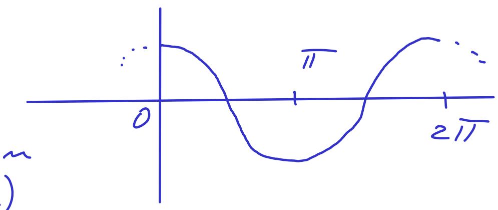
1. Zistite, či rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt[5]{n^4}}$ konverguje.



$$\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & \text{pre } n \text{ párne} \\ -1 & \text{pre } n \text{ nepárne} \end{cases} = (-1)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n^4}}$$

1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca ✓

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}} = n^{-\frac{4}{5}}$$

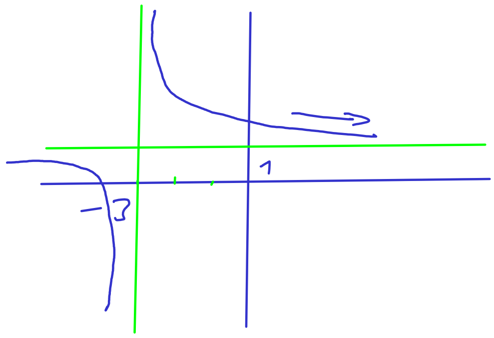
$$n^{-\frac{4}{5}} > (n+1)^{-\frac{4}{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[5]{n^4}} > \frac{1}{\sqrt[5]{(n+1)^4}}$$

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}} = 0$ ✓

Podľa Leibnizovho kritéria daný rad konverguje.

2. Zistite, či rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+7}{n+3}$ konverguje.



$$a_n = \frac{n+7}{n+3} = \frac{n+3+4}{n+3} = 1 + \frac{4}{n+3}$$

1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad \underline{a_n > a_{n+1}}$ ✓

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+7}{n+3} = 1$ X

Daný rad <u>diverguje</u>.

3. Zistite, či rad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n-1}$ konverguje.

$a_n = \frac{1}{2n-1}$

1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca $\quad \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1}$ ✓

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$ ✓

Podľa Leibnizovho kritéria daný rad konverguje.

4. Zistite, či rad $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+5}}$ konverguje.

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a_n=\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+5}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2}\right)}$$

$$\underbrace{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2}<3\sqrt[3]{(n+1)^2}}<3\sqrt[3]{(n+5)^2}$$

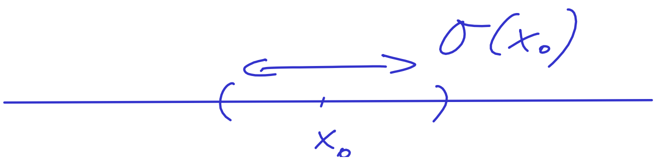
$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}\cdot 3\sqrt[3]{(n+5)^2}}=\frac{1}{3(n+5)}<\frac{1}{\sqrt[3]{n+5}\left(\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n^2+n}+\sqrt[3]{n^2}\right)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3(n+5)} \ll \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+5}}$$ Daný rad **diverguje**

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+5} \leftarrow \text{diverguje} \quad \Nearrow$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$



L'Hospitalovo pravidlo

Majme dve funkcie f a g, definované na intervale (a,b), pričom a môže byť aj $-\infty$ a b môže byť aj ∞. Potom ak sú splnené podmienky

(a) *limity oboch funkcií f a g sú v bode $x_0 \in (a,b)$ rovné 0,*

(b) *funkcie f a g sú v okolí bodu x_0 diferencovateľné, pričom v samotnom bode x_0 derivácia nemusí existovať,*

(c) *derivácie f' a g' nesmú byť v okolí bodu x_0 (pre $x \neq x_0$) obe súčasne rovné 0, alebo inak povedané platí*

$$(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0\,,$$

(d) *existuje vlastná, alebo nevlastná limita $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Potom existuje aj limita $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Б.П.ДЕМИДОВИЧ

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

13-е издание, исправленное

Рекомендовано Государственным комитетом Российской Федерации по высшему образованию в качестве учебного пособия для студентов математических и физических специальностей высших учебных заведений

Издательство Московского университета

Издательство ЧеРо

1997

§ 9. Раскрытие неопределенностей

a) 1-й случай правила Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$). Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности U_ε *) точки a, где a — число или символ ∞, и при $x \to a$ обе стремятся к нулю:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0;$$

b) c) 2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в окрестности U_ε точки a, за исключением, быть может, самой точки a, причем одновременно не обращаются в нуль при $x \neq a$; 3) существует конечный или бесконечный предел

d)
$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то имеем:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2-й случай правила Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$). Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$ обе стремятся к бесконечности:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

где a — число или символ ∞;

2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют для всех x, принадлежащих некоторой окрестности U_ε точки a и отличных от a, причем

$$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0 \text{ при } x \in U_\varepsilon \text{ и } x \neq a;$$

3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогичные правила справедливы для односторонних пределов.

