

# RIEŠENIE GEODETICKEJ OKRAJOVEJ ÚLOHY SO ŠIKMOU DERIVÁCIOU METÓDOU OKRAJOVÝCH PRVKOV

*Róbert Špir, Róbert Čunderlík, Karol Mikula*

## 1. Úvod

Modelovanie tiažového poľa Zeme je jednou z hlavných úloh geodézie v súčasnosti. Vďaka presnému určovaniu polohy pozemných gravimetrických meraní pomocou satelitných technológií môžeme priamo určiť tzv. tiažové poruchy, ktoré predstavujú šikmé derivácie neznámeho poruchového potenciálu. Z tohto dôvodu sa v geodézii čoraz viac pozornosti venuje práve geodetickej okrajovej úlohe so šikmou deriváciou, označovanej aj pojmom gravimetrická okrajová úloha s pevnou hranicou.

V tejto práci sa budeme zaoberať riešením takejto vonkajšej okrajovej úlohy pomocou metódy okrajových prvkov (MOP). Keďže okrajová integrálna rovnica, ktorá reprezentuje priamu formuláciu MOP, obsahuje Neumannove okrajové podmienky, vyjadríme si šikmú deriváciu rozkladom do normálových a tangenciálnych zložiek. Výsledné riešenie budeme hľadať priamo na komplikovanom zemskom povrchu, resp. jeho diskretizovanom tvare. Takýto prístup uvažuje aj vplyv tangenciálnych zložiek, ktoré boli v predchádzajúcich prístupoch zanedbávané [6]. Numerické experimenty budú vykonané na reálnych vstupných geodetických dátach a porovnané s doterajšími riešeniami pomocou MOP ako aj s globálnym geopotenciálnym modelom EGM-2008 [9].

## 2. Geodetická okrajová úloha so šikmou deriváciou pre poruchový potenciál

Geodetickú okrajovú úlohu so šikmou deriváciou môžeme definovať ako riešenie geodetickej okrajovej úlohy, ktorá je formulovaná v tvare Laplaceovej diferenciálnej rovnice pre poruchový potenciál vo vonkajšej oblasti. Súčasné koncepcie riešenia používajú okrajovú podmienku Newtonovho typu. Pomocou gravimetrických a družicových meraní v bodoch na zemskom povrchu môžeme priamo určiť hodnoty Neumannovej okrajovej podmienky v tvare povrchových tiažových porúch, ktoré predstavujú deriváciu neznámeho poruchového potenciálu.

Z definície poruchového potenciálu

$$T(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x}) - U(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^3, \quad (2.1)$$

kde  $W$  je tiažový potenciál a  $U$  je normálny tiažový potenciál v ľubovoľnom bode  $\mathbf{x}$  a za predpokladu, že  $T$  je v nekonečne regulárnou funkciou, môžeme formulovať Neumannovu geodetickú vonkajšiu okrajovú úlohu so šikmou deriváciou

$$\Delta T(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in R^3 - \Omega, \quad (2.2)$$

$$\langle \nabla T(\mathbf{x}), \vec{n}_e(\mathbf{x}) \rangle = -\delta g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2.3)$$

$$T = O(|\mathbf{x}|^{-1}) \text{ pre } \mathbf{x} \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

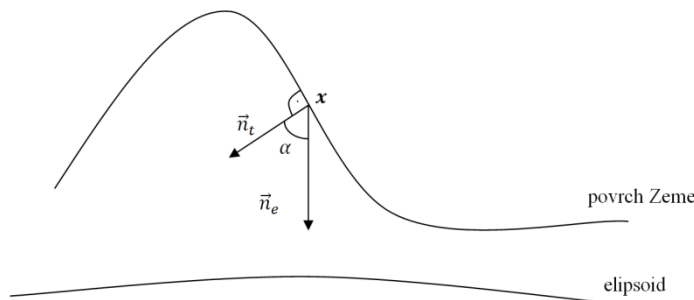
kde  $\vec{n}_e$  je vektor vonkajšej normály k ekvipotenciálnemu elipsoidu,  $\langle , \rangle$  je skalárny súčin,  $\Omega$  predstavuje teleso Zeme a  $\partial\Omega$  je fyzický povrch Zeme ako hranica oblasti. Polohový vektor  $\mathbf{x}$  označuje polohu v pravouhlých karteziánskych súradniciach,

čiže trojicu  $(x_1, x_2, x_3)$ . Člen  $\delta g$  predstavuje hodnoty povrchových tiažových porúch získané zo vzťahu

$$\delta g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - \gamma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^3, \quad (2.5)$$

kde  $g = |\nabla W|$  je veľkosť gravitačného zrýchlenia a  $\gamma = |\nabla U|$  je veľkosť normálového gravitačného zrýchlenia. Rovnica (2.3) predstavuje Neumannovu geodetickú okrajovú podmienku so šikmou deriváciou, pričom  $\nabla T$  je projektovaný do smeru normály k elipsoidu  $\vec{n}_e$ , čím sa zanedbávajú povrchové zvislicové odchýlky.

Problém šikmej derivácie spočíva v skutočnosti, že normála k zemskému povrchu  $\vec{n}_t$  nie je totožná s normálou k ekvipotenciálnemu elipsoidu  $\vec{n}_e$  (Obr. 2.1).



Obr. 2.1: Normála k zemskému povrchu a ekvipotenciálnemu elipsoidu

Doteraz sa na riešenie problému šikmej derivácie používala projekcia tiažových porúch do smeru normály k zemskému povrchu  $\vec{n}_t$  [6], t.j. ako vstupné hodnoty vystupovali  $\delta g(\mathbf{x}) \cos \alpha(\mathbf{x})$ , kde  $\alpha(\mathbf{x})$  predstavuje uhol  $\angle(\vec{n}_t, \vec{n}_e)$  v bode  $\mathbf{x}$  (Obr. 2.1). V takomto riešení sa zanedbávali tangenciálne zložky šikmej derivácie. V tejto práci zohľadníme aj príspevok tangenciálnych zložiek šikmej derivácie. Takto definovanú vonkajšiu okrajovú úlohu budeme riešiť numericky metódou okrajových prvkov.

