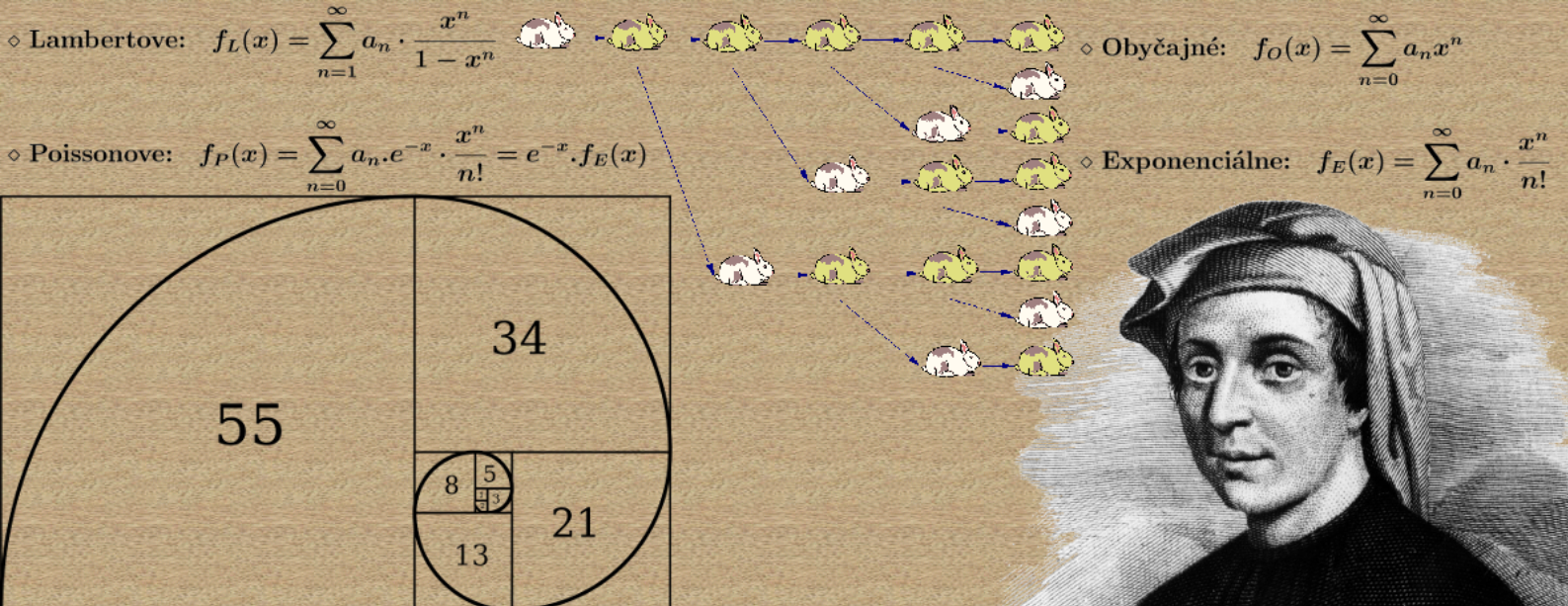




8. Vytvárajúce funkcie

8.1 Úvod

V tejto kapitole sa zoznámime s jednou veľmi užitočnou technikou počítania, spájajúcou diskretnú matematiku s kalkuľom a majúcou široké uplatnenie aj v informatike. Hneď na začiatku by sme chceli upozorniť na to, že pôjde len o veľmi stručný úvod do problematiky vytvárajúcich funkcií, ktorého cieľom je iba zoznámiť čitateľa s existenciou vytvárajúcich funkcií a ich základnými možnosťami použitia pri riešení niektorých jednoduchších problémov. Pre hlbšie pochopenie problematiky vytvárajúcich funkcií odporúčame čitateľom knihu [13], ktorá poskytuje ucelenejší pohľad na problematiku vytvárajúcich funkcií a je písaná jednoduchým a veľmi prístupným štýlom. Táto kniha je súhrn jednosemestrovej prednášky o vytvárajúcich funkciách na Moskovskej univerzite, určenej pre študentov bakalárskeho štúdia. Ďalším výborným zdrojom informácií o vytvárajúcich funkciách je kniha [30]. Táto kniha síce nebola písaná primárne ako učebnica, avšak je dostatočne podrobná a zrozumiteľná a ako uvádza v jej úvode autor, bola „otestovaná“ na študentoch Pensylvánskej univerzity, na kurze diskretnéj matematiky. Kniha [30] má navyše tú veľkú výhodu, že jej elektronická verzia je voľne dostupná na stránke autora. Okrem toho môžu záujemci nájsť základné informácie o vytvárajúcich funkciách aj v knihe [15], kde je im venovaná 10. kapitola a v legendárnej knihe *The Art of Computer Programming* [12] od Donalda E. Knutha, kde je vytvárajúcim funkciám venovaná podkapitola 1.2.9. Prevažná časť tejto kapitoly je stručným kompilátom z uvedených kníh.

Ako bolo spomenuté na začiatku kapitoly, študenti informatiky sa budú vo svojej praxi stretávať s vytvárajúcimi funkciami. Väčšinou to bude v prípadoch, v ktorých budú potrebovať vyjadriť rekurentne danú postupnosť explicitne. Či už to bude priamo na predmete *Programovanie* (skúste si naprogramovať riešenia cvičení 8.18 alebo 8.25 bez použitia vytvárajúcich funkcií), alebo neskôr na predmete *Analýza a zložitosť algoritmov*.

Vytvárajúce funkcie sú už pomerne starou záležitosťou. Do matematiky ich ako prvý zaviedol francúzsky matematik Abraham de Moivre¹ začiatkom 18. storočia, pri riešení všeobecných lineárnych rekurencií. Krátko po ňom techniku používania vytvárajúcich funkcií ďalej rozvinul

¹ S menom de Moivre sa môžeme stretnúť napríklad v súvislosti s umocňovaním komplexných čísel v goniometrickom tvare (Moivreova veta).

škótsky matematik James Stirling². Stirling vo svojej práci *Methodus Differentialis* z roku 1730 ukázal, ako sa na vytvárajúce funkcie dajú aplikovať aritmetické operácie, derivovanie a integrovanie. Ďalší slávny matematik používajúci vytvárajúce funkcie bol Leonhard Euler. Euler vo svojich prácach z rokov 1741 a 1750 používal vytvárajúce funkcie pri počítaní rozkladov. No a posledným tu spomenutým slávnym matematikom, ktorý rozvíjal metódy využitia vytvárajúcich funkcií, bol Pierre-Simon Laplace³. Laplace vo svojej práci *Théorie Analytique des Probabilités* z roku 1812 zaviedol využitie vytvárajúcich funkcií do štatistiky.

8.1.1 Mocninové rady

Definícia mocninového radu jednej premennej je nasledovná

Definícia 8.1.1 — Mocninový rad jednej premennej. Nech $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ je nekonečná postupnosť reálnych, prípadne komplexných, čísel a $x_0 \in \mathbb{R}$, prípadne $x_0 \in \mathbb{C}$. Mocninový rad jednej premennej je nekonečný rad v tvare

$$P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Namiesto zdĺhavého označenia *mocninový rad jednej premennej*, budeme v ďalšom texte používať len stručné označenie *mocninový rad*. Čísla a_k sa nazývajú *koefficienty* mocninového radu, číslo x_0 sa nazýva *stred* mocninového radu a x je reálna, prípadne komplexná premenná.



