ak $a = \frac{1}{n}$, kde n je prirodzené číslo, tak f je rastúca funkcia a $D(f) = \langle 0, \infty)$ pre párne n, $D(f) = \mathbf{R}$ pre nepárne n.

Obr. 6.4: Graf funkcie $y = x^3$

Obr. 6.5: Graf funkcie $y = x^4$

6.4.2 Racionálna funkcia

Racionálna funkcia je funkcia definovaná rovnicou

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

Obr. 6.6: Graf funkcie $y = x^{\frac{1}{2}}$

Obr. 6.7: Graf funkcie $y = x^{\frac{1}{3}}$

kde P a Q sú polynómy. Jej definičný obor je množina všetkých čísel r, pre ktoré $Q(r) \neq 0$. V prípade, ak stupeň polynómu P je menší ako stupeň polynómu Q, hovoríme o **rýdzo racionálnej funkcii**. Všeobecné vlastnosti a grafy racionálnych funkcií je ťažké popísať. Pri práci s nimi je často dôležité rozložiť danú racionálnu funkciu na súčet **elementárnych (parciálnych) zlomkov**. Pritom postupujeme podľa nasledujúceho návodu.

1. Vydelením mnohočlenov P a Q prepíšeme funkciu na súčet mnohočlena a rýdzo racionálnej funkcie.
2. Mnohočlen Q v menovateli rozložíme na súčin koreňových činiteľov.
3. Ku každému činiteľu typu $(x-r)^k$ vytvoríme práve k zlomkov $\frac{c_k}{(x-r)^k}, \frac{c_{k-1}}{(x-r)^{k-1}}, \dots, \frac{c_1}{(x-r)}$.
4. Ku každému činiteľu typu $(x^2+px+q)^l$ vytvoríme práve l zlomkov $\frac{a_l x+b_l}{(x^2+px+q)^l}, \frac{a_{l-1}x+b_{l-1}}{(x^2+px+q)^{l-1}}, \dots, \frac{a_1x+b_1}{(x^2+px+q)}$.
5. Neznáme koeficienty vypočítame porovnaním rýdzo racionálnej časti a súčtu všetkých elementárnych zlomkov.
6. Pôvodná funkcia sa rovná súčtu mnohočlenu, ktorý sme dostali delením so súčtom všetkých elementárnych zlomkov.

Príklad 13. Rozložme na súčet elementárnych zlomkov funkciu $y = \frac{x^2}{x^4-1}$.

Riešenie: Postupujeme podľa návodu.

1. Pretože daná funkcia je rýdzo racionálna, prvú časť postupu vynecháme.
2. $x^4 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$,

3. vytvoríme elemntárne zlomky $\frac{c}{x-1}$, $\frac{d}{x+1}$,
4. a zlomok $\frac{ax+b}{x^2+1}$.
5. Porovnáme

$$\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1} + \frac{ax+b}{x^2+1} =$$
$$\frac{c(x+1)(x^2+1) + d(x-1)(x^2+1) + (ax+b)(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}.$$

Pretože menovatele sa rovnajú, rovnajú sa aj čitatele a teda

$$x^2 = c(x+1)(x^2+1) + d(x-1)(x^2+1) + (ax+b)(x-1)(x+1).$$

Po roznásobení a úprave pravej strany dostávame rovnosť dvoch mnohočlenov

$$0.x^3 + 1.x^2 + 0.x + 0 = (a+c+d)x^3 + (b+c-d)x^2 + (-a+c+d)x - b + c - d.$$

Pretože dva mnohočleny sa rovnajú práve vtedy, ak majú zhodné všetky koeficienty, posledná rovnosť je ekvivalentná so sústavou lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} a & & & + & c & + & d & = & 0 \\ & & b & + & c & - & d & = & 1 \\ -a & & & + & c & + & d & = & 0 \\ & - & b & + & c & - & d & = & 0, \end{array}$$

ktorá má riešenie $a = 0,\ b = \frac{1}{2},\ c = \frac{1}{4},\ d = -\frac{1}{4}$.

6. Preto platí

$$\frac{x^2}{x^4-1} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} - \frac{\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}}{x^2+1}.$$

♣

Príklad 14. Rozložme na súčet mnohočlena a elementárnych zlomkov funkciu $y = \frac{x^8+x^2}{(x^3+1)(x+1)^2}$.

Riešenie:

1. Keďže nejde o rýdzo racionálnu funkciu, mnohočleny najskôr vydelíme. Dostaneme podiel $x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ a zvyšok $7x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 7x + 5$. Preto

$$\frac{x^8+x^2}{(x^3+1)(x+1)^2} = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 + \frac{7x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 7x + 5}{(x^3+1)(x+1)^2}$$

Rýdzo racionálnu časť funkcie ďalej rozložíme na súčet elementárnych zlomkov.

2. Mnohočlen v menovateli rozložíme na súčin koreňových činiteľov pomocou rozkladu $x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1)$, ktorého kvadratický činiteľ sa ďalej rozložiť nedá. Preto

$$(x^3+1)(x+1)^2 = (x+1)^3(x^2-x+1),$$

3. vytvoríme elemntárne zlomky $\frac{a}{(x+1)^3}$, $\frac{b}{(x+1)^2}$, $\frac{c}{x+1}$

4. a zlomok $\frac{dx+e}{x^2-x+1}$.

5. Porovnáme

$$\frac{7x^4+5x^3+2x^2+7x+5}{(x^3+1)(x+1)^2} = \frac{a}{(x+1)^3} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{dx+e}{x^2-x+1}.$$

   Po vynásobení menovateľom ľavej strany a úprave pravej strany dostávame rovnosť dvoch mnohočlenov

$$7x^4+5x^3+2x^2+7x+5 =$$

$$(c+d)x^4 + (b+c+3d+e)x^3 + (a+3d+3e)x^2 + (-a+c+d+3e)x + (a+b+c+e).$$

   Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách premennej x dostávame sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
 & & & & c & + & d & & & = & 7 \\
 & & b & + & c & + & 3d & + & e & = & 5 \\
a & & & & & + & 3d & + & 3e & = & 2 \\
-a & & & + & c & + & d & + & 3e & = & 7 \\
a & + & b & + & c & & & + & e & = & 5,
\end{array}$$

   ktorá má riešenie

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{8}{3}, \quad c = \frac{61}{9}, \quad d = \frac{2}{9}, \quad e = \frac{2}{9}.$$

6. Preto platí

$$\frac{x^8+x^2}{(x^3+1)(x+1)^2} = x^3 - 2x^2 + 3x - 5 + \frac{\frac{2}{3}}{(x+1)^3} + \frac{\frac{8}{3}}{(x+1)^2} + \frac{\frac{61}{9}}{x+1} + \frac{\frac{2}{9}x + \frac{2}{9}}{x^2-x+1}.$$

♣

Najdôležitejší špeciálny typ racionálnej funkcie je

Lineárna lomená funkcia

Je to funkcia typu

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{kde a, b, c, d sú reálne čísla.}$$

$D(f) = \mathbf{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ a graf funkcie je hyperbola s asymptotami $y = \frac{a}{c}$ a $x = -\frac{d}{c}$.

Obr. 6.8: Graf funkcie $y = \frac{5x-2}{10x-10}$

6.4.3 Goniometrické (trigonometrické) funkcie

sú funkcie

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{cotg} x, \quad y = \sec x, \quad y = \operatorname{cosec} x.$$

Funkcie **sínus** a **kosínus** majú definičný obor **R** a sú periodické s periódou 2π. Funkcia sínus je nepárna, funkcia kosínus je párna.

Obr. 6.9: Graf funkcie $y = \sin(x)$

Obr. 6.10: Graf funkcie $y = \cos(x)$

Funkcie **tangens** a **kotangens** sú nepárne, periodické funkcie s periódou π. Pre ich definičné obory platí $D(\operatorname{tg}) = \mathbf{R} - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}\}$, $n \in \mathbf{Z}$ a $D(\operatorname{cotg}) = \mathbf{R} - \{n\pi\}$, $n \in \mathbf{Z}$.

Obr. 6.11: Graf funkcie $y = \operatorname{tg}(x)$

Funkcie **sekans** a **kosekans** sú definované pomocou funkcií sínus a kosínus vzťahmi

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Obr. 6.12: Graf funkcie $y = \operatorname{cotg}(x)$

Obr. 6.13: Graf funkcie $y = \sec(x)$

Obr. 6.14: Graf funkcie $y = \operatorname{cosec}(x)$

6.4.4 Cyklometrické funkcie

Keďže funkcie sínus, kosínus, tangens a kotangens sú periodické, nie sú prosté a preto nemajú inverzné funkcie. Každá z nich je však v istom maximálnom intervale prostá a preto má v ňom inverznú funkciu. Tieto inverzné funkcie sa volajú **cyklometrické funkcie**.

Funkcia **arkussínus**

$$y = \arcsin x$$

je inverzná k funkcii sin v intervale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Obr. 6.15: Graf funkcie $y = \arcsin(x)$

Funkcia **arkuskosínus**

$$y = \arccos x$$

je inverzná k funkcii cos v intervale $\langle 0, \pi \rangle$.

Obr. 6.16: Graf funkcie $y = \arccos(x)$

Funkcia **arkustangens**

$$y = \operatorname{arctg} x$$

je inverzná k funkcii tg v intervale $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Funkcia **arkuskotangens**

$$y = \operatorname{arccotg} x$$

je inverzná k funkcii cotg v intervale $(0, \pi)$.

Obr. 6.17: Graf funkcie $y = \mathrm{arctg}\,(x)$

Obr. 6.18: Graf funkcie $y = \mathrm{arccotg}\,(x)$

6.4.5 Exponenciálna funkcia

Exponenciálna funkcia je funkcia definovaná v **R** rovnicou

$$y = a^x, \quad \text{kde a} > 0, \quad \text{a} \neq 1 \quad \text{je reálna konštanta}$$

nazývaná základ exponenciálnej funkcie. Vlastnosti exponenciálnej funkcie závisia od hodnoty jej základu:

- ak $a \in (0, 1)$, tak je klesajúca
- ak $a \in (1, \infty)$, tak je rastúca,

v každom prípade je teda monotónna a jej obor hodnôt je $(0, \infty)$.
Medzi exponenciálnymi funkciami má dôležité postavenie funkcia $y = e^x$, ktorej základ je číslo $e \approx 2,71828$ (pozri časť 6.8). Jej dôležitosť vyplýva z faktu, že sa rovná svojej derivácii (pozri kapitolu Diferenciálny počet).

6.4.6 Logaritmická funkcia

Pretože exponenciálna funkcia je monotónna, má inverznú funkciu. Táto sa volá **logaritmická funkcia** a označuje

$$y = \log_a x, \quad \text{kde a} > 0, \quad \text{a} \neq 1 \quad \text{je reálna konštanta}$$

nazývaná základ logaritmickej funkcie. Logaritmická funkcia so základom 10 sa zapisuje $\log x$ namiesto $\log_{10} x$.
Definičný obor logaritmickej funkcie je $(0, \infty)$, obor hodnôt je **R** a je rastúca alebo klesajúca v závislosti od svojho základu rovnakým spôsobom ako exponenciálna funkcia.
Medzi logaritmickými funkciami má dôležité postavenie funkcia $\ln x = \log_e x$, ktorá je inverzná k funkcii $y = e^x$, volá sa **prirodzený logaritmus**.

Obr. 6.19: Graf funkcie $y = e^x$

Obr. 6.20: Graf funkcie $y = (\frac{1}{2})^x$

Obr. 6.21: Graf funkcie $y = \ln(x)$

Obr. 6.22: Graf funkcie $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

6.4.7 Hyperbolické funkcie

Hyperbolický sínus je funkcia

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Je to nepárna rastúca neohraničená funkcia.

Obr. 6.23: Graf funkcie $y = \sinh(x)$

Hyperbolický kosínus je funkcia

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Je to zdola ohraničená párna funkcia.

Obr. 6.24: Graf funkcie $y = \cosh(x)$

Hyperbolický tangens je funkcia

$$\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Je to nepárna rastúca ohraničená funkcia.

Hyperbolický kotangens je funkcia

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Táto funkcia nie je definovaná v bode 0. Je nepárna neohraničená, klesajúca v intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Obr. 6.25: Graf funkcie $y = \operatorname{tgh}(x)$

Obr. 6.26: Graf funkcie $y = \operatorname{cotgh}(x)$

Hyperbolické funkcie nie sú periodické.

Príklad 15. Ukážeme spomínané vlastnosti hyperbolického tangensu.

Riešenie: $\operatorname{tgh}(-x) = \frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{x}+e^{-x}} = -\operatorname{tgh} x$, preto je to funkcia nepárna.
Funkcia tgh je rastúca, ak pre ľubovoľné $r < s$ platí $\operatorname{tgh} r - \operatorname{tgh} s < 0$. Nech teda $r < s$. Počítajme

$$\operatorname{tgh} r - \operatorname{tgh} s = \frac{e^{r} - e^{-r}}{e^{r} + e^{-r}} - \frac{e^{s} - e^{-s}}{e^{s} + e^{-s}} =$$

$$\frac{e^{r+s} - e^{s-r} + e^{r-s} - e^{-r-s} - e^{r+s} + e^{r-s} - e^{s-r} + e^{-r-s}}{(e^{r} + e^{-r})(e^{s} + e^{-s})} =$$

$$\frac{2e^{r-s} - 2e^{-(r-s)}}{(e^{r} + e^{-r})(e^{s} + e^{-s})}.$$

Menovateľ posledného zlomku je kladné číslo a čitateľ (pretože $r - s < 0$, odôvodnite!) je záporný, celý zlomok je teda záporný a tgh je rastúca funkcia.
Pretože $e^{-x} > 0$, platí $e^{x} - e^{-x} < e^{x} + e^{-x}$, teda $\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \operatorname{tgh} x < 1$. Podobne sa dá ukázať, že $-1 < \operatorname{tgh} x$ a preto tgh je ohraničená funkcia. ♣

6.4.8 Elementárne funkcie

Elementárne funkcie

sú všetky funkcie, ktoré dostaneme pomocou konečného počtu operácií uvedených v časti 6.2 z typov funkcií doteraz uvedených.

6.4.9 Iné funkcie

Absolútna hodnota

je funkcia definovaná v **R** rovnicou

$$y = |x|.$$

Obr. 6.27: Graf funkcie $y = |x|$

Funkcia znamienka (signum)

je funkcia označovaná $sign(x)$, definovaná po častiach

- $sign(x) = -1$, ak $x \in (-\infty, 0)$
- $sign(0) = 0$
- $sign(x) = 1$, ak $x \in (0, \infty)$.

Obr. 6.28: Graf funkcie $y = \operatorname{sign}(x)$

Príklad 16. Porovnajme funkcie $f(x) = sign(x)$ a $g(x) = \frac{x}{|x|}$.

Riešenie: Obidve funkcie majú rovnaké hodnoty vo všetkých nenulových číslach, $D(f) = \mathbf{R}$, $D(g) = \mathbf{R} - \{0\}$, preto $g = f_{/\mathbf{R}-\{0\}}$. ♣

Poznámka. Na záver poznamenajme, že veľká väčšina funkcií, s ktorými sa stretnete, budú elementárne funkcie, prípadne funkcie, získané z elementárnych a dvoch posledne spomenutých pomocou operácií s funkciami.

6.5 Spojitosť

Spojitosť funkcie v čísle je lokálna vlastnosť, ktorá dáva do súvisu hodnotu funkcie v čísle s hodnotami v jeho okolí.
Voľne povedané, funkcia f je spojitá v čísle r zo svojho definičného oboru, ak

> hodnoty funkcie f v číslach blízkych r sú blízke hodnote $f(r)$.

Presne povedané, funkcia f je **spojitá v čísle (bode)** r zo svojho definičného oboru, ak

> pre každé $\varepsilon > 0$ existuje také $\delta > 0$, že pre všetky $x \in (r-\delta, r+\delta) \bigcap D(f)$ platí $f(x) \in (f(r)-\varepsilon, f(r)+\varepsilon)$.

Čísla z definičného oboru, v ktorých je funkcia spojitá, sa volajú **body spojitosti**. Čísla z definičného oboru, v ktorých funkcia spojitá nie je, sa volajú **body nespojitosti**.
Spojitá funkcia je taká funkcia, ktorá je spojitá v každom čísle svojho definičného oboru. Funkcia f je **spojitá v intervale** $(a,b) \subset D(f)$, ak je spojitá v každom bode tohoto intervalu.
Funkcia f je **spojitá v čísle (bode)** r zo svojho definičného oboru **zľava (sprava)**, ak je v bode r spojitá funkcia $f_{/(-\infty,r>}$ $(f_{/<r,\infty)})$.
Spojité funkcie majú veľa vlastností, ktoré z nich robia dôležitý objekt štúdia.

6.5.1 Spojitosť a elementárne funkcie

> Elementárne funkcie sú spojité.

Funkcia $y = sign(x)$ je nespojitá v bode 0. Iným príkladom nespojitých funkcií sú funkcie celá a zlomková časť čísla. Celá časť čísla x je najväčšie celé číslo menšie alebo rovné x a značí sa $[x]$. Zlomková časť čísla x je $\{x\} = x - [x]$. Obidve tieto funkcie sú nespojité v každom celom čísle.

6.5.2 Spojitosť a operácie s funkciami

Funkcie vytvorené operáciami zo spojitých funkcií bývajú spojité:

1. Zúženie spojitej funkcie je spojitá funkcia.

2. Ak sú v čísle r spojité funkcie f a g, tak sú v čísle r spojité aj funkcie $f+g$, $f-g$ a $f.g$ a tiež funkcia $\frac{f}{g}$, ak $g(r) \neq 0$.

3. Ak je funkcia f spojitá v čísle r a funkcia g je spojitá v čísle $f(r)$, tak funkcia $g \circ f$ je spojitá v čísle r.

4. Ak je prostá funkcia spojitá, tak aj k nej inverzná funkcia je spojitá.

6.5.3 Spojitosť a graf

Voľne povedané:

> ak je graf funkcie súvislá krivka, tak je funkcia spojitá.

6.5.4 Spojitosť a globálne vlastnosti

1. Funkcia spojitá v uzavretom intervale je v tomto intervale ohraničená.
2. Funkcia spojitá v uzavretom intervale má v tomto intervale maximum aj minimum.
3. Ak je spojitá funkcia prostá v niektorom intervale, tak je v tomto intervale aj rýdzo monotónna.

6.5.5 Spojitosť a riešenie rovníc

Ak f je spojitá funkcia v intervale $\langle a, b\rangle$ a $f(a)$ a $f(b)$ majú opačné znamienka, tak rovnica $f(x) = 0$ má v intervale (a, b) aspoň jedno riešenie.

Pre použitie tejto vlastnosti pozri časť 6.6 a 7.14.

Príklad 17. Zistime body nespojitosti funkcií $e(x) = 4x^3 - 5x$, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \{x\}.[x + 1]$, $h(x) = sign(8 + 2x - x^2)$.

Riešenie: Funkcie e a f sú elementárne a preto spojité. Prvá funkcia je aj spojitá v $\mathbf{R}$, druhá má bod nespojitosti v čísle 1. Obidve funkcie $\{x\}$ aj $[x]$ sú spojité v každej neceločíselnej hodnote x a preto aj ich súčin, funkcia g je spojitá v týchto číslach. Ak načrtneme graf g, vidíme, že je nespojitá vo všetkých celých číslach s výnimkou čísla 1. Funkcia h bude nespojitá v tých číslach, v ktorých sa mení znamienko funkcie $y = 8 + 2x - x^2$ (odôvodnite!) a to sú čísla -2 a 4. ♣

Príklad 18. Nájdime číslo p, pre ktoré je funkcia f definovaná po častiach

$$f(x) = \begin{cases} 3x - p, & x \leq 0 \\ x^2 + 2, & x > 0 \end{cases}$$

spojitá.

Riešenie: Keďže obidve funkcie $y = 3x - p$ aj $y = x^2 + 2$ sú spojité (tá prvá pre každú hodnotu p), funkcia f je nezávisle na hodnote p spojitá v každom nenulovom čísle. Ak načrtneme graf funkcie f v intervale $(0, \infty)$, vidíme, že pre hodnoty x "blízke" 0 sú hodnoty $f(x)$ "blízke" 2. Aby bola funkcia f spojitá v čísle 0, je nutné (a postačujúce), aby $f(0) = 3.0 - p = 2$, preto $p = -2$. ♣

6.6 Limita funkcie

6.6.1 Pojem limity

Existencia limity funkcie v bode vyjadruje istú ustálenosť hodnôt funkcie v okolí tohoto bodu.
Voľne povedané, funkcia f má v bode p limitu L, ak

hodnoty funkcie f v číslach blízkych p sú blízke L.

Pod **bodom** rozumieme ľubovoľné reálne číslo ako aj každú z hodnôt $\pm\infty$. Pod okolím bodu rozumieme ľubovoľný otvorený interval obsahujúci tento bod.
Funkcia f má v bode p **limitu** L, ak sú splnené tieto podmienky:

- Pre každé okolie U bodu p platí $(U - \{p\}) \cap D(f) \neq \emptyset$

- pre každé okolie V bodu L existuje také okolie U bodu p, že platí

  ak $x \in (U - \{p\}) \cap D(f)$, tak $f(x) \in V$.

Fakt, že funkcia f má v bode p limitu L označujeme $\lim_{x\to p} f(x) = L$.
Ak bod p v predchádzajúcej definícii je reálne číslo, tak hovoríme o limite vo **vlastnom bode**, v opačnom prípade hovoríme o limite v **nevlastnom bode**. Ak hodnota L limity je reálne číslo, tak hovoríme o **vlastnej limite**, v opačnom prípade hovoríme o **nevlastnej limite**.
Ak má funkcia f v bode p vlastnú limitu, hovoríme, že v bode p **konverguje** alebo **je konvergentná**, v opačnom prípade v bode p **diverguje** alebo **je divergentná**.
Funkcia f má v bode p **limitu** L **zľava (sprava)** , ak má v bode p limitu L funkcia $f_{/(-\infty,p)}$ ($f_{/(p,\infty)}$), označenie: $\lim_{x\to p^-} f(x) = L$ ($\lim_{x\to p^+} f(x) = L$). Limity zľava a sprava nazývame spoločným názvom **jednostranné limity**.
Poznamenajme ešte, že ak má funkcia v niektorom bode limitu, tak táto je určená jednoznačne.

6.6.2 Počítanie limít

Pri počítaní limity funkcie f v bode p postupujeme nasledovne:

1. Ak je f spojitá v bode p, tak $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.
2. Ak funkcia f nie je spojitá v bode p, tak sa ju snažíme upraviť na funkciu, ktorá s ňou sa zhoduje všade mimo bodu p a je spojitá v p alebo na funkciu, ktorej limitu poznáme.
3. Môžeme tiež použiť iný postup, ktorý je popísaný v časti 7.9.

Pri úpravách limít používame pravidlá, z ktorých najdôležitejšie uvedieme.