### 3. Riešenie Neumannovej okrajovej úlohy metódou okrajových prvkov

#### 3.1 Metóda okrajových prvkov

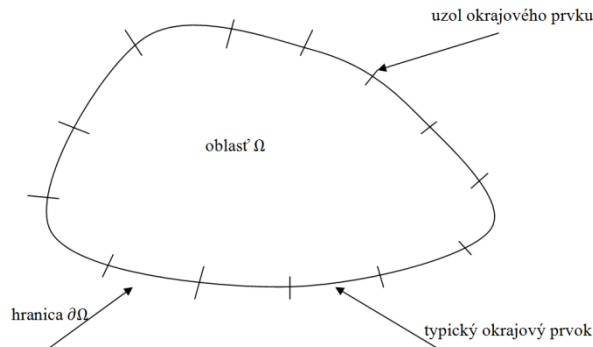
S rozvojom počítačovej techniky nastal aj rozvoj numerických metód na riešenie diferenciálnych rovníc. V súčasnosti sa väčšina inžinierskych problémov, ktoré predtým neboli riešiteľné, či už pre to, že neexistovalo analytické riešenie, alebo kvôli zložitej geometrii dajú riešiť numerickými metódami. Pri riešení parciálnych diferenciálnych rovníc je najrozšírenejšia metóda konečných prvkov, ďalšie známe metódy sú metóda konečných objemov a metóda okrajových prvkov.

Vzhľadom na charakter geodetickej okrajovej úlohy a neohraničenú oblasť, na ktorej hľadáme riešenie, nie je metóda konečných prvkov optimálna. Vhodnejšie je použiť práve metódu okrajových prvkov. Medzi jej najväčšie výhody patrí redukcia dimenzie úlohy, čím sa zníži počet rovníc potrebných na výpočet neznámych a úloha sa rieši iba na hranici oblasti. Nevýhoda metódy okrajových prvkov je, že pri riešení vznikne plná nesymetrická matica na rozdiel od pásovej, ktorá je pri metóde konečných prvkov [10].

Celý proces metódy okrajových prvkov sa dá rozdeliť na nasledovné kroky [7].

- 1) Diskretizácia hraníc skúmanej oblasti na sieť okrajových prvkov. Pri 2D probléme sa používajú 1D prvky (čiarové prvky) (Obr. 3.1), pri 3D probléme sa použijú 2D prvky (plošné prvky).

- 2) Fundamentálne riešenie danej parciálnej diferenciálnej rovnice bez uvažovania okrajových podmienok skutočného problému musí byť známe. Toto fundamentálne riešenie sa použije ako váhová funkcia pri formulácii metódy okrajových prvkov pre danú úlohu.
- 3) Zostavenie základných rovníc metódy okrajových prvkov pre uzly na hranici  $\partial\Omega$  pre oblasť  $\Omega$ .
- 4) Výpočet neznámych hodnôt na hranici, neznáma hodnota vo vnútri oblasti  $\Omega$  sa vyjadruje pomocou známych hodnôt na hranici  $\partial\Omega$ .



Obr. 3.1: Typický okrajový prvok a uzol okrajového prvku

### 3.2 Priama formulácia metódy okrajových prvkov pre Neumannovu vonkajšiu okrajovú úlohu so šikmou deriváciou

Úloha pri formulovaní riešenia metódou okrajových prvkov je nahradiť parciálnu diferenciálnu rovnicu definovanú na oblasti za rovnicu, ktorá je riešením iba na hranici oblasti [5].

Priama formulácia metódy okrajových prvkov pre Laplaceovu rovnicu je [5]

$$c(\mathbf{x})T(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} T(\mathbf{y})Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y} = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial T}{\partial \vec{n}_{\partial\Omega}}(\mathbf{y})G(\mathbf{x}, \mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \partial\Omega, \quad (3.1)$$

kde

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi r}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^3 \quad (3.2)$$

je fundamentálne riešenie Laplaceovej rovnice a

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \vec{n}_{\partial\Omega}(\mathbf{y})} = \frac{\langle r, \vec{n}_{\partial\Omega} \rangle}{4\pi r^3}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^3 \quad (3.3)$$

je jeho derivácia, kde  $r$  je vzdialenosť bodov  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$ .

Problém spočíva v skutočnosti, že v okrajovej integrálnej rovnici (boundary integral equation, BIE) (3.1) vystupuje normálová derivácia  $\partial T / \partial \vec{n}_{\partial\Omega}$ . Keďže naša okrajová podmienka (2.3) predstavuje šikmú deriváciu, potrebujeme si vyjadriť BIE s uvažovaním tejto šikmej derivácie pomocou normálovej zložky  $\vec{n}$  a tangenciálnych zložiek  $\vec{\tau}$  a  $\vec{\rho}$  (Obr. 3.2)

Vyjadriť si vektor gradientu riešenia

$$\nabla T = \begin{bmatrix} \nabla T \cdot \vec{n} \\ \nabla T \cdot \vec{\rho} \\ \nabla T \cdot \vec{\tau} \end{bmatrix} = (\nabla T \cdot \vec{n})\vec{n} + (\nabla T \cdot \vec{\rho})\vec{\rho} + (\nabla T \cdot \vec{\tau})\vec{\tau}. \quad (3.4)$$

Uvážením vzťahu

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{v}} = \vec{v} \cdot \nabla T, \quad (3.5)$$

kde  $\vec{v}$  predstavuje smer šikmej derivácie dostaneme

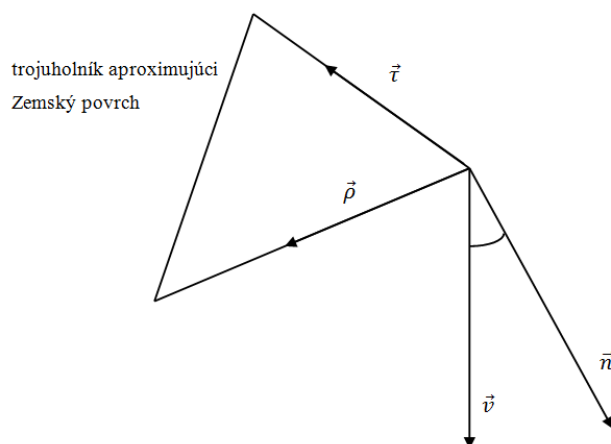
$$\vec{v} \cdot \nabla T = (\nabla T \cdot \vec{n}) \vec{v} \cdot \vec{n} + (\nabla T \cdot \vec{\rho}) \vec{v} \cdot \vec{\rho} + (\nabla T \cdot \vec{\tau}) \vec{v} \cdot \vec{\tau}. \quad (3.6)$$