Viac ako uvedenú definíciu mocninového radu v texte o vytvárajúcich funkciách potrebovať nebudeme. Predchádzajúca definícia sa v učebniciach analýzy pre jednoduchosť zvykne uvádzať len pre komplexné čísla, keďže tie zahŕňajú aj reálne čísla. V zjednodušujúcich textoch, čo je aj náš prípad, sa zasa zvyknú spomínať len reálne čísla. Takže v nasledujúcom texte budú všetky koefficienty a_k vždy reálne. Okrem toho bude pri vytvárajúcich funkciách stred radu $x_0 = 0$.

Matematická analýza skúma rôzne vlastnosti mocninových a nielen mocninových radov. Najdôležitejšou z nich je konvergencia radu, resp. polomer konvergence radu. Niektoré mocninové rady zodpovedajú analytickým funkciám, a naopak, niektoré funkcie sa dajú rozvinúť do mocninového radu. V prípade záujmu si v nejakej základnej učebnici matematickej analýzy môžeme pozrieť časť venovanú Taylorovým radom, resp. Taylorovým polynómom.

Rozvinutie funkcie do Taylorovho radu je spôsob aproximácie funkcie pomocou nekonečného mocninového radu a zároveň je to niekedy jediný spôsob ako robiť zložitejšie operácie s danou funkciou (skúste napríklad nájsť neurčitý integrál $\int \frac{\sin x}{x} dx$). To, ako vyzerajú niektoré známe funkcie, vyjadrené pomocou Maclaurinovho radu⁴, si môžeme pozrieť na strane 157 vo vzorcoch (8.1) až (8.7).

V diskretnej matematike, predovšetkým v kombinatorike, sa na mocninové rady pozeráme len ako na nekonečné súčty násobkov mocnín premennej x a za stred radu väčšinou kladieme $x_0 = 0$. V ďalšom texte budeme predpokladať rovnosť $0^0 = 1$, čo nám zjednoduší zápis mocninových radov. Mocninovému radu $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, z definície 8.1.1, sa v diskretnej matematike zvykne hovoriť *formálny mocninový rad*. Označenie *formálny* znamená, že sa na tento rad budeme pozeráť výlučne

²S menom Jamesa Stirlinga sme sa mohli stretnúť napríklad v súvislosti so známou *Stirlingovou formulou* na aproximáciu hodnôt faktoriálu $n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

³Pierre-Simon Laplace bol slávny francúzsky matematik, fyzik, mechanik, astronóm, filozof. . . S jeho menom sa môžeme stretnúť napríklad v súvislosti s *Laplaceovou transformáciou*.

⁴Maclaurinov rad je Taylorov rad so stredom $x_0 = 0$.

ako na nekonečný súčet násobkov mocnín premennej x a nemusíme za ním vždy hľadať nejakú analytickú funkciu. Na rozdiel od matematickej analýzy nás v diskretnej matematike, v prevažnej väčšine prípadov, nebude zaujímať, či a kde daný rad konverguje. Formálny mocninový rad je vlastne vytvárajúca funkcia (definícia bude uvedená neskôr) a väčšinu ďalej uvádzaných operácií s vytvárajúcimi funkciami môžeme robiť bez ohľadu na konvergenciu príslušného radu.

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (8.1)$$

$$\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \quad (8.2)$$

$$\ln(x+1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \quad (8.3)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (8.4)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (8.5)$$

$$\sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (8.6)$$

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (8.7)$$

Nie všetky vyššie uvedené rady sú konvergetné pre všetky reálne (komplexné) čísla, rovnako ako nie všetky uvedené funkcie sú definované pre všetky reálne (komplexné) čísla. Ak sa obmedzíme na reálne funkcie, tak funkcie zo vzorcov (8.2), resp. (8.3), sú definované len pre $x \in (-\infty, 1)$, resp. $x \in (-1, \infty)$ a ich mocninové rady konvergujú len pre $x \in (-1, 1)$. Pomocou rozvoja funkcie do mocninového radu sme funkcii $f(x)$ priradili nekonečnú postupnosť koeficientov $(a_k)_{k=0}^{\infty}$.

Uvedený vzťah medzi funkciami a nekonečnými postupnosťami funguje aj opačným smerom. Nekonečným postupnostiam vieme v niektorých prípadoch priradiť funkcie. Už zo strednej školy by sme mali poznať vzťah⁵

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}, \quad \text{pre } x \in (-1, 1).$$

Ľavá a prostredná časť uvedenej rovnosti je geometrický rad utvorený z geometrickej postupnosti, ktorej prvý člen je 1 a kvocient je x . Vieme, že ak $|x| < 1$, tak uvedený rad konverguje a jeho súčet je funkcia na pravej strane rovnosti. Takže nekonečnej postupnosti $(1)_{k=0}^{\infty}$ zodpovedá funkcia $\frac{1}{1-x}$.

8.1.2 Motivačné príklady

Vytvárajúce funkcie spájajú nekonečné rady s funkciami. V tejto časti si ukážeme niekoľko jednoduchých motivačných príkladov, na ktorých si predvedieme, ako sa dajú vytvárajúce funkcie využiť pri riešení úloh. Rovnako ako v knihe [15] však musíme poznamenať, že pri týchto prvých príkladoch ide o umelo vytvorené úlohy, ktoré sa dajú riešiť aj bez vytvárajúcich funkcií.

⁵Súčet geometrického radu utvoreného z geometrickej postupnosti, ktorej kvocient je v absolútnej hodnote menší než 1. V stredoškolskej terminológii sa to zvykne označovať aj ako „súčet nekonečnej geometrickej postupnosti“.

Lepšou a realistickejšou ilustráciou využitia vytvárajúcich funkcií budú až úlohy o rekurentných postupnostiach v neskoršej časti tejto kapitoly.

■ **Príklad 8.1** K dispozícii máme 5 jednoeurových mincí, 3 dvojeurové mince a 1 päťeurovú bankovku. Koľkými spôsobmi môžeme zaplatiť sumu 9€ ?

Riešenie: čísla v tejto úlohe sú tak malé, že nie je problém nájsť riešenie úlohy vyskúšaním všetkých možností. My si však ukážeme riešenie úlohy pomocou vytvárajúcich funkcií.

Vieme, že ak násobíme dve mocniny s rovnakým základom, tak ich exponenty sa sčítavajú. To znamená, že $x^i x^j = x^{i+j}$. Ďalej si musíme uvedomiť, že ak máme súčin dvoch polynómov, ktorých koeficienty pri všetkých členoch x^t sa rovnajú 1

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^m)(1 + x + x^2 + \dots + x^n) = 1 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots + a_{m+n} x^{m+n},$$

tak koeficient a_k pri x^k vo výslednom polynóme zodpovedá počtu spôsobov, ktorými môžeme číslo k zapísať ako súčet dvoch čísel $0 \leq i \leq m$ a $0 \leq j \leq n$, čiže $k = i + j$ a $x^k = x^i x^j$.