6.6.3 Pravidlá pre počítanie limít

Pravidlá pre vlastné limity

1. Funkcia f definovaná v niektorom okolí bodu p je spojitá v bode p vtedy a len vtedy, ak $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.
2. Limita "zachováva" algebrické operácie: ak $\lim_{x\to p} f(x) = F$ a $\lim_{x\to p} g(x) = G$ a $c \in \mathbf{R}$, tak
   - $\lim_{x\to p}(f + g)(x) = F + G$,
   - $\lim_{x\to p}(f - g)(x) = F - G$,
   - $\lim_{x\to p} c.f(x) = c.F$,
   - $\lim_{x\to p}(f.g)(x) = F.G$,
   - $\lim_{x\to p}(\frac{f}{g})(x) = \frac{F}{G}$, ak $G \neq 0$.
3. Pravidlo substitúcie: Nech $x = f(t)$ je spojitá v bode a, prostá v okolí bodu a, pričom $p = f(a)$. Potom ak $\lim_{t\to a} g(f(t)) = L$, tak aj $\lim_{x\to p} g(x) = L$.
4. Ak funkcie f a g majú v bode p limitu a pre každé x z niektorého okolia bodu p s možnou výnimkou bodu p platí $f(x) \leq g(x)$, tak $\lim_{x\to p} f(x) \leq \lim_{x\to p} g(x)$.
5. Ak $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} h(x) = L$ a pre každé x z niektorého okolia bodu p s možnou výnimkou bodu p platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, tak existuje aj $\lim_{x\to p} g(x)$ a platí $\lim_{x\to p} g(x) = L$.

6. Ak $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ a funkcia g je ohraničená v okolí bodu p, tak $\lim_{x\to p}(f.g)(x) = 0$.

Poznámka. Tretie pravidlo tohoto zoznamu sa v praxi najčastejšie používa v podobe:

Nech $\lim_{x\to p} g(x) = L$ a funkcia f je spojitá v bode L. Potom $\lim_{x\to p} f(g(x)) = f(\lim_{x\to p} g(x)) = f(L)$.

Pravidlá pre nevlastné limity, typy limít

Najčastejšie počítame limitu funkcie f v bode, v ktorom nie je definovaná, prípadne nie je spojitá, pričom f vzniká pomocou algebrických operácií z jednoduchších funkcií, ktorých limity v danom bode sme schopní počítať. Ak tieto limity dosadíme do príslušných operácií, dostávame výraz, ktorý nemá zmysel. Tento výraz nazývame **typom** limity. Napríklad $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ je typu $\frac{0}{0}$ a $\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{|x|}}$ je typu 1^∞. Na výpočet niektorých typov limít môžeme použiť nasledujúce pravidlá, v ktorých symbol 0^+ (0^-) znamená, že limita príslušnej funkcie je rovná 0, a naviac hodnoty funkcie v istom okolí daného bodu sú len kladné (záporné), napríklad $\lim_{x\to 0} x^4 = 0^+$. Písmeno r označuje ľubovoľné **nenulové** reálne číslo a písmeno k označuje ľubovoľné **kladné** reálne číslo:

$\frac{r}{\pm\infty} = 0$	$\frac{k}{0^+} = \infty$	$\frac{k}{0^-} = -\infty$
$k.\infty = \infty$	$k.(-\infty) = -\infty$	$\infty.(-\infty) = -\infty$
$r + \infty = \infty$	$r - \infty = -\infty$	
$k^\infty = 0, \text{ ak } 0 < k < 1$		$k^\infty = \infty, \text{ ak } k > 1$

Výsledky ďalších typov limít, ako napríklad $\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0.\infty,\ \infty - \infty,\ 1^\infty$ nie sú jednoznačne určené. Pri ich počítaní používame uvedené pravidlá aj napriek tomu, že nevieme, či počítaná limita existuje. Ak takto vypočítame limitu, jej existencia dodatočne "legalizuje" náš postup. Poznamenajme ešte, že v nasledujúcej kapitole v časti 7.9 je uvedená technika, ktorá veľmi zjednodušuje postup počítania väčšiny obtiažnych limít.

6.6.4 Niekoľko dôležitých limít

Nakoniec uvedieme niekoľko dôležitých limít. V nasledujúcich vzťahoch je $a > 0,\ a \neq 1$.

$\lim_{x\to\infty} x^a = 0, \text{ ak } a < 0,$	$\lim_{x\to\infty} x^a = \infty, \text{ ak } a > 0,$
$\lim_{x\to\infty} a^x = 0, \text{ ak } a < 1,$	$\lim_{x\to\infty} a^x = \infty, \text{ ak } a > 1,$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$	$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a,$
$\lim_{x\to 0^+} x\log_a x = 0,$	$\lim_{x\to 1} \frac{\log_a x}{x-1} = \frac{1}{\ln a},$
$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0.$	

Nech $P_k(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ a $Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0$ sú mnohočleny a $c > 1$. Potom

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c^x}{P_k(x)} = \begin{cases} \infty, & a_k > 0, \\ -\infty, & a_k < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty} P_k(x) = \begin{cases} \infty, & a_k > 0, \\ -\infty, & a_k < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} P_k(x) = \begin{cases} \infty, & (-1)^k sign(a_k) > 0, \\ -\infty, & (-1)^k sign(a_k) < 0, \end{cases}$$

a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_k(x)}{Q_n(x)}=\begin{cases}0, & k<n,\\ \frac{a_n}{b_n}, & k=n,\\ \infty, & k>n \text{ a } \frac{\mathrm{a_k}}{\mathrm{b_n}}>0,\\ -\infty, & k>n \text{ a } \frac{\mathrm{a_k}}{\mathrm{b_n}}<0.\end{cases}$$

Analogické výsledky poslednej limity v bode $-\infty$ môžeme odvodiť substitúciou $t=-x$.

6.6.5 Príklady

Teraz uvedieme niekoľko typických príkladov výpočtu limít.

Príklad 19. Zistime existenciu limít funkcií $f : y = x+1$, $g : y = \frac{x^2-1}{x-1}$, $h : y = \frac{1}{|x-1|}$, $i : y = \frac{1}{x-1}$ a $j : y = \frac{x-1}{|x-1|}$ v bode 1.

Riešenie: $\lim_{x\to 1} x+1 = 2$, pretože ide o spojitú funkciu.
Funkciu g upravíme na spojitú funkciu zhodnú s ňou mimo bodu 1:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1} x+1=2$$

Zaveďme substitúciu $t=|x-1|$. Potom

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{|x-1|}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}=\infty.$$

Funkcia i nemá v bode 1 limitu, ale má nevlastné obidve jednostranné limity:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=\lim_{t\to 0^-}\frac{1}{t}=-\infty.$$

a

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t}=\infty.$$

Podobne sa ukáže, že funkcia j má v bode 1 limitu zľava -1 a limitu sprava 1. ♣

Príklad 20. Ukážeme platnosť posledných dvoch vzťahov v časti 6.6.4.

Riešenie: Odporúčame čitateľovi určiť, ktoré pravidlá a limity v príslušných krokoch používame. Nech $P_k(x) = a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1x + a_0$ a $Q_n(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0$ sú mnohočleny. Potom

$$\lim_{x\to-\infty} a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1x + a_0 =$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^k\left(a_k+\frac{a_{k-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{k-1}}+\frac{a_0}{x^k}\right)$$

Výsledok vyplýva z faktu, že limita výrazu v zátvorke je a_k a použitia pravidiel pre nevlastné limity.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_kx^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1x + a_0}{b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0}=$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^k(a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_0}{x^k})}{x^k(b_n x^{n-k} + b_{n-1}x^{n-k-1} + \ldots + \frac{b_1}{x^{k-1}} + \frac{b_0}{x^k})} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_k + \frac{a_{k-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{k-1}} + \frac{a_0}{x^k})}{x^{n-k}(b_n + \frac{b_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \frac{b_0}{x^n})} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{n-k}} . \lim_{x\to\infty} \frac{a_k}{b_n} =$$

$$\frac{a_k}{b_n} . \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{n-k}}.$$

Výsledok vyplýva z toho, že posledná limita sa rovná 0, 1, ∞ podľa toho, či $k < n$, $k = n$ alebo $k > n$. ♣

Príklad 21. Zistime existenciu limít funkcií $f: \ y = \frac{8x^3}{x^6+3}$, $g: \ y = \frac{-2x^2+25x+111}{3x^2-4x}$, $h: \ y = \frac{11x^4+29x}{85-7x^3}$ a $i: \ y = \left(\frac{2x-5}{4-x}\right)^3$ v bodoch $\pm\infty$.

Riešenie:
Použijúc výsledky predchádzajúceho príkladu dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = -\frac{2}{3}, \quad \lim_{x\to\infty} h(x) = -\infty.$$

Použijúc substitúciu $t = -x$ dostávame

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{t\to\infty} f(-t) = \lim_{t\to\infty} = \frac{-8t^3}{t^6+3} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{-2t^2 - 25t + 111}{3t^2 + 4t} = -\frac{2}{3}$$

a

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{t\to\infty} \frac{11t^4 - 29t}{85 + 7t^3} = \infty.$$

Limitu funkcie i vypočítame podľa poznámky v časti 6.6.2

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-5}{4-x}\right)^3 = \left(\lim_{x\to\infty} \frac{2x-5}{4-x}\right)^3 = (-2)^3 = -8.$$

Podobným postupom dostaneme rovnakú limitu v bode $-\infty$. ♣

Príklad 22. Vypočítajme $K = \lim_{x\to\infty} \arcsin \frac{2x-3}{7-4x}$, $L = \lim_{x\to 3} 5^{\frac{x-2}{3-x}}$ a $M = \lim_{x\to 0^+} x^x$.

Riešenie: Použitím poznámky v časti 6.6.2 dostaneme

$$K = \arcsin\left(\lim_{x\to\infty} \frac{2x-3}{7-4x}\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

Pri výpočte limity L najskôr zavedieme substitúciu $t = \frac{x-5}{3-x}$ a uvedomíme si, že $\lim_{x\to 3^-} \frac{x-2}{3-x} = \infty$ a $\lim_{x\to 3^+} \frac{x-2}{3-x} = -\infty$ Preto limita L neexistuje, ale existujú príslušné jednostranné limity

$$L^- = \lim_{x\to 3^-} 5^{\frac{x-5}{3-x}} = \lim_{t\to\infty} 5^t = \infty$$

a

$$L^+ = \lim_{x\to 3^+} 5^{\frac{x-5}{3-x}} = \lim_{t\to -\infty} 5^t = 0.$$

V prípadoch, keď je premenná x v základe aj exponente funkcie (ako pri limite M), používame vzťah $x = a^{\log_a\, x}$ platný pre všetky $x > 0$ a vhodné a, najčastejšie používame hodnotu $a = e$.

$$M = \lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x \ln\, x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x \ln\, x} = e^0 = 1.$$

♣

Príklad 23. Vypočítajme $L = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x^4-1}\right)$.
Riešenie:

$$L = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x^4-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

♣

Príklad 24. Vypočítajme $L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}$.

Riešenie: $L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x} . \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}+\sqrt{5}} = \lim_{x\to 0} \frac{x+5-5}{x(\sqrt{x+5}+\sqrt{5})} = \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$. ♣

Príklad 25. Vypočítajme $L = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 7x}$.

Riešenie: $L = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\cos 3x \sin 7x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 7x}{7x}\frac{7}{3}} \frac{1}{\cos 3x} = \frac{3}{7} \frac{\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x}} . \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 3x} = \frac{3}{7}$. ♣

Príklad 26. Vypočítajme $L = \lim_{x\to 0} \frac{2^{2x+1}-1}{x}$.

Riešenie: $L = \lim_{x\to 0} \frac{2^{2x+3}-8}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{8.4^x-8}{x} = 8 \lim_{x\to 0} \frac{4^x-1}{x} = 8 \ln 4$. ♣

Príklad 27. Vypočítajme $L = \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+9} - x)$.

Riešenie:

$$L = \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+9} - x) = \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+9} - x)\frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x(x^2+9-x^2)}{\sqrt{x^2+9}+x} = \lim_{x\to\infty} 9\frac{x}{x(\sqrt{1+\frac{9}{x^2}}+1)} = \frac{9}{2}.$$

♣

Príklad 28. Vypočítajme $L = \lim_{x\to\infty} 3^{-x} \cos\ 5x$ a
$K = \lim_{x\to -\infty} 3^{-x} \cos\ 5x$.

Riešenie: Periodické funkcie nemajú limitu v nevlastných bodoch, preto v tomto príklade nemôžeme aplikovať pravidlá pre algebrické operácie. Limitu L však môžeme vypočítať podľa pravidla 5 v časti 6.6.3, pretože

$$\lim_{x\to\infty} 3^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3^x} = 0$$

a funkcia cos $5x$ je ohraničená. Preto $L = 0$.
Na druhej strane

$$\lim_{x\to-\infty} 3^{-x} = \lim_{t\to\infty} 3^t = \infty.$$

Pretože funkcia cos $5x$ strieda znamienka, hodnota $3^{-x}\cos\, 5x$ pre $x \to \infty$ bude oscilovať, t.j. nadobúdať ľubovoľne veľké kladné a ľubovoľne malé záporné hodnoty. Preto limita K neexistuje. ♣

Nasledujúci príklad predstavuje dôležité tvrdenie.

Príklad 29. Každá algebrická rovnica nepárneho stupňa, t.j. rovnica

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \quad n \text{ je nepárne}$$

má aspoň jedno reálne riešenie.
Riešenie: Podľa Príkladu 20 majú limity ľavej strany v bodoch $\pm\infty$ opačné znamienka (odôvodnite!). Podľa tvrdenia z časti 6.5.5 preto existuje riešenie tejto rovnice. Premyslite si, prečo tvrdenie neplatí aj pre párne čísla n. ♣

6.7 Asymptoty grafu funkcie

Asymptotou grafu funkcie je priamka, ktorá sa grafu funkcie "dotýka v nekonečne". Rozoznávame dva druhy asymptôt grafu funkcie.
Priamka $y = r$ je **asymptotou grafu funkcie** f **bez smernice**, ak funkcia f má v bode r (aspoň jednostrannú) nevlastnú limitu.
Priamka $y = px + q$ je **asymptotou grafu funkcie** f **so smernicou**, ak
$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (px + q)] = 0$ alebo $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (px + q)] = 0$.
Pre praktické zisťovanie asymptôt grafu funkcie platia pravidlá:

1. Priamka $x = r$ je asymptotou grafu funkcie f bez smernice, ak aspoň jedna z limít $\lim_{x\to r^-} f(x)$ alebo $\lim_{x\to r^+} f(x)$ je rovná buď ∞ alebo $-\infty$.

2. Priamka $y = px + q$ je **a**symptotou grafu funkcie f so smernicou, ak $p = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ a $q = \lim_{x\to\infty} f(x) - px$.

Príklad 30. Nájdime asymptoty grafov funkcií $e: \ y = \frac{2x^2-5x-1}{2-x}$, $f: \ y = \ln\, x$, $g: \ y = x2^x$, $h: \ y = x cotg\, x$, $i: \ y = tgh\, x$,

Riešenie: Funkcia e nie je definovaná v jedinom reálnom čísle 2, preto jediná možná asymptota bez smernice je priamka $x = 2$. Počítajme $\lim_{x\to 2^-} e(x) = -\infty$, preto spomínaná priamka je asymptotou grafu e. Ďalej

$$p = \lim_{x\to\infty} \frac{e(x)}{x} = -2$$

(prečo?) a

$$q = \lim_{x\to\infty}(e(x) + 2x) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x-1}{2-x} = 1.$$

Priamka $y = -2x+1$ je asymptotou grafu e. Tá istá priamka je aj asymptotou grafu e v $-\infty$ (overte!). Poznamenajme, že asymptoty racionálnych funkcií môžeme počítať aj jednoduchšie prepísaním funkcie pomocou delenia mnohočlenov:

$$e(x) = 2x + 1 + \frac{3}{x-2}.$$

Z tohoto zápisu je vidieť, že priamka $y = 2x + 1$ je jedinou asymptotou grafu e.
Funkcia f je spojitá a $D(f) = (0, \infty)$. Naviac $\lim_{x\to 0^+} \ln\, x = -\infty$, preto priamka $x = 0$ je asymptotou grafu f. Ďalej $p = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\, x}{x} = 0$ avšak $q = \lim_{x\to\infty} \ln\, x - 0.x = \infty$. Preto funkcia f nemá asymptotu so smernicou.
Funkcia g je spojitá v každom reálnom čísle, preto nemá asymptoty bez smernice. Ďalej

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} 2^x = \infty$$

nie je vlastná a preto g nemá asymptotu v $+\infty$. Na druhej strane

$$p = \lim_{x\to-\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 2^x = \lim_{t\to\infty} 2^{-t} = 0$$

a

$$q = \lim_{x\to-\infty} (g(x) - px) = \lim_{x\to-\infty} x2^x = \lim_{t\to\infty} -\frac{t}{2^t} = 0$$

(prečo?). Priamka $y = 0$ je asymptotou grafu funkcie g.
Funkcia h nie je definovaná v číslach $k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ a vo všetkých okrem 0 má nevlastné jednostranné limity (overte!). V čísle 0 je

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin\, x} \cos\, x = 1.$$

Preto funkcia h má nekonečne veľa asymptôt bez smernice určených rovnicami $x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z},\ k \neq 0$.
Funkcia h osciluje pre $x \to \infty$ aj pre $x \to -\infty$, preto nemá asymptoty so smernicou.
Funkcia i je spojitá vo všetkých reálnych číslach, preto nemá asymptoty bez smernice. Ďalej

$$p = \lim_{x\to\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} i(x)\frac{1}{x} = 0,$$

pretože i je ohraničená funkcia a $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$. Potom

$$q = \lim_{x\to\infty} (i(x) - 0.x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

Priamka $y = 1$ je asymptotou grafu funkcie i. Pretože funkcia i je nepárna, je asymptotou aj priamka $y = -1$ (odôvodnite!). ♣

Príklad 31. Ukážeme, že, ak má párna funkcia asymptotu $y = px + q$, tak má aj asymptotu $y = -px + q$.

Riešenie: Pretože graf párnej funkcie je symetrický podľa osi o_y, z predpokladu asymptoty $y = px + q$ vyplýva aj existencia asymptoty súmerne združenej s ňou podľa osi o_y. Touto je priamka $y = -px + q$ (overte!). ♣

6.8 Postupnosti

Postupnosť je reálna funkcia, ktorej definičný obor je množina prirodzených čísel. Preto môžeme na postupnosti aplikovať všetky definície a tvrdenia o funkciách.
Čo sa týka limít, môžu existovať len limity v nevlastnom bode ∞ (prečo ?) a preto hovoríme o **konvergentnej** alebo **divergentnej** postupnosti bez nutnosti určenia bodu. Limity postupností počítame tak ako limity funkcií v nevlastnom bode ∞. Používame pritom nasledujúce pravidlo:

Nech f je taká funkcia, že pre každé $n \in \mathbf{N}$ platí $f(n) = a_n$ a $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existuje. Potom existuje aj $\lim_{n\to\infty} a_n$ a obidve limity sa rovnajú.

Poznamenajme, že opačné pravidlo neplatí. Napríklad postupnosť $\{\sin 2\pi n\}_{n=1}^{\infty}$ je konštantná a preto má limitu 0, avšak príslušná funkcia $y = \sin 2\pi x$ je periodická a preto nemá limitu v nevlastnom bode ∞. Naviac pre limity postupností platia nasledujúce dve dôležité vlastnosti:

1. Ak je postupnosť konvergentná, tak je ohraničená.
2. Každá rastúca zhora ohraničená postupnosť je konvergentná.

Dá sa ukázať, že postupnosť $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je rastúca a zhora ohraničená a preto má limitu. Táto limita sa označuje symbolom e, volá sa **základ prirodzeného logaritmu** a má v matematike veľký význam. Číslo e je iracionálne a jeho hodnota je približne $2,71828$. Teda

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828.$$

Dá sa ukázať, že všeobecnejšie platí:
Nech

$$\lim_{x\to p} f(x) = \infty.$$

Potom

$$\lim_{x\to p} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$$

a

$$\lim_{x\to p} \left(1 - \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = \frac{1}{e}.$$

Príklad 32. Vypočítajme limity $L = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3-1}{51n^2+102n+1998}$, $M = \lim_{n\to\infty} \log_4 \frac{n^3-1}{16n^3+102n+1998}$.

Riešenie: Podľa pravidla uvedeného v tejto časti a na základe limít v časti 6.6.4 je

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 1}{51x^2 + 102x + 1998} = \infty.$$

Podobne

$$M = \lim_{x\to\infty} = \log_4 \frac{n^3 - 1}{16n^3 + 102n + 1998} = \log_4 \frac{1}{16} = -2.$$

♣

Príklad 33. Vypočítajme limity $K = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$, $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Riešenie: Pretože $0 < \frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n}$ (odôvodnite!), platí

$$0 \le K \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

teda $K = 0$ a

$$L = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln\, n}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\, n}{n}} = e^0 = 1.$$

♣

Príklad 34. Vypočítajme limity $K = \lim_{n\to\infty} n.\mathrm{tg}\,\frac{1}{n}$,
$L = \lim_{n\to\infty} n\cos\,\frac{1}{n}$, $M = \lim_{n\to\infty} \mathrm{arccotg}\,(n)$.

Riešenie: Pretože $n = \frac{1}{\frac{1}{n}}$, substitúciou $t = \frac{1}{n}$ dostávame

$$K = \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{tg}\ t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin\ t}{t}.\lim_{t\to 0}\frac{1}{\cos\ t} = 1.1 = 1.$$

L je limita typu $1.\infty$, preto $L = \infty$.
Z vlastností a grafu funkcie arccotg vidieť, že $M = 0$. ♣

Príklad 35. Vypočítajme limity $K = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n+4} - \sqrt{n-4}$,
$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}(\sqrt{n+4} - \sqrt{n})$.

Riešenie: Výraz $\sqrt{n+4} - \sqrt{n-4}$ je typu $\infty - \infty$, preto ho upravíme pomocou násobenia číslom $\frac{\sqrt{n+4}+\sqrt{n-4}}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n-4}}$ rovným 1 a potom počítame

$$K = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+4} - \sqrt{n-4}).(\sqrt{n+4} + \sqrt{n-4})}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n-4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{8}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n-4}} = 0.$$

Podobnou úpravou dostaneme

$$L = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n+2}\frac{4}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n}} = 4.\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}} + \sqrt{1}} = 2.$$

♣

Príklad 36. Vypočítajme limity $J = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\sqrt{n}}$,
$K = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2n}$, $L = \lim_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}\,x)^{\mathrm{cotg}\,x}$.