Z rovnice (3.6) dostaneme

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{n}_{\partial\Omega}} = (\nabla T \cdot \vec{n}) = \frac{1}{\vec{v} \cdot \vec{n}} [\vec{v} \cdot \nabla T - (\nabla T \cdot \vec{\rho}) \vec{v} \cdot \vec{\rho} - (\nabla T \cdot \vec{\tau}) \vec{v} \cdot \vec{\tau}]. \quad (3.7)$$

Dosadením (3.7) do (3.1) dostaneme priamu formuláciu metódy okrajových prvkov s uvážením tangenciálnych zložiek šikmej derivácie

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x})T(\mathbf{x}) + \int_{\partial\Omega} T(\mathbf{y})Q(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega} (\nabla T \cdot \vec{\rho}(\mathbf{y})) \frac{\vec{v}(\mathbf{y}) \cdot \vec{\rho}(\mathbf{y})}{\vec{v}(\mathbf{y}) \cdot \vec{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y} \\ + \int_{\partial\Omega} (\nabla T \cdot \vec{\tau}(\mathbf{y})) \frac{\vec{v}(\mathbf{y}) \cdot \vec{\tau}(\mathbf{y})}{\vec{v}(\mathbf{y}) \cdot \vec{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y} \\ = \int_{\partial\Omega} \frac{\vec{v} \cdot \nabla T}{\vec{v}(\mathbf{y}) \cdot \vec{n}(\mathbf{y})} G(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.8)$$



Obr. 3.2: Jednotlivé zložky šikmej derivácie

### 3.3 Odvodenie systému algebraických rovníc

Na odvodenie systému algebraických rovníc použijeme metódu kolokácie s lineárnymi bázovými funkciami. Metóda kolokácie vyžaduje aproximáciu hranice oblasti  $\partial\Omega$  na množinu trojuholníkových elementov  $\Delta\Gamma_j$ , pričom pri použití lineárnych bázových funkcií sú kolokačné body zhodné s vrcholmi trojuholníkových elementov.

Aproximujme okrajové funkcie  $T$  a  $\delta g$  po častiach lineárnymi funkciami na príslušnom elemente  $\Delta\Gamma_j$ , t.j.

$$T(\mathbf{x}) \approx \sum_{k=1}^3 T_k \psi_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Delta\Gamma_j, \quad (3.9)$$

$$\delta g(\mathbf{x}) \approx \sum_{k=1}^3 \delta g_k \psi_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Delta \Gamma_j, \quad (3.10)$$

kde  $T_k$  a  $\delta g_k$  predstavujú hodnoty okrajových funkcií v kolokačných bodoch príslušného elementu a funkcie  $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$  predstavujú lineárne bázové funkcie na elemente definované ako

$$\psi_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1, & \text{ak } \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j \\ 0, & \text{ak } \mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j \end{cases},$$

pričom  $i, j = 1, \dots, N$  kde  $N$  je celkový počet kolokačných bodov. Vo všetkých ostatných bodoch príslušného elementu nadobúdajú bázové funkcie hodnoty z intervalu  $(0,1)$ . Jedna bázová funkcia bude tvorená všetkými trojuholníkovými elementmi, ktoré sa spájajú v príslušnom kolokačnom bode a vytvárajú nosič bázovej funkcie.

Na základe takejto diskretizácie môžeme prepísať rovnicu (3.8) do diskrétného tvaru pre daný kolokačný bod  $i$

$$\begin{aligned} c_i T_i + \sum_{j=1}^N T_j & \left( \int_{\text{supp } \psi_j} Q_{ij} \psi_j d\Gamma_j + \int_{\text{supp } \psi_j} (\nabla \psi_j \cdot \vec{\rho}_j) \frac{\vec{v}_j \cdot \vec{\rho}_j}{\vec{v}_j \cdot \vec{n}_j} G_{ij} d\Gamma_j \right. \\ & \left. + \int_{\text{supp } \psi_j} (\nabla \psi_j \cdot \vec{\tau}_j) \frac{\vec{v}_j \cdot \vec{\tau}_j}{\vec{v}_j \cdot \vec{n}_j} G_{ij} d\Gamma_j \right) \\ & = \sum_{j=1}^N \delta g_j \int_{\text{supp } \psi_j} \frac{\psi_j}{\vec{v}_j \cdot \vec{n}_j} G_{ij} d\Gamma_j, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.11)$$

kde  $\text{supp } \psi_j$  je nosič  $j$ -tej bázovej funkcie. Funkcia  $c_i$  predstavuje priestorový segment vymedzený trojuholníkovými elementmi, ktoré sa spájajú v príslušnom kolokačnom bode [5]. Systém rovníc (3.11) môžeme prepísať do maticového tvaru

$$\mathbf{M} \vec{t} = \mathbf{L} \vec{\delta g} \quad (3.12)$$

kde  $\vec{t} = (T_1, T_2, \dots, T_N)^T$  je vektor neznámych hľadaného poruchového potenciálu a  $\vec{\delta g} = (\delta g_1, \delta g_2, \dots, \delta g_N)^T$  sú hodnoty povrchových tiažových porúch získané družicovými a gravimetrickými meraniami. Koefficienty matíc  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{L}$  sú jednotlivé integrály z rovníc (3.11), ktoré vyčíslime aproximáciou pomocou Gaussových kvadrátúr definovaných na trojuholníku v tvare