V zadaní úlohy vystupuje 5 jednoeurových mincí, ktorým zodpovedá polynóm s členmi x^t , kde $0 \leq t \leq 5$. Potom 3 dvojeurové mince, ktorým zodpovedá polynóm s členmi x^{2t} , kde $0 \leq t \leq 3$ a napokon 1 päťeurová bankovka, ktorej zodpovedá polynóm s členmi x^{5t} , kde $0 \leq t \leq 1$. Takže zadanie úlohy môžeme modelovať súčinom polynómov

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x^2 + x^4 + x^6)(1 + x^5) = \\ = 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 4x^8 + 5x^9 + 4x^{10} + 4x^{11} + 3x^{12} + 2x^{13} + 2x^{14} + x^{15} + x^{16}$$

Pri člene x^9 je koeficient 5, čo znamená, že sumu 9€ vieme za daných podmienok zaplatiť 5 rôznymi spôsobmi. ■

V súvislosti s riešením predošlého príkladu si treba uvedomiť, že aj konečná postupnosť $(a_k)_{k=0}^n$ sa dá chápať ako nekonečná postupnosť $(b_k)_{k=0}^\infty$, kde $b_i = a_i$ pre $0 \leq i \leq n$ a $b_i = 0$ pre $i > n$. Nasledujúci príklad je prevzatý z knihy [13].

■ **Príklad 8.2** Autobusové lístky sú označené šesťmiestnymi číslami zostavenými z čísel 0 až 9. Lístok budeme považovať za „šťastný“, ak súčet jeho prvých troch čísel je rovný súčtu jeho posledných troch čísel. Napríklad lístok s číslom 123060 je „šťastný“, ale lístok s číslom 123456 nie je „šťastný“. Koľko existuje „šťastných“ lístkov, za predpokladu, že existujú všetky lístky od 000000 až po 999999?

Riešenie: všetky „šťastné“ lístky si rozdelíme do tried podľa súčtu ich prvej, resp. poslednej, trojice čísel. Budeme mať teda 28 tried „šťastných“ lístkov, od triedy 0, ktorej zodpovedá trojica 000, až po triedu 27, ktorej zodpovedá trojica 999. Očividne v triede 0, rovnako ako v triede 27, bude len 1 lístok. Označme si ako a_k číslo, ktoré vyjadruje počet rozkladov čísla k na súčet troch čísel, t. j. $k = p + q + r$, kde $p, q, r \in \{0, \dots, 9\}$. Je zrejmé, že počet „šťastných“ lístkov v triede k bude potom a_k^2 . Takže „šťastných“ lístkov bude spolu

$$\sum_{k=0}^{27} a_k^2.$$

Už nám zostáva len nájsť všetky čísla a_k . Čísla $(a_k)_{k=0}^{27}$ vypočítame rovnakým spôsobom, ako sme to robili v príklade 8.1. Čiže budú to koeficienty polynómu

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9)^3.$$

Uvedený polynóm sa pri troche trpezlivosti dá vypočítať aj ručne. Tí menej trpezliví môžu použiť nejakú pomôcku, napríklad online nástroj *Wolfram Alpha*⁶. Dostaneme tak polynóm

⁶<https://www.wolframalpha.com>

$$\begin{aligned}
&1 + 3x^1 + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + 21x^5 + 28x^6 + 36x^7 + 45x^8 + \\
&+ 55x^9 + 63x^{10} + 69x^{11} + 73x^{12} + 75x^{13} + 75x^{14} + 73x^{15} + 69x^{16} + 63x^{17} + \\
&+ 55x^{18} + 45x^{19} + 36x^{20} + 28x^{21} + 21x^{22} + 15x^{23} + 10x^{24} + 6x^{25} + 3x^{26} + x^{27}
\end{aligned}$$

Teraz už poznáme všetky čísla a_k a vieme vypočítať

$$\sum_{k=0}^{27} a_k^2 = 55\,252$$

Takže „šťastných“ čísel je presne 55 252.

Výhodou vytvárajúcich funkcií je však to, že s nimi môžeme narábať aj ako s funkciami. To znamená, že napríklad môžeme vyjadriť

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 = \frac{x^{10} - 1}{x - 1}$$

Potom dostaneme

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9)^3 = \left(\frac{x^{10} - 1}{x - 1}\right)^3 = \frac{x^{30} - 3x^{20} + 3x^{10} - 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}$$

Toto je výhodou najmä vtedy, ak by sme, napríklad pre veľké hodnoty, nemohli použiť nami uvedený postup. Napríklad by sme mohli modifikovať zadanie úlohy tak, že čísla lístkov nebudú 6 ciferné, ale budú $2n$ ciferné, kde $n \in \mathbb{N}$ bude nejaké veľké číslo. V knihe [13] máme uvedený aj spôsob, akým môžeme pomocou nástrojov infinitezimálneho počtu, jednoducho vypočítať aspoň kvalifikovaný odhad počtu „šťastných“ lístkov. ■

Trikom, ktorý sme použili v predošlých dvoch úlohách, môžeme dokázať binomickú vetu a rôzne ďalšie kombinatorické identity. Binomická veta hovorí o tom, čomu sa rovná n -tá mocnina súčtu dvoch čísel. Poznáme ju zo strednej školy a jej zjednodušená podoba⁷ je

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n. \quad (8.8)$$

Ľavá strana uvedenej rovnosti je súčin $\underbrace{(1 + x) \cdots (1 + x)}_{n \text{ krát}}$. Z predošlých dvoch príkladov vieme, že

$$(1 + x)^n = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

a koeficient a_k , pri člene x^k , zodpovedá počtu spôsobov, ktorými môžeme zapísať číslo k ako súčet n čísel 0, alebo 1. Číže a_k zodpovedá počtu rôznych riešení rovnice

$$k = c_1 + \cdots + c_n, \quad \text{kde } c_1, \dots, c_n \in \{0, 1\}.$$

Zo stredoškolskej kombinatoriky by sme mali vedieť, že počet riešení uvedenej rovnice je $\binom{n}{k}$, pretože ide o počet výberov k prvkov z n prvkovej množiny, pričom na poradí výberu nezáleží.

⁷Úplná podoba binomickej vety je:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n.$$

Odtiaľ dostávame $a_k = \binom{n}{k}$, a tým je dokázaná binomická veta (8.8). Ak teraz vo vzorci (8.8) dosadíme za premennú x konkrétne hodnoty $x = 1$ a $x = -1$, tak dostaneme dve známe kombinatorické identity:

$$\text{pre } x = 1 : \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (8.9)$$

$$\text{pre } x = -1 : \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (8.10)$$

8.2 Operácie s vytvárajúcimi funkciami

V úvodnej časti sme si pripomenuli, čo je to mocninový rad a v ilustračných príkladoch sme naznačili spojitosť medzi nekonečnými postupnosťami a funkciami vyjadrenými pomocou mocninových radov. V tejto časti si formálne definujeme vytvárajúce funkcie a ukážeme si, aké operácie s nimi môžeme robiť.

Existuje viacero typov vytvárajúcich funkcií. Ak sa lepšie pozrieme na obrázok z úvodu kapitoly, tak tam uvidíme štyri rôzne typy vytvárajúcich funkcií. Informatici sa však v praxi budú stretávať väčšinou len s *obyčajnými* a s *exponenciálnymi vytvárajúcimi funkciami*. Preto si teraz uvedieme definíciu a príklady obyčajných vytvárajúcich funkcií.

Definícia 8.2.1 — Obyčajná vytvárajúca funkcia. Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je nekonečná postupnosť reálnych čísel. Obyčajná vytvárajúca funkcia tejto postupnosti, je mocninový rad

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Ak má postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ len konečne veľa nenulových členov, tak jemu zodpovedajúca vytvárajúca funkcia sa nazýva aj vytvárajúci polynóm.

