Doporučená literatúra

Kalina Martin: Matematika, Bratislava 2012

2.5 Diferenciály a Taylorov polynóm

Taylorov polynóm slúži na približný výpočet hodnôt funkcií. Má aplikácie, napr. pri približnom výpočte integrálov, diferenciálnych rovníc a pod.

2.5.1 Diferenciály funkcie

Predpokladajme, že máme danú funkciu f, ktorá má na intervale (a, b) n derivácií a nech $x_0 \in (a, b)$ je daný bod. Našou úlohou bude aproximovať (teda približne určiť) hodnoty funkcie f pomocou polynómu n-tého stupňa.

$f(x)$ $\quad x_0 \qquad f(x_0) = T(x_0) \qquad f'(x_0) = T'(x_0) \ldots f^{(n)}(x_0) = T^{(n)}(x_0)$

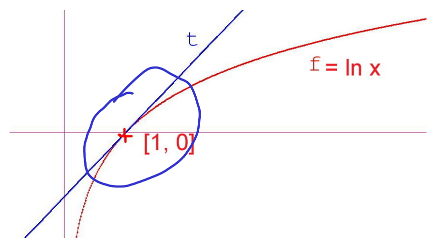
- Polynóm prvého stupňa, ktorý v okolí bodu $A = (x_0, f(x_0))$ najlepšie vystihuje funkciu f, je dotyčnica s dotykovým bodom A. Dotyčnica aproximuje v malom okolí bodu A dostatočne presne funkciu f, teda môžeme písať

$$f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Výraz

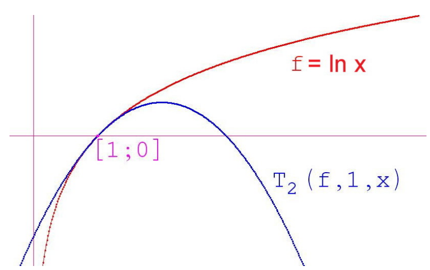
$$df(x_0, x) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{2.36}$$

nazveme *prvým diferenciálom funkcie f v x_0*.



Obr. 2.56. Graf funkcie f a jej dotyčnica v bode A

- Dotyčnica má s funkciou spoločný bod A a „smer" ($k = f'(x_0)$). Budeme hľadať polynóm druhého stupňa $P_2(x) = c_2(x - x_0)^2 + c_1(x - x_0) + f(x_0)$, ktorý má s funkciou f spoločný bod A a hodnoty prvých dvoch derivácií $f'(x_0)$, $f''(x_0)$.



Obr. 2.57. Aproximácia parabolou P_2

Postupným derivovaním dostaneme

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2c_2(x - x_0) + c_1, \quad \text{z toho} \quad c_1 = f'(x_0), \\ f''(x) &= 2c_2, \quad \text{z toho} \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}. \end{aligned}$$

Hľadaný polynóm druhého stupňa má tvar

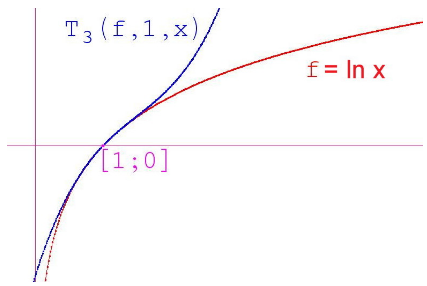
$$P_2(x) = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Výraz

$$d^2 f(x_0, x) = f''(x_0)(x - x_0)^2$$

nazveme *druhým diferenciálom funkcie* f *v* x_0.

- Hľadáme polynóm tretieho stupňa $P_3(x) = c_3(x-x_0)^3 + c_2(x-x_0)^2 + c_1(x-x_0) + f(x_0)$, ktorý má s funkciou f spoločný bod A a hodnoty prvých troch derivácií $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$.



Obr. 2.58. Aproximácia polynómom 3. stupňa P_3

Postupným derivovaním dostaneme

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3c_3(x-x_0)^2 + 2c_2(x-x_0) + c_1, \quad \text{z toho} \quad c_1 = f'(x_0), \\ f''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot c_3(x-x_0) + 2c_2, \quad \text{z toho} \quad c_2 = \frac{f''(x_0)}{2}, \\ f'''(x) &= 3 \cdot 2 \cdot c_3, \quad \text{z toho} \quad c_3 = \frac{f'''(x_0)}{3 \cdot 2}. \end{aligned}$$

Výsledný polynóm má tvar

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{f'''(x_0)}{3 \cdot 2}(x-x_0)^3 + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) = \\ &= \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f(x_0)}{0!}(x-x_0)^0. \end{aligned}$$

Výraz

$$d^3 f(x_0, x) = f^(3)(x_0)(x - x_0)^3$$

nazveme *tretím diferenciálom funkcie* f *v* x_0.