Riešenie: Taktikou pri riešení limít tohoto typu je previesť výraz na typ $\left(1 \pm \frac{1}{v}\right)^v$, ktorého limita je rovná $e^{\pm 1}$, ak v je **ľubovoľná** premenná blížiaca sa k ∞.

$$J = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)\frac{\sqrt{n}}{n+1}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}} = e^0 = 1.$$

$$K = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\frac{n+1}{2}}\right)^{\frac{n+1}{2}\frac{4n}{n+1}} = e^{-\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1}} = e^{-4}.$$

Funkciu, ktorej limitu počítame môžeme prepísať na tvar $\left(1 + \frac{1}{\mathrm{cotg}\,x}\right)^{\mathrm{cotg}\,x}$. Bodeme počítať jednostranné limity, pretože tie sú v bode 0 pre funkciu cotg rovné $\pm\infty$. V prípade limity zľava preto použijeme substitúciu $t = -\mathrm{cotg}\,x$.

$$L^- = \lim_{x\to 0^-}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{cotg}\,x}\right)^{\mathrm{cotg}\,x} = \lim_{t\to\infty}\left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} =$$

$$= \left(\lim_{t \to \infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right)^t \right)^{-1} = \left(e^{-1} \right)^{-1} = e.$$

Ten istý výsledok dostaneme pre limitu sprava substitúciou $t = \operatorname{cotg} x$. Preto $L = e$. ♣

Cvičenia.

1. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich priradení určujú funkcie.

a) Každému prirodzenému číslu priradíme súčet všetkých jeho prirodzených deliteľov.

b) Každému trojuholníku priradíme jeho výšku.

c) Každému trojuholníku priradíme kružnicu jemu opísanú.

d) Každému reálnemu číslu priradíme jeho druhú odmocninu.

e) Každému reálnemu číslu x priradíme číslo $3x - 41$.

2. Je daná kvadratická rovnica $3x^2 + 2x + p = 0$. Vyjadrite závislosť súčtu, súčinu, rozdielu a podielu jej koreňov od hodnoty parametra p.

3. Je daná funkcia $y:\ f(x) = \frac{2x-1}{3x^2-1}$. Nájdite hodnoty $f(-1),\ f(\frac{\sqrt{2}}{2}),\ f(\frac{\sqrt{3}}{3}),\ f(1+a),\ f(-x),\ f(\frac{1}{x})$.

4. Nájdite definičné obory funkcií

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & y = \frac{x}{2x+1} & \text{b)} & y = \sqrt{9-5x} \\ \text{c)} & y = \frac{5x+3}{x^2-2x-8} & \text{d)} & y = \sqrt{28-3x-x^2} \\ \text{e)} & y = \arccos(2x-7) & \text{f)} & y = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\sin x}} \\ \text{g)} & y = \frac{x}{\log(1-x)} & \text{h)} & y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right). \end{array}$$

5. Porovnajte funkcie $f:\ y = \log x^2$ a $g:\ y = 2\log x$.

6. Porovnajte funkcie $f:\ y = x,\ g:\ y = \sqrt{x^2}$ a $h:\ y = (\sqrt{x})^2$.

7. Sú dané funkcie $f: y = \operatorname{tg} x,\ \ g: y = \operatorname{cotg} x$ a $h: y = \operatorname{arccotg} x$. Nájdite čo najjednoduchšie pravidlo priradenia funkcií $f\circ h,\ h\circ f,\ g\circ h,\ h\circ g$.

8. Sú dané funkcie $f: y = 10^x,\ g: y = \log x$ a $h: y = 2^x$. Nájdite čo najjednoduchšie pravidlo priradenia funkcií $f\circ g,\ g\circ f,\ f\circ h,\ h\circ f,\ g\circ h,\ h\circ g$.

9. Zložené funkcie rozložte na zložky

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & y = 2\ln x + 1 & \text{b)} & y = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 1} \\ \text{c)} & y = \sin\sqrt{1-x^2} & \text{d)} & y = \operatorname{arctg}(2^{x^2-5}) \\ \text{e)} & y = \sinh(2\sqrt{x}) & \text{f)} & y = \frac{\ln 3x}{\log(x^3)}. \end{array}$$

10. Nájdite inverzné funkcie k funkciám (alebo ich vhodným zúženiam)

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & y = \frac{4-3x}{2x+1} & \text{b)} & y = \sqrt[5]{2x+11} \\ \text{c)} & y = 4 - x^2 & \text{d)} & y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) \text{ na intervale } (1,\infty) \\ \text{e)} & y = \sin(2x - \frac{\pi}{3}) & \text{f)} & y = \frac{1}{\log(1-x)} \\ \text{g)} & y = 3^{-\frac{5}{2-x}} & \text{h)} & y = \frac{\sqrt[3]{x}}{1-5\sqrt[3]{x}}. \end{array}$$

Venujte pritom pozornosť oborom funkcií.

11. O funkcii f vieme, že má inverznú funkciu a $f(-3) = 7$. Čo môžeme povedať o $f^{-1}(-3)$ a o $f^{-1}(7)$?

12. Overte vzťahy pre obory dvojíc inverzných funkcií z Príkladu 6 a symetriu ich grafov.

13. Ktoré z nasledujúcich funkcií sú prosté?

a) $y = \frac{5x+3}{7-2x}$ b) $y = \sqrt[4]{2x+11}$
c) $y = 4 - \sqrt{x^3}$ d) $y = \operatorname{arctg}(2x+1)$
e) $y = 3^{\cos x}$ f) $y = \log \frac{1}{x+3}$.

14. Môže byť funkcia $f \circ g$ prostá, aj keď funkcie f a g nie sú prosté?

15. Nájdite príklady dvojíc prostých funkcií, ktorých súčet (rozdiel, súčin, podiel) nie je prostá funkcia.

16. Pre ktoré hodnoty čísla p je funkcia $y = 2^{px} . \left(\frac{3}{4}\right)^{2-x}$ rastúca?

17. Pre ktoré hodnoty čísla p je funkcia $y = \log_p \frac{4}{x}$ klesajúca?

18. Nájdite príklad dvoch rastúcich funkcií, ktorých súčin nie je rastúca funkcia.

19. Ktoré z nasledujúcich funckií sú ohraničené (zhora, zdola)?

a) $y = |x+1| - |x-1|$ b) $y = |x+1| + |x-1|$
c) $y = 4 - \sqrt{x^3}$ d) $y = \operatorname{arccotg}(7x+5)$
e) $y = 10^{\sin 100x}$ f) $y = \log_2(11 - 3x^2)$
g) $y = \frac{-2}{|\cos x|}$ h) $y = \arcsin \frac{1}{x}$.

20. Nájdite príklad funkcie, ktorá je ohraničená, ale jej inverzná funkcia nie je ohraničená. Sformulujte a overte podmienku ohraničenosti inverznej funkcie.

21. Ktoré z nasledujúcich funkcií sú párne, nepárne, periodické?

a) $y = 1 - x^2$ b) $y = \sqrt{x^3 - 2x + 1}$
c) $y = 9 \ln |x| + x^2$ d) $y = \operatorname{arctg}(5x - x^3)$
e) $y = \operatorname{tgh}(\operatorname{cotg} x)$ f) $y = \operatorname{cotg} \frac{1}{x}$
g) $y = \cos(x+1)$ h) $y = 1 + \sin x$
i) $y = \sin 2^x$ j) $y = 2^{\sin x}$.

22. Dokážte, že ak f je ľubovoľná funkcia definovaná v $\mathbf{R}$, tak $g(x) = f(x) + f(-x)$ je párna funkcia a $h(x) = f(x) - f(-x)$ je nepárna funkcia. Pomocou toho dokážte, že f sa dá napísať ako súčet párnej a nepárnej funkcie.

23. Pomocou predchádzajúceho cvičenia napíšte nasledujúce funkcie v tvare súčtu párnej a nepárnej funkcie

a) $y = 1 - x$ b) $y = x^2 + 1$
c) $y = 2x^4 - 7x^3 + 11x^2 - 4x + 5$ d) $y = \operatorname{arctg} x$
e) $y = |3x|$ f) $y = e^x$.

24. Existuje periodická funkcia, ktorá nemá periódu?

25. Overte platnosť tvrdení v časti 6.3.

26. Rozložte na súčet mnohočlena a elementárnych zlomkov racionálne funkcie

a) $y = \frac{1-x}{1+x}$ b) $y = \frac{x}{(x-3)^3}$

c) $y = \frac{x^4 - x^2 + 5x}{x^3 - 1}$ d) $y = \frac{x^6}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$

e) $y = \frac{1}{(x^2+1)^2}$ f) $y = \frac{x^5}{x^5 - 2x^4 + x^3}$.

27. Načrtnite grafy funkcií $|f(x)|$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f(2x)$, $2f(x)$, $1-f(x)$, ak funkcia f je jedna z nasledujúcich funkcií

a) $y = 3x+2$ b) $y = x^2$
c) $y = \frac{2x}{x-1}$ d) $y = \log x$
e) $y = 2^x$ f) $y = \cos x$.

28. Nájdite body nespojitosti funkcií

a) $y = \{x\}$ b) $y = \{x\} + [x]$
c) $y = \operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{3})$ d) $y = \frac{x^2-3x-10}{x-5}$
e) $y = sign(2^x)$ f) $y = sign(\cos x)$.

29. Funkcia f je zúžením spojitej funkcie g definovanej v množine všetkých reálnych čísel. Určte hodnoty funkcie g v bodoch, ktoré nepatria do $D(f)$.

a) $y = \frac{x^2-3x-4}{x-4}$ b) $y = \frac{x^3+5x^2+6x}{x^2+3x}$
c) $y = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}$ d) $y = \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$
e) $y = \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$ f) $y = |\operatorname{arctg}(\frac{1}{x})|$.

30. Nájdite číslo p, pre ktoré je funkcia f spojitá

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 7, & x < 2 \\ \frac{x+4}{p}, & x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + px - 3, & x \leq -3 \\ 4 - px^2, & x > -3 \end{cases}$

31. Vypočítajte limity

a) $\lim_{x\to 3} 4x^2 - 7x + 11$ b) $\lim_{x\to -\pi} \cos\frac{x}{2} - \sin 2x + \frac{x^2}{4}$
c) $\lim_{x\to -2} 2^{x^2} + 6x + \frac{1}{x}$ d) $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}$.

32. Vypočítajte limity

a) $\lim_{x\to 0} \frac{3x^3+4x^2-5x}{x}$ b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2(x-2)}{(x^2+1)(x^2-4)}$
c) $\lim_{x\to -2} \frac{2x^2+3x-2}{x^2+x-2}$ d) $\lim_{x\to -1} \frac{2x^3+2x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}$
e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$ f) $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{6+x}-2}{x+2}$.

33. Vypočítajte limity

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{3x}$ b) $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin kx}{\sin nx}$
c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x^2}$ d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{5x}$
e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x+1)}{x+1}$ f) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$.

34. Vypočítajte limity

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-3x}-1}{x}$ b) $\lim_{x\to e} \frac{\ln x-1}{x-e}$

c) $\lim_{x\to 0} 4x^3 \ln x$ d) $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{cotg} x}$.

35. Vypočítajte limity

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log^5 x}{x}$ b) $\lim_{x\to-\infty} 10^x(x^8+x^5+x^2)$

c) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{x+1}$ d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

e) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$ f) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{\sqrt{4x^2+2x-7}}$.

36. Má zmysel hovoriť o limite zľava v bode $-\infty$ a o limite sprava v bode ∞?

37. Nájdite všetky asymptoty ku grafom funkcií

a) $y = \frac{3x}{x+3}$ b) $y = \frac{x}{2x-1} + x$

c) $y = \frac{2}{x+1} + \cos 5x$ d) $y = \frac{x \sin x}{1+x^2}$

e) $y = \frac{x^3+2}{x^2-4}$ f) $y = \frac{1}{x} + \ln x$.

38. Ukážte, že ak má nepárna funkcia asymptotu s rovnicou $y = ax + b$, tak má aj asymptotu s rovnicou $y = ax - b$. Sformulujte a ukážte platnosť analogického tvrdenia pre asymptoty bez smernice párnych aj nepárnych funkcií.

39. Sformulujte a overte tvrdenie pre klesajúce zdola ohraničené postupnosti analogické tvrdeniu v časti 6.8.

40. Vypočítajte limity
$K = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n}$, $L = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{4n^2+11n-2}}{n+3}\right)^3$,
$M = \lim_{n\to\infty} \frac{1-n^2}{n^3+4} \frac{n^2+1}{3n^3+2n+9}$, $N = \lim_{n\to\infty} 7^{\frac{5n^2-2n}{n^3-2n+1}}$.

41. Vypočítajte limity
$K = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}$, $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{99n^9}$,
$M = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{n^{\frac{n}{8}}}$.

42. Vypočítajte limity
$K = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}.\operatorname{cotg} n$, $L = \lim_{n\to\infty} \operatorname{tgh}(n)$,
$M = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin\ n$.

43. Vypočítajte limity
$L = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{4n^2+3n-2}-2n)$, $M = \lim_{n\to\infty} \sqrt{(n+3)(n-2)} - 2n$,
$N = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n^2-1}}$.

44. Vypočítajte limity
$L = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$, $M = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2-1}$,
$N = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^x$.

Výsledky cvičení.

1. a) áno, b) nie, c) áno, d) nie, e) áno.

2. Súčet koreňov je $-\frac{2}{3}$, súčin je $\frac{p}{3}$, rozdiel je $\frac{2\sqrt{1-3p}}{3}$, podiel je $\frac{(\sqrt{1-3p}-1)^2}{3p}$.

3. $f(-1)=\frac{3}{2}$, $f(\frac{\sqrt{2}}{2})=2(\sqrt{2}-1)$, $f(\frac{\sqrt{3}}{3})$ nie je definovaná,
$f(1+a)=\frac{2a+1}{3a^2+6a+2}$, $f(-x)=-\frac{2x+1}{3x^2-1}$, $f(\frac{1}{x})=\frac{2x-x^2}{3-x^2}$.

4. a) $\mathbf{R}-\{-\frac{1}{2}\}$, b) $(-\infty,\frac{9}{5}\rangle$, c) $\mathbf{R}-\{-2;4\}$,
d) $\langle -7,4\rangle$, e) $\langle 3,4\rangle$, f) $\{(2k\pi,(2k+1)\pi),\ k\in\mathbf{Z}\}-\{(2k-1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\}$,
g) $(-\infty,0)\cup(0,1)$, h) $\mathbf{R}-\{-1;1\}$.

5. $g=f_{/(0,\infty)}$.

6. $h=f_{/(0,\infty)}=g_{/(0,\infty)}$.

7. $f\circ h(x)=\frac{1}{x}$, $h\circ f(x)=\frac{\pi}{2}-x$, $g\circ h(x)=x$, $h\circ g(x)=x_{/(0,\pi)}$.

8. $f\circ g(x)=x_{/(0,\infty)}$, $g\circ f(x)=x$, $f\circ h(x)=10^{2^x}$, $h\circ f(x)=2^{10^x}$,
$g\circ h(x)=x\log 2$, $h\circ g(x)=x^{\log 2}$, $x\in(0,\infty)$.

9. a) $x \xrightarrow{\ln} \ln x \xrightarrow{2()+1} 2\ln x+1$,
b) $x \xrightarrow{()^3-2()^2+1} x^3-2x^2+1 \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{x^3-2x^2+1}$,
c) $x \xrightarrow{1-()^2} 1-x^2 \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{1-x^2} \xrightarrow{\sin} \sin(\sqrt{1-x^2})$,
d) $x \xrightarrow{()^2-5} x^2-5 \xrightarrow{2^{()}} 2^{x^2-5} \xrightarrow{arctg} arctg(2^{x^2-5})$,
e) $x \xrightarrow{\sqrt{}} \sqrt{x} \xrightarrow{2()} 2\sqrt{x} \xrightarrow{\sinh} \sinh(2\sqrt{x})$,
f) Je to podiel zložených funkcií $x \xrightarrow{3()} 3x \xrightarrow{\ln} \ln(3x)$ a
$x \xrightarrow{x^3} x^3 \xrightarrow{\log} \log(x^3)$.

10. a) $f^{-1}(x)=\frac{4-x}{2x+3}$, b) $f^{-1}(x)=\frac{x^5-11}{2}$,
c) $f^{-1}(x)=\sqrt{4-x}$ je inverzná ku $f_{/\langle 0,\infty\rangle}$, d) $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{tg\,x-1}{tg\,x+1}}$,
e) $f^{-1}(x)=\frac{\arcsin x+\frac{\pi}{3}}{2}$, f) $f^{-1}(x)=1-10^{\frac{1}{x}}$,
g) $f^{-1}(x)=2+\frac{5}{\log_3 x}$, h) $f^{-1}(x)=\left(\frac{x}{5x+1}\right)^3$.

11. $f^{-1}(7)=-3$, o hodnote $f^{-1}(-3)$ nemôžeme povedať nič.

12. $f=f^{-1}$, $g_{/\langle 0,\infty)}=g^{-1}$, $g_{/(-\infty,0)}$ má inverznú funkciu $g^{-1}(x)=-x$, $x\in(0,\infty)$, $h=h^{-1}$
13. Prosté sú funkcie v a), b), c), d), f).
14. Môže, ak f nie je prostá, napríklad $f(x)=x^2$ a $g(x)=\sqrt{x}$.

15. Napríklad $x+(-x)$, $x-x$, $x\times\frac{1}{x}$, $\frac{x}{x}$.

16. $p\in(-\infty,\log_2 3-2)$.

17. $p \in (1, \infty)$.

18. $(-2^{-x})(-3^{-x})$.

19. Ohraničené sú funkcie v a), d), e), h); okrem týchto
zdola ohraničená je funkcia v b); zhora ohraničené sú funkcie v c), f), g).

20. Napríklad funkcia $y = arctg\, x$. Funkcia f^{-1} je ohraničená, ak množina $D(f)$ je ohraničená.

21. Párne sú funkcie v a), c); nepárne sú funkcie v d), e), f);
periodické sú funkcie v e), g), h), j).

23. a) $1 + (-x)$, b) $(x^2 + 1) + 0$, c) $(2x^4 + 11x^2 + 5) + (-7x^3 - 4x)$,
d) $0 + arctg\, x$, e) $|3x| + 0$, f) $\cosh x + \sinh x$.

24. Existuje, napríklad funkcia f definovaná $f(x) = 1$, ak x je racionálne číslo a $f(x) = 0$, ak x je iracionálne číslo.

26. a) $-1 + \frac{2}{1+x}$, b) $\frac{3}{(x-3)^3} + \frac{1}{(x-3)^2}$,
c) $x + \frac{-\frac{8}{3}x+\frac{5}{3}}{x^2+x+1} + \frac{\frac{5}{3}}{x-1}$, d) $x^2 - x + 1 + \frac{\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}}{x^2+x+1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{6}}{x-1}$,
e) $\frac{1}{(x^2+1)^2}$, f) $1 + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}$.

28. Body nespojitosti majú len funkcie v a): sú to prvky množiny $\mathbf{Z}$a f): sú to body $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbf{Z}$.

29. a) $y(4) = 5$, b) $y(0) = 2$ a $y(-3) = -1$, c) $y(0) = 0$,
d) $y(0) = \frac{3}{5}$, e) nedá sa f) $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

30. a) $p = 2$ b) $p = -\frac{1}{3}$.

31. a) 26, b) $\frac{\pi^2}{4}$, c) $\frac{7}{2}$, d) $1 - \sqrt{3}$.

32. a) -5, b) $\frac{1}{5}$, c) $\frac{5}{3}$,
d) $\frac{5}{2}$. e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$, f) $\frac{1}{4}$.

33. a) $\frac{4}{3}$, b) $(-1)^{k-n}\frac{k}{n}$, c) 0,
d) 0. e) $\sin 1$, f) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

34. a) -3, b) $\frac{1}{e}$, c) 0, d) e.

35. a) 0, b) 0, c) e^{-2},
d) e^2. e) 0, f) $\frac{1}{2}$.

36. Nie.

37. a) $y = 3$ a $x = -3$, b) $y = x + \frac{1}{2}$ a $x = \frac{1}{2}$, c) $x = -1$,
d) $y = 0$, e) $y = x$, $x = 2$ a $x = -2$, f) $x = 0$.

40. $K = 0, \qquad L = 8, \qquad M = 0, \qquad N = 1.$

41. $K = 1, \qquad L = 1, \qquad M = 0.$

42. K neexistuje, $\qquad L = 1, \qquad M = 0.$

43. $L = \infty, \qquad M = -\infty, \qquad N = -1.$

44. $L = 1, \qquad M = e^{-1}, \qquad N = 1.$

Kapitola 7

Diferenciálny počet

7.1 Derivácia

V tejto kapitole sa budeme zaoberať jedným z najdôležitejších pojmov v matematike, pojmom derivácie, popíšeme jej vlastnosti a postupy pri jej počítaní. Taktiež precvičíme možnosti použitia derivácie v matematike a uvidíme, že s použitím derivácie je možné jednoduchšie riešiť niektoré otázky, ktoré sa vyskytli v predchádzajúcej kapitole.

7.1.1 Pojem a označenia

Derivácia meria zmenu hodnôt závislej veličiny vzhľadom k zmene hodnôt nezávislej veličiny.
Derivácia funkcie f v čísle (v bode) x_0 je **číslo**

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

ak existuje **vlastná limita** na pravej strane rovnosti.
Na označenie derivácie funkcie f v bode x_0 sa používajú tiež symboly

$$y'(x_0), \quad \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0}, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}.$$

Ak existuje derivácia funkcie f v každom bode niektorej množiny M, tak **funkcia** f', ktorá priradí každému číslu $x \in M$ hodnotu $f'(x)$ je **derivácia funkcie** f v množine M.
Z existencie derivácie vyplýva spojitosť:

> Ak má funkcia f v bode a deriváciu, tak je v bode a spojitá.

Pre väčšinu elementárnych funkcií existuje derivácia v každom bode definičného oboru, preto derivácia elementárnej funkcie je zvyčajne funkcia s tým istým definičným oborom.
Na označenie derivácie funkcie f sa používajú tiež symboly

$$y', \quad \left(\frac{df}{dx}\right), \quad \left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Príklad 1. Vypočítajme deriváciu

a) funkcie $y = x$ v bode -3,

b) funkcie $y = x^2$ v bode 2,

c) funkcie $y = \frac{1}{x-4}$ v bode 0,

d) funkcie $y = |x+1|$ v bode -1,

e) funkcie $y = \sqrt[3]{x}$ v bode 0.

Riešenie:

a) Podľa definície derivácie funkcie je

$$y'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{y(-3+h) - y(-3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-3+h-(-3)}{h} = 1$$

b) Vychádzame z definície:

$$y'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{y(2+h) - y(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4+4h+h^2-4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 4+h = 4$$

c) Analogicky

$$y'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{y(0+h) - y(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{-4+h} - \frac{1}{-4}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{4(4-h)}}{h} = -\frac{1}{16}$$

d)

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{y(-1+h) - y(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|-1+h+1| - |-1+1|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1,$$

avšak

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{y(-1+h) - y(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|-1+h+1| - |-1+1|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1.$$

Pretože hľadaná limita neexistuje, funkcia $y = |x+1|$ nemá v bode -1 deriváciu.

e)

$$\lim_{h\to 0} \frac{y(h) - y(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{\frac{h}{h^3}} = \infty.$$

Pretože hľadaná limita nie je vlastná, funkcia $y = \sqrt[3]{x}$ nemá v bode 0 deriváciu.