Premenná x v definícii 8.2.1 je reálna, alebo komplexná. Mocninový rad, zodpovedajúci nekonečnej postupnosti, sme v definícii označili symbolom $a(x)$. Vieme, že vo všeobecnosti tento rad nemusí konvergovať. Pokiaľ ale tento rad konverguje pre nejakú konkrétnu hodnotu x_0 , tak z matematickej analýzy vieme, že bude konvergovať aj pre všetky hodnoty x spĺňajúce podmienku $|x| \leq |x_0|$. V takom prípade zodpovedá mocninový rad $a(x)$ analytickej funkcii.

■ **Príklad 8.3** Majme danú nekonečnú postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, kde pre každé $n \in \mathbb{N}$: $a_n = 1$. Tejto postupnosti zodpovedá rad

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \quad (8.11)$$

Ako už bolo spomenuté v závere časti 8.1.1 (strana 157), rad (8.11) je geometrický, ktorého prvý člen je 1 a kvocient je x . Ďalej vieme, že pre hodnoty x , spĺňajúce podmienku $|x| < 1$, tento rad konverguje. To znamená, že pre hodnoty $x \in (-1, 1)$ bude rad (8.11) konvergovať, čiže bude zodpovedať nejakej analytickej funkcii. Mali by sme poznať aj vzorec na výpočet súčtu konvergujúceho geometrického radu. V prípade radu (8.11) je tento súčet $\frac{1}{1-x}$, pre $x \in (-1, 1)$. Čiže nekonečnej postupnosti $(1)_{n=0}^{\infty}$ a jej vytvárajúcej funkcii (8.11) zodpovedá analytická funkcia $a(x) = \frac{1}{1-x}$. ■

Rad $a(x)$ z definície obyčajnej vytvárajúcej funkcie bude vo všeobecnosti konvergovať pre nejakú hodnotu $x_0 \neq 0$ práve vtedy, ak bude postupnosť $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n=0}^{\infty}$ ohraničená. Ak by uvedená

postupnosť bola neohraničená, tak by mohla byť ohraničená napríklad postupnosť $\left(\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}\right)_{n=0}^{\infty}$, čím by sme sa dostali ku definícii exponenciálnej vytvárajúcej funkcie⁸.

8.2.1 Dôležité upozornenie

V celej tejto kapitole sa budeme venovať výlučne *obyčajným vytvárajúcim funkciám*. Tie sú definované na strane 160 a pre jednoduchosť ich budeme nazývať len *vytvárajúce funkcie*. Preto všade, kde v tejto kapitole budú spomínané vytvárajúce funkcie, sa tým myslia obyčajné vytvárajúce funkcie. Až úplne na záver, v podkapitole 8.3.5, uvedieme definíciu exponenciálnych vytvárajúcich funkcií a spomenieme dva ďalšie typy vytvárajúcich funkcií.

Ako už bolo spomenuté v podkapitole 8.1.1 v súvislosti s formálnymi mocninovými radmi, nie vždy, presnejšie málokedy, musíme brať ohľad na to, či a kde daný rad, predstavujúci nejakú vytvárajúcu funkciu, konverguje. Prvý a hlavný dôvod je, že väčšina operácií s vytvárajúcimi funkciami je dobre definovaná a realizovateľná bez ohľadu na konvergenciu zodpovedajúcich radov. Druhým dôvodom je fakt, že pomocou vytvárajúcich funkcií často len potrebujeme získať predstavu o tom, ako asi vyzerá riešenie daného problému. Ak už akýmkoľvek spôsobom získame predstavu o riešení daného problému, tak môžeme inými metódami, napríklad matematickou indukciou, overiť, či ide o správne riešenie. V nasledujúcich podkapitolách si ukážeme niektoré z týchto operácií.

8.2.2 Súčet vytvárajúcich funkcií

Najelementárnejšia operácia, ktorá sa dá robiť s vytvárajúcimi funkciami, je ich súčet, resp. ich lineárna kombinácia. Definícia súčtu, presnejšie povedané lineárnej kombinácie, dvoch vytvárajúcich funkcií je úplne intuitívna.

Definícia 8.2.2 — Súčet vytvárajúcich funkcií. Nech $a(x)$ je vytvárajúca funkcia postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $b(x)$ je vytvárajúca funkcia postupností $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom $\alpha a(x) + \beta b(x)$ je vytvárajúca funkcia postupnosti $(\alpha a_n + \beta b_n)_{n=0}^{\infty}$.

■ **Príklad 8.4** Ako bude vyzeráť vytvárajúca funkcia postupnosti $(2)_{n=0}^{\infty}$?

Riešenie: z príkladu 8.3 vieme, že vytvárajúca funkcia jednotkovej postupnosti $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $b_n = 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, je $b(x) = \frac{1}{1-x}$. Pre postupnosť zo zadania úlohy platí, že $a_n = b_n + b_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$. Preto vytvárajúca funkcia postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ bude

$$a(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{1-x}.$$

■

8.2.3 Vytvárajúca funkcia nekonečnej postupnosti posunutej doprava

Ak máme nekonečnú postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a jej zodpovedajúcu vytvárajúcu funkciu $a(x)$, tak sa môžeme zaoberať otázkou, ako bude vyzeráť vytvárajúca funkcia, keď postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ posunieme o k miest doprava alebo doľava.

Najskôr si ukážeme, ako vyzerá vytvárajúca funkcia postupnosti posunutej doprava, pretože je to jednoduchšia úloha. Majme danú postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, ktorá má vytvárajúcu funkciu $a(x)$ a chceme nájsť vytvárajúcu funkciu postupnosti $(\underbrace{0, \dots, 0}_k, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$. Vytvárajúcu funkciu tejto posunutej postupnosti si označme ako $a_k^+(x)$, pričom index k znamená posunutie o k miest

⁸Pozri definíciu 8.3.3 na strane 175.

a exponent + znamená posunutie doprava. Potom vytvárajúca funkcia $a_k^+(x)$ bude mať podobu

$$a_k^+(x) = 0x^0 + 0x^1 + \dots + 0x^{k-1} + a_0x^k + a_1x^{k+1} + \dots + a_nx^{k+n} + \dots$$

Z definície vytvárajúcej funkcie $a(x)$ platí

$$a(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \implies a_k^+(x) = x^k \cdot a(x)$$

Lema 8.2.1 — Vytvárajúca funkcia postupnosti posunutej doprava. Majme danú nekonečnú postupnosť $(a_n)_{n=0}^\infty$ a nech $a(x)$ je jej vytvárajúca funkcia. Potom vytvárajúca funkcia postupnosti $(a'_n)_{n=0}^\infty$, kde $a'_i = 0$ pre $i \in \{0, \dots, k-1\}$ a $a'_i = a_{i-k}$ pre $i \geq k$, bude

$$a_k^+(x) = x^k \cdot a(x).$$

Dôkaz: vyplýva z definície obyčajnej vytvárajúcej funkcie a argumentov uvedených pred touto lemov. Q.E.D.

■ **Príklad 8.5** Nájdite vytvárajúcu funkciu jednotkovej postupnosti, posunutej o 1 miesto doprava.