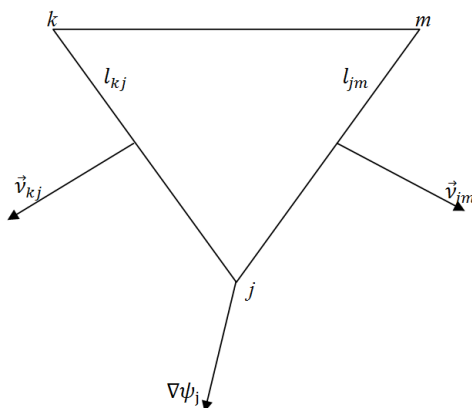
$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ij} = \frac{1}{4\pi} \sum_{s=1}^S & \left( A_{j_s} k_{ij_s} \sum_{k=1}^K \frac{1}{r_{ik_s}^3} \psi_{jk_s} w_k \right. \\ & \left. + A_{j_s} \left( \frac{\nabla \psi_{j_s} \cdot \vec{\rho}_{j_s}}{\cos \varphi_{j_s}} + \frac{\nabla \psi_{j_s} \cdot \vec{\tau}_{j_s}}{\cos \varphi_{j_s}} \right) \sum_{k=1}^K \frac{1}{r_{ik_s}} w_k \right), \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{L}_{ij} = \frac{1}{4\pi} \sum_{s=1}^S \left( \frac{A_{j_s}}{\cos \varphi_{j_s}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{r_{ik_s}} \psi_{jk_s} w_k \right), \quad i \neq j, \quad (3.14)$$

kde  $A_{j_s}$  je plocha  $s$ -tého trojuholníka bázevej funkcie  $j$ -tého nosiča,  $k_{ij_s}$  je kolmá vzdialenosť od  $i$ -tého kolokačného bodu po rovinu  $s$ -tého trojuholníka,  $r_{ik_s}$  je vzdialenosť  $i$ -tého kolokačného bodu od  $k$ -tého bodu Gaussovej kvadratury  $s$ -tého trojuholníka,  $\psi_{jk_s}$  je hodnota lineárnej bázevej funkcie pre  $k$ -ty bod Gaussovej kvadratury  $s$ -tého trojuholníka a  $w_k$  je príslušná váha  $k$ -tého bodu Gaussovej kvadratury. Hodnotu  $\cos \varphi_{j_s}$  predstavuje priemet jednotkovej normály ekvipotenciálneho elipsoidu do smeru normály  $s$ -tého trojuholníka,

$$\cos \varphi_{j_s} = \vec{v}_j \cdot \vec{n}_{j_s}, \quad (3.15)$$

$\nabla \psi_{j_s}$  je gradient bázevej funkcie  $s$ -tého trojuholníka (Obr. 3.3) a  $\vec{v}_{0j_s}$  je vektor reprezentujúci tangenciálnu zložku šikmej derivácie  $s$ -tého trojuholníka.  $S$  je počet trojuholníkov  $j$ -tého nosiča a  $K$  je počet bodov Gaussovej kvadratury.



Obr. 3.3: Gradient bázevej funkcie

Keďže uvažujeme lineárne bázevé funkcie, bude  $\nabla \psi_{j_s}$  na celom trojuholníku konštantný. Preto platí

$$\nabla \psi_{j_s} = \frac{1}{A_{j_s}} \int_{\Delta_{j_s}} \nabla \psi d\Delta. \quad (3.16)$$

Aplikujme Greenovu vetu na rovnicu (3.16)

$$\frac{1}{A_{j_s}} \int_{\Delta_{j_s}} \nabla \psi d\Delta = \frac{1}{A} \int_{\partial \Delta_{j_s}} \psi \vec{v} d\partial \Delta, \quad (3.17)$$

kde  $\partial \Delta$  je hranica trojuholníka a  $\vec{v}$  je normála trojuholníka. Jednotlivé zložky gradientu pre  $s$ -tý trojuholník potom vypočítame

$$\nabla \psi_{j_s} = \frac{1}{A_{j_s}} \left[ \frac{\psi_{j_s}(j) + \psi_{j_s}(m)}{2} l_{jm} \vec{v}_{jm} + \frac{\psi_{j_s}(m) + \psi_{j_s}(k)}{2} l_{mk} \vec{v}_{mk} + \frac{\psi_{j_s}(k) + \psi_{j_s}(j)}{2} l_{kj} \vec{v}_{kj} \right], \quad (3.18)$$

kde  $\psi_{j_s}(x)$  sú hodnoty bábovej funkcie v príslušných bodoch. S uvážením priebehu lineárnych bábových funkcií na  $\Delta_{j_s}$  dostaneme

$$\nabla\psi_{j_s} = \frac{1}{A_s} \left[ \frac{l_{jm}}{2} \vec{v}_{jm} + \frac{l_{kj}}{2} \vec{v}_{kj} \right], \quad (3.19)$$

kde indexy  $j, k, m$  predstavujú vrcholy trojuholníka,  $\vec{v}_{jm}$  a  $\vec{v}_{kj}$  sú normály strán trojuholníka,  $l_{jm}$  a  $l_{kj}$  sú dĺžky strán trojuholníka (Obr. 4.5).

Pre diagonálne prvky v prípade matice  $\mathbf{L}$  platí [6]

$$L_{ii} = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^S \frac{A_{i_s}}{r_s} \ln \frac{\text{tg}[(\beta_s + \alpha_s)/2]}{\text{tg}(\beta_s/2)}. \quad (3.20)$$

Na základe skutočnosti, že konštantný potenciál aplikovaný na uzavretú oblasť neprodukuje žiadny tok, sa súčet všetkých prvkov v matici  $\mathbf{M}$ , t.j. matici bez uváženia tangenciálnych zložiek šikmej derivácie rovná 1 [5]. Teda diagonálny prvok v prípade matice  $\mathbf{M}$  sa dá vyjadriť týmto vzťahom

$$\begin{aligned} M_{ii} = 1 - \sum_{\substack{i \neq j \\ j=1}}^N \left( \frac{1}{4\pi} \sum_{s=1}^S A_{j_s} k_{ij_s} \sum_{k=1}^K \frac{1}{r_{ik_s}^3} \psi_{jk_s} w_k \right) \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^S \frac{A_{i_s}}{r_s} \ln \frac{\text{tg}[(\beta_s + \alpha_s)/2]}{\text{tg}(\beta_s/2)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Takýmto spôsobom dostaneme sústavu rovníc (3.12). Po dosadení okrajovej podmienky  $\vec{\delta g}$  a vynásobením maticou  $\mathbf{L}$  dostaneme na pravej strane rovnice (3.12) známy vektor, a matica  $\mathbf{M}$  na ľavej strane predstavuje maticu tuhosti. Matica  $\mathbf{M}$  je plná, nesymetrická matica.