♣

Príklad 2. Vypočítajme deriváciu

a) funkcie $y = x^n$, kde $n \in \mathbf{N}$, v ľubovoľnom bode x,

b) funkcie $y = \sin x$ v ľubovoľnom bode x,

c) funkcie $y = \log_a x$ v ľubovoľnom bode x.

Riešenie:

a) Podľa definície derivácie funkcie a s použitím binomickej vety dostávame

$$y'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\ldots+\binom{n}{n-1}xh^{n-1}+h^n-x^n}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0} nx^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\ldots+\binom{n}{n-1}xh^{n-2}+h^{n-1}=nx^{n-1}.$$

b) Z definície derivácie, použitím goniometrických vzťahov a poznatkov o limitách z predchádzajúcej kapitoly dostávame.

$$y'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin\ x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin(\frac{h}{2})}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}=\cos\ x.$$

c) Analogicky, s použitím vzťahov pre logaritmy

$$y'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\frac{(x+h)}{x}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\log_a\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}}=$$

$$=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln\ a}.$$

♣

Počítanie derivácie funkcie z definície je značne obtiažne a zdĺhavé. Na zjednodušenie práce s deriváciami slúži nasledujúca schéma.

1. Z definície derivácie sa odvodia derivácie mocninovej funkcie s prirodzeným exponentom, funkcie sinus a logaritmickej funkcie (pozri Príklad 2)

2. Odvodia sa pravidlá derivovania pre operácie s funkciami.

3. Pomocou už známych derivácií a pravidiel sa určia derivácie ostatných elementárnych funkcií.

7.1.2 Derivácie základných elementárnych funkcií

Nasledujúce vzťahy platia pre všetky hodnoty premennej x z definičných oborov príslušných funkcií, ak nie je uvedené inak:

1. $(x^a)'=ax^{a-1}$, kde a je ľubovoľné reálne číslo,

2. $(a^x)'=a^x\ln a$, kde $a>0,\ a\neq 1$, špeciálne $(e^x)'=e^x$,

3. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$, kde $a>0,\ a\neq 1,$ špeciálne $(\ln x)'=\frac{1}{x}$,

4. $(\sin x)'=\cos x,\quad (\cos x)'=-\sin x,$
   $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\quad (\operatorname{cotg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},$

5. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1,1)$,
   $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\mathrm{arccotg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
6. $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$,
   $(\mathrm{tgh}\, x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$, $(\mathrm{cotgh}\, x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$,

Platnosť vzťahu (3) a prvého zo vzťahov (4) sme ukázali v príklade 2. Platnosť ďalších vzťahov overíme v príkladoch nasledujúcej časti a v cvičeniach na konci kapitoly.

Príklad 3. Vypočítajme deriváciu funkcie $y = \sqrt[3]{x}$.

Riešenie: Pri počítaní derivácie prepíšeme odmocniny do tvaru mocniny s racionálnym exponentom a použijeme vzťah (1):

$$y' = \left((x)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

♣

7.2 Derivácia a operácie s funkciami

7.2.1 Derivácia a algebrické operácie

Ak nová funkcia vznikne pomocou algebrických operácií z funkcií f a g, tak jej deriváciu môžeme počítať podľa nasledujúcich pravidiel:
Nech funkcie f a g majú derivácie v množine M. Potom platí

$$(f+g)' = f' + g' \tag{7.1}$$
$$(f-g)' = f' - g' \tag{7.2}$$
$$(f.g)' = f'.g + f.g' \tag{7.3}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}, \tag{7.4}$$

pričom posledný vzťah platí v číslach x, kde $g(x) \neq 0$.

Príklad 4. Nájdeme derivácie funkcií $y = 2x^5 - 7\sqrt[3]{x^4} + \frac{3}{\sqrt{x}} - 9$, $y = \sin x . \cos x$ a $y = \frac{5x+3}{x^2-2x}$.

Riešenie: Pri riešení príkladu budeme používať pravidlá pre algebraické operácie. Odporúčame čitateľovi podrobnú identifikáciu pravidla použitého pri každej úprave.

a) $y' = (2x^5)' - (7\sqrt[3]{x^4})' + (\frac{3}{\sqrt{x}})' - (9)' = 2(x^5)' - 7(x^{\frac{4}{3}})' + 3(x^{-\frac{1}{2}})' - (9)' = 2.5x^4 - 7.\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + 3.(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} - 0 = 10x^4 - \frac{28}{3}\sqrt[3]{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^3}}$.

b) $y' = (\sin x . \cos x)' = (\sin x)' . \cos x + \sin x . (\cos x)' = \cos^2 x - \sin^2 x$.

c) $y' = \frac{(5x+3)'.(x^2-2x)-(5x+3)(x^2-2x)'}{(x^2-2x)^2} = \frac{5(x^2-2x)-(5x+3)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{-5x^2-6x+6}{(x^2-2x)^2}$.

♣

7.2.2 Derivácia zloženej funkcie

Ak poznáme derivácie zložiek, tak deriváciu zloženej funkcie môžeme vypočítať pomocou nasledujúceho pravidla:

Derivácia zloženej funkcie. Nech funkcia $y = f(x)$ má deriváciu v množine M a funkcia $z = g(y)$ má deriváciu v obore hodnôt funkcie f. Potom aj zložená funkcia $g \circ f$ má v množine M deriváciu a pre každé $x \in M$ platí

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)).f'(x),$$

čo môžeme zapísať aj

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dx}.$$

Posledný vzťah sa volá **reťazové pravidlo**.

Príklad 5. Vypočítame derivácie funkcií $y = \sin 2x$, $y = \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{100}$, $y = \arcsin\left(\frac{2x+3}{5-3x}\right)$, $y = 5^{\frac{4}{cotg\ x}}$.

Riešenie: V riešení budeme používať pravidlo o derivácii zloženej funkcie. Danú funkciu si najskôr rozložíme na zložky a potom postupujeme podľa pravidla od vonkajších zložiek ku vnútorným.

a) Rozklad danej funkcie je

$$x \quad \xrightarrow{2x} \quad 2x \quad \xrightarrow{\sin} \quad \sin 2x.$$

Preto derivácia je

$$y'(x) = (\sin t)'_{[t=2x]}.(2x)' = 2\cos 2x.$$

b) Rozklad danej funkcie je

$$x \quad \xrightarrow{x+\frac{1}{\sqrt{x}}} \quad x + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \xrightarrow{(\ )^{100}} \quad \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{100}$$

a derivácia je

$$y'(x) = \left((t)^{100}\right)'_{[t=x+\frac{1}{\sqrt{x}}]} . \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = 100\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{99}\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\right).$$

c) Rozklad danej funkcie je

$$x \quad \xrightarrow{\frac{2x+3}{5-3x}} \quad \frac{2x+3}{5-3x} \quad \xrightarrow{\arcsin} \quad \arcsin\left(\frac{2x+3}{5-3x}\right)$$

a derivácia je

$$y'(x) = (\arcsin t)'_{[t=\frac{2x+3}{5-3x}]}.\left(\frac{2x+3}{5-3x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x+3}{5-3x}\right)^2}}.\frac{2(5-3x) - (2x+3)(-3)}{(5-3x)^2} =$$

$$= \frac{19}{(5-3x)\sqrt{5x^2 - 42x + 16}}.$$

d) Rozklad danej funkcie je

$$x \xrightarrow{cotg} cotg\ x \xrightarrow{\frac{4}{(\ )}} \frac{4}{cotg\ x} \xrightarrow{5^{(\ )}} 5^{\frac{4}{cotg\ x}}$$

a derivácia je

$$y'(x) = (5^u)'_{[u=\frac{4}{cotg\ x}]} \cdot \left(\frac{4}{t}\right)'_{[t=cotg\ x]} .(cotg\ x)' =$$

$$5^{\frac{4}{cotg\ x}} . \ln 5 \ \frac{-4}{cotg^2\ x} . \frac{-1}{\sin^2\ x} = \frac{4 \ln 5}{\cos^2\ x} \ 5^{\frac{4}{cotg\ x}} .$$

♣

Príklad 6. Overíme platnosť vzťahu $(\cos x)' = -\sin x$ z časti 2.

Riešenie: V riešení použijeme deriváciu zloženej funkcie a goniometrické vzťahy

$$(\cos x)' = (\sin(x + \frac{\pi}{2}))' = \cos(x + \frac{\pi}{2}).1 = -\sin x.$$

♣

Príklad 7. Overíme platnosť vzťahu $(cotgh\ x)' = -\frac{1}{sinh^2\ x}$ z časti 2.

Riešenie:

$$(cotgh\ x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x - e^{-x})^2 - (e^x + e^{-x})^2}{(e^x - e^{-x})^2} =$$

$$\frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2} = \frac{1}{-\frac{(e^x - e^{-x})^2}{4}} = -\frac{1}{sinh^2\ x}.$$

♣

7.2.3 Derivácia inverznej funkcie

Z pravidla pre deriváciu zloženej funkcie vyplýva pravidlo pre deriváciu inverznej funkcie.
Derivácia inverznej funkcie Nech funkcia f je monotónna v intervale (a, b) a pre každé $x \in (a, b)$ existuje $f'(x) \neq 0$. Potom

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Príklad 8. Odvodíme pravidlo (2) v časti 2 pre deriváciu exponenciálnej funkcie z pravidla pre deriváciu logaritmickej funkcie.

Riešenie: Označme $f(x) = \log_a x$. Potom $f^{-1}(x) = a^x$ a pre deriváciu f^{-1} platí

$$(a^x)' = \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{(log_a t)'_{[t=a^x]}} = \frac{1}{\frac{1}{t\ \ln a}}_{[t=a^x]} = a^x\ \ln a.$$

♣

Príklad 9. Odvodíme pravidlo (5) v časti 2 pre deriváciu funkcie arccos z pravidla pre deriváciu funkcie cos.

Riešenie: Označme $f(x) = \cos x$. Potom inverzná funkcia (samozrejme v intervale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$) je $f^{-1}(x) = \arccos x$ a pre deriváciu f^{-1} platí

$$(\arccos x)' = \left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{(\cos t)'_{[t=\arccos x]}} =$$

$$\frac{1}{-\sin t_{[t=\arccos x]}} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

♣

7.2.4 Logaritmické derivovanie

Nasledujúce pravidlo sa volá **pravidlo o logaritmickom derivovaní**.

$$f'(x) = f(x)(\ln f(x))', \quad \text{ak } f(x) > 0 \quad \text{a} \quad f'(x) \quad \text{existuje.}$$

Je to špeciálny prípad pravidla pre deriváciu zloženej funkcie a používa sa pre deriváciu funkcií, ktoré majú premennú **v exponente**, ale najmä funkcií, ktoré majú premennú **aj v základe aj v exponente**. Poznamenajme, že funkcie, ktoré majú neznámu **len v základe**, derivujeme podľa pravidla (1) v časti 2.

Príklad 10. Nájdeme deriváciu funkcie $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Riešenie:

$$y' = y.(\ln y)' = x^{\frac{1}{x}}.\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = x^{\frac{1}{x}}.\frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} =$$

$$x^{\frac{1}{x}}.\frac{1-\ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x).$$

♣

Príklad 11. Odvodíme pravidlo (1) v časti 2 pre deriváciu mocninovej funkcie z pravidla pre deriváciu logaritmickej funkcie.

Riešenie:

$$(x^a)' = x^a.(\ln\ x^a)' = x^a.(a\ln\ x)' = x^a.(\frac{a}{x}) = ax^{a-1}.$$

Použili sme skutočnosť, že definičným oborom mocninovej funkcie s reálnym exponentom je množina kladných reálnych čísel (kde?). ♣

7.2.5 Derivácia implicitnej funkcie

Niekedy rovnica $F(x, y) = 0$ určuje funkčný vzťah medzi veličinami x a y. Takúto funkciu voláme **funkcia určená implicitne** rovnicou $F(x, y) = 0$. Ak funkcia určená implicitne má deriváciu v niektorej množine, tak túto môžeme vypočítať aj bez explicitného vyjadrenia funkcie f. Postupujeme pri tom tak, že derivujeme obidve strany rovnice, pričom ľavú stranu derivujeme ako zloženú funkciu $F(x, y(x))$. Tento postup je veľmi užitočný najmä v situáciách, keď veličinu y nie sme schopní z rovnice vyjadriť.

Príklad 12. Rovnica $x^2 + y^2 = 1$ určuje dve funkcie $f_1 : y = \sqrt{1 - x^2}$ a $f_2 : y = -\sqrt{1 - x^2}$. Vypočítame ich derivácie bez pomoci tohoto explicitného vyjadrenia.

Riešenie: Derivujeme obidve strany rovnice $x^2 + y^2 = 1$, pričom si uvedomujeme, že y je funkcia premennej x. Dostávame

$$2x + 2y.\frac{dy}{dx} = 0$$

a po vyjadrení hľadanej derivácie

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Porovnajme tento vzťah s deriváciou napríklad funkcie f_2. Túto derivujeme ako zloženú funkciu z funkcií $1 - x^2$ a $-(\ )^{\frac{1}{2}}$. Dostávame

$$f_2'(x) = -\frac{1}{2}(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}},$$

čo sa zhoduje s deriváciou vypočítanou implicitne pre $f_2 : y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Príklad 13. Nájdime deriváciu funkcie určenej implicitne rovnicou

$$x^5 + 4xy^3 - y^5 - 2 = 0.$$

Riešenie: Derivovaním obidvoch strán dostávame $5x^4 + 4(y^3 + x.3y^2\frac{dy}{dx}) - 5y^4\frac{dy}{dx} = 0$, a po vyjadrení derivácie $\frac{dy}{dx} = \frac{5x^4+4y^3}{5y^4-12xy^2}$. ♣

7.2.6 Derivácia funkcie určenej parametrickými rovnicami

Rovinná krivka býva často určená parametrickými rovnicami

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad t \in (a, b).$$

V prípade, keď $f'(t) \neq 0$ pre všetky $t \in (a, b)$, je krivka grafom **funkcie určenej parametrickými rovnicami**, ktorej deriváciu môžeme počítať aj bez jej explicitného vyjadrenia pomocou vzťahu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Príklad 14. Nájdeme prvé dve derivácie funkcie určenej parametrickými rovnicami

$$x = \cos t, \qquad y = \sin t, \qquad t \in \langle \pi, 2\pi \rangle.$$

Riešenie: $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -cotg\ t.$
Porovnajte tento výsledok s výsledkom príkladu 12.
Pretože druhá derivácia je deriváciou prvej derivácie (pozri nasledujúcu časť), platí

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} =$$

$$\frac{\frac{d(-cotg\ t)}{dt}}{\frac{d(\cos t)}{dt}} = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = \frac{-1}{\sin^3 t}.$$

♣

7.3 Derivácie vyšších rádov

Keďže derivácia elementárnej funkcie je funkciou, má zmysel hovoriť o derivácii derivácie atď. **Druhou deriváciou** funkcie f je derivácia funkcie f' (ak existuje).
Pomocou indukcie môžeme takto definovať derivácie ľubovoľného rádu. **Deriváciou n-tého rádu** alebo **n-tou** deriváciou funkcie f je derivácia (n-1)-ej derivácie funkcie f (ak existuje).
Derivácie vyšších rádov označujeme takto

$$f'',\ f''',\ f^4,\ f^5,\dots,\ f^{(n)}$$
$$y'',\ y''',\ y^4,\ y^5,\dots,\ y^{(n)}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^4y}{dx^4},\ \frac{d^5y}{dx^5},\dots,\ \frac{d^ny}{dx^n}$$

Príklad 15. Nájdime $(\cos x)^{(91)}$, $(\log_2\ 3x)^{(12)}$ a $(x^n)^{(n)}$, $\quad n \in \mathbf{N}$.

Riešenie:

a) Počítajme derivácie funkcie $\cos x$: $(\cos x)' = -\sin x$, $(\cos x)'' = -\cos x$, $(\cos x)''' = \sin x$ a $(\cos x)^{(4)} = \cos x$. Preto platí aj $(\cos x)^{(88)} = \cos x$. Potom však

$$(\cos x)^{(91)} = (\cos x)^{(3)} = (-\sin x)^{(2)} = (-\cos x)' = \sin x.$$

b) $(\log_2\ 3x)' = \frac{1}{x \ln\ 2}$. Ďalej
$(\log_2\ 3x)'' = \frac{1}{\ln\ 2}.\frac{-1}{x^2}$ a
$(\log_2\ 3x)''' = \frac{1}{\ln\ 2}.\frac{2}{x^3}$. V každej ďalšej derivácii zostane konštanta $\frac{1}{\ln\ 2}$, násobí sa exponentom a tento sa potom zníži (je záporný!) o jednotku. Po ďalších deviatich deriváciách dostaneme (premyslite si dôkladne aj znamienko)

$$(\log_2\ 3x)^{(12)} = -\frac{1}{\ln\ 2}.\frac{11!}{x^{12}}.$$

c) Pri derivácii mocninovej funkcie sa násobí exponentom a ten sa potom znižuje o jednotku. Po n deriváciách funkcie x^n dostaneme $(x^n)^{(n)} = n!$. Dodajme ešte, že $(x^n)^{(n+1)} = 0$.

♣

7.4 Geometrický a fyzikálny význam derivácie

7.4.1 Geometrický význam derivácie

Ak existuje derivácia funkcie f v bode x_0, tak číslo $f'(x_0)$ je smernicou **dotyčnice** ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode $[x_0, f(x_0)]$ a číslo $-\frac{1}{f'(x_0)}$ je smernicou **normály** ku grafu funkcie $y = f(x)$ v bode

$[x_0, f(x_0)]$.
Preto

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

je **rovnica dotyčnice ku grafu funkcie** f v bode $[x_0, f(x_0)]$
a

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

je **rovnica normály ku grafu funkcie** f v bode $[x_0, f(x_0)]$.
Body, v ktorých funkcia má deriváciu, rozoznáme pri pohľade na jej graf tak, že graf je v nich "hladký", naopak v bodoch, kde derivácia neexistuje, je graf "špicatý", napríklad graf funkcie $y = |x|$ v bode $[0, 0]$.

Príklad 16. Nájdime rovnice dotyčnice a normály ku

a) grafu funkcie $y = \sin x$ v bode $[0, ?]$,

b) grafu funkcie $y = \operatorname{arctg} 2x$ v bode $[-\frac{1}{2}, ?]$,

c) kružnici so stredom v bode $[0, 0]$ a polomerom 1 v bode $[\frac{1}{2}, y]$, kde $y < 0$.

Riešenie:

a) Druhá súradnica bodu ležiaceho na grafe funkcie $y = \sin x$, ktorej prvá súradnica je 0 je určená hodnotou $\sin 0 = 0$. Derivácia funkcie $y = \sin x$ v bode 0 je $\cos 0 = 1$. Preto rovnica dotyčnice je

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 1.(x - 0) + 0 = x,$$

čo je geometrickým vyjadrením faktu, že $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Rovnica normály je $y = -x$.

b) Druhá súradnica bodu dotyku je $\operatorname{arctg} 2.(-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{4}$. Derivácia funkcie $y = \operatorname{arctg} 2x$ v bode $-\frac{1}{2}$ je $\frac{2}{1+(-\frac{1}{2}\cdot 2)^2} = 1$. Rovnica dotyčnice je

$$y = (x + \frac{1}{2}) - \frac{\pi}{4} = x + \frac{2 - \pi}{4}$$

a rovnica normály je

$$y = -(x + \frac{1}{2}) - \frac{\pi}{4} = -x - \frac{2 + \pi}{4}.$$

c) Určený bod má súradnice $[\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}]$. Pre výpočet smernice dotyčnice použijeme riešenie príkladu 12:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Rovnica dotyčnice je

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - \frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

a rovnica normály

$$y = -\sqrt{3}(x - \frac{1}{2}) - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}x.$$

Overte správnosť výpočtu tak, že vyjadríte príslušný oblúk kružnice parametricky a tiež pomocou explicitnej funkcie! ♣

Príklad 17. Nájdime rovnice dotyčnice a normály ku grafu funkcie $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x + 4$ rovnobežné s priamkou $y = \frac{3-x}{2}$.

Riešenie: Tentokrát nepoznáme bod dotyku, ale smernicu hľadanej priamky $k = -\frac{1}{2}$. Hľadáme preto takú hodnotu x_0, v ktorej má funkcia deriváciu rovnú tejto smernici: $y'(x_0) = x_0^2 + 4x_0 + 5 = -\frac{1}{2}$. Táto rovnica však nemá riešenie, preto graf nemá dotyčnicu rovnobežnú s danou priamkou. Pri normále hľadáme takú hodnotu x_0, pre ktorú platí $-\frac{1}{y'(x_0)} = -\frac{1}{2}$, t.j. $y'(x_0) = x_0^2 + 4x_0 + 5 = 2$. Táto rovnica má dve riešenia $x_1 = -1$ a $x_2 = -3$. Hodnoty funkcie v týchto bodoch sú $y(-1) = \frac{2}{3}$ a $y(-3) = -2$. Graf funkcie má dve normály rovnobežné s danou priamkou. Ich rovnice sú

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \qquad \text{a} \qquad y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{2}.$$

♣

Príklad 18. Nájdeme rovnicu dotyčnice ku krivke danej parametrickými rovnicami $x = \frac{1}{t} + t^2$ a $y = t^2 - t + 1$ v bode $[2, 1]$.

Riešenie: Najskôr vypočítajme hodnotu parametra t pre daný bod. Je ňou jedno z riešení kvadratickej rovnice $t^2 - t + 1 = 1$ (odôvodnite!), ktorej riešeniami sú dve čísla $t_1 = 0$ a $t_2 = 1$. Hodnota parametra $t_1 = 0$ je mimo definičného oboru funkcie $x(t)$, dosadením hodnoty $t_2 = 1$ dostaneme $x(1) = 2$. Preto hľadaná hodnota parametra je $t_2 = 1$. Potrebujeme smernicu dotyčnice, ktorú nájdeme pomocou vzťahu

$$k(t) = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t - 1}{2t - \frac{1}{t^2}}.$$

Jej hodnota v danom bode je $k(1) = 1$. Hľadaná rovnica dotyčnice je

$$y = 1.(x - 2) + 1 = x - 1.$$

♣

7.4.2 Fyzikálny význam derivácie

Ak je stav fyzikálnej veličiny v závislosti od času určený funkciou $y = f(t)$, tak **rýchlosť zmeny** tejto veličiny je určená funkciou $y = f'(t)$.
Preto, ak sa teleso pohybuje priamočiaro v smere x-ovej osi a jeho poloha v čase t je $x(t)$, tak funkcia

$$v(t) = x'(t)$$

určuje jeho rýchlosť a funkcia

$$a(t) = x''(t) = v'(t)$$

určuje jeho zrýchlenie v čase t.