Všeobecne, výraz

$$d^{(n)} f(x_0, x) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n \tag{2.37}$$

nazveme *diferenciálom* n*-tého rádu funkcie* f *v* x_0 (alebo n-tým diferenciálom funkcie f v x_0).

Derivácia nultého rádu funkcie f v x_0 sa označuje $f^{(0)}(x_0)$ a definuje $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$. Nultý diferenciál je potom

$$d^{(0)} f(x_0, x) = f^{(0)}(x_0)(x_0 - x)^0 = f(x_0).$$

2.5.2 Lagrangeova veta o strednej hodnote a Taylorov rozvoj

Definícia 2.24 (Taylorov rozvoj). *Nech f je funkcia, ktorá má na intervale (a, b) n derivácií. Nech $x_0 \in (a, b)$ je pevne zvolený bod. Potom označíme*

$$T_n(f, x_0, x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i \tag{2.38}$$

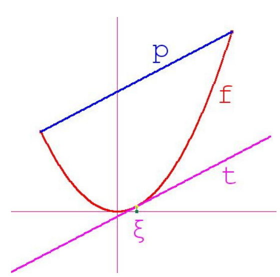
a polynóm $T_n(f, x_0, x)$ nazveme Taylorovym polynómom (rozvojom) *n-tého stupňa funkcie f okolo x_0.* (Stručnejšie hovoríme, že $T_n(f, x_0, x)$ je n-tý Taylorov polynóm.)

Taylorov polynóm n-tého stupňa funkcie f môžeme vyjadriť pomocou diferenciálov

$$T_n(f, x_0, x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{d^{(i)} f(x_0, x)}{i!}.$$

Veta 2.12 (Lagrangeova o strednej hodnote). *Nech f je hladká funkcia na intervale (a, b) a spojitá na $[a, b]$. Potom existuje také $\xi \in (a, b)$, pre ktoré platí*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Obr. 2.59. Funkcia f a jej dotyčnica v bode $T = (\xi, f(\xi))$

Nasledujúca veta je zovšeobecnením predchádzajúcej Lagrangeovej vety o strednej hodnote a hovorí o tom, akej chyby sa dopustíme, keď hodnotu $f(x)$ aproximujeme hodnotou $T_n(f, x_0, x)$. S Lagrangeovou vetou o strednej hodnote sa stretneme ešte v kapitole o integráloch.

Taylorov polynóm

Všeobecný tvar Taylorovho polynómu n-tého stupňa funkcie f v bode x_0 je nasledovný:

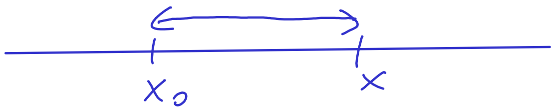
$$T_n(f, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}$$

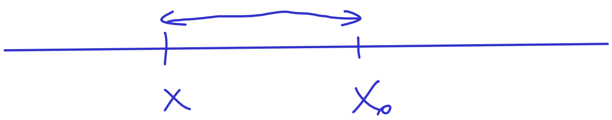
Odhad chyby (Lagrangeov tvar zvyšku)

Člen R_{n+1}, uvedený na konci predošlého výrazu, predstavuje chybu výpočtu. Jej odhad sa robí podľa vzorca:

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}\big(x_0 + \vartheta(x - x_0)\big)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}, \qquad 0 \le \vartheta \le 1$$

pričom premenná ϑ sa volí tak, aby chyba R_{n+1} vyšla čo najväčšia. To znamená, že sa berie najhorší možný prípad a reálny výsledok môže byť potom už len lepší.





ak $\vartheta = 0$: $x_0 + \vartheta(x - x_0) = x_0$

ak $\vartheta = 1$: $x_0 + \vartheta(x - x_0) = x$

1. Napíšte Taylorov polynóm $T_4\,(f(x), x_0)$ pre funkciu

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ v bode } x_0 = 0\,.$$

$$(x - x_0) = x$$

$$(x-x_0)^n = x^n$$

$$f(x) = (1-x)^{-1}$$

$$f'(x) = (-1)(1-x)^{-2}(-1) = (1-x)^{-2}$$

$$f''(x) = 2(1-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 2.3(1-x)^{-4}$$

$$f^{(4)}(x) = 2.3.4(1-x)^{-5}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!\,(1-x)^{-(n+1)}$$

$$f(x_0) = 1$$

$$f'(x_0) = 1$$

$$f''(x_0) = 2 = 2!$$

$$f'''(x_0) = 6 = 3!$$

$$f^{(4)}(x_0) = 24 = 4!$$

$$T_4\left(\frac{1}{1-x}, 0\right) = \underline{1 + \underset{\frac{1}{1!}}{x^1} + \underset{\frac{2!}{2!}}{x^2} + \underset{\frac{3!}{3!}}{x^3} + \underset{\frac{4!}{4!}}{x^4}} \longleftarrow$$

$$T\left(\frac{1}{1-x}, 0\right) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + \dots$$