Раскрытие неопределенностей видов $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0 и т. п. путем алгебраических преобразований и логарифмирова-

*) Под окрестностью U_ε точки a понимается совокупность чисел x, удовлетворяющих неравенству: 1) $0 < |x-a| < \varepsilon$, если a — число, и 2) $|x| > 1/\varepsilon$, если a — символ ∞.

skriptá: Marko str. 106 c) $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$

Theorem 351 *(L' Hospitalovo pravidlo) Nech* $f : \langle a, b) \to \mathbf{R}$ *a* $g : \langle a, b) \to \mathbf{R}$, $a < b \leq \infty$ *sú diferencovateľné funkcie. Nech pre každé* $x \in \langle a, b)$ *je* $\cancel{g(x) \neq 0}$ *a* $g'(x) \neq 0$. *Nech* $\lim_{x \longrightarrow b} f(x) = \lim_{x \longrightarrow b} g(x) = 0$. *Ak existuje (vlastná alebo nevlastná)*

$$\lim_{x \longrightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

potom

$$\lim_{x \longrightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

---

kniha: Jarník – Diferenciálni počet str. 270 chýbajú podmienky b), c)

Věta 146. *Budiž* $\lim_{x \to c+} f(x) = 0$, $\lim_{x \to c+} g(x) = 0$. *Nechť existuje* $\lim_{x \to c+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(vlastní nebo nevlastní). Potom existuje též* $\lim_{x \to c+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a je* $\lim_{x \to c+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Obdobná věta platí též pro* $\lim_{x \to c-}$ *a pro* $\lim_{x \to c}$.

---

kniha: Eliáš, Horváth, Kajan – Zbierka úloh. . . , časť 2. str. 99

3,7. L'Hospitalovo pravidlo

Veta 1. (L'Hospitalovo pravidlo.) Nech chýba podmienka c)

a) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ alebo $\lim_{x \to a} |g(x)| = \infty$;

b) v istom okolí čísla a majú funkcie f a g derivácie f', g' (v čísle a prípadne nemusia tieto derivácie existovať);

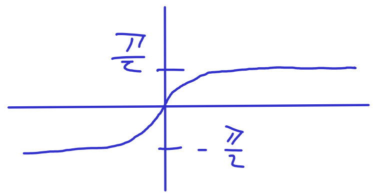
c) existuje limita, alebo nevlastná limita $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$\nvdash \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

---

http://www.math.sk/jmkollar/fiit-analyza/lhospital.pdf

5. Z cvičenia 8.1 m)
Vypočítajte asyptoty so smernicou funkcie $f(x) = x.\mathrm{arctg}\,x$.



$\to \infty$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \mathrm{arctg}\, x = \frac{\pi}{2}$$

$\infty \cdot 0$

$$q = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(x\,\mathrm{arctg}\,x - \frac{\pi}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} x\left(\mathrm{arctg}\,x - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\mathrm{arctg}\,x - \frac{\pi}{2}}^{a(x)\ \to 0}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{b(x)\ \to 0}}$$

$O(\infty) = (k, \infty) \quad k \in R$

a) ✓ $\frac{0}{0}$

b) $a'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in R$ $\qquad k>0 \Rightarrow$ na (k,∞) $a'(x), b'(x)$ $\exists$

$b'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \forall x > 0$

c) na (k,∞): $(a'(x))^2 + (b'(x))^2 \neq 0$ $\qquad a'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0 \Rightarrow$ ✓

d) $\exists \lim_{x\to\infty} \frac{a'(x)}{b'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = \underline{\underline{-1}}$

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\mathrm{arctg}\,x - \frac{\pi}{2}\right) = \underline{\underline{-1}}$$

6. Vypočítajte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} \cdot \dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\underbrace{x^2}_{=0} \cdot \underbrace{\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)}_{\text{ohraničené}}$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \qquad \lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

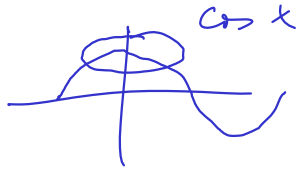
a) $\frac{0}{0}$ ✓

b) $O(0)$ $\exists\, f'(x),\ g'(x)$ ✓ $\qquad x \neq 0$

$$f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \underline{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$g'(x) = \cos x$$

$\cos x = g'(x)$



c) v $O(0)$: $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$

v $O(0)$ $0 \neq g'(x) \in O(1)$

d) $$\lim_{x\to 0} \frac{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos x} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)}^{0.\ \text{ohr.}}}{\underbrace{\cos x}_{\to 1}}}_{=0} - \lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\underbrace{\cos x}_{\to 1}} \quad \nexists$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{=1} \cdot \frac{\overbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}^{-1 \le \text{ohr.} \le 1}}{\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to \infty}} = \underline{\underline{0}}$$