Príklad 19. Do balóna guľového tvaru pripevneného spodným okrajom k zemi prúdi rovnomerne 200 l vzduchu za minútu. Akou rýchlosťou sa pohybuje smerom nahor vrchný okraj balóna v okamihu, keď sú v balóne 3 m^3 vzduchu?

Riešenie: Označme $V(t)$ objem balóna v m^3 a $v(t)$ jeho výšku, teda priemer v m v čase t. Potrebujeme zistiť veličinu $v'(t)$ v čase, keď $V(t) = 3$. Podľa reťazového pravidla platí

$$v'(t) = \frac{dv}{dV}.\frac{dV}{dt}.$$

Veličina $\frac{dV}{dt}$ je rýchlosť prúdenia vzduchu a rovná sa $0,2\ m^3/min$. Veličinu $\frac{dv}{dV}$ vyjadríme zo vzťahu pre objem gule $V = \frac{1}{6}\pi v^3$. Preto

$$\frac{dv}{dV} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{6}{\pi V^2}}$$

a

$$\frac{dv}{dV}_{[V=3]} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{6}{\pi 3^2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{81\pi}}.$$

Dosadením dostávame hľadanú rýchlosť

$$v'(t) = \sqrt[3]{\frac{2}{81\pi}}.0,2\ m/min,$$

čo je približne 4 cm/min. ♣

7.5 Veta o strednej hodnote

Existuje viac viet o strednej hodnote, ktoré sa tiež volajú vety o prírastku funkcie. Tieto vety vyjadrujú za istých podmienok vzťah medzi rozdielom ("prírastkom") hodnôt funkcie v dvoch bodoch a deriváciou funkcie v istom čísle medzi týmito bodmi.
Lagrangeova veta o strednej hodnote.
Nech f má deriváciu v intervale (a, b) a naviac je spojitá v bodoch a a b. Potom existuje také číslo r z intervalu (a, b), že

$$f(b) - f(a) = f'(r)(b - a).$$

Ak medzi predpoklady Lagrangeovej vety doplníme podmienku $f(a) = f(b)$, tak dostaneme **Rolleho vetu**, ktorá zaručuje existenciu takého čísla r z intervalu (a, b), že

$$f'(r) = 0.$$

Vety o strednej hodnote majú veľký teoretický význam, ich dôsledkom je veľa poznatkov v diferenciálnom počte a jeho aplikáciách (pozri časť 7.10).
Názorný fyzikálny zmysel viet o strednej hodnote môže byť napríklad vyjadrený v nasledujúcom tvrdení

> Ak auto prejde za 2 hodiny 100 km, tak aspoň v jednom okamihu cesty dosiahne rýchlosť presne 50 km za hodinu.

Príklad 20. Ukážeme, že pre ľubovoľné dve reálne čísla $a < b$ platí $arctg\ b - arctg\ a < b - a$.

Riešenie: Môžu nastať tri prípady:

- Nech $0 \le a < b$. Potom podľa Lagrangeovej vety pre niektoré číslo $c \in (a, b)$ platí

$$arctg\ b - arctg\ a = (arctg\ x)'_{[x=c]}.(b - a) = \frac{1}{1 + c^2}.(b - a) < b - a.$$

- Keďže funkcia $\operatorname{arctg} x$ je nepárna, nerovnosť platí aj v prípade, ak $a < b \leq 0$
- Ak $a < 0 < b$, tak podľa predošlých dvoch častí existujú $c \in (a, 0)$ a $d \in (0, b)$ také, že $\operatorname{arctg} 0 - \operatorname{arctg} a = \frac{1}{1+c^2}(0 - a)$ a $\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0 = \frac{1}{1+d^2}(b - 0)$. Po sčítaní dostávame
$$\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} a = \frac{1}{1+d^2}b - \frac{1}{1+c^2}a < b - a,$$
lebo b je kladné, a záporné a výrazy $\frac{1}{1+d^2}$ a $\frac{1}{1+c^2}$ sú menšie ako 1. ♣

Príklad 21. Dokážeme, že ľubovoľná algebrická rovnica tretieho stupňa má najviac tri reálne riešenia.

Riešenie: Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme, že existuje rovnica tretieho stupňa $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ktorá má štyri riešenia $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Podľa Rolleho vety existuje medzi každou susednou dvojicou z nich číslo, v ktorom je derivácia funkcie P rovná nule. Avšak derivácia funkcie P je kvadratická funkcia $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ a tá nemôže mať tri rôzne nulové hodnoty. Toto je spor, ktorý dokazuje pravdivosť tvrdenia.
♣

Poznamenajme, že pomocou matematickej indukcie sa dá analogickými argumentami ukázať všeobecné tvrdenie

Ľubovoľná algebrická rovnica stupňa n má najviac n reálnych riešení.

7.6 Diferenciál a diferenciály vyšších rádov

Pri aplikáciách matematiky je často potrebné pracovať s hodnotami komplikovaných funkcií. Je možné nahradiť ich hodnotami jednoduchších funkcií, ak sú tieto v rámci požadovanej presnosti. Často sa k tomu používajú lineárne funkcie, keďže sú na výpočty najjednoduchšie.
Nech má funkcia f v bode a deriváciu. Potom hodnoty funkcie f v blízkom okolí čísla a najlepšie zo všetkých lineárnych funkcií aproximuje (približne vyjadruje) funkcia $y = f(a) + f'(a)(x - a)$. Preto
$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$
pre čísla x blízke číslu a. Lineárny výraz
$$df(a, x) = f'(a)(x - a)$$
v tejto aproximácii voláme **diferenciál funkcie f v bode a**. Všeobecne **diferenciál n-tého rádu funkcie f v bode a** je výraz
$$d^n f(a, x) = f^{(n)}(a)(x - a)^n,$$
ak existuje $n-$ tá derivácia funkcie f v bode a.
Špeciálne, pre $n = 0$, diferenciálom nultého rádu je konštantna $f(a)$.

Príklad 22. Nájdeme prvých päť diferenciálov funkcie $f: \ y = \cos x$ v bode 0.

Riešenie: K nájdeniu diferenciálu potrebujeme príslušnú deriváciu v danom bode. Keďže $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 0$, $y^{(4)}(0) = 1$, $y^{(5)}(0) = 0$, platí
$$d^0 f(0, x) = 1, \quad d^2 f(0, x) = -x^2, \quad d^4 f(0, x) = x^4.$$

Ostatné hľadané diferenciály sú rovné nulovej konštante. ♣

Pre použitie pojmu diferenciálu pozri časť 7.8.

7.7 Taylorova veta

Nech funkcia f má v bode a všetky derivácie až do rádu n. Potom mnohočlen premennej x

$$T_n(f,a,x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(a,x)}{k!}$$

voláme **Taylorov mnohočlen (polynóm)** funkcie f v bode a.
Taylorova veta vyjadruje fakt, že spomedzi všetkých mnohočlenov stupňa menšieho alebo rovného n práve mnohočlen $T_n(f,a,x)$ najlepšie aproximuje hodnoty funkcie f v blízkom okolí bodu a.
Taylorova veta.
Nech funkcia f má v intervale $\langle a,b\rangle$ spojité derivácie f', f'', $\ldots$, $f^{(n)}$ a deriváciu $f^{(n+1)}$ v intervale (a,b). Potom pre každé $x \in \langle a,b\rangle$ existuje také číslo $r \in (a,x)$, že platí

$$f(x) = T_n(f,a,x) + \frac{f^{(n+1)}(r)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Všimnime si:

- Pre hodnoty x blízke číslu a je posledný člen (zvyšok) blízky 0 a preto

  $$f(x) \approx T_n(f,a,x)$$

  pre x z blízkeho okolia čísla a.

- V prípade $n=0$ sa Taylorova veta zhoduje s Lagrangeovou vetou o strednej hodnote.

Príklad 23. Nájdeme Taylorove mnohočleny stupňa 4 v bode 0 pre funkcie $y = \cos x$ a $y = e^x$.

Riešenie: Potrebujeme nájsť diferenciály do rádu 4 funkcie. Preto (pozri Príklad 22)

$$T_4(\cos x, 0, x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

a podobne

$$T_4(e^x, 0, x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

♣

Príklad 24. Nájdeme Taylorov mnohočlen štvrtého stupňa v bode -1 pre funkciu $f:\ y = x^4 - 5x^3 + 2x - 3$.

Riešenie: Potrebujeme nájsť diferenciály funkcie v bode -1 do rádu 3. Platí

$$\begin{aligned} y &= x^4 - 5x^3 + 2x - 3, & y(-1) &= 1, & d^{(0)}f(0,x) &= 1,\\ y' &= 4x^3 - 15x^2 + 2, & y'(-1) &= -17, & df(0,x) &= -17(x+1),\\ y'' &= 12x^2 - 30x, & y''(-1) &= 42, & df^{(2)}(0,x) &= 42(x+1)^2,\\ y''' &= 24x - 30, & y'''(-1) &= -54, & df^{(3)}(0,x) &= -54(x+1)^3,\\ y^{(4)} &= 24, & y^{(4)}(-1) &= 24, & df^{(4)}(0,x) &= 24(x+1)^4. \end{aligned}$$

Preto

$$T_3(f,-1,x) = 1 - 17(x+1) + \frac{42}{2}(x+1)^2 - \frac{54}{6}(x+1)^3 + \frac{24}{24}(x+1)^4 =$$
$$1 - 17(x+1) + 21(x+1)^2 - 9(x+1)^3 + (x+1)^4.$$

♣

Presvedčte sa, že v poslednom príklade platí $T_3(f,-1,x) = f(x)$. Všeobecne platí, že

Ak P_n je mnohočlen stupňa n, tak $T_n(P_n,a,x) = P_n(x)$ pre všetky $a \in \mathbf{R}$.

Pre použitie Taylorovho mnohočlenu pozri časť 7.8.

7.8 Približné výpočty hodnôt funkcií

Ak máme približne vypočítať hodnotu funkcie f v bode x, ktorú nie sme z nejakého dôvodu schopní vypočítať presne, postupujeme nasledovne.

1. Nájdeme taký bod a čo najbližšie k bodu x, v ktorom sme schopní vypočítať hodnotu funkcie f a jej derivácií.
2. Použijeme vzťah $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$.
3. Ak nie sme spokojní s presnosťou aproximácie, použijeme vzťah $f(x) \approx T_n(f,a,x)$ pre vhodné prirodzené číslo $n > 1$.

Príklad 25. Vypočítajme pomocou prvého diferenciálu približne hodnotu $\sqrt{80}$.

Riešenie: Ide o výpočet hodnoty $f(80)$ pre funkciu $f:\ y = \sqrt{x}$. Keďže

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a),$$

potrebujeme nájsť vhodnú hodnotu a blízko hodnoty 80, v ktorej vieme vypočítať obidve hodnoty $f(a)$ aj $f'(a)$. Keďže $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, vhodnou hodnotou je $a = 81$. Platí $f(81) = 9$ a $f'(81) = \frac{1}{18}$. Preto

$$\sqrt{80} \approx 9 + \frac{1}{18}(80-81) = 9 - \frac{1}{18} = \frac{161}{18} \approx 8,94.$$

♣

Príklad 26. Vypočítajme s presnosťou na tri desatinné miesta hodnotu čísla e.

Riešenie: Použijeme Taylorov mnohočlen funkcie $f:\ y = e^x$ v bode 0. Platí

$$T_n(f,0,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Keďže $e = e^1$, je

$$e \approx T_n(f,0,1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Potrebnú hodnotu n určíme z požiadavky, aby chyba výpočtu bola menšia ako $5.10^{-4} = 0,0005$ (tri desatinné miesta!). Z Taylorovej vety vyplýva, že chyba výpočtu sa rovná hodnote $\frac{f^{(n+1)}(r)}{(n+1)!}1^{n+1} = \frac{e^r}{(n+1)!}$, kde $r \in (0,1)$. Preto číslo n, pre ktoré bude výpočet **zaručene** v rámci danej presnosti je určené nerovnicou

$$\frac{e^r}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < 0,0005,$$

teda $(n+1)! > 2000e \approx 5436$. Najmenšie prirodzené číslo n, ktoré spĺňa túto nerovnosť, nájdeme pomocou výpočtu faktoriálov: $7! = 5040$, $8! > 40000$. Z toho vyplýva, že $n = 7$. Preto

$$e \approx T_7(f,0,1) = \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} = 2,718.$$

Porovnajte túto hodnotu výpočtom kalkulačkou! Poznamenajme, že rovnakú hodnotu dostaneme aj voľbou $n = 6$. ♣

7.9 Použitie derivácie pri výpočte limít

Vypočty limít "typu $\frac{0}{0}$" sú často veľmi komplikované. Názorná predstava hovorí, že limita takéhoto typu závisí od "rýchlosti", akou sa hodnoty funkcií v čitateli a menovateli blížia k 0. Toto je vyjadrené v nasledujúcom pravidle.

L'Hospitalovo pravidlo

Nech

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$,
2. v istom okolí čísla a majú obidve funkcie f a g deriváciu,
3. existuje $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Potom existuje aj $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Užitočnosť tohoto pravidla vynikne ešte viac, ak si uvedomíme, že limity "typov $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0" môžeme pomocou úprav previesť na limitu "typu $\frac{0}{0}$".

Príklad 27. Pomocou L'Hospitalovho pravidla vypočítame niekoľko limít. Pri počítaní každej limity samostatne overte predpoklady použitia pravidla.

Riešenie:
Typ $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

Typ $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_a\ x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x\ln\ a}}{1}=0.$$

Typ $0.\infty$:

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln\ x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\ x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0.$$

Niekedy používame L'Hospitalovo pravidlo viackrát za sebou.
Typ $\infty-\infty$:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln\ x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln\ x}{(x-1)\ln\ x}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln\ x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Typ 1^∞: (použijeme rovnosť $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln(f(x))}$)

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\ln\ \cos 2x}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ \cos 2x}{x^2}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-2\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}{2x}}=$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{-2\cos 2x}{1}}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}.$$

Pozor na nesprávne použitie L'Hospitalovho pravidla:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=-\infty.$$

Nájsť chybu v tomto postupe a opraviť ju necháme na čitateľa. ♣

7.10 Monotónnosť

Pomocou derivácie môžeme zistiť, v ktorých intervaloch funkcia rastie alebo klesá. Nasledujúce tvrdenie je založené na vete o strednej hodnote (skúste ho odvodiť!).

Ak $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) platí pre každé $x\in(a,b)$, tak funkcia f je **rastúca (klesajúca)** v intervale (a,b).

Dôsledkom je tvrdenie užitočné pri dôkazoch nerovností medzi funkciami.

Nech funkcie f a g sú spojité v intervale $\langle a,b\rangle$ a $f(a)\le g(a)$. Ak $f'(x)\le g'(x)$ pre každé $x\in(a,b)$, tak aj $f(x)\le g(x)$ pre každé $x\in(a,b)$.

Iným dôsledkom vety o strednej hodnote je tvrdenie

Ak $f'(x)=0$ pre všetky $x\in(a,b)$, tak f je konštantná funkcia v intervale (a,b).

Príklad 28. Zistime intervaly, v ktorých rastú a intervaly, v ktorých klesajú funkcie $y=51+36x+6x^2-x^3$, $y=2x^2-\ln\ x$, $y=x^2e^{-x}$.
Riešenie:

a) Zistíme intervaly v ktorých je derivácia kladná (záporná). Najskôr si uvedomíme, že definičný obor funkcie je množina $\mathbf{R}$. Počítame deriváciu: $y' = 36 + 12x - 3x^2$. Pre určenie intervalov, v ktorých funkcia rastie riešime kvadratickú nerovnicu $36 + 12x - 3x^2 > 0$. Riešením je interval $(-2, 6)$. Funkcia je rastúca v tomto intervale. Klesajúca je v intervaloch, ktoré sú riešením opačnej nerovnice $(-\infty, -2)$ a $(6, \infty)$.

b) Definičným oborom funkcie je množina $D = (0, \infty)$. $y' = 4x - \frac{1}{x}$. Riešením nerovnice $4x - \frac{1}{x} > 0$ sú intervaly $(-\frac{1}{2}, 0)$ a $(\frac{1}{2}, \infty)$. Riešením opačnej nerovnice sú intervaly $(-\infty, -\frac{1}{2})$ a $(0, \frac{1}{2})$. Vzhľadom na svoj definičný obor je funkcia rastúca v intervale $(\frac{1}{2}, \infty)$ a klesajúca v intervale $(0, \frac{1}{2})$.

c) Definičný obor funkcie je množina $\mathbf{R}$ a derivácia $y' = (2x - x^2)e^{-x}$. Pretože druhý činiteľ je kladný pre všetky $x \in \mathbf{R}$, znamienko derivácie závisí len od prvého člena. Preto je funkcia rastúca v intervale $(0, 2)$ a klesajúca v intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(2, \infty)$.♣

Príklad 29. Ukážeme, že pre každé $x \in \mathbf{R}$ platí $x \geq 1 - e^{-x}$.

Riešenie: Nerovnosť ukážeme vtedy, ak sa presvedčíme, že $f(x) = x - 1 + e^{-x} \geq 0$ pre každé $x \in \mathbf{R}$. Určíme intervaly, v ktorých funkcia f rastie a v ktorých klesá. f klesá v $(-\infty, 0)$ a rastie v $(0, \infty)$ (overte!). Z toho vyplýva, že funkcia f nadobúda najmenšiu hodnotu v bode 0. Preto pre všetky $x \in \mathbf{R}$ platí $f(x) \geq f(0) = 0$, čo sme chceli ukázať. ♣

Príklad 30. Ukážeme, že pre každé $x < 0$ platí $arctg\ \frac{1}{x} = -arctg\ x - \frac{\pi}{2}$.

Riešenie: Podobne ako v predchádzajúcom príklade uvažujme o funkcii $f(x) = arctg\ \frac{1}{x} + arctg\ x + \frac{\pi}{2}$. Chceme ukázať, že f je konštantná a rovná 0 v intervale $(-\infty, 0)$. Jej derivácia je

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} . \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{1 + x^2} = 0.$$

Preto funkcia f je konštantná v celom intervale $(-\infty, 0)$. Hodnotu tejto konštanty zistíme dosadením ľubovoľného bodu, vhodným je napríklad bod $x = -1$.

$$f(x) = f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = 0. \qquad ♣$$

7.11 Konvexnosť, konkávnosť, inflexné body

Funkcia je **konvexná (konkávna)** v intervale (a, b), ak jej graf je "otvorený nahor (nadol)". (Presná definícia konvexnosti a konkávnosti je pomerne náročná. Pre lepšiu názornosť pojmov si prezrite obrázky.)

Konvexnosť alebo konkávnosť môžeme určiť pomocou druhej derivácie.
Ak $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) platí pre každé $x \in (a, b)$, tak funkcia f je **konvexná (konkávna)** v intervale (a, b).
Bod, v ktorom sa funkcia mení z konvexnej na konkávnu alebo naopak voláme **inflexný bod**.
Inflexné body hľadáme podľa pravidla

Ak a je inflexný bod funkcie f a $f''(a)$ existuje, tak $f''(a) = 0$.

Príklad 31. Nájdeme intervaly, v ktorých sú konvexné a intervaly, v ktorých sú konkávne funkcie $y = x(3 - x)^2,\ y = \ln(1 + x^3),\ y = x\ arctg\ x$. Nájdeme aj inflexné body týchto funkcií.

Riešenie: Intervaly budeme hľadať za pomoci druhej derivácie.

Obr. 7.1: Konvexná funkcia

Obr. 7.2: Konkávna funkcia

a) Definičný obor je množina **R**. $y' = (3-x)^2 - 2x(3-x) = 3(3-x)(1-x)$ a $y'' = 3(x-1+x-3) = 6x-12$. Druhá derivácia je kladná a preto funkcia je konvexná v intervale $(2, \infty)$ a druhá derivácia je záporná a preto funkcia je konkávna v intervale $(-\infty, 2)$. Jediný inflexný bod je bod $[2, 2]$.

b) Definičný obor funkcie je interval $(-1, \infty)$. $y'' = \frac{3x(2-x^3)}{(1+x^3)^2}$ (overte!). Pretože menovateľ zlomku je v celom definičnom obore funkcie kladný, o znamienku rozhoduje čitateľ. Funkcia je konvexná v intervale $(0, \sqrt[3]{2})$ a konkávna v intervaloch $(-1, 0)$ a $(\sqrt[3]{2}, \infty)$. Funkcia má dva inflexné body $[0, 0]$ a $[\sqrt[3]{2}, \ln\ 3]$.

c) Definičný obor je množina **R**. $y' = arctg\ x + \frac{x}{1+x^2}$ a $y'' = \frac{2}{(1+x^2)^2}$ je kladná pre všetky $x \in \mathbf{R}$. Funkcia je konvexná v celej množine **R** a preto nemá inflexné body.

♣

7.12 Extrémy funkcie

Funkcia f má v bode a **lokálne maximum (minimum)**, ak existuje také okolie U bodu a, že pre všetky $x \in U - \{a\}$ platí $f(x) < f(a)$ $(f(x) > f(a))$. Lokálne maximá a minimá funkcie voláme spoločným názvom **lokálne extrémy**. Pri určovaní lokálnych extrémov funkcie používame nasledujúce tvrdenie.

Ak má funkcia f v bode a **lokálny extrém** a $f'(a)$ existuje, tak $f'(a) = 0$. Ak naviac $f''(a) < 0$ $(f''(a) > 0)$, tak f má v bode a **lokálne maximum (minimum)**.

Body, v ktorých má derivácia funkcie nulovú hodnotu voláme **stacionárne body** funkcie.
Poznamenajme, že funkcia **môže mať** stacionárne body aj v bodoch, v ktorých **nemá** lokálny extrém,

napríklad funkcia $y = x^3$ v bode 0.
Pri určovaní lokálneho extrému môžeme namiesto druhej derivácie použiť aj fakt, že

> funkcia f má lokálne maximum v bode a, ak je **rastúca** v niektorom **ľavom** okolí bodu a a **klesajúca** v niektorom **pravom** okolí bodu a.

Analogické tvrdenie platí pre lokálne minimá.
Pri určovaní lokálnych extrémov postupujeme tak, že najskôr určíme všetky body, v ktorých derivácia je rovná 0 alebo derivácia neexistuje a potom z nich vyberieme tie, ktoré **sú** lokálnymi extrémami.
V praxi je často potrebné určiť najväčšiu alebo najmenšiu hodnotu funkcie v niektorom intervale $\langle a, b\rangle$. Postupujeme nasledovne.

1. Určíme všetky lokálne maximá funkcie v intervale (a, b).

2. Nájdeme najväčšiu z hodnôt všetkých lokálnych maxím a hodnôt v krajných bodoch intervalu: $f(a)$ a $f(b)$.

Analogicky postupujeme pri určovaní najmenšej hodnoty.

Príklad 32. Určíme lokálne extrémy funkcií $y = \frac{x^3}{3} - x^4$, $y = 1 - |1 - x|$, $y = \ln\ x + \frac{1}{x}$.

