1. Nájdite všetky riešenia sústavy rovníc

$$\begin{aligned} 3x_1 &- 2x_2 &+ 7x_3 &= 43 \\ -x_1 &+ 5x_2 &+ 4x_3 &= 13 \\ 5x_1 &- 3x_2 &+ 2x_3 &= 23 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 7 & 43 \\ -1 & 5 & 4 & 13 \\ 5 & -3 & 2 & 23 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -4 & -13 \\ 3 & -2 & 7 & 43 \\ 5 & -3 & 2 & 23 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3R_1 \\ -5R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -4 & -13 \\ 0 & 13 & 19 & 82 \\ 0 & 22 & 22 & 88 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{22} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -4 & -13 \\ 0 & 13 & 19 & 82 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 13 & 19 & 82 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -13R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 30 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{1}{6} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -4 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} +4R_3 \\ -R_3 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} +5R_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= -1 \\ x_3 &= 5 \end{aligned}} \qquad \boxed{(x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 5)}$$

2. Nájdite všetky riešenia sústavy rovníc

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & = & 21 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 16 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 21 \\ 5 & -3 & 7 & 16 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -R_1 \\ -R_1-R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 14 \\ 0 & -4 & -4 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-\frac{1}{4}) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 2 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-\frac{1}{7}) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 14 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -3R_2 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{x_3 = t \,,\, t \in R}$$

$$x_2 + x_3 = 3$$

$$\boxed{x_2 = 3 - t}$$

$$x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 5$$

$$\boxed{x_1 = 5 - 2t}$$

$$\boxed{(x_1, x_2, x_3) = (5-2t, 3-t, t) \quad \text{kde } t \in R}$$

3. Nájdite všetky riešenia sústavy rovníc

$$\begin{aligned} x_1 &+ x_2 &+ x_3 &= -5 \\ 5x_1 &- x_2 &+ 5x_3 &= 16 \\ 2x_1 &+ 3x_2 &+ 2x_3 &= -14 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 5 & -1 & 5 & 16 \\ 2 & 3 & 2 & -14 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -5R_1 \\ -2R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -6 & 0 & 41 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 0 & 41 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ +6R_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 17 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{0x_1 + 0x_2 + 0x_3}_{0} = 17 \qquad 0 \neq 17$$

$$\emptyset$$

4. Zistite pre aké hodnoty parametra p (reálne číslo) má nasledujúca sústava riešenie a nájdite potom všetky riešenia sústavy rovníc.

$$\begin{aligned} 2x_1 &- px_2 + 3x_3 = -13 \\ x_1 &+ 2px_2 + 5x_3 = -12 \\ 7x_1 &- 4px_2 - 2x_3 = -9 \end{aligned}$$

$p \in R$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -p & 3 & -13 \\ 1 & 2p & 5 & -12 \\ 7 & -4p & -2 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2p & 5 & -12 \\ 2 & -p & 3 & -13 \\ 7 & -4p & -2 & -9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ -3R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2p & 5 & -12 \\ 0 & -5p & -7 & 11 \\ 1 & -p & -11 & 30 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -R_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2p & 5 & -12 \\ 0 & -5p & -7 & 11 \\ 0 & -3p & -16 & 42 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2p & 5 & -12 \\ 0 & -5p & -7 & 11 \\ 0 & 6p & 32 & -84 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2p & 5 & -12 \\ 0 & p & 25 & -73 \\ 0 & -5p & -7 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +5R_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2p & 5 & -12 \\ 0 & p & 25 & -73 \\ 0 & 0 & 118 & -354 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{118} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2p & 5 & -12 \\ 0 & p & 25 & -73 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -5R_3 \\ -25R_3 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2p & 0 & 3 \\ 0 & p & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2R_2 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & p & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$\boxed{x_1 = -1}$

$\boxed{x_3 = -3}$

$p x_2 = 2 \ / \cdot \frac{1}{p} \iff p \neq 0$

ak $p \neq 0$: $\boxed{x_2 = \frac{2}{p}}$

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(-1, \frac{2}{p}, -3\right)$$

5. Vypočítajte hodnosť matice $\mathbb{A}$ a zistite, či je táto matica regulárna alebo singulárna.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{h(A) = 2}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -8R_1 \\ -3R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -10 & 20 \\ 0 & -5 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot\left(-\frac{1}{10}\right) \\ \cdot\left(-\frac{1}{5}\right) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & \underline{1} & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -R_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \text{riadkov} & 3 \\ & \neq \\ \text{hodnosť} & 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{singulárna}$$

6. Zistite, či sú vektory $\overrightarrow{u} = (2, 1, 3, 2)$, $\overrightarrow{v} = (-2, 4, 3, 1)$ a $\overrightarrow{w} = (2, 5, 6, 4)$ lineárne závislé, alebo či sú lineárne nezávislé.

závislé ak $\exists\, a, b, c \in R,\ (a \neq 0 \vee b \neq 0 \vee c \neq 0) : \ a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{matrix} \\ +R_1 \\ -R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -R_3 \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -4R_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} h(A) = 3 \\ \parallel \\ \text{vektory sú } 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{vektory } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ sú lineárne nezávislé}}}$$