Geometrická postupnosť

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ q = x \end{array}\right\} \longrightarrow$$

ak $|q| < 1$: $S = \underset{1}{a_1} + \underset{x}{a_2} + \underset{x^2 \dots}{\dots} + a_n + \dots = a_1 \frac{1}{1-q}$

$$S = \frac{1}{1-x}$$

ak $x \in (-1, 1) \Longrightarrow S = \frac{1}{1-x}$ konverguje

2. Napíšte Taylorov polynóm $T_5\,(f(x), x_0)$ pre funkciu

$$f(x) = \sin x \quad \text{v bode} \quad x_0 = 0\,.$$

$$(x - x_0)^n = x^n$$

$x_0 = 0$

$f(x) = \sin x$	$f(x_0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(x_0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(x_0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(x_0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	$f^{(4)}(x_0) = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos x$	$f^{(5)}(x_0) = 1$

$$T_5(\sin x, 0) = 0 + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

$$T(\sin x, 0) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3. Napíšte Taylorov polynóm $T_4\,(f(x), x_0)$ pre funkciu

$$f(x) = \ln x \quad \text{v bode} \quad x_0 = 1\,.$$

$$(x-x_0)^n = (x-1)^n$$

$x_0 = 1$

$f(x) = \ln x$	$f(x_0) = 0$
$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$	$f'(x_0) = 1$
$f''(x) = -x^{-2}$	$f''(x_0) = -1 = -1!$
$f'''(x) = 2x^{-3}$	$f'''(x_0) = 2 = 2!$
$f^{(4)}(x) = -2.3\,x^{-4}$	$f^{(4)}(x_0) = -6 = -3!$

$$T_4(\ln x, 1) = 0 + (x-1)^1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4}$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$$

$$T(\ln x, 1) = x-1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

4. Vypočítajte hodnotu $1{,}1^{1{,}2}$ s presnosťou na $\overbrace{\text{4 desatinné miesta}}^{10^{-4}}$.

$$\boxed{f(x) = x^{1{,}2} = x^{\frac{6}{5}}} \qquad f(1{,}1) = ? \qquad \boxed{x = 1{,}1} \leftrightarrow \boxed{x_0 = 1} \Rightarrow (x - x_0)^n = 0{,}1^n$$

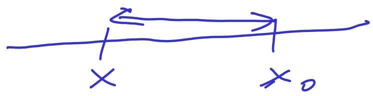
	$x_0 = 1$
$f(x) = x^{\frac{6}{5}}$	$f(x_0) = 1$
$f'(x) = \frac{6}{5} x^{\frac{1}{5}}$	$f'(x_0) = \frac{6}{5}$
$f''(x) = \frac{6}{25} x^{-\frac{4}{5}}$	$f''(x_0) = \frac{6}{25}$
$f'''(x) = -\frac{24}{125} x^{-\frac{9}{5}}$	$f'''(x_0) = -\frac{24}{125}$
$f^{(4)}(x) = \frac{216}{625} x^{-\frac{14}{5}}$	$f^{(4)}(x_0) = \frac{216}{625}$

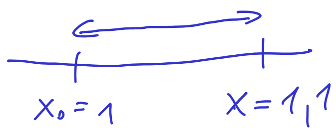
$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \vartheta (x - x_0)\right)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

$$\vartheta \in \langle 0, 1 \rangle$$

ak $\vartheta = 0$: $\quad x_0 + \vartheta (x - x_0) = x_0$

ak $\vartheta = 1$: $\quad x_0 + \vartheta (x - x_0) = x$





$$R_3 = \frac{-24 \left(x_0 + \vartheta (x - x_0)\right)^{-\frac{9}{5}}}{125 \cdot 3!} (x - x_0)^3$$

$$R_3 = \frac{-24 \cdot 0{,}1^3}{125 \cdot 3! \underbrace{\left(x_0 + \vartheta (x - x_0)\right)}_{\langle 1; 1{,}1 \rangle}^{\frac{9}{5}}} \leq \frac{-24 \cdot 0{,}1^3}{125 \cdot 3! \cdot 1} \doteq 1{,}9 \cdot 10^{-4}$$