Riešenie:

a) Funkcia je definovaná a má deriváciu $y' = x^2 - 4x^3$ pre všetky $x \in \mathbf{R}$. Preto môže nadobúdať lokálne extrémy len v stacionárnych bodoch, t.j. v riešeniach rovnice $x^2 - 4x^3 = 0$. Táto rovnica má dve riešenia $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{1}{4}$. Na určenie, či ide skutočne o extrém a o aký typ extrému ide, použijeme druhú deriváciu $y'' = 2x - 12x^2$ a jej hodnoty v stacionárnych bodoch. Hodnota $y''(0) = 0$ nedáva informáciu, hodnota $y''(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} < 0$ rozhoduje o tom, že funkcia má lokálne maximum $\frac{1}{32}$ v bode $\frac{1}{4}$. Pre určenie povahy bodu 0 použijeme intervaly monotónnosti: funkcia je rastúca aj v ľavom aj v pravom okolí bodu 0 (overte!), preto nemá v tomto bode lokálny extrém.

b) Daná funkcia je rovná funkcii $y = x$ a má deriváciu $y' = 1$ v intervale $(-\infty, 1)$ a rovná sa funkcii $y = 2 - x$ a má deriváciu $y' = -1$ v intervale $(1, \infty)$. Preto v žiadnom bode z týchto intervalov nemôže mať lokálny extrém (odôvodnite!). V samotnom bode 1 funkcia nemá deriváciu, napriek tomu má v tomto bode lokálne (aj absolútne) maximum rovné 1, pretože "naľavo" od neho rastie a "napravo" od neho klesá.

c) Definičný obor funkcie je množina $D = (0, \infty)$. Derivácia funkcie $y' = \frac{x-1}{x^2}$ je nulová jedine v bode $x = 1$. Druhá derivácia $y'' = \frac{2-x}{x^3}$ je v tomto bode rovná 1, preto má funkcia v tomto bode lokálne minimum.

♣

Príklad 33. Zistíme najmenšie a najväčšie hodnoty

a) funkcie $y = x^3 - 6x^2 + 7$ v intervale $\langle -1, 2\rangle$,

b) funkcie $y = 2x + \cos 2x$ v intervale $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$,

c) funkcie $y = 3 - e^{|x|}$ v intervale $\langle -2, 3)$.

Riešenie:

a) Funkcia má deriváciu v každom bode intervalu, preto lokálne extrémy môžu byť len v jej stacionárnych bodoch. Tie sú určené rovnicou $3x^2 - 12x = 0$, t.j. $x_1 = 0$ a $x_2 = 4$. Z nich do daného intervalu patrí len $x_1 = 0$. Test pomocou druhej derivácie potvrdí lokálne maximum funkcie v tomto bode. Na extrémne hodnoty máme teda troch kandidátov: $f(0) = 7$, $f(-1) = 0$ a $f(2) = -9$. Najmenšou hodnotou funkcie v danom intervale je preto hodnota -9 nadobudnutá v bode 2 a najväčšou hodnota 7 nadobudnutá v bode 0.

b) Funkcia má deriváciu v každom bode intervalu, preto lokálne extrémy môžu byť len v jej stacionárnych bodoch. Tie sú určené rovnicou $2 - 2\sin 2x = 0$, ktorej riešením v danom intervale je jediné číslo $x = \frac{\pi}{4}$. Ďalej postupujeme podobne ako v predchádzajúcej časti. Najmenšou hodnotou v danom intervale je hodnota $-\pi - 1$ a najväčšou hodnota $\pi - 1$.

c) Pre $x > 0$ je $y = 3 - e^x$ a $y' = -e^x < 0$. Pre $x < 0$ je $y = 3 - e^{-x}$ a $y' = e^{-x} > 0$. Znamienka derivácie určujú, že v bode 0 (neexistuje v ňom derivácia - odôvodnite!) má funkcia najväčšiu hodnotu $f(0) = 2$ Najmenšiu hodnotu môže nadobudnúť len v krajných bodoch intervalu, z ktorých jeden do intervalu nepatrí. Platí

$$f(-2) = 3 - e^2 > f(3) = 3 - e^3.$$

Pretože funkcia je spojitá, v intervale $\langle -2, 3)$ nenadobudne najmenšiu hodnotu (odôvodnite).

♣

Príklad 34. Aké rozmery má mať konzerva objemu 1 liter v tvare valca, aby sme na jej výrobu spotrebovali čo najmenej materiálu?

Riešenie: Označme r polomer podstavy a h výšku konzervy v decimetroch. Množstvo spotrebovaného materiálu je priamo úmerné povrchu $S = 2\pi r(r + h)$ konzervy, preto hľadáme jeho minimálnu hodnotu. Pre objem konzervy platí $V = \pi r^2 h$, preto medzi neznámymi veličinami platí vzťah $h = \frac{1}{\pi r^2}$. Po jeho dosadení do vzťahu pre povrch a úprave dostávame povrch konzervy ako funkciu polomeru podstavy $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$. Hľadáme teda najmenšiu hodnotu tejto funkcie v intervale $(0, \infty)$ (to sú všetky možné hodnoty polomeru podstavy). Počítame deriváciu

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2}{r^2}.$$

Derivácia existuje v každom bode intervalu, interval neobsahuje koncové body, preto jediná možnosť minimálnej hodnoty funkcie je v stacionárnych bodoch. Ten existuje jediný $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$. Druhá derivácia potvrdí, že ide skutočne o minimum (overte!). Dosadením tejto hodnoty r dostaneme aj hodnotu pre výšku $h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$. ♣

Príklad 35. Nosnosť pravouhlého trámu je priamo úmerná jeho šírke násobenej druhou mocninou jeho výšky. Aké rozmery máme zvoliť, ak sekáme trám z valcovitého kmeňa s priemerom 1 meter, aby sme dosiahli maximálnu nosnosť?

Riešenie: Označme s a v rozmery šírky a výšky trámu v metroch. Jeho nosnosť je určená vzťahom $N = c.s.v^2$, kde c je kladná konštanta. Keďže trám je vysekaný z valca s priemerom 1 meter, pre veličiny s a v platí vzťah $s^2 + v^2 = 1$. Vyjadrením v^2 a dosadením do vzťahu pre nosnosť dostaneme funkciu $N(s) = c.s.(1 - s^2)$. Hľadáme jej najmenšiu hodnotu v intervale $(0, 1)$. Derivácia $N'(s) = c(1 - 3s^2)$

existuje pre každé s z daného intervalu a je nulová v jedinom $s = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Druhá derivácia potvrdí, že ide o najväčšiu hodnotu. Nosnosť trámu je preto najväčšia, ak volíme šírku $\frac{\sqrt{3}}{3}$ metrov a výšku $\frac{\sqrt{6}}{3}$ metrov. ♣

7.13 Priebeh funkcie

Zisťovanie priebehu funkcie spočíva v popise jej vlastností a načrtnutí jej grafu. Postup by mal obsahovať:

1. Definičný obor funkcie;
2. vlastnosti symetrie: párnosť, nepárnosť, periódu;
3. významné body, napríklad nulové body funkcie, body nespojitosti, (v nich treba určiť jednostranné limity), body, v ktorých neexistuje derivácia alebo je nespojitá a pod.;
4. asymptoty grafu funkcie;
5. intervaly monotónnosti funkcie a jej lokálne extrémy;
6. intervaly, kde je funkcia konvexná, konkávna a jej inflexné body;
7. náčrtok grafu funkcie.

V nasledujúcich príkladoch ponechávame niektoré výpočty a úvahy na čitateľa.

Príklad 36. Zistíme priebeh funkcie $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$.

Riešenie:

1. Definičný obor funkcie je množina $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$.
2. Počítame
$$y(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{2x^3}{x^2 - 1} = -y(x),$$
funkcia je nepárna, nie je periodická.
3. Funkcia je spojitá, jediný nulový bod funkcie je bod 0.
4. Asymptoty grafu funkcie bez smernice sú priamky $x = -1$ a $x = 1$, lebo jednostranné limity v nich sú nevlastné. Počítame asymptoty so smernicou:
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2.$$
$$q = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 2x(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = 0.$$
Vzhľadom na nepárnosť funkcie existuje jediná asymptota jej grafu so smernicou: $y = 2x$.
5. Intervaly monotónnosti funkcie určíme pomocou prvej derivácie $y'(x) = \frac{2x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$. Analýza znamienok derivácie vedie k výsledku (pozor na nesúvislosť definičného oboru!):

Funkcia je rastúca v intervaloch $(-\infty, -\sqrt{3}),\ (\sqrt{3}, \infty)$,

funkcia je klesajúca v intervaloch $(-\sqrt{3}, -1),\ (-1, 1),\ (1, \sqrt{3})$.

Lokálne extrémy funkcie sú v bodoch, kde funkcia mení rast na klesanie alebo naopak. Pretože body ± 1 nie sú v jej definičnom obore, jediné jej extrémy sú:

Funkcia má lokálne maximum $-3\sqrt{3}$ v bode $-\sqrt{3}$.
Funkcia má lokálne minimum $3\sqrt{3}$ v bode $\sqrt{3}$.

Všimnite si, že lokálne minimum môže byť väčšie ako lokálne maximum!

6. Intervaly, kde je funkcia konvexná, konkávna určíme pomocou druhej derivácie $y''(x) = \frac{4x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$. Analýza znamienok druhej derivácie vedie k výsledku:

   Funkcia je konvexná v intervaloch $(-1, 0),\ (1, \infty)$,

   funkcia je konkávna v intervaloch $(-\infty, -1),\ (0, 1)$.

   Funkcia mení charakter konvexnosti a konkávnosti v jedinom bode definičného oboru.

   Funkcia má jediný inflexný bod v bode 0.

7. Náčrtok grafu funkcie.

Obr. 7.3: Graf funkcie $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$

♣

Príklad 37. Zistíme priebeh funkcie $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Riešenie:

1. Definičný obor funkcie je interval $(-1, 1)$.

2. Počítame
$$y(-x) = \ln \frac{1-x}{1+x} = \ln \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\ln \frac{1+x}{1-x} = -f(x).$$
   Funkcia je nepárna, nie je periodická.

3. Funkcia je spojitá v definičnom obore, jediný nulový bod je bod 0.

4. Graf funkcie má asymptoty bez smernice $x = -1$ a $x = 1$ v krajných bodoch definičného oboru, lebo $\lim_{x\to 1^-} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \infty$ a $\lim_{x\to -1^+} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -\infty$. Asymptoty so smernicou nemá z dôvodu ohraničenosti svojho definičného oboru.

5. Derivácia funkcie $y'(x) = \frac{2}{1-x^2}$ je kladná v celom definičnom obore, preto

   funkcia je rastúca, nemá lokálne extrémy.

6. Znamienko druhej derivácie $y''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$ je zhodné so znamienkom x a mení sa v bode 0. Preto

   Funkcia je konvexná v intervale $(0, 1)$, je konkávna v intervale $(-1, 0)$ a má jediný inflexný bod v bode 0.

7. náčrtok grafu funkcie.

Obr. 7.4: Graf funkcie $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$

♣

Príklad 38. Zistíme priebeh funkcie $y = e^{\sin x}$.

Riešenie:

1. Definičný obor funkcie je množina všetkých reálnych čísel $\mathbf{R}$.

2. Počítame
$$y(-x) = e^{\sin(-x)} = e^{-\sin x} = \frac{1}{e^{\sin x}}.$$
   Táto hodnota nie je rovná ani jednej z hodnôt $\pm y(x)$, preto funkcia nie je párna ani nepárna. Je periodická s periodou 2π.

3. Funkcia je spojitá, nemá nulové body.

4. Z dôvodu spojitosti nemá graf funkcie asymptoty bez smernice, keďže je periodická, nemá graf ani asymptoty so smernicou.

5. Prvá derivácia $y'(x) = \cos x \; e^{\sin x}$ má znamienko zhodné so znamienkom funkcie cos. Preto

   funkcia rastie v intervaloch $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ a
   klesá v intervaloch $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$,

funkcia má lokálne maximá e v bodoch $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ a
funkcia má lokálne minimá $\frac{1}{e}$ v bodoch $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$,

kde k je ľubovoľné celé číslo.

6. Druhá derivácia funkcie $y''(x) = e^{\sin x}(1 - \sin x - \sin^2\ x)$ má znamienko zhodné so znamienkom výrazu v zátvorke. Výpočet nulových bodov tohoto výrazu je možné vykonať len približne. Dostávame:

   funkcia je konvexná v intervaloch $((-1,212 + 2k)\pi, (0,212 + 2k)\pi)$,
   funkcia je konkávna v intervaloch $((0,212 + 2k)\pi, (0,788 + 2k)\pi)$ a

   má inflexné body v bodoch $(0,212 + 2k)\pi$ a $(0,788 + 2k)\pi)$,

   kde k je ľubovoľné celé číslo.

7. náčrtok grafu funkcie.

Obr. 7.5: Graf funkcie $y = e^{\sin x}$

$\clubsuit$

7.14 Numerické riešenie nelineárnych rovníc

Matematická formulácia tohoto problému je nasledovná: Je daná spojitá funkcia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definovaná na intervale $\langle a, b\rangle$. Chceme nájsť reálne číslo $\alpha \in \langle a, b\rangle$ (pokiaľ existuje), pre ktoré platí

$$f(\alpha) = 0.$$

Takéto číslo α nazývame **koreň rovnice**. Keďže funkcia f môže byť v podstate ľubovoľná funkcia jednej reálnej premennej, jej koreň vo všeobecnosti nevieme nájsť nejakým matematickým výpočtom ako napríklad u lineárnej alebo kvadratickej funkcie, prípadne niektorej goniometrickej funkcie. Tento koreň preto budeme hľadať numerickými metódami. Spravidla sa nám nepodarí nájsť koreň, ale len jeho **aproximáciu - približnú hodnotu**. Musí nás preto zaujímať okrem metódy, ktorú na výpočet použijeme, aj **chyba**, akej sa pri nájdení tohoto približného riešenia dopustíme (podrobnejšie o numerických metódach a chybách pozri kapitolu Reálne čísla, paragrafy Zdroje chýb, Chyby aritmetických operácií). Numerické metódy, ktorými sa budeme teraz zaoberať, sú založené na iteračných princípoch (pozri kapitolu Reálne čísla, paragraf Algoritmy). Budú nás zaujímať hlavne dve základné otázky:

1. Konverguje postupnosť vytvorená danou iteračnou metódou?

2. Ak konverguje, tak ako rýchlo?

Ak konverguje postupnosť vytvorená danou iteračnou metódou, hovoríme, že iteračná metóda konverguje.
Ak o koreni rovnice vieme len toľko, že leží v intervale $\langle a, b\rangle$ a nemáme žiadne iné informácie o jeho polohe, použijeme iteračnú metódu, ktorej konvergencia nezávisí od voľby začiatočnej aproximácie. Takéto metódy voláme **vždy konvergentné metódy**. Spravidla majú tú nevýhodu, že konvergujú pomaly, a preto sú zvyčajne vhodné pre určenie takej aproximácie koreňa, ktorá by mohla slúžiť ako začiatočná aproximácia pre nejakú rýchlo konvergentnú metódu, ktorá ale vyžaduje "dobrú" počiatočnú aproximáciu koreňa. Preto metódy riešenia nelineárnych rovníc rozdeľujeme na dva typy:

1. štartovacie metódy
2. spresňujúce metódy

Neznamená to však, že štartovacia metóda konverguje vždy pomaly a spresňujúca zas konverguje vždy rýchlo. Závisí to vždy od konkrétnej situácie a vlastností funkcie f.
V ďalšom budeme predpokladať, že funkcia f, ktorej koreň na intervale $\langle a, b\rangle$ hľadáme, je na tomto intervale spojitá. K tomu, aby sme mohli odpovedať na druhú otázku z dvoch vyššie položených, zavedieme najskôr nasledujúci pojem:
Hovoríme, že postupnosť $\{x_k\}$ konverguje k číslu α **s rýchlosťou rádu r**, ak pre $k \to \infty$ platí: Existuje taká konštanta $C > 0$, že

$$|x_{k+1} - \alpha| = C|x_k - \alpha|^r + o(|x_k - \alpha|^r),$$

$$\text{symbol } f(x) = o(g(x)),\ \text{pre } x \to a,\ \text{znamená, že} \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{7.5}$$

7.14.1 Štartovacie metódy

Grafická metóda.
Pozorne nakreslený graf funkcie $y = f(x)$ nám pomôže separovať reálne korene rovnice $f(x) = 0$, t.j. určiť intervaly, v ktorých korene ležia. Niekedy je výhodnejšie rovnicu $f(x) = 0$ písať v tvare $f_1(x) = f_2(x)$. Potom korene určíme ako x-ové súradnice prienikov grafov funkcií $y = f_1(x)$ a $y = f_2(x)$. Grafická metóda nám tiež môže poskytnúť informáciu o tom, či daný reálny koreň rovnice v uvažovanom intervale vôbec existuje. Pre zložitejšie typy funkcií môžeme reálne korene lokalizovať tabelovaním funkcie $y = f(x)$.

Metóda bisekcie.
Nech je

- reálna funkcia f spojitá na $I_0 = \langle a_0, b_0\rangle$,
- $f(a_0).f(b_0) < 0$ (funkčné hodnoty v koncových bodoch intervalu I_0 majú opačné znamienka).

Tieto predpoklady zaručujú, že existuje aspoň jedno číslo $\alpha \in I_0$ také, že $f(\alpha) = 0$. Zostrojme postupnosť intervalov

$$I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_k,\ \text{kde } I_k = \langle a_k, b_k\rangle$$

takto:
Ak je $f(a_{k-1}).f(b_{k-1}) < 0$, vypočítame stred intervalu I_{k-1}, t.j.

$$s_k = \frac{1}{2}(a_{k-1} + b_{k-1}).$$

V prípade, že $f(s_k) = 0$ našli sme koreň rovnice. V opačnom prípade zvolíme za $I_k = \langle a_k, b_k \rangle$ ten z intervalov $\langle a_{k-1}, s_k \rangle$, $\langle s_k, b_{k-1} \rangle$, v ktorého koncových bodoch má funkcia f opačné znamienka. Koreň α bude ležať v každom z intervalov I_k a postupnosti $\{a_k\}, \{b_k\}$ koncových bodov týchto intervalov vždy konvergujú ku koreňu α. Po n krokoch bude mať interval dĺžku

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \frac{1}{2^2}(b_{n-2} - a_{n-2}) = \ldots = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0).$$

Pre odhad chyby preto platí: $(\alpha \in I_n)$.

$$|a_n - \alpha| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n} \text{ resp. } |b_n - \alpha| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^n}.$$

Metóda bisekcie (delenia intervalu) konverguje pomaly. Rýchlosť konvergencie tejto metódy je ale úplne nezávislá na tvare funkcie f.

Príklad 39. Nájdime aproximáciu koreňa rovnice

$$f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \sin x = 0.$$

Riešenie: Pre zastavovaciu podmienku zvolíme $\delta = 0,05$. Z grafu funkcií $y = (\frac{x}{2})^2$, $y = \sin x$ odhadneme $I_0 = \langle 1,5; 2 \rangle$. Skutočne $f(1,5).f(2) < 0$. Podľa vzťahu, odvodeného pre odhad chyby, máme:

$$|a_4 - \alpha| < \frac{1}{2^4}.0,5 < 0,05.$$

Výsledky môžeme zapísať do tabuľky:

k	a_k	b_k	s_{k+1}	$f(s_{k+1})$	$b_k - a_k$
0	1,50000	2,00000	1,7500	< 0	0,5
1	1,75000	2,00000	1,87500	< 0	0,25
2	1,87500	2,00000	1,93750	> 0	0,125
3	1,87500	1,93750	1,90625	< 0	0,0625
4	1,90625	1,93750			0,03125

Výhoda tejto metódy okrem jej jednoduchosti je aj v tom, že môžeme dopredu určiť počet krokov, potrebných k dosiahnutiu požadovanej presnosti. Nevýhodou je pomalá konvergencia.

Metóda prostej iterácie.
Rovnicu $f(x) = 0$ prepíšeme na tvar

$$x = \phi(x) \tag{7.6}$$

(obyčajne býva niekoľko možností).
Predpokladáme, že existuje interval $I_0 = \langle a_0, b_0 \rangle$ patriaci definičnému oboru a oboru spojitosti ako funkcie f, tak aj funkcie ϕ taký, ktorý obsahuje spoločný koreň α obidvoch vyššie uvedených rovníc a pre ktorý je splnená podmienka $\phi(I_0) \subset I_0$. Využijúc rovnicu (7.6), zostrojíme postupnosť aproximácií $x_1, x_2, \ldots$, koreňa α podľa nasledujúceho návodu:

1. Zvolíme číslo $\delta > 0$ a začiatočnú aproximáciu $x_0 \in I_0$.

2. Ďalšiu aproximáciu určíme z iteračnej formule

$$x_k = \phi(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{7.7}$$

Obr. 7.6: Metóda prostej iterácie.

3. Ak bude $|x_k - x_{k-1}| \geq \delta$, pokračujeme podľa bodu číslo 2, v opačnom prípade výpočet zastavíme a x_k považujeme za aproximáciu koreňa α.

Pri realizácii tohoto algoritmu musíme mať zaručené, že postupnosť $\{x_k\}$, určená vzťahom (7.7), konverguje ku koreňu α. K tomu nám slúži nasledujúca veta:

Veta 7.1 *(Postačujúce podmienky konvergencie.) Predpokladajme, že funkcia ϕ je na nejakom intervale $I = \langle a, b \rangle$ spojitá a má tieto vlastnosti:*

$$\begin{aligned} &a) \quad \forall x \in I: \ \phi(x) \in I \\ &b) \quad \exists q \in \langle 0,1) \textit{ také, že}: \forall x, y \in I \textit{ platí}: |\phi(x) - \phi(y)| \leq q|x-y|. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Potom v intervale I existuje práve jeden reálny koreň α rovnice $x = \phi(x)$ a postupnosť $\{x_k\}$, určená formulou $x_k = \phi(x_{k-1})$ konverguje pre každé $x_0 \in I$ a platí $\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha$.