Riešenie: musíme nájsť vytvárajúcu funkciu nekonečnej postupnosti $(0, 1, 1, \dots, 1, \dots)$. Vieme, že vytvárajúca funkcia jednotkovej postupnosti $(1)_{n=0}^\infty$ je $a(x) = \frac{1}{1-x}$. Potom podľa lemy 8.2.1, bude mať hľadaná vytvárajúca funkcia podobu

$$a_1^+(x) = x \cdot a(x) = \frac{x}{1-x}.$$

■

Ako nájdeme vytvárajúcu funkciu nekonečnej postupnosti posunutej o k miest doľava, si ukážeme až v podkapitole 8.2.5.

8.2.4 Súčin vytvárajúcich funkcií

Súčin dvoch vytvárajúcich funkcií sa počíta tak, že sa obvyklým spôsobom vynásobia zodpovedajúce nekonečné rady. To, ako bude tento súčin vyzeráť, naznačujú už príklady 8.1 a 8.2. Ilustrujeme si to najskôr na príklade a potom uvedieme definíciu.

■ **Príklad 8.6** Majme dve nekonečné postupnosti $(a_n)_{n=0}^\infty$, $(b_n)_{n=0}^\infty$ a ich vytvárajúce funkcie

$$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

$$b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$$

Ak spravíme súčin vytvárajúcich funkcií $a(x)$ a $b(x)$, tak tento bude mať podobu

$$\begin{aligned} a(x) \cdot b(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots = \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots \end{aligned}$$

V súčine $a(x) \cdot b(x)$ dostaneme koeficient c_n pri člene x^n , ako súčet všetkých súčinov koeficientov z radu $a(x)$, resp. $b(x)$, pri členoch x^i , resp. x^j , takých, že $i + j = n$. ■

Definícia 8.2.3 — Súčin vytvárajúcich funkcií. Majme dve nekonečné postupnosti $(a_n)_{n=0}^\infty$, $(b_n)_{n=0}^\infty$ a ich vytvárajúce funkcie

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad \text{a} \quad b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n.$$

Potom súčin týchto dvoch vytvárajúcich funkcií bude

$$a(x) \cdot b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{kde} \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

■ **Príklad 8.7** Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $(n)_{n=0}^{\infty}$.

Riešenie: najskôr si uvedomme, ako vyzerá súčin dvoch vytvárajúcich funkcií, z ktorých jedna zodpovedá nekonečnej jednotkovej postupnosti. Čiže $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ kde $b_n = 1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$ a $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ je ľubovoľná postupnosť. Súčin vytvárajúcich funkcií týchto postupností je

$$b(x) \cdot c(x) = c_0 + (c_0 + c_1)x + \cdots + (c_0 + \cdots + c_n)x^n + \cdots \quad (8.12)$$

Vytvárajúcu funkciu postupnosti $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ už poznáme z príkladu 8.3. Je to funkcia $b(x) = \frac{1}{1-x}$. Preto vieme, že

$$\frac{c(x)}{1-x} = c_0 + (c_0 + c_1)x + \cdots + (c_0 + \cdots + c_n)x^n + \cdots,$$

kde $c(x)$ je vytvárajúca funkcia postupnosti $(c_n)_{n=0}^{\infty}$. Vezmime si teraz ako postupnosť $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, jednotkovú postupnosť posunutú o jedno miesto doprava. Čiže $c_0 = 0$ a $c_n = 1$ pre všetky $n \geq 1$. Potom $b(x) \cdot c(x)$ z rovnice (8.12) je vytvárajúca funkcia postupnosti $(n)_{n=0}^{\infty}$ zo zadania úlohy. Vytvárajúcu funkciu postupnosti $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ opäť už poznáme z príkladu 8.5. Je to funkcia $c(x) = \frac{x}{1-x}$. Preto vytvárajúca funkcia postupnosti $(n)_{n=0}^{\infty}$ bude

$$a(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

■

8.2.5 Vytvárajúca funkcia nekonečnej postupnosti posunutej doľava

V podkapitole 8.2.3 sme si ukázali, ako dostaneme vytvárajúcu funkciu nekonečnej postupnosti posunutej doprava. V prípade posunutia postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ o k miest doľava, je situácia mierne zložitejšia. Postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ posunutá o k miest doľava, bude mať podobu $(a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n}, \dots)$. Čiže môžeme ju zapísať ako $(a'_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $a'_i = a_{k+i}$, pre všetky $i \in \mathbb{N}$. Jej vytvárajúcu funkciu budeme označovať analogicky ako sme to robili pri posune doprava, t.j. $a_k^-(x)$, kde exponent – znamená posun doľava.

Vytvárajúca funkcia pôvodnej postupnosti má tvar

$$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

Z uvedenej vytvárajúcej funkcie dostaneme vytvárajúcu funkciu posunutej postupnosti $(a'_n)_{n=0}^{\infty}$, ak od nej odčítame prvých k členov a ostatné členy vydělíme x^k . To znamená

$$\begin{aligned} a_k^-(x) &= \frac{(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots) - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{k-1}x^{k-1})}{x^k} = \\ &= \frac{a(x) - (a_0 + a_1x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1})}{x^k}. \end{aligned}$$

Lema 8.2.2 — Vytvárajúca funkcia postupnosti posunutej doľava. Majme danú nekonečnú postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a nech $a(x)$ je jej vytvárajúca funkcia. Potom vytvárajúca funkcia postupnosti $(a'_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $a'_i = a_{k+i}$ pre $i \in \mathbb{N}$, bude

$$a_k^-(x) = \frac{a(x) - (a_0 + a_1x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1})}{x^k}.$$

Dôkaz: vyplýva z definície obyčajnej vytvárajúcej funkcie a argumentov uvedených pred touto lemov. Q.E.D.

■ **Príklad 8.8** Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $(n)_{n=0}^{\infty}$, posunutej o 2 miesta doľava.

Riešenie: našou úlohou je nájsť vytvárajúcu funkciu postupnosti $(2, 3, 4, \dots, n, \dots)$. Z príkladu 8.7 vieme, že postupnosť $(n)_{n=0}^{\infty}$ má vytvárajúcu funkciu $a(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Podľa lemy 8.2.2 bude vytvárajúca funkcia postupnosti $(2, 3, 4, \dots, n, \dots)$

$$a_2^-(x) = \frac{a(x) - x}{x^2} = \frac{\frac{x}{(1-x)^2} - x}{x^2} = \frac{x - x(1-x)^2}{x^2(1-x)^2} = \frac{2x^2 - x^3}{x^2(1-x)^2} = \frac{2-x}{(1-x)^2}.$$

■

8.2.6 Substitúcia αx , pre $\alpha \in \mathbb{R}$, do vytvárajúcej funkcie

Majme nekonečnú postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a jej vytvárajúcu funkciu $a(x)$. Čo sa stane, ak do vytvárajúcej funkcie $a(x)$ substituujeme namiesto premennej x súčin αx , kde $\alpha \in \mathbb{R}$?

Lema 8.2.3 — Substitúcia αx , pre $\alpha \in \mathbb{R}$, do vytvárajúcej funkcie. Nech $a(x)$ je vytvárajúca funkcia postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Potom $a(\alpha x)$ bude vytvárajúca funkcia postupnosti $(\alpha^n a_n)_{n=0}^{\infty}$.