$$R_4 = \frac{216 \cdot 0{,}1^4}{625 \cdot 4! \underbrace{\left(x_0 + \vartheta (x - x_0)\right)}_{\langle 1; 1{,}1 \rangle}^{\frac{14}{5}}} \leq \frac{216 \cdot 0{,}1^4}{625 \cdot 4! \cdot 1} \doteq 3{,}4 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}$$

$$T_3(x^{1{,}2}, 1) = 1 + \frac{6}{5}(x - 1) + \frac{6}{25 \cdot 2!}(x - 1)^2 - \frac{24}{125 \cdot 3!}(x - 1)^3 \qquad x = 1{,}1$$

$$1{,}1^{1{,}2} \approx 1 + \frac{6}{5} 0{,}1 + \frac{0{,}1^2 \cdot 6}{25 \cdot 2} - \frac{24 \cdot 0{,}1^3}{125 \cdot 6} \doteq 1{,}121165$$

$$1{,}1^{1{,}2} = 1{,}121169$$

5. Vypočítajte hodnotu $\cos 5^\circ$ s presnosťou aspoň 10^{-5}.

$\boxed{f(x)=\cos x}$ $f(5^\circ) \Rightarrow x = \cancel{5^\circ}$ $\boxed{x=\frac{\pi}{36}} \hookleftarrow \boxed{x_0 = 0}$ $(x-x_0)^n = \left(\frac{\pi}{36}\right)^n$

$x_0 = 0$

$f(x) = \cos x$	$f(x_0) = 1$
$f'(x) = -\sin x$	$f'(x_0) = 0$
$f''(x) = -\cos x$	$f''(x_0) = -1$
$f'''(x) = \sin x$	$f'''(x_0) = 0$
$f^{(4)}(x) = \cos x$	$f^{(4)}(x_0) = 1$

$$R_4 = \frac{\overbrace{\cos(x_0 + \vartheta(x-x_0))}}{4!}(x-x_0)^4 \leq *$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$* \leq \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4 \doteq \underline{\underline{2{,}4 \cdot 10^{-6}}}$$

$$T_3(\cos x, 0) = 1 - \frac{1}{2!}x^2$$

$$\cos 5^\circ = \cos\frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \doteq 0{,}99619|2$$

$$\cos 5^\circ = 0{,}99619|4$$

6. Ako by ste vypočítali hodnotu π s presnosťou na 1000 desatinných miest?

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \boxed{\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}}$$

$\boxed{x_0 = 0}$ $\boxed{x = 1}$

$$(x-x_0)^n = x^n$$

	x_0
$f(x) = \operatorname{arctg} x$	$f(x_0) = 0$
$f'(x) = (1+x^2)^{-1}$	$f'(x_0) = 1$
$f''(x) = -2x(1+x^2)^{-2}$	$f''(x_0) = 0$
$f'''(x) = (6x^2-2)(1+x^2)^{-3}$	$f'''(x_0) = -2 = -2!$
$f^{(4)}(x) = 24x(1-x^2)(1+x^2)^{-4}$	$f^{(4)}(x_0) = 0$
$f^{(5)}(x) = (120x^4-240x^2+24)(1+x^2)^{-5}$	$f^{(5)}(x_0) = 24 = 4!$
$f^{(6)}(x) = 240x(-3x^4+10x^2-3)(1+x^2)^{-6}$	$f^{(6)}(x_0) = 0$
$\vdots$	

$$T(\operatorname{arctg} x, 0) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{2n-1}}$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

presnosť - na 1000 miest

10^{-1000}

Veta 12.1.1 — Leibnizovo kritérium konvergencie. Nech $\{a_n\}$, kde $a_n \in \mathbb{R}$ pre $\forall n \in \mathbb{N}$, je klesajúca postupnosť konvergujúca k nule. Potom rad so striedavými znamienkami

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

konverguje. Okrem toho, ak S je súčet tohto radu a S_n jeho čiastkový súčet jeho prvých n členov, tak platí odhad

$$|S - S_n| \le a_{n+1}, \quad \text{pre } \forall n \in \mathbb{N}.$$

$a_n = \frac{1}{2n-1}$ $\qquad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1}$

$$\frac{1}{2n-1} \le 10^{-1000} = \frac{1}{10^{1000}} \quad / \cdot (2n-1) \cdot 10^{1000}$$

$$10^{1000} \le 2n-1 \quad /+1$$

$$10^{1000} + 1 \le 2n \quad /:2$$

4x chyba

$$\frac{10^{1000}+1}{2} \le n$$

$$a_n = \frac{1}{10^{1000}+1-1} = \frac{1}{10^{1000}} \approx 0$$

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 \approx \underbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} -}\dots$$

$$\pi = 4 \cdot \operatorname{arctg} 1 \quad 4x$$