Pre diferencovateľnú funkciu ϕ možno podmienku b) nahradiť podmienkou

$$\text{b')} \quad \exists q: \ \forall x \in I \text{ je } |\phi'(x)| \leq q < 1.$$

Príklad 40. Budeme hľadať opäť koreň rovnice $(\frac{x}{2})^2 - \sin x = 0$ v intervale $I_0 = \langle 1,5; 2 \rangle$. Uvedenú rovnicu prepíšeme na tvar
$x = 2\sqrt{\sin x}$. Budeme počítať podľa iteračného vzorca

$$x_k = 2\sqrt{\sin x_{k-1}}$$

a výpočet zastavíme, ak bude $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-3} = \delta$. Ľahko sa presvedčíme, že interval $I_0 = \langle 1,5; 2 \rangle$ patrí do definičného oboru funkcie $\phi(x) = 2\sqrt{\sin x}$. Zderivovaním iteračnej funkcie $\phi(x) = 2\sqrt{\sin x}$. zistíme, že derivácia je skutočne na intervale I_0 menšia ako 1. Z počtu iterácií uvedených v tabuľke môžeme posúdiť rýchlosť konvergencie. Vidíme, že táto je závislá od voľby začiatočnej hodnoty x_0.

k	$x_k,\ x_0 = 1,5$	$x_k,\ x_0 = 2,0$
1	1,99749	1,90714
2	1,80823	1,94316
3	1,94279	1,93025
4	1,93039	1,93503
5	1,83498	1,93328
6	1,93330	1,93392
7	1,93392	

Na základe vety o postačujúcej podmienke konvergenie metódy prostej iterácie môžeme získať odhad chyby tejto metódy:

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{q}{1-q}|x_k - x_{k-1}|.$$

Ak máme výpočet zastaviť pri splnení podmienky $|x_k - x_{k-1}| \le \delta$, potom pre odhad chyby dostávame

$$|x_k - \alpha| \le \frac{q}{1-q}\delta.$$

Ak je funkcia ϕ dostatočne hladká môžeme pomocou jej Taylorovho rozvoja získať nasledujúci odhad: Pre $\phi^{'}(\alpha) \ne 0$ máme

$$x_k - \alpha = \phi^{'}(\alpha)(x_{k-1} - \alpha) + o((x_{k-1} - \alpha)).$$

(Pre symbol $o((x_{k-1} - \alpha))$ pozri (7.5)). Vidíme, že rád rýchlosti konvergencie je $r = 1$. Hovoríme preto o **lineárnom iteračnom procese**. V prípade, že je $\phi^{'}(\alpha) = 0$ a $\phi^{''}(\alpha) \ne 0$, potom

$$x_k - \alpha = \frac{\phi^{''}(\alpha)}{2}(x_{k-1} - \alpha)^2 + o((x_{k-1} - \alpha)^2).$$

a rýchlosť konvergencie je v tomto prípade druhého rádu.

Metóda regula falsi
Opäť uvažujme rovnicu $f(x) = 0$ a predpokladáme, že táto funkcia je spojitá na intervale $I = \langle a, b\rangle$ a opäť platí: $f(a).f(b) < 0$ (t.j. v intervale I existuje reálny koreň rovnice). Vypočítame x-ovú súradnicu prieniku x-ovej osi a sečnice krivky $y = f(x)$, zostrojenej v bodoch $A = [a, f(a)], B = [b, f(b)]$ podľa vzorca

$$s_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a). \tag{7.9}$$

Ak bude platiť $signf(s_1) = signf(a)$ (sign znamená znamienko príslušného reálneho čísla), potom preznačíme s_1 na a a počítame s_2 podľa rovnakého vzorca. Ak bude $signf(s_1) = signf(b)$, preznačíme s_1 na b a ďalej počítame s_2 opäť podľa vzorca (7.9). Proces výpočtu zastavíme napríklad podmienkou $|f(s_k)| < \delta$.

Obr. 7.7: Metóda regula falsi.

Metóda regula falsi je vždy konvergentnou metódou, t.j. zostrojená postupnosť bodov s_k vždy konverguje ku koreňu α, pokiaľ je jeho existencia zaručená. Dá sa ukázať, že rýchlosť konvergencie je rádu $r = 1$. Metóda sa neodporúča používať veľmi blízko pri hľadanom koreni. Z vety o strednej hodnote dostávame pre odhad chyby:

$$|s_k - \alpha| \le \frac{f(s_k)}{m}, \text{ kde } m = \min_{x\in I} |f^{'}(x)|.$$

Príklad 41. Metódou regula falsi riešme opäť úlohu $(\frac{x}{2})^2 - \sin x = 0$. Voľme $I_0 = \langle 1,5; 2\rangle$. Výpočet sme zastavili podmienkou $|f(s_k)| < 10^{-5}$. Výsledky sú uvedené v nasledujúcej tabuľke:

k	s_k	a_k	b_k	$f(s_k)$	$f(a_k)$	$f(b_k)$
0	-	1,50000	2,00000	-	<0	>0
1	1,91373	1,91375	2,00000	<0	<0	>0
2	1,93305	1,93305	2,00000	<0	<0	>0
3	1,93373	1,93373	2,00000	<0	<0	>0
4	1,93375					

7.14.2 Spresňujúce metódy

Efektívne algoritmy na riešenie nelineárnych rovníc majú obvykle dve časti. V prvej časti použijeme niektorú štartovaciu metódu a v druhej časti sa prejde k nejakej rýchlejšie konvergujúcej metóde, ktorá slúži ku spresneniu počítanej aproximácie koreňa.

Newtonova metóda
Nech daný jednoduchý reálny koreň α leží v intervale I. Zvolíme $x_0 \in I$ a pomocou Taylorovho rozvoja vyjadríme funkciu f v tvare:

$$f(x) = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f^{''}(\xi_0)(x - x_0)^2, \tag{7.10}$$

kde ξ_0 leží medzi x a x_0, pričom predpokladáme, že v intervale I existujú derivácie $f^{'}, f^{''}$. Rovnicu $f(x) = 0$ teraz nahradíme (aproximujeme) lineárnou rovnicou (prvé dva členy rozvoja (7.10)):

$$f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0) = 0 \tag{7.11}$$

a vypočítame jej koreň (označíme ho x_1):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{pre } f^{'}(x_0) \neq 0. \tag{7.12}$$

Teraz nahradíme rovnicu $f(x) = 0$ rovnicou

$$f(x_1) + f^{'}(x_1)(x - x_1) = 0,$$

ktorá tiež vychádza z Taylorovho rozvoja funkcie f, ale v bode x_1. Koreňom tejto lineárnej rovnice je číslo:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Opakované nahradenie rovnice $f(x) = 0$ lineárnymi rovnicami typu

$$f(x_k) + f^{'}(x_k)(x - x_k) = 0$$

je základnou myšlienkou Newtonovej metódy, ktorej sa z tohoto dôvodu často hovorí aj **metóda linearizácie**. Korene týchto lineárnych rovníc tvoria postupnosť, ktorá je určená nasledujúcou rekurentnou formulou (**Newtonova iteračná formula**):

$$x_{k+1} = x_k + h_k, \quad h_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \tag{7.13}$$

Pre spojitú funkciu f musí byť hľadaný koreň α limitou postupnosti $\{x_k\}$. Iteračný proces zastavujeme podmienkou $|h_k| < \delta$, kde požadovanú presnosť δ zadávame spolu so vstupnými údajmi.
Poznámka 1. V geometrickej interpretácii vzorca (7.13) je bod $[x_{k+1}, 0]$ prienikom dotyčnice zostrojenej v bode $[x_k, f(x_k)]$ ku krivke $y = f(x)$ a x-ovej osi. Preto Newtonovej metóde hovoríme aj **metóda**

dotyčníc.
Poznámka 2. Algoritmus Newtonovej metódy odpovedá algortimu metódy prostej iterácie pre funkciu

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Príklad 42. Nájdime aproximáciu koreňa $\alpha \in \langle 1,5;2\rangle$ rovnice $f(x) \equiv (\frac{x}{2})^2 - \sin x = 0$ Newtonovou metódou. Výpočet zastavíme, ak bude $|h_k| = |x_{k+1} - x_k| < 10^{-5}$. Zvolíme $x_0 = 1,5$. Výsledky sú uvedené v tabuľke:

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	h_k
0	1,50000	-0,434995	0,679263	6,403930 $\cdot 10^{-1}$
1	2,14039	0,303197	1,60948	-1,88381 $\cdot 10^{-1}$
2	1,95201	2,43719 $\cdot 10^{-2}$	1,34805	1,82563 $\cdot 10^{-2}$
3	1,93393	2,32991 $\cdot 10^{-4}$	1,32217	-1,76218 $\cdot 10^{-4}$
4	1,93375	-4,97570 $\cdot 10^{-6}$	1,32191	3.76402 $\cdot 10^{-6}$

Vyšetrovanie podmienok konvergencie Newtonovej metódy je pomerne zložité, a preto ho nebudeme uvádzať. Povieme si len, že táto metóda konverguje veľmi rýchlo, ak sme dostatočne blízko koreňa. V praxi sa často používa ľahko overiteľné kritérium konvergencie: Ak je $f'(x) \neq 0$, f'' nemení znamienko na intervale I, platí $f(a) \cdot f(b) < 0$ a súčasne

$$|\frac{f(a)}{f'(a)}| < b - a, \quad |\frac{f(b)}{f'(b)}| < b - a,$$

potom Newtonova metóda konverguje pre ľubovoľné $x_0 \in I$. Dá sa ukázať, že Newtonova metóda má rád rýchlosti konvergencie $r = 2$.

Metóda sečníc
Predpokladajme, že $x_k \neq x_{k-1}$ sú "dobré" aproximácie jednoduchého koreňa α rovnice $f(x) = 0$. Funkciu f nahradíme lineárnou funkciou g:

$$g(x) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_k) + f(x_k)$$

(g je priamka, prechádzajúca bodmi $[x_{k-1}, f(x_{k-1})]$, $[x_k, f(x_k)]$) a namiesto rovnice $f(x) = 0$ riešime rovnicu $g(x) = 0$. Koreň x_{k+1} tejto lineárnej rovnice je teda určený vzorcom:

$$x_{k+1} = x_k + \tau_k, \text{ kde } \tau_k = -f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

a považujeme ho za aproximáciu koreňa α rovnice $f(x) = 0$. Dostali sme tak **dvojkrokovú iteračnú formulu** t.j. k zahájeniu jej výpočtu potrebujeme dve začiatočné aproximácie x_0, x_1. Oproti Newtonovej metóde má výhodu, že v každom kroku počítame len jednu novú funkčnú hodnotu a stačí, aby daná funkcia f bola len spojitá, nemusí byť diferencovateľná.
Poznámka. V geometrickej interpretácii je graf funkcie g sečnicou grafu funkcie f a odtiaľ pochádza názov tejto metódy.
Dá sa ukázať, že rýchlosť konvergencie metódy sečníc je rádu $r = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,618$. Pokiaľ začiatočné aproximácie x_0, x_1 nebudú "dobré", metóda sečníc nemusí vôbec konvergovať. Je preto nutné kombinovať ju s niektorou zo štartovacích metód.

Cvičenia

1. Pomocou definície derivácie vypočítajte deriváciu funkcie

a) $y = 3x^2 + 2x - 1$ v bode 0,

b) $y = 3x + 4$ v bode a,

c) $y = \frac{5}{2x+6}$ v bode 2,

d) $y = \cos 2x$ v bode $\frac{\pi}{4}$,

2. Pomocou definície derivácie vypočítajte deriváciu funkcie

a) $y = -2x^2$, b) $y = \frac{3}{x-1}$,
c) $y = \sqrt{1-2x}$, d) $y = \operatorname{tg} x$,
e) $y = |x|$, f) $y = |x^3|$.

3. Vypočítajte deriváciu funkcie

a) $y = 7x^4 - 12x^3 + 2\sqrt{x}$, b) $y = \sqrt[5]{x^9}$,
c) $y = (x^2 - 2x + 5)(3x - 2)$, d) $y = \frac{1-x}{1+x}$,
e) $y = \operatorname{tg} x - 3x \log_4 x$, f) $y = x^3 \cosh x + \frac{\sqrt[3]{x}}{3+\sqrt{x}}$,
g) $y = 4.3^x.2^{-x}$, h) $y = e^x(\cos x + \arcsin x)$.

4. Vypočítajte deriváciu funkcie

a) $y = \cos 3x$, b) $y = (x^2 + 1)^7$,
c) $y = \ln(x - x^2)$, d) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$,
e) $y = \operatorname{tg}^2(x^3)$, f) $y = \ln \operatorname{cotg} \frac{x}{3}$,
g) $y = 2^{-x^2} + \ln \frac{1}{\sqrt{x}}$, h) $y = (\arccos e^x)^2$,
i) $y = log_2^2 e^x$, j) $y = \operatorname{cotgh} \ln x$,
k) $y = e^{\sin^2 x^3}$, l) $y = \sqrt[5]{\frac{1}{\sqrt[3]{4x+1}}}$.

5. Vypočítajte deriváciu inverznej funkcie k funkcii f v bode a bez určenia funkcie f^{-1}

a) $f(x) = \frac{7-2x}{5}$, $a = -2$, b) $f(x) = y = x^3$, $a = \frac{1}{8}$
c) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $a = \frac{\pi}{3}$, d) $f(x) = e^{-2x}$, $a = 5$.

6. Vypočítajte deriváciu funkcie

a) $y = x^x$, b) $y = (\ln x)^x$,
c) $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$, d) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$.

7. Vypočítajte deriváciu implicitnej funkcie

a) $y^2 = 2x$, b) $xy = 6$,
c) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, d) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ v bode 4,
e) $x^2 - 2xy + y^3 = 7$ v bode 0, f) $e^y + xy = e$ v bode 0.

8. Vypočítajte deriváciu funkcie určenej parametrickými rovnicami

a) $x = t^2,\ y = 2t,$	b) $x = \cos t,\ y = t + \sin t,$
c) $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t,$	d) $x = \cos^2 t,\ y = \sin^2 t,$
e) $x = t(1 - \sin t),\ y = t.\cos t,$	f) $x = e^t \sin t,\ y = e^t \cos t.$

9. Dokážte, že ak má funkcia f v bode a deriváciu, tak je v bode a spojitá.

10. Predpokladajme, že funkcia f má deriváciu. Dokážte, že platí

a) Ak f je periodická s periódou p, tak f' je periodická s tou istou periódou.

b) Ak f' je periodická s periódou p, tak f je periodická s tou istou periódou.

c) Ak f je párna, tak f' je nepárna.

d) Ak f je nepárna, tak f' je párna.

11. Nájdite príklady funkcie f, pre ktorú platí

a) f je ohraničená, ale f' nie je ohraničená,

b) f' je ohraničená, ale f nie je ohraničená,

c) f je rastúca, ale f' je klesajúca,

d) f' je rastúca, ale f je klesajúca,

e) f je monotónna, ale f' nie je monotónna,

f) f' je monotónna, ale f nie je monotónna.

12. Nájdite príklad funkcií f a g, pre ktoré platí

$$f'(0) < g(0) < g'(0) < f(0).$$

13. Nájdite príklad funkcie f, pre ktorú platí

$$f(0) < f'(0) < f''(0) < f'''(0).$$

14. Vypočítajte derivácie funkcie do rádu n pre danú hodnotu n

a) $y = 3x^3 - 4x^2 + 1,\ n = 5,$	b) $y = \cos x,\ n = 5,$
c) $y = (3x - 4)e^{2x},\ n = 3,$	d) $y = \operatorname{arctg} x,\ n = 3,$
e) $y = x^2 \ln x,\ n = 3,$	f) $y = \operatorname{tgh} x,\ n = 3,$
g) $x^2 + y^3 = 4,\ n = 2,$	h) $x = t^3,\ y = t^2,\ n = 2,$

15. Vypočítajte derivácie funkcie rádu n pre všeobecnú hodnotu n

a) $y = e^{2x},$	b) $y = 3^x,$
c) $y = \ln x,$	d) $y = \sinh x,$
e) $y = x^{-n},$	f) $y = \sqrt{x}.$

16. Nájdite rovnice dotyčnice a normály ku grafu funkcie f v bode $[x_0, f(x_0)]$

a) $f(x) = \frac{x-2}{3},\ x_0 = -1,$	b) $f(x) = x^2 - 3x + 1,\ x_0 = \frac{1}{2},$
c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2},\ x_0 = -2,$	d) $f(x) = \cos x,\ x_0 = \frac{\pi}{2},$
e) $f(x) = 3^{-x},\ x_0 = 0,$	f) $f(x) = \ln 5x,\ x_0 = 1.$

17. Nájdite rovnice dotyčnice a normály ku grafu funkcie f rovnobežnej s priamkou p

a) $f(x) = 3x + 1, \quad p: \ y = \frac{4-x}{3},$

b) $f(x) = x^2 + 3, \quad p: \ y = \frac{x-5}{2},$

c) $f(x) = \frac{4}{3-2x}, \quad p: y = 1 - x,$

d) $f(x) = e^{2x}, \quad p: y = 2x - 7,$

e) $f(x) = \operatorname{cotg} 2x, \quad x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}), \quad p: y = -4x.$

18. Nájdite dotyčnicu s najväčšou smernicou ku grafu funkcie $y = \operatorname{arctg} x$.

19. Nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ v bode $[1, -\sqrt{2}]$.

20. Dotyčnica ku grafu funkcie určenej rovnicou $xy = 4$ vytvorí spolu s osami o_x a o_y trojuholník. Vyjadrite obsah tohoto trojuholníka ako funkciu premennej x.

21. Asteroida je krivka určená rovnicou $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. Dokážte, že úsečka na dotyčnici ku asteroide ohraničená súradnicovými osami má konštantú dĺžku a.

22. Teleso je vrhnuté zo zeme smerom kolmo nahor. Jeho výška po t sekundách je (približne) $30t - 5t^2$ metrov.

a) Aká je začiatočná rýchlosť telesa?

b) Za aký čas teleso dopadne na zem?

c) Akou rýchlosťou dopadne teleso na zem?

d) Ako vysoko teleso doletí?

e) Aká je rýchlosť telesa v najvyššom bode?

f) Aké je zrýchlenie telesa v najvyšsom bode?

23. Teleso sa pohybuje v smere osi o_x, pričom jeho poloha v čase t je daná vzťahom

$$x = (t-1)(t-4)^4.$$

a) Kedy má teleso nulovú rýchlosť?

b) V ktorých časových intervaloch sa teleso pohybuje smerom doľava?

c) Akou najväčšou rýchlosťou sa teleso pohybuje doľava?

24. Človek výšky $1,75$ m sa vzďaľuje od zdroja svetla rýchlosťou 5 km/h. Zistite rýchlosť pohybu tieňa jeho hlavy, ak zdroj svetla je umiestnený vo výške 7 m.

25. Nájdite diferenciál funkcie

a)	$y = 2x - 5$ v bode 3,	b)	$y = 4 + 3x - 2x^2$ v bode -2,
c)	$y = x sin\ x$ v bode 0,	d)	$y = 3xe^{-x}$ v bode 0,
e)	$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ v bode 0,	f)	$y = \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$ v bode 2.

26. Použitím diferenciálu približne vypočítajte hodnoty

a)	$(2,03)^3$,	b)	$3^{1,95}$,
c)	$\sqrt{98}$,	d)	$\sqrt[10]{1000}$,
e)	$\frac{6}{0,997}$,	f)	$\cos 61°$,
g)	$\operatorname{tg} 44°$,	h)	$\operatorname{arccotg}(-0,9)$.

27. Pomocou diferenciálu odhadnite približne zmenu objemu gule pri zmene jej polomeru r o hodnotu $\triangle x$.

28. Hmotnosť platnej mince sa nesmie odlišovať o viac ako $0,1$ % od jej predpísanej hmotnosti. O koľko percent sa môže líšiť polomer platnej mince od predpísaného polomeru za predpokladu, že minca má predpísanú hrúbku.

29. Perióda T pohybu kyvadla je určená vzťahom $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$, kde L je dĺžka kyvadla v metroch, T je meraná v sekundách a $g \approx 9,81\ m/s^2$ je gravitačná konštanta. Použitím diferenciálu nájdite

a) približnú dĺžku kyvadla, ktorého perióda je 1 sekunda,

b) zmenu $\triangle T$ periódy, ak dĺžka kyvadla v časti a) sa predĺži o 1 cm.

30. Nájdite Taylorov mnohočlen stupňa n v bode a pre funkciu

a) $y = 5x^4 - 4x^2 + 11x - 9$ v bode 0, $n = 4$,

b) $y = 5x^4 - 4x^2 + 11x - 9$ v bode -2, $n = 4$,

c) $y = e^{-\frac{x}{2}}$ v bode 0, $n = 4$,

d) $y = \ln x$ v bode 1, $n = 5$,

e) $y = \sqrt{x}$ v bode 1, $n = 4$,

f) $y = \operatorname{tg} x$ v bode $\frac{\pi}{4}$, $n = 3$,

g) $y = \operatorname{arctg} x$ v bode 0, $n = 3$.

31. Nech T_f je Taylorov mnohočlen funkcie f stupňa n v bode a a T_g je Taylorov mnohočlen funkcie g stupňa n v bode a. Dokážte, že $T_f + T_g$ je Taylorov mnohočlen funkcie $f + g$ stupňa n v bode a.

32. Použite výsledok predchádzajúceho cvičenia na určenie Taylorovho mnohočlenu stupňa 5 funkcie $y = \ln\frac{1+x}{1-x}$ v bode 0 pomocou Taylorových mnohočlenov funkcií $y = \ln(1+x)$ a $y = \ln(1-x)$.

33. Použite Taylorov mnohočlen z predchádzajúceho cvičenia na približný výpočet hodnoty $\ln 2$. (Pomôcka: zvoľte $x = \frac{1}{3}$.)

34. Dokážte, že rovnica $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 4$ má jediné riešenie, ktoré patrí do intervalu $(3,4)$. Nahraďte funkciu na ľavej strane rovnice jej Taylorovým mnohočlenom druhého stupňa a zistite tak približnú hodnotu tohoto riešenia. Svoj výpočet porovnajte s presným výpočtom.

35. S chybou menšou ako 10^{-4} vypočítajte hodnoty z príkladu 26.

36. Nájdite intervaly monotónnosti, intervaly, v ktorých je konvexná a v ktorých konkávna a lokálne extrémy pre funkcie

a) $y = x^3 - 3x$,	b) $y = \frac{2x^2}{3x+4}$,
c) $y = \lvert x^2 + x - 20\rvert$,	d) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{1+x^2}$,
e) $y = \frac{e^x}{x}$,	f) $y = \ln\sqrt{1+x^2}$,
g) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$,	h) $y = \sqrt[5]{x^4}$,
i) $y = x\ln x$,	j) $y = \arccos x^2$.

37. Dokážte, že postupnosť $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ je rastúca.

38. Nájdite najmenšiu a najväčšiu hodnotu funkcie v danom intervale

a) $y = -2 + 3x - x^2$ v intervale $\langle 0,3\rangle$, b) $y = |2x^2 + 5x + 3|$ v intervale $\langle -5, 1\rangle$,

c) $y = x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 7$ v intervale $\langle -1, 3\rangle$,

d) $y = \sqrt{9 - 4x^2}$ v intervale $\langle -1, 1\rangle$,

e) $y = x - 2\ln x$ v intervale $\langle 1, e\rangle$,

f) $y = 2x^{\frac{2}{3}} - 9x + 12\sqrt{x}$ v intervale $\langle 0, \infty)$,

g) $y = x^x$ v intervale $(0, \infty)$,

h) $y = e^{-\frac{1}{1+x^2}}$ v intervale $(-\infty, \infty)$.

39. Aký najmenší obvod môže mať obdĺžnik s obsahom 25 cm^2?

40. Do rotačného kužeľa s polomerom r a výškou v je vpísaný valec tak, že jeho podstava leží v podstave kužeľa. Určte najväčšiu možnú hodnotu

a) objemu valca,

b) obsah povrchu valca.