7. Vypočítajte limitu $\lim\limits_{\cancel{x\to 0}\ x\to 2} \dfrac{2^{2^x} - 2^{x^2}}{2^x - x^2}$. $\qquad \dfrac{f(x)}{g(x)}$

a) $\left.\begin{aligned} f(2) &= 2^{2^2} - 2^{2^2} = 0 \\ g(2) &= 2^2 - 2^2 = 0 \end{aligned}\right\}\ \frac{0}{0}$ ✓

b) $v\ \mathcal{O}(2)\ \exists\ f'(x), g'(x)$ ✓

$f'(x) = 2^{2^x} \cdot \ln 2 \cdot 2^x \ln 2 - 2^{x^2} \ln 2 \cdot 2x =$

$= \underline{\ln 2 \left(2^{2^x + x} \ln 2 - x 2^{x^2+1}\right)}$

$g'(x) = \underline{2^x \ln 2 - 2x} \qquad \forall x \in R$

✓

c) $v\ \mathcal{O}(2):\ (f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$

$f'(2) = \ln 2 \left(\underline{2^{2^2+2}} \ln 2 - \underline{2 \cdot 2^5}\right) =$

$= 2^6 \ln 2 \left(\ln 2 - 1\right) \neq 0$

$g'(2) = 2^2 \ln 2 - 4 = 2^2 (\ln 2 - 1) \neq 0$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln 2 \left(2^{2^x+x} \ln 2 - x\, 2^{x^2+1}\right)}{2^x \ln 2 - 2x} = \dfrac{2^6 \ln 2 \cancel{(\ln 2 - 1)}}{2^2 \cancel{(\ln 2 - 1)}} =$

$= 2^4 \ln 2 = 16 \ln 2 \implies \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^{2^x} - 2^{x^2}}{2^x - x^2} = \underline{\underline{16 \ln 2}}$

8. Vypočítajte limitu $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)}$. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{e^{-2x}}_{\to 0}(\cos x + 2\sin x) + \underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0}\sin^2 x = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}(\cos x + \sin x) = 0$$

a) $\frac{0}{0}$ ✓

b) v (k,∞) : $f'(x)$, $g'(x)$ ✓

$k \in R$

$$f'(x) = e^{-2x}(-2)(\cos x + 2\sin x) + e^{-2x}(-\sin x + 2\cos x) + e^{-x^2}(-2x)\sin^2 x + e^{-x^2}2\sin x\cos x$$

$$= e^{-2x}(-5\sin x) + e^{-x^2}(2\sin x\cos x - 2x\sin^2 x) =$$

$$= e^{-x^2}(2\sin x\cos x - 2x\sin^2 x) - 5e^{-2x}\sin x \qquad \forall x \in R$$

$$g'(x) = e^{-x}(-1)(\cos x + \sin x) + e^{-x}(-\sin x + \cos x) = e^{-x}(-2\sin x) = -2e^{-x}\sin x$$

c) v (k,∞) : $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ ✗

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= \sin x\left[2e^{-x^2}(\cos x - x\sin x) - 5e^{-2x}\right] \\ g'(x) &= \sin x\left[-2e^{-x}\right] \end{aligned}\right\} \quad \sin x \text{ na } (k,\infty)$$

d) $$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{2e^{-x^2}(\cos x - x\sin x) - 5e^{-2x}}{-2e^{-x}} = \lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{e^{-x^2+x}}_{\to 0}(\cos x - x\sin x) - \frac{5}{2}e^{-x}\right)$$

$= 0$

$-$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{e^{-x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2+x}\sin^2 x}^{\to 0}}{\underbrace{(\cos x + \sin x)}_{\text{osciluje}}}$$

$\nexists$

9. Vypočítajte limitu $\lim_{x\to 0} \dfrac{2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + \cos x}{x^2}$. $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

a) $f(0) = 2 - 3 + 1 = 0$, $g(0) = 0$ $\Big\}$ $\frac{0}{0}$ ✓

b) v $O(0)$: $f'(x), g'(x)$ ✓

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}} - \sin x$ $\quad x \in (-1, \infty)$, $O(0)$

$g'(x) = 2x$ $\quad \forall x \in R$

c) ak $x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq 0 \Rightarrow g'(x) \neq 0$

v $O(0)$: $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \neq 0$ ✓

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+x}} - \frac{1}{3\sqrt{(1+x)^2}} - \sin x}{2x} = *$ pre $x = 0$ $\frac{0}{0}$

---

a) $\frac{0}{0}$ ✓

b) v $O(0)$: $\exists\ f''(x), g''(x)$ ✓

$f''(x) = -\dfrac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}} + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1+x)^5}} - \cos x$ $\quad x \in (1, \infty)$

$g''(x) = 2$ $\quad \forall x \in R$

c) $g''(x) = 2 \neq 0$ $\quad$ v $O(0)$: $(f''(x))^{\cancel{2}} + (g''(x))^2 \neq 0$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-\frac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{(1+x)^5}} - \cos x}{2} = \dfrac{-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1}{2} =$

$= \dfrac{\frac{-3+4-6}{6}}{2} = -\dfrac{5}{12} = * = \lim_{x\to 0} \dfrac{2\sqrt{1+x} - 3\sqrt[3]{1+x} + \cos x}{x^2}$