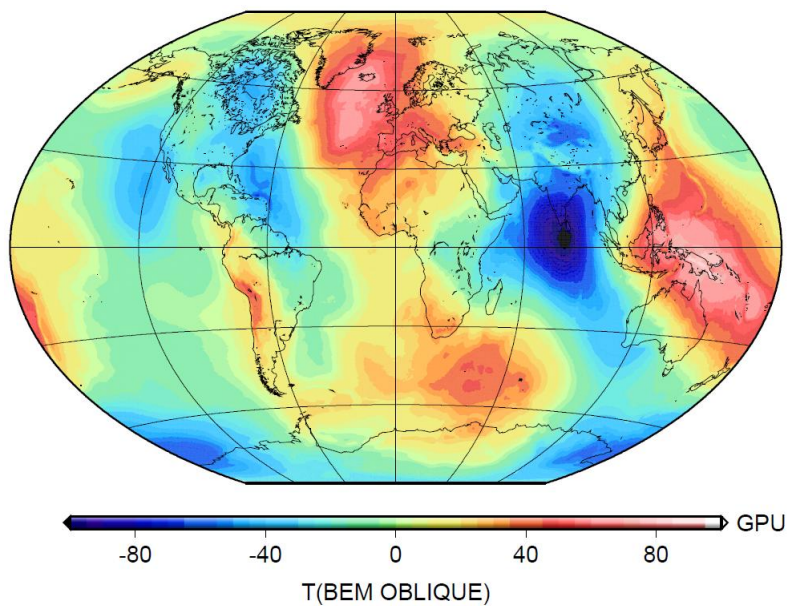
#### 4. Numerický experiment

Pre numerický experiment bol vytvorený program v jazyku C, ktorý bol aplikovaný na zemský povrch diskretizovaný modifikovanou hierarchickou trianguláciou postupným delením 12-stena až po požadovanú presnosť 0.2° [6]. Týmto vzniklo 1215002 kolokačných bodov. Pre zníženie pamäťových nárokov programu bola použitá metóda eliminácie vzdialených zón [6], kde sa koeficienty matice pre body vo vzdialenosti väčšej ako 912 km od práve počítaného bodu prenášobili hodnotou poruchového potenciálu zo satelitného geopotenciálneho modelu ITG-GRACE03S [8] a prešli do pravej strany rovnice (3.12). Tým vznikla redšia matica tuhosti na rozdiel od plnej matice  $\mathbf{M}$  vo vzťahu (3.12). Ako vstupné hodnoty boli vygenerované horizontálne súradnice kolokačných bodov, výška zemského povrchu v týchto bodoch z digitálneho modelu terénu SRTM30\_PLUS V5.0 [4], hodnoty tiažových porúch z modelu DNSC08 [1] a hodnoty poruchového potenciálu zo satelitného geopotenciálneho modelu ITG-GRACE03S. Vypočítané hodnoty boli následne porovnané s riešením bez uvažovania tangenciálnych zložiek šikmej derivácie ako aj s modelom EGM2008, ktorý vydala National Geospatial-Intelligence Agency v USA [9].

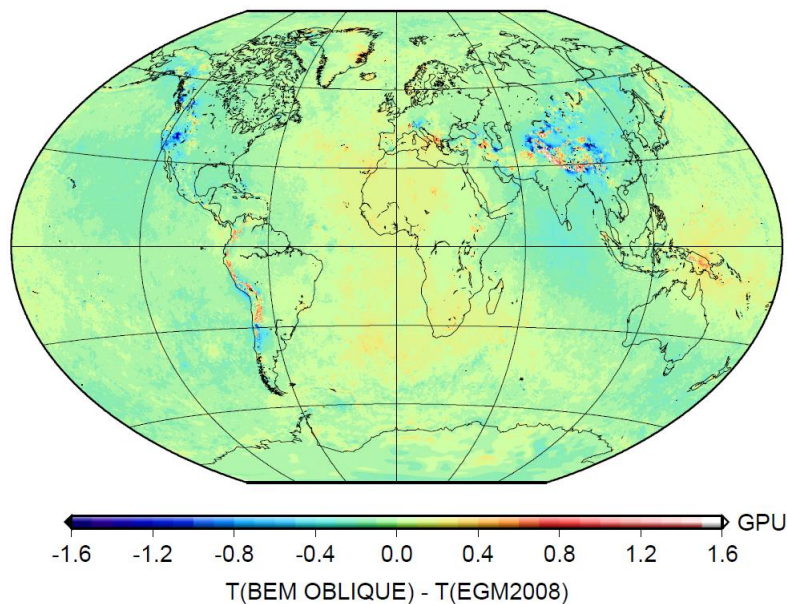
Výpočty boli realizované na paralelnom počítači na katedre matematiky Slovenskej Technickej Univerzity v Bratislave. Paralelizácia programu bola spravená pomocou rozhrania Message Passing Interface (MPI) [2]. Výpočty boli vykonané na výpočtovom klasteri so 16 procesormi a 128GB distribuovanej operačnej pamäte.

Výpočet naplňania matíc sústavy trval 5 hodín a 43 minút a riešenie sústavy použitím nestacionárnej iteračnej metódy stabilizovaných bikonjugovaných gradientov Bi-CGSTAB [3] trvalo 158 sekúnd pri 12 iteračných krokoch pre toleranciu  $1 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ . Celkový výpočet trval 5 hodín a 46 minút.