Dôkaz: vieme, že

$$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Takže po substitúcii dostaneme

$$a(\alpha x) = a_0 + a_1\alpha x + a_2\alpha^2x^2 + \dots + a_n\alpha^n x^n + \dots$$

Preto funkcia $a(\alpha x)$ bude vytvárajúcou funkciou postupnosti $(\alpha^n a_n)_{n=0}^{\infty}$. Q.E.D.

■ **Príklad 8.9** Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $(3^n)_{n=0}^{\infty}$.

Riešenie: z príkladu 8.3 vieme, že vytvárajúcou funkciou postupnosti $(1)_{n=0}^{\infty}$ je $a(x) = \frac{1}{1-x}$. Potom podľa lemy 8.2.3 bude $a(3x) = \frac{1}{1-3x}$ vytvárajúcou funkciou postupnosti $(3^n)_{n=0}^{\infty}$. ■

Pomocou jednoduchého triku a substitúcie αx do vytvárajúcej funkcie môžeme z nekonečnej postupnosti vybrať jej každý druhý člen. Majme nekonečnú postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a jej vytvárajúcu funkciu $a(x)$. Z postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ chceme vybrať len všetky párne, resp. všetky nepárne členy. Pre vytvárajúce funkcie týchto podpostupností platí

$$\frac{1}{2}(a(x) + a(-x)) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \dots + a_{2n}x^{2n} + \dots \quad (8.13)$$

$$\frac{1}{2}(a(x) - a(-x)) = a_1x^1 + a_3x^3 + a_5x^5 + \dots + a_{2n+1}x^{2n+1} + \dots \quad (8.14)$$

Vytvárajúca funkcia $\frac{1}{2}(a(x) + a(-x))$ zodpovedá postupnosti $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots, 0, a_{2n}, 0, \dots)$ a funkcia $\frac{1}{2}(a(x) - a(-x))$ zodpovedá postupnosti $(0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \dots, 0, a_{2n+1}, 0, \dots)$. Pomocou rozšírenia uvedeného triku a použitím všetkých komplexných koreňov rovnice $x^k = 1$ vieme z postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ vybrať jej každý k -tý člen. V prípade potreby môžu záujemci nájsť ďalšie informácie napríklad v knihe [12].

8.2.7 Substitúcia x^k , pre $k \in \mathbb{N}$, do vytvárajúcej funkcie

Ďalší trik, umožňujúci „nafúknuť“ pôvodnej nekonečnej postupnosti, je substitúcia x^k za premennú x do vytvárajúcej funkcie.

Lema 8.2.4 — Substitúcia x^k , pre $k \in \mathbb{N}$, do vytvárajúcej funkcie. Nech $a(x)$ je vytvárajúca funkcia postupnosti $(a_n)_{n=0}^\infty$. Potom $a(x^k)$ bude vytvárajúca funkcia postupnosti $(b_n)_{n=0}^\infty$, kde $b_{kn} = a_n$, pre každé $n \in \mathbb{N}$ a $b_i = 0$ ak $i \neq kn$.

Dôkaz: vieme, že

$$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

Takže po substitúcii dostaneme

$$a(x^k) = a_0 + a_1x^k + a_2x^{2k} + \cdots + a_nx^{nk} + \cdots$$

Preto funkcia $a(x^k)$ bude vytvárajúcou funkciou postupnosti

$$\left(a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{(k-1) \text{ núl}}, a_1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(k-1) \text{ núl}}, a_2, \dots, \underbrace{0, \dots, 0}_{(k-1) \text{ núl}}, a_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{(k-1) \text{ núl}}, \dots \right). \quad \text{Q.E.D.}$$

■ **Príklad 8.10** Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})_{n=0}^\infty$. Zápis $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť čísla x . Čiže $\lfloor 3.6 \rfloor = 3$ a $\lfloor -2.4 \rfloor = -3$.

Riešenie: našou úlohou je nájsť vytvárajúcu funkciu postupnosti $(1, 1, 2, 2, 4, 4, \dots, 2^n, 2^n, \dots)$. Vieme, že vytvárajúcou funkciou postupnosti $(1)_{n=0}^\infty$ je $a(x) = \frac{1}{1-x}$. Ďalej je podľa lemy 8.2.3 $b(x) = \frac{1}{1-2x}$ vytvárajúcou funkciou postupnosti $(2^n)_{n=0}^\infty$. My potrebujeme túto postupnosť „nafúknuť“ tak, že medzi každé dve susedné čísla vložíme nulu. Potrebujeme vytvoriť postupnosť $(c_n)_{n=0}^\infty = (1, 0, 2, 0, 4, 0, \dots)$. Vytvárajúcou funkciou postupnosti $(c_n)_{n=0}^\infty$ bude, podľa lemy 8.2.4, funkcia $c(x) = \frac{1}{1-2x^2}$. Podľa lemy 8.2.1 bude $c_1^+(x) = \frac{x}{1-2x^2}$ vytvárajúcou funkciou postupnosti $(c_n)_{n=0}^\infty$ posunutej o jedno miesto doprava. Potom podľa definície 8.2.2 bude

$$d(x) = \frac{1}{1-2x^2} + \frac{x}{1-2x^2} = \frac{1+x}{1-2x^2}$$

vytvárajúcou funkciou postupnosti $(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})_{n=0}^\infty$. ■

8.2.8 Derivovanie vytvárajúcich funkcií

Podobu derivácie⁹ vytvárajúcej funkcie dostaneme priamo z definície vytvárajúcej funkcie a z vlastností derivácií, ktoré poznáme z matematickej analýzy. Ak máme danú nekonečnú postupnosť $(a_n)_{n=0}^\infty$ a jej vytvárajúcu funkciu

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

tak jej derivácia bude

$$a'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

⁹Pri derivovaní sa na vytvárajúcu funkciu pozeráme opäť len ako na formálny mocninový rad a využívame skutočnosť, že derivácia súčtu je súčet derivácií.

Lema 8.2.5 — Derivácia vytvárajúcej funkcie. Daná je nekonečná postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a jej vytvárajúca funkcia $a(x)$. Potom $a'(x)$ je vytvárajúca funkcia postupnosti $((n+1)a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$.

Dôkaz: vyplýva z vyššie uvedeného. Q.E.D.

Použitím derivácie vytvárajúcej funkcie veľmi jednoduchým spôsobom dostaneme napríklad riešenie príkladu 8.7.

■ **Príklad 8.11** Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $(n)_{n=0}^{\infty}$.

Riešenie: vieme, že vytvárajúca funkcia jednotkovej postupnosti $(1)_{n=0}^{\infty}$ je $b(x) = \frac{1}{1-x}$. Deriváciou tejto funkcie dostaneme vytvárajúcu funkciu postupnosti $(1, 2, 3, \dots)$, ktorú už len stačí posunúť o 1 miesto doprava, aby sme dostali postupnosť zo zadania úlohy. Takže $b'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, podľa lemy 8.2.1, ešte násobíme x , čím dostávame hľadanú vytvárajúcu funkciu $a(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. ■

8.2.9 Integrovanie vytvárajúcich funkcií

Integrovanie¹⁰ vytvárajúcich funkcií sa tiež robí veľmi jednoducho. Ak máme danú nekonečnú postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a jej vytvárajúcu funkciu

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

tak jej neurčitý integrál bude

$$\int a(x) dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots$$

P V predošlom integráli, resp. integráloch, chýba aditívna konštanta c . Tú v tejto časti položíme $c = 0$ a pre jednoduchosť ju nebudeme písať.