41. Pozemok v tvare obdĺžnika z jednej strany ohraničený rovným prúdom rieky má byť zo zvyšných troch strán ohraničený plotom. Akú môže mať pozemok najväčšiu plochu, ak môžeme na plot použiť 800 metrov pletiva?

42. Parník pohybujúci sa rovnomerne rýchlosťou v km/h spotrebuje za hodinu $20 + 0,001v^3$ m^3 nafty. Pri akej rýchlosti spotrebuje parník najmenej nafty?

43. Z kartónu tvaru obdĺžnika 30×48 cm má byť vyrobená otvorená krabica tak, že sa v každom rohu vyreže štvorec a potom sa zložia štyri bočné steny. Aký najväčší objem môže mať takto vytvorená krabica?

44. Výrobca vynaloží na produkciu n kusov výrobkov za týždeň $50n + 20000$ Sk a je schopný ich predať za cenu $200 - 0,01n$ Sk za kus. Pri akom počte výrobkov za týždeň dosiahne výrobca najväčší zisk? Koľko je tento zisk?

45. Chlapec stojí na jednom brehu rovnej rieky širokej $0,5$ km, ktorá tečie rýchlosťou 4 km/h a chce sa dostať na miesto na opačnom brehu vzdialené 3 km po prúde rieky. Za aký najmenší čas to stihne, ak pláve rýchlosťou 2 km/h a kráča rýchlosťou 6 km/h?

46. Učiteľ dovolil študentom, aby si zvolili prirodzené číslo n s tým, že každý študent, ktorý bude mať z testu aspoň $100\left(1 - \frac{12n}{10n^2+21}\right)$ bodov, urobí úspešne skúšku. Aká hodnota n je pre študentov najvýhodnejšia?

47. Nájdite príklad konvexnej funkcie f, pre ktorú je funkcia $\frac{1}{f}$ konkávna.

48.

a) Môže byť inverzná funkcia ku konvexnej funkcii konvexná?

b) Môže funkcia nadobudnúť lokálne minimum v inflexnom bode?

c) Môže byť prvá derivácia záporná v inflexnom bode funkcie?

d) Môže mať funkcia f' viac lokálnych extrémov ako funkcia f?

e) Môže mať funkcia f' viac inflexných bodov ako funkcia f?

49. Dokážte, že pre všetky $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ platí $\sin x > \frac{2x}{\pi}$.

50. Dokážte, že pre všetky reálne čísla x platí $\cosh x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

51. Dokážte, že pre všetky $x \in \langle 0, 1\rangle$ platí $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

52. Dokážte, že pre všetky $x \in \langle -1, 1\rangle$ platí $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\mathrm{arctg}\, x$.

53. Dokážte, že rovnica $x^5 + 3x - 6 = 0$ má jediné reálne riešenie a nájdite interval dĺžky 1, v ktorom sa toto riešenie nachádza.

54. Dokážte, že rovnica $x^5 + x^4 + x^2 + 10x - 15 = 0$ má jediné kladné riešenie a nájdite interval dĺžky 1, v ktorom sa toto riešenie nachádza.

55. Vyšetrite priebehy funkcií

a) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$,	b) $y = (x^2 - 1)^3$,
c) $y = \frac{x^2}{x+2}$,	d) $y = 3x^4 - 4x^3$,
e) $y = x^2\sqrt{x+4}$,	f) $y = \sqrt[3]{x^2} - x$,
g) $y = x - 2\mathrm{arctg}\, x$,	h) $y = x + \sin x$,
i) $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$,	j) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

56. Metódou bisekcie alebo metódou regula falsi určte aproximácie koreňov rovníc

a) $x^3 - 3x + 1 = 0$, c) $\mathrm{e}^x = 1 + \frac{1}{x}$,
b) $\mathrm{e}^x = x + 2$, d) $\sin x = 3x - 2$.

57. Metódou bisekcie určte aproximácie reálnych koreňov rovníc
a) $x + \mathrm{e}^x = 0$, b) $x^5 - x - 2 = 0$ s presnosťou 0,01.

58. Použijúc dva kroky metódy bisekcie, nájdite približnú hodnotu reálneho koreňa rovnice $x^3 - 10x + 5 = 0$, ktorý sa nachádza v intervale $\langle 0; 0,6\rangle$. Približné riešenia x_1, x_2 vypočítajte na dve desatinné miesta. Odhadnite chybu približnej hodnoty x_2.

59. Metódou regula falsi alebo metódou bisekcie určte aproximáciu koreňov rovnice z predchádzajúceho cvičenia s chybou $\varepsilon = 10^{-2}$. Pri metóde bisekcie určte počet krokov potrebných k dosiahnutiu požadovanej aproximácie.

60. Metódou regula falsi nájdite aproximáciu kladného koreňa rovnice $x^4 - 2x - 4 = 0$ s presnosťou $0,001$.

61. Metódou prostej iterácie riešte rovnice z vyššie uvedeného cvičenia. Preverte postačujúce podmienky konvergencie. Iteračnýproces zastavte podmienkou $|x - x_{k-1}| < 10^{-3}$. Určte odhad chyby vypočítanej aproximácie koreňa.

62. Metódou prostej iterácie riešte rovnicu $x + \ln x = 0$. Posúďte iteračné vzorce

$$x_k = -\ln x_{k-1};\quad x_k = e^{-x_{k-1}};\quad x_k = \frac{x_{k-1} + e^{-x_{k-1}}}{2}$$

z hľadiska a) konvergencie b) rýchlosti konvergencie.

63. Nájdite aproximáciu najmenšieho nezáporného koreňa nasledujúcich rovníc (s presnosťou 10^{-5}). Použite metódu prostej iterácie.

a) $\mathrm{e}^x - 2(x-1)^2 = 0$, c) $x^2 - \cos \pi x = 0$.
b) $\mathrm{e}^{-x} - (x-1)^2 = 0$,

64. Metódou prostej iterácie stanovte aproximáciu dvoch najmenších kladných koreňov rovnice $x \cos x = \sin x - \pi/2$. Vyjasnite otázku konvergencie metódy pre rôzne volené funkcie ϕ.

65. Nájdite aproximácie prvých dvoch kladných koreňov rovnice $\operatorname{tg} x = x$ a) Newtonovou metódou b) metódou sečníc. Výpočet zastavte, ak bude platiť $|x_k - x_{k-1}| < 10^{-6}$. Počiatočnú aproximáciu určte grafickou metódou.

66. Použijúc dvakrát metódu dotyčníc, nájdite približnú hodnotu reálneho koreňa rovnice $x^4 - 8x + 1 = 0$, ktorý sa nachádza v intervale $\langle 1,6; 2\rangle$. Približné hodnoty vypočítajte na dve desatinné čísla. Odhadnite chybu približnej hodnoty x_2.

67. Použijúc päťkrát metódu sečníc, nájdite približné riešenie rovnice $2x - \cos x = 0$, ktoré sa nachádza v intervale $\langle 0; 0,5\rangle$ s presnosťou na tri platné číslice. Ako štartovaciu metódu použite metódu delenia intervalu.

68. Vypočítajte približnú hodnotu koreňa rovnice $x - \sin x - \pi/4 = 0$, ktorý leží v intervale $\langle \pi/2, 3\pi/4\rangle$. Použite metódu sečníc s presnosťou na päť desatinných miest.

Výsledky cvičení

1. a) 2, b) 3, c) $-0,1$, d) -2.

2. a) $-4x$, b) $-\frac{3}{(x-1)^2}$, c) $-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$,
d) $\frac{1}{\cos^2 x}$, e) $\operatorname{sign} x$, $x \neq 0$, f) $3x|x|$.

3. a) $y' = 28x^3 - 36x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$, b) $y' = \frac{9}{5}\sqrt[5]{x^4}$,
c) $y' = 9x^2 - 16x + 19$, d) $y' = -\frac{2}{(1+x)^2}$,
e) $y' = \frac{1}{\cos^2 x} - 3\log_4 x - \frac{3}{\ln 4}$, f) $y' = 3x^2\cosh x + x^3 \sinh x + \frac{6-\sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}(3+\sqrt{x})^2}$,
g) $y' = 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^x \times (\ln 3 - \ln 2)$, h) $y' = e^x(\cos x - \sin x + \arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$.

4. a) $y' = -3\sin 3x$, b) $y' = 14x(x^2+1)^6$,
c) $y' = \frac{1-2x}{x-x^2}$, d) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$,
e) $y' = \frac{6x^2 \operatorname{tg} x^3}{\cos^2 x^3}$, f) $y' = -\frac{1}{3\sin(\frac{x}{3})\cos(\frac{x}{3})}$,
g) $y' = -2x \times 2^{-x^2}\ln 2 - \frac{1}{2x}$, h) $y' = -\frac{2e^x \arccos e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$,
i) $y' = \frac{2x}{\ln^2 2}$, j) $y' = \frac{1}{x\sinh(\ln x)}$,
k) $y' = 6x^2 e^{\sin^2 x^3}\sin x^3 \cos x^3$, l) $y' = -\frac{4}{15\sqrt[15]{(4x+1)^{16}}}$.

5. a) $-\frac{5}{2}$, b) $\frac{4}{3}$, c) 4, d) $-\frac{1}{10}$.

6. a) $x^x(\ln x + 1)$, b) $(\ln x)^x(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x})$,
c) $(\sqrt{x})^{\sqrt{x}} \times \frac{\ln\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$, d) $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x \left(\ln\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1}\right)$.

7. a) $y' = \frac{1}{y}$, b) $y' = -\frac{y}{x}$, c) $y' = -\frac{4x}{9y}$,
d) $y' = -1$, e) $y'(0) = \frac{2}{3\sqrt[3]{7}}$, f) $y'(0) = -\frac{1}{e}$.

8. a) $y' = \frac{1}{t}$, b) $y' = -\frac{1+\cos t}{\sin t}$, c) $y' = -\frac{2}{3}\operatorname{cotg} t$,
d) $y' = -1$, e) $y'\frac{\cos t - t\sin t}{1-\sin t - t\cos t}$, f) $y' = -\frac{\cos t - \sin t}{\cos t + \sin t}$.

11. a) $y = \sqrt{x}$, $x \in (0,1)$, b) $y = x$, c) $y = \sqrt{x}$,

d) $y = -\sqrt{x}$, e) $y = x + \sin x$, f) $y = x^2$.

12. Napríklad $f(x) = 2 - x$ a $g(x) = x$.

13. Napríklad $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$.

14.
a) $y' = 9x^2 - 8x$, $y'' = 18x - 8$, $y''' = 18$, $y^{(4)} = y^{(5)} = 0$,
b) $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$, $y''' = \sin x$, $y^{(4)} = \cos x$, $y^{(5)} = -\sin x$,
c) $y' = e^{2x}(6x - 5)$, $y'' = e^{2x}(12x - 4)$, $y''' = e^{2x}(24x + 4)$,
d) $y' = \frac{1}{1+x^2}$, $y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $y''' = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$.
e) $y' = 2x \ln x + x$, $y'' = 2\ln x + 3$, $y''' = \frac{2}{x}$,
f) $y' = \frac{1}{\cosh^2 x}$, $y'' = -2\frac{\sinh x}{\cosh^3 x}$, $y''' = \frac{6\sinh^2 x - 2\cosh^2 x}{\cosh^4 x}$,
g) $y' = -\frac{2x}{3y^2}$, $y'' = -\frac{6y^3+8x^2}{9y^5}$,
h) $y' = \frac{2}{3t}$, $y'' = -\frac{2}{9t^4}$.

15. a) $y^{(n)} = 2^n e^{2x}$, b) $y^{(n)} = 3^x (\ln 3)^n$, c) $y^{(n)} = (-1)^{(n-1)}(n-1)!x^{-n}$,
d) $y^{(n)} = \sinh x$,ak n je párne, $y^{(n)} = \cosh x$, ak n je nepárne,
e) $y^{(n)} = (-1)^n \frac{(2n-1)!x^{-2n}}{(n-1)!}$, f) $y^{(n)} = (-1)^{(n-1)} \frac{1\times3\times\cdots\times(2n-3)}{2^n} x^{-\frac{2n-1}{2}}$.

16.
a) $t: \ y = \frac{x-2}{3}$, $n: \ y = -3x - 4$,
b) $t: \ y = -2x + \frac{3}{4}$, $n: \ y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$,
c) $t: \ y = \frac{4}{25}x + \frac{13}{25}$, $n: \ y = -\frac{25}{4}x - \frac{123}{10}$,
d) $t: \ y = -x + \frac{\pi}{2}$, $n: \ y = x - \frac{\pi}{2}$,
e) $t: \ y = -(\ln 3)x + 1$, $n: \ y = \frac{1}{\ln 3}x + 1$,
f) $t: \ y = x + \ln 5 - 1$, $n: \ y = -x + \ln 5 - 1$,

17.
a) dotyčnica neexistuje, normála je jedna: $n: \ y = -x + \frac{3}{2}$,
b) $t: \ y = \frac{1}{2}x + \frac{47}{16}$, $n: \ y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$,
c) dotyčnica neexistuje, normála je jedna: $n: \ y = -x + \frac{3}{2}$,
d) $t: \ y = 2x + 1$, normála neexistuje,
e) dotyčnice sú dve: $t: \ y = -4x \pm (\frac{\pi}{2} + 1)$, normála neexistuje.

18. $y = x$.

19. $t: \ y = \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$, $n: \ y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

20. Obsah je konštantný 8.

22. a) 30 m/s, b) 6 s, c) 30 m/s,
d) 45 m, e) 0, f) -10 m/s^2.

23. a) V časoch $t = \frac{8}{5}$ a $t = 4$, b) $t \in (\frac{8}{5}, 4)$, c) $\frac{2187}{125}$.

24. $\frac{20}{3}$.

25. a) $2(x-3)$, b) $11(x+2)$, c) 0,
d) $3x$, e) x, f) $\frac{1}{4}(x-2)$.

26. a) $8,36$, b) $9-0,45\times\ln 3$, c) $9,9$, d) $\frac{1277}{640}$,
e) $6,018$, f) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\pi}{360}$, g) $1-\frac{2\pi}{180}$, h) $\frac{3\pi}{4}-0,05$.

27. $\Delta V = 4\pi r^2\Delta r$.

28. $0,05\%$.

29. a) asi $24,8$ cm, b) $\Delta T = 0,02$ s.

30.
a) aj b) $T_4(x) = 5x^4-4x^2+11x-9$,
c) $T_4(x) = \frac{x^4}{384}-\frac{x^3}{48}+\frac{x^2}{8}-\frac{x}{2}+1$,
d) $T_5(x) = -\frac{x^5}{5}-\frac{5x^4}{4}+\frac{10x^3}{3}-5x^2+5x-\frac{137}{60}$,
e) $T_4(x) = -\frac{5x^4}{128}+\frac{7x^3}{32}-\frac{35x^2}{64}+\frac{35x}{32}+\frac{35}{128}$,
f) $T_3(x) = \frac{8}{3}x^3+2(1-\pi)x^2+(\frac{\pi^2-2\pi+4}{2})x+1-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^3}{24}$,
g) $T_3(x) = -\frac{x^3}{3}+x$.

32. $T_5(x) = \frac{2}{5}x^5+\frac{2}{3}x^3+2x$.

33. $\frac{842}{1215}\approx 0,693147$.

34. $\frac{225}{64}$.

35. a) $8,3654$, b) $8,519$, c) $9,8995$, d) $1,9953$,
e) $6,0181$, f) $0,4848$ g) $0,9657$, h) 2.3036.

36.
a) Funkcia je rastúca v intervaloch $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$, klesajúca v intervale $(-1,1)$, má lokálne maximum v bode -1, lokálne minimum v bode 1, je konvexná v intervale $(0,\infty)$, konkávna v intervale $(-\infty,0)$,
b) funkcia je rastúca v intervaloch $(-\infty,-\frac{8}{3})$ a $(0,\infty)$, klesajúca v intervaloch $(-\frac{8}{3},-\frac{4}{3})$ a $(-\frac{4}{3},0)$, má lokálne maximum v bode $-\frac{8}{3}$, lokálne minimum v bode 0, je konvexná v intervale $(-\frac{4}{3},\infty)$, konkávna v intervale $(-\infty,-\frac{4}{3})$,
c) funkcia je rastúca v intervaloch $(-5,-\frac{1}{2})$ a $(4,\infty)$, klesajúca v intervaloch $(-\infty,-5)$ a $(-\frac{1}{2},4)$, má lokálne maximum v bode $-\frac{1}{2}$, lokálne minimum v bodoch -5 a 4, je konvexná v intervaloch $(-\infty,-5)$ a $(4,\infty)$, konkávna v intervale $(-5,4)$,
d) funkcia je rastúca v intervale $(-\infty,0)$, klesajúca v interval $(0,\infty)$, má lokálne maximum v bode 0, je konvexná v intervaloch $(-\infty,-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{7}}{3}})$ a $(\sqrt{\frac{-1+\sqrt{7}}{3}},\infty)$, konkávna v intervale $-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{7}}{3}},\sqrt{\frac{-1+\sqrt{7}}{3}}$,
e) funkcia je rastúca v intervale $(1,\infty)$, klesajúca v intervale $(-\infty,0)\cup(0,1)$, má lokálne minimum v bode 1, je konvexná v intervale $(0,\infty)$ a konkávna na intervale $(-\infty,0)$,
f) funkcia je rastúca v intervale $(0,\infty)$, klesajúca v intervale $(-\infty,0)$, má lokálne minimum v bode 0, je konvexná v intervale $(-1,1)$, je konkávna v intervaloch $(-\infty,-1)$ a $(1,\infty)$,
g) funkcia je klesajúca v intervaloch $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$ a $(0,\infty)$, nemá lokálne extrémy, je konvexná

v intervaloch $(-1, -\frac{1}{2})$ a $(0, \infty)$, je konkávna v intervaloch $(-\infty, -1)$ a $(-\frac{1}{2}, 0)$,
h) funkcia je rastúca v intervale $(0, \infty)$, klesajúca v intervale $(-\infty, 0)$, má lokálne minimum v bode 0, je konkávna v intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$,
i) funkcia je rastúca v intervale $(\frac{1}{e}, \infty)$, klesajúca v intervale $(0, \frac{1}{e})$, má lokálne minimum v bode $\frac{1}{e}$, je konvexná v intervale $(0, \infty)$,
j) funkcia je rastúca v intervale $(-1, 0)$, klesajúca v intervale $(0, 1)$, má lokálne maximum v bode 0, je konkávna v intervale $(-1, 1)$.

37. Návod: Uvažujte funkciu $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

38.
a) Maximum $\frac{1}{4}$ v bode $\frac{3}{2}$, minimum -2 v bodoch 0 a 3,
b) maximum 28 v bode -5, minimum 0 v bodoch $-\frac{3}{2}$ a -1,
c) maximum 16 v bode 3, minimum -25 v bode 2,
d) maximum 3 v bode 0, minimum $\sqrt{5}$ v bodoch -1 a 1,
e) maximum 1 v bode 1, minimum $2 - \ln 4$ v bode 2,
f) funkcia má maximum asi $5,325$ v bode asi $0,647$, minimum nenadobúda,
g) funkcia je rastúca v otvorenom intervale, preto nenadobúda maximum ani minimum,
h) maximum nenadobudne, minimum $\frac{1}{e}$ v bode 0.

39. 20 cm.

40. a) $V_{max} = \frac{4\pi}{27} r^2 v$, b) $S_{max} = \frac{\pi r v^2}{2(v-r)}$ ak $v > r$, $2\pi r^2$ inak.

41. 80000 m^2.

42. Približne $21,5$ km/h.

43. 3888 cm^3.

44. 7500 kusov. Maximálny zisk je 582500 Sk.

45. Stihne to približne za štvrť hodiny.
46. $n = 2$.

47. Napríklad $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

48.
a) Áno, napríklad $y = \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$, b) nie, ak má druhú deriváciu,tak v lokálnom minime je funkcia konvexná
c) áno, napríklad $y = x^3 - x$,
d) áno, napríklad $y = \operatorname{arctg} x$,
e) áno, napríklad $y = x^4 + x^2$.

53. $x \in (1, 2)$

54. $x \in (1, 2)$

56.
a) 0,347296 a -1,87938 a 1,53208.
b) 1,1469 a -1,8414
c) -1,34997 a 0,806465
d) 0,934833

57.
a) -0,567143
b) 1,26716

58. $x_1 = 0,3$ a $x_2 = 0,5$, chyba je menšia ako $0,25$

59. $x_3 = 0,5125$, teda 3 kroky

60. $x_8 = 1,64293$

61. $x_5 = 1,64291$, chyba menšia ako $0,0002$

62. riešenie je $0,567143$, a) nekonverguje, b) konverguje pomaly, c) konverguje rýchlo

63. a) 0,213308
b) 0
c) 0,43843

64. 4,83228

65. 4,49340; 7,72525

66. $x_2 = 1,95646$

67. $x_5 = 0,450180$

68. $x_6 = 1,76629$

Literatúra

[1] R. Černá, M. Machlický, J. Vogel, Č. Zlatník, Základy numerické matematiky a programování *SNTL Praha,* 1987

[2] P. Danko, A. Popov, T. Koževnikova, Vysšaja matematika v upražneniach i zadačach. *Izd. Vysšaja škola, Moskva,* 1974

[3] N.A.Davydov, P.P.Korovkin, V.N.Nikoľskij, Zbornik zadač po matematičeskomu analizu *Nauka, Moskva,* 1953

[4] J. Eliaš, J. Horváth, J. Kajan, Zbierka úloh z vyššej matematiky *Alfa, vydavat. technickej a ekon. literatúry 5. vydanie, Bratislava,* 1979

[5] L.Gillman, R.H.McDowell, Matematická analýza, *SNTL Praha,* 1980

[6] Ch. D. Ikramov, Zadačnik po linearnoj algebre *Nauka, Moskva,* 1975

[7] J. Ivan, Matematika I, *Alfa Bratislava,* 1983

[8] I. Kluvánek, L. Mišík, M. Švec, Matematika I, *SNTL, Bratislava,* 1959

[9] Kolektív autorov, Príprava na univerzitné štúdium, Matematika 3, *Vydavateľstvo STU, Bratislava,* 1997

[10] L.D. Kudrjavcev, Kurs matematičeskogo analiza I, *Izdateľstvo Vysšaja škola, Moskva,* 1981

[11] S. Míka, Numerické metódy algebry, *SNTL Praha,* 1985

[12] M.Perkins, P.Perkins, Advanced Mathematics, Book 1, *Collins Educational,* 1992

[13] F. Scheid, Theory and problems of numerical analysis, *Schaum's outline series,* 1988

[14] L. Smith, Linear Algebra, *Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo,* 1984

[15] G. W. Stewart, Introduction to matrix computations *Academic Press, New York and London,* 1973

[16] G.B.Thomas, R.L.Finney, Calculus and Analytic Geometry *Addison-Wesley Publishing Company,* 1988