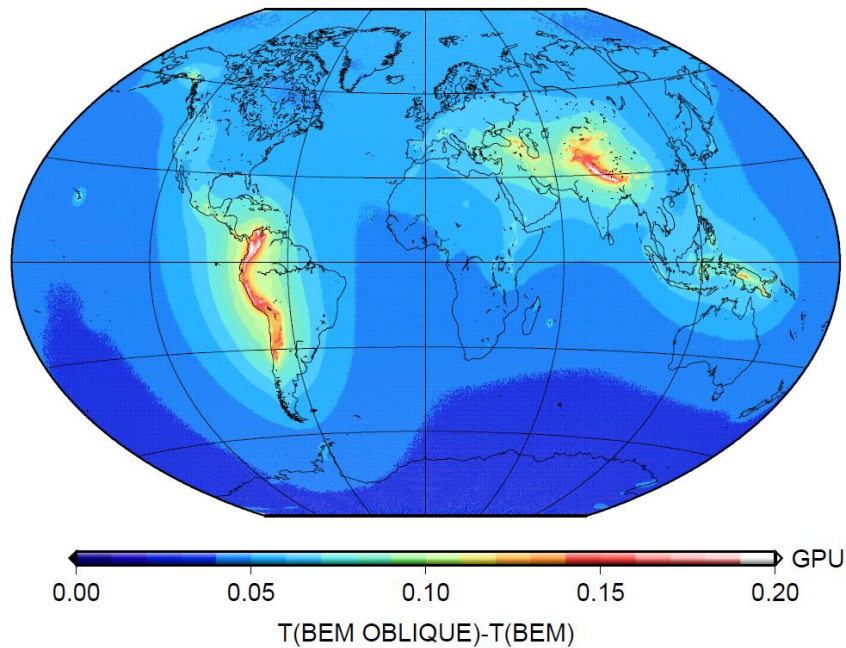
Pre výstupy grafického porovnania výsledkov bol zvolený softvér GMT [12]. Najprv sme zobrazili globálny priebeh riešenia s príspevkom šikmej derivácie, t.j. poruchový potenciál T(BEM OBLIQUE) (Obr. 4.1), potom sme toto riešenie porovnali s modelom T(EGM2008) (Obr. 4.2) a nakoniec sme toto riešenie porovnali s riešením, v ktorom sa šikmá derivácia zanedbala T(BEM) (Obr. 4.3). V tabuľkách 4.1, 4.2 a 4.3 sú uvedené štatistické charakteristiky rozdielov medzi týmito modelmi.



Obr. 4.1: Globálny priebeh riešenia (1 GPU =  $10 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ )



Obr. 4.2: Porovnanie riešenia so šikmou deriváciou s modelom EGM2008



Obr. 4.3: Príspevok tangenciálnych zložiek šikmej derivácie

Tab.4.1: Štatistika porovnania modelov T(BEM) a T(EGM2008)

[GPU] ( $1 \text{ GPU} = 10 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ )	Spolu	Oceány	Kontinenty
Počet uzlov	1215002	870264	344738
Priemerný rozdiel	-0,077	-0,069	-0,098
Maximálny rozdiel	4,008	0,697	4,008
Minimálny rozdiel	-3,496	-1,018	-3,496
Smerodajná odchýlka	0,142	0,107	0,203

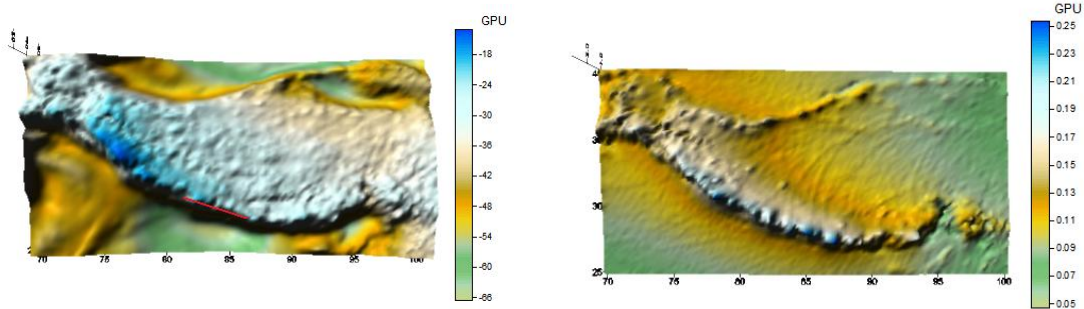
Tab.4.2: Štatistika porovnania modelov T(BEM OBLIQUE) a T(EGM2008)

[GPU]	Spolu	Oceány	Kontinenty
Počet uzlov	1215002	870264	344738
Priemerný rozdiel	-0,023	-0,019	-0,034
Maximálny rozdiel	4,163	0,747	4,163
Minimálny rozdiel	-3,364	-0,960	-3,364
Smerodajná odchýlka	0,140	0,106	0,201

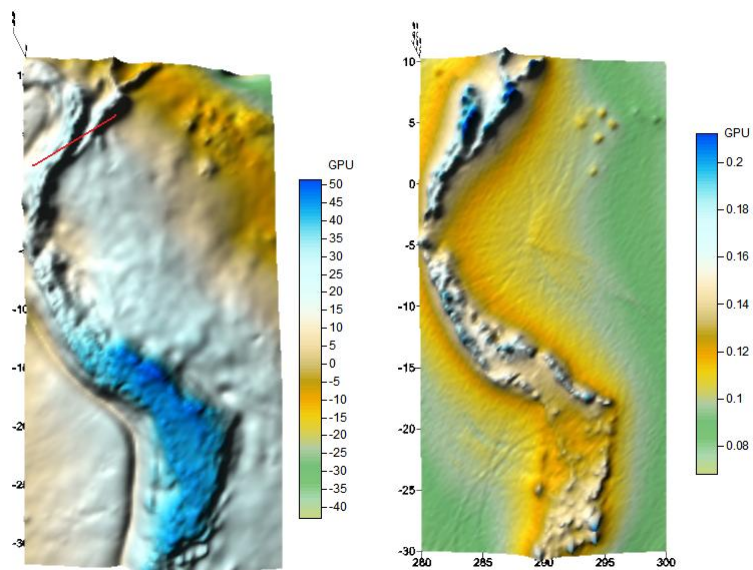
Tab.4.3: Štatistika porovnania modelov T(BEM OBLIQUE) a T(BEM)

[GPU]	Spolu	Oceány	Kontinenty
Počet uzlov	1215002	870264	344738
Priemerný rozdiel	0,054	0,050	0,064
Maximálny rozdiel	0,380	0,162	0,380
Minimálny rozdiel	0,028	0,028	0,028
Smerodajná odchýlka	0,017	0,011	0,022