Lema 8.2.6 — Integrál vytvárajúcej funkcie. Majme danú nekonečnú postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a nech $a(x)$ je jej vytvárajúca funkcia. Potom $\int a(x) dx$ je vytvárajúca funkcia postupnosti

$$\left(0, \frac{a_0}{1}, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots\right).$$

Dôkaz: vyplýva z vyššie uvedeného. Q.E.D.

Použitím integrovania vytvárajúcej funkcie vieme veľmi jednoducho dostať napríklad vytvárajúcu funkciu harmonickej postupnosti.

■ **Príklad 8.12** Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n=0}^{\infty}$.

Riešenie: vieme, že vytvárajúca funkcia jednotkovej postupnosti $(1)_{n=0}^{\infty}$ je $b(x) = \frac{1}{1-x}$. Integrovaním funkcie $b(x)$ dostaneme vytvárajúcu funkciu postupnosti $\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$, ktorú stačí už len posunúť o 1 miesto doľava. Platí

$$\int b(x) dx = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x).$$

Podľa lemy 8.2.2 ešte musíme odpočítať prvý člen postupnosti ($a_0 = 0$) a vydeliť túto funkciu x , aby sme dostali hľadanú vytvárajúcu funkciu. Vytvárajúca funkcia harmonickej postupnosti je

$$a(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

¹⁰Pri integrovaní sa na vytvárajúcu funkciu pozeráme opäť len ako na formálny mocninový rad a využívame skutočnosť, že integrál súčtu je súčet integrálov.

8.3 Príklady použitia vytvárajúcich funkcií

V tejto časti si ilustrujeme využitie vytvárajúcich funkcií na zaujímavejších príkladoch, než boli jednoduché príklady z predošlých podkapitol. Začneme známou Fibonacciho postupnosťou.

8.3.1 Fibonacciho postupnosť

Fibonacci bol jeden z najvýznamnejších stredovekých matematikov. Žil na prelome 12. a 13. storočia v Pise a svoje práce väčšinou podpisoval menom *Leonardus Pisanus*, resp. *Leonardus filius Bonacij*, čiže v preklade *Leonard, syn Bonaccioho*, z čoho vzniklo *Fibonacci*. Fibonacci pomohol do matematiky zaviesť pozičnú desiatkovú číselnú sústavu, nulu ako číslo¹¹ a s jeho menom je neoddeliteľne spojená *Fibonacciho postupnosť*.

Fibonacciho postupnosť, ktorú pravdepodobne všetci poznáme už zo základnej a strednej školy, sa niekedy nazýva aj *zajačia postupnosť*, pretože súvisí s úlohou o rozmnožovaní párov zajacov. Je to rekurentná postupnosť definovaná vzťahom

$$a_0 = a_1 = 1 \quad \text{a} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \text{ pre } n \geq 0.$$

Čiže prvé dva členy postupnosti sa rovnajú 1 a každý ďalší člen dostaneme ako súčet predchádzajúcich dvoch členov. Fibonacciho postupnosť vyzerá takto

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots)$$

Pri Fibonacciho postupnosti nie je problém zistiť, čomu sa rovná prvý, desiaty, alebo, s trochou trpezlivosti, aj stý člen. Ale čo spravíme, ak potrebujeme vypočítať n -tý člen, pre nejaké obrovské číslo $n \in \mathbb{N}$? Na to potrebujeme explicitné vyjadrenie členov postupnosti, t. j. musíme nájsť takú funkciu $F(x)$, aby $F(n) = a_n$ pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

Ideme teda hľadať explicitné vyjadrenie členov Fibonacciho postupnosti. Začneme tým, že si vytvoríme vytvárajúcu funkciu Fibonacciho postupnosti

$$f(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + \dots$$

Teraz sa pozrime na rekurentný vzťah, ktorým je Fibonacciho postupnosť definovaná $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$. Čo dostaneme, ak si vytvoríme dve kópie Fibonacciho postupnosti, jednu posunieme o 1 miesto doprava, druhú posunieme o 2 miesta doprava a tieto posunuté postupnosti sčítame? Pozrime sa na to

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & \dots \\ + & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & \dots \\ \hline & 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & \dots \end{array}$$

Vidíme, že sme dostali „takmer“ Fibonacciho postupnosť. Len člen a_0 v nej chýba a je nahradený nulou. Pomocou lemy 8.2.1 spravíme uvedenú operáciu nie na samotnej postupnosti, ale na jej vytvárajúcej funkcii. Tým dostaneme

$$(x + x^2)f(x) = f(x) - 1 \quad \implies \quad f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Už teda poznáme vytvárajúcu funkciu Fibonacciho postupnosti a pomocou nej nájdeme explicitné vyjadrenie jej členov. To dosiahneme pomocou rozkladu zlomku $\frac{1}{1-x-x^2}$ na parciálne zlomky. Nájdeme si korene polynómu $1 - x - x^2$. Sú nimi $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ a $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Ľahko sa potom overí, že platí

¹¹Nula bola v časoch Fibonacciho relatívnou novinkou. Ľudia sa jej už od staroveku báli a vyhýbali sa jej. Len na konci 10. storočia, čiže necelých 200 rokov pred Fibonacciho pôsobením, používanie nuly pápežskou bulou povolil pápež Silvester II. Mimochodom bol to jediný pápež, ktorý bol pôvodným vzdelaním matematik a astronóm a prvý francúzsky pápež.

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x-x_1} - \frac{1}{x-x_2} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x_2 \left(1 - \frac{x}{x_2}\right)} - \frac{1}{x_1 \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)} \right).$$

Preto vytvárajúcu funkciu Fibonacciho postupnosti môžeme písať v tvare

$$f(x) = \frac{1}{x_2\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}} - \frac{1}{x_1\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}}.$$

Z lemy 8.2.3 ďalej vieme, že

$$f(x) = \frac{1}{x_2\sqrt{5}} \cdot \left(1 + \frac{x}{x_2} + \frac{x^2}{x_2^2} + \frac{x^3}{x_2^3} + \dots \right) - \frac{1}{x_1\sqrt{5}} \cdot \left(1 + \frac{x}{x_1} + \frac{x^2}{x_1^2} + \frac{x^3}{x_1^3} + \dots \right).$$

Z uvedeného zápisu už priamo vidíme, že

$$a_0 = \frac{1}{x_2\sqrt{5}} - \frac{1}{x_1\sqrt{5}}, \quad a_1 = \frac{1}{x_2^2\sqrt{5}} - \frac{1}{x_1^2\sqrt{5}}, \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{x_2^{n+1}} - \frac{1}{x_1^{n+1}} \right), \quad \dots$$

Ak teraz za x_1 a x_2 dosadíme konkrétne hodnoty $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ a využijeme rovnosť $x_1 \cdot x_2 = -1 \Rightarrow (x_1 \cdot x_2)^{n+1} = (-1)^{n+1}$, tak dostaneme explicitné vyjadrenie členov Fibonacciho postupnosti

$$F(n) = a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right), \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}. \quad (8.15)$$

K tomuto vzorcu sa dá dospieť aj viacerými inými spôsobmi, ako sa ľahko môžeme presvedčiť v doporučenej literatúre. Explicitné vyjadrenie členov Fibonacciho postupnosti (8.15) môžeme už považovať za finálne, alebo ho ešte môžeme upraviť. Jednak preto, že v ňom je zbytočne veľa členov $(-1)^i$ a jednak preto, aby výsledný vzorec bol rovnaký, ako nám dá veta 8.3.1 v podkapitole 8.3.3. Platí

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \quad \text{a} \quad \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} = (-1)^{n+1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

Preto (8.15) môžeme písať ako

$$F(n) = a_n = \frac{(-1)^n(-1)^{n+1}}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Keďže $(-1)^n(-1)^{n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$, môžeme (8.15) ešte upraviť do tvaru.

$$F(n) = a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right), \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N}. \quad (8.16)$$

V tvare (8.16) dostaneme explicitné vyjadrenie členov Fibonacciho postupnosti, ak ho budeme hľadať pomocou vety 8.3.1.