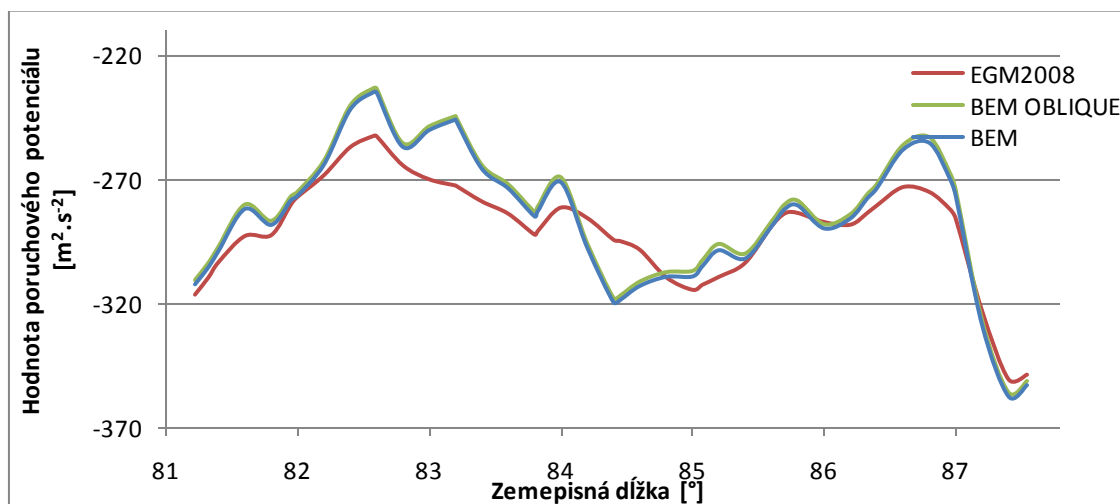
Na zobrazenie príspevku šikmej derivácie v oblastiach, kde je tento príspevok najväčší, teda Andy a Himaláje (Obr. 4.3), sme použili program Surfer [11] (Obr. 4.4 a Obr. 4.5). Pribeh hodnôt potenciálov jednotlivých modelov zobrazené v rezoch sú na Obr. 4.6 a 4.7. Samotné rezy sú zobrazené na Obr. 4.4 a 4.5. Na Obr. 4.8 je znázornený meridiánový rez cez  $86.925^\circ$  východnej dĺžky, cez vrchol Mount Everest.



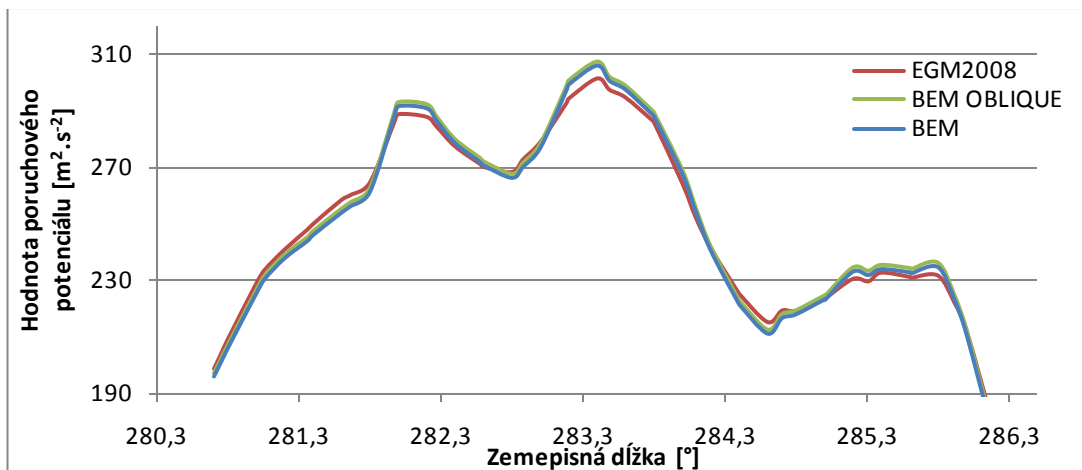
Obr. 4.4: Priebek potenciálu a príspevok šikmej derivácie v Himalájach



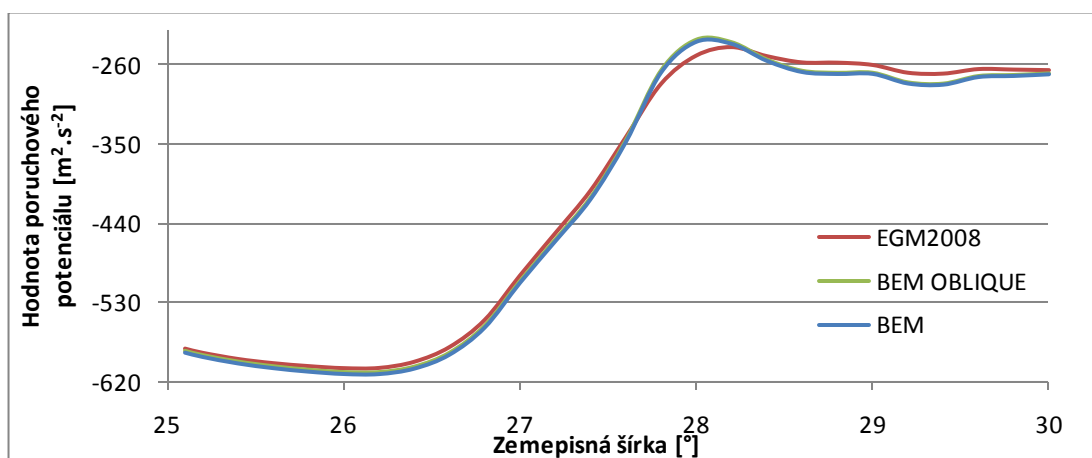
Obr. 4.5: Priebek potenciálu a príspevok šikmej derivácie v Andách