8.3.2 Fibonacciho postupnosť inak

V predošlej podkapitole sme si ukázali, ako sa dá pomocou vytvárajúcich funkcií odvodiť explicitné vyjadrenie Fibonacciho postupnosti. V tejto podkapitole si toto explicitné vyjadrenie Fibonacciho postupnosti odvodíme ešte raz, avšak iným a trochu jednoduchším spôsobom. Takto si nielen pripomenieme to, že väčšina matematických problémov sa dá riešiť viac než len jedným spôsobom, ale zároveň si takto aj overíme správnosť explicitného vyjadrenia Fibonacciho postupnosti z predošlej podkapitoly. Majme teda danú postupnosť definovanú rekurentným vzťahom

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \text{ pre } n \geq 0. \quad (8.17)$$

Predpokladajme, že existuje riešenie rekurencie (8.17) v tvare $a_n = q^n$, kde $q \in \mathbb{C}$. Potom musí platiť

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n$$

a po vykrátení oboch strán rovnice číslom q^n

$$q^2 = q + 1 \Rightarrow q^2 - q - 1 = 0.$$

Posledná kvadratická rovnica má dve riešenia

$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{a} \quad q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Takže $a_n = q_1^n$ a $a_n = q_2^n$ sú riešenia rekurencie $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ a je zrejmé, že aj ich ľubovoľná lineárna kombinácia

$$a_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n, \quad \text{kde } c_1, c_2 \in \mathbb{C} \quad (8.18)$$

bude riešením rekurencie (8.17). Aby sme dostali Fibonacciho postupnosť, musíme nájsť také konštanty c_1 a c_2 , pre ktoré dostaneme $a_0 = a_1 = 1$. Musí preto platiť sústava rovníc

$$\begin{aligned} 1 = a_0 &= c_1 q_1^0 + c_2 q_2^0 \\ 1 = a_1 &= c_1 q_1^1 + c_2 q_2^1 \end{aligned}$$

Riešime teda sústavu dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2 \\ 1 &= c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \end{aligned}$$

Jej riešením sú čísla

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \quad \text{a} \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right).$$

Dosadením čísel c_1 a c_2 do vzťahu (8.18) dostaneme explicitné vyjadrenie n -tého člena Fibonacciho postupnosti

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right), \quad \text{pre každé } n \in \mathbb{N},$$

ktoré je ekvivaletné s explicitným vyjadrením (8.16) z predošlej podkapitoly.

8.3.3 Všeobecné rekurentné postupnosti

Pre všeobecné rekurentné postupnosti platí nasledujúca veta, ktorú uvedieme bez dôkazu. Jej dôkaz nie je komplikovaný, je len pracný na rozpisovanie. Robí sa podobným spôsobom, akým sme robili explicitné vyjadrenie členov Fibonacciho postupnosti v predošlých podkapitolách.

Veta 8.3.1 — Explicitné vyjadrenie rekurentných postupností. Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je číselná postupnosť, ktorej prvých r členov $(a_0, \dots, a_{r-1})$ je daných a ďalšie členy sú definované rekurentným vzťahom

$$a_n = c_{r-1}a_{n-1} + c_{r-2}a_{n-2} + \dots + c_1a_{n-r+1} + c_0a_{n-r}, \text{ kde } c_0, \dots, c_{r-1} \in \mathbb{R}. \quad (8.19)$$

Na základe rekurentného vzťahu (8.19) definujúceho postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, si zostrojíme polynóm

$$x^r - c_{r-1}x^{r-1} - c_{r-2}x^{r-2} - \dots - c_1x - c_0 \quad (8.20)$$

a nájdeme všetky jeho komplexné korene. Nech $x_1, \dots, x_k$ sú všetky rôzne komplexné korene polynómu (8.20), pričom koreň x_i má násobnosť t_i . Potom existujú konštanty s_{ij} , kde $1 \leq i \leq k$ a $1 \leq j \leq t_i$ také, že platí

$$a_n = \sum_{i=1}^k (s_{i1}x_i^n + s_{i2}nx_i^n + s_{i3}n^2x_i^n + \dots + s_{it_i}n^{t_i-1}x_i^n).$$

Predošlá veta možno na prvý pohľad vyzerá odstrašujúco, avšak zdanie klame. Naviac, v príkladoch sa budeme väčšinou zaoberať rekurentnými postupnosťami, ktorých členy sú definované pomocou dvoch, resp. troch, predošlých členov, takže polynóm obvykle bude len kvadratický alebo kubický. Konštanty s_{ij} , spomenuté vo vete, budeme počítať pomocou prvých r členov rekurentnej postupnosti, ktoré budú dané. Pomocou nich zostrojíme sústavu r lineárnych rovníc o r neznámych. Naviac determinant tejto sústavy bude vždy nenulový, a preto bude mať táto sústava vždy práve jedno riešenie.

■ **Príklad 8.13** Dané sú prvé dva členy $a_0 = 1$, $a_1 = 2$ postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ a rekurentný vzťah $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, pre $n \geq 2$, definujúci jej ďalšie členy. Nájdite explicitné vyjadrenie členov tejto postupnosti.

Riešenie: prvé členy tejto postupnosti sú $(1, 2, 4, 8, 16, \dots)$. Prvá možnosť riešenia, je postupovať rovnako ako v prípade Fibonacciho postupnosti. To znamená zostrojíme vytvárajúcu funkciu danej postupnosti

$$a(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + \dots$$

Ak 3 násobok danej postupnosti posunieme o 1 miesto doprava a -2 násobok danej postupnosti posunieme o 2 miesta doprava a tieto postupnosti sčítame, tak dostaneme

$$(3x - 2x^2) \cdot a(x) = a(x) - 1 + x.$$

Z toho si ľahko odvodíme vytvárajúcu funkciu

$$a(x) = \frac{1-x}{1-3x+2x^2} = \frac{1-x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x}.$$

Z príkladu 8.9 a lemy 8.2.3 už vieme, ako bude postupnosť, zodpovedajúca vytvárajúcej funkcii $a(x)$, vyzeráť. Bude to postupnosť $(2^n)_{n=0}^{\infty}$. Takže už vieme, ako bude vyzeráť explicitné vyjadrenie členov danej postupnosti.

Druhá možnosť riešenia je použiť vetu 8.3.1. Daný rekurentný vzťah, definujúci členy postupnosti, si prepíšeme tak, aby sme všetky členy postupnosti mali na ľavej strane rovnice a na pravej strane rovnice bola nula. K rekurencii potom zostrojíme zodpovedajúci polynóm

$$a_n - 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0 \quad \longrightarrow \quad x^2 - 3x + 2.$$

Uvedený polynóm $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ má dva korene $x_1 = 1$ a $x_2 = 2$. Podľa vety 