Obr. 4.6: Priebek hodnôt potenciálov jednotlivých mode lov v Himalájach v reze



Obr. 4.7: Priebeh hodnôt potenciálov jednotlivých modeľov v Andách v reze



Obr. 4.8: Priebeh hodnôt potenciálov cez meridiánový rez cez Mount Everest

Z výsledkov zistených numerickým experimentom sme dospeli k nasledujúcim záverom. Príspevok šikmej derivácie je najväčší v oblastiach najvyšších pohorí, teda v Himalájach, Andách, Havajských ostrovoch a v oblasti Indonézie (Obr. 4.3). V týchto oblastiach sú dosahované maximálne príspevky viac ako 0,3 GPU čo pri určovaní priebehu geoidu s centimetrovou presnosťou predstavuje nárast o približne 30 centimetrov. Z Obr. 4.4 a 4.5, ako aj z grafov (Obr. 4.6 a 4.7) ďalej vyplýva, že príspevky dosahujú najvyššie hodnoty práve vo vrcholoch týchto pohorí a v údoliach, zatiaľ čo na svahoch sú zmeny minimálne.

Navyše vplyv tangenciálnych zložiek šikmej derivácie, ktorý je maximálny vo vyššie uvedených pohoríach, má pomerne výrazný vplyv na geoid až do vzdialenosti približne 1000 km (Obr. 4.3). Následkom tohto vplyvu sa zlepšili stredné hodnoty rezíduí v porovnaní s modelom EGM2008 na oceánoch zo 7 cm na 2 cm a na kontinentoch z 10 cm na 3 cm (Tabuľky 4.1 a 4.2). Ďalšie zaujímavé zistenie je, že príspevok šikmej derivácie je na celom povrchu Zeme kladný.

## 5. Záver

Riešenie geodetickej okrajovej úlohy so šikmou deriváciou metódou okrajových prvkov viedlo k numerickému riešeniu priamo na komplikovanom zemskom povrchu. Rozklad šikmej derivácie do normálových a tangenciálnych zložiek sa ukázalo ako vhodný spôsob. Vplyv normálových zložiek je prirodzene výraznejší, no ani

tangenciálne zložky nemôžu byť zanedbateľné pri veľmi presnom určovaní poruchového potenciálu. Riešenie sme zrealizovali vytvorením programu v jazyku C, pomocou ktorého sme vykonali výpočty so vstupnými geodetickými veličinami v numerickom experimente. Vypočítané výsledky sme nakoniec porovnali s výsledkami vypočítanými bez uváženia vplyvu tangenciálnych zložiek ako aj s geopotenciálnym modelom EGM2008.

Z výsledkov a ich porovnaní sme zistili, že príspevky tangenciálnych zložiek šikmej derivácie sú najvýraznejšie v extrémne členitých terénoch oblastí Ánd a Himalájí. Príspevky tangenciálnych zložiek šikmej derivácie v týchto oblastiach výraznejšie ovplyvňujú globálny priebeh hodnôt potenciálu až do vzdialenosti 1000 kilometrov. Pre určovanie priebehu geoidu s centimetrovou presnosťou tento príspevok predstavuje hodnoty až 30 centimetrov čo je pomerne významné. Z numerického experimentu vyplýva, že príspevok tangenciálnych zložiek šikmej derivácie by sa mal uvažovať najmä pri presnom určovaní lokálneho priebehu geoidu v hornatých oblastiach.

**Pod'akovanie:** Tento článok vznikol za podpory grantu VEGA 1/0269/09 a projektov APVV-LPP-0216-06 a APVV-0351-07.

## Lite ratúra

- [1] Andersen O.B., Knudsen P., Berry P.: The DNSC08 ocean wide altimetry derived gravity field. Prezentované na EGU-2008, Vienna, Austria, Apríl 2008
- [2] Aoyama Y., Nakano J.: RS/6000 SP: Practical MPI Programming. IBM, Poughkeepsie, New York, 1999
- [3] Barrett R., Berry M., Chan T.F., Demmel J., Donato J., Dongarra J., Eijkhout V., Pozo R., Romine C., Van der Vorst H.: Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods, SIAM Philadelphia, 1994
- [4] Becker J.J., Sandwell D.T., Smith W.H.F., Braud J., Binder B., Depner J., Fabre D., Factor J., Ingalls S., Kim S.-H., Ladner R., Marks K., Nelson S., Pharaoh A., Sharman G., Trimmer R., vonRosenburg J., Wallace G., Weatherall P.: Global Bathymetry and Elevation Data at 30 Arc Seconds Resolution: SRTM30\_PLUS, revised for Marine Geodesy, 2009
- [5] Brebia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C.: Boundary Element Techniques – Theory and Applications in Engineering, Springer, New York, 1984
- [6] Čunderlík R., Mikula K., Mojzeš M.: Numerical solution of the linearized fixed gravimetric boundary-value problem. J Geod 82: 15-29, Springer Berlin Heidelberg, 2008
- [7] Kutiš V.: Základy modelovania a simulácii, Katedra mechaniky, FEI STU Bratislava, 2006
- [8] Mayer-Gürr, T.: ITG-Grace03s: The latest GRACE gravity field solution computed in Bonn, prezentované na GSTM+SPP, Potsdam 15-17 Okt. 2007
- [9] Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K.: An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM2008, prezentované na 2008 General Assembly of EGU, Vienna, Austria, 13-18 Apríl, 2008
- [10] Reddy, J.N.: An introduction to the finite element method, McGraw-Hill, New York, 1993
- [11] Surfer, Surface Mapping System, Golden Software, [www.goldensoftware.com](http://www.goldensoftware.com)

[12] Wessel, P., Smith, W.H.F.: The Generic Mapping Tools, Version 4.4.0, 2009,  
<http://gmt.soest.hawaii.edu/>

**Autori:**

Bc. Róbert Špir  
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie, Stavebná fakulta STU  
Radlinského 11  
813 68 Bratislava  
e-mail: spir.robert@gmail.com

Ing. Róbert Čunderlík, PhD.  
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie, Stavebná fakulta STU  
Radlinského 11  
813 68 Bratislava  
e-mail: cunderli@svf.stuba.sk

prof. RNDr. Karol Mikula, DrSc.  
Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie, Stavebná fakulta STU  
Radlinského 11  
813 68 Bratislava  
e-mail: mikula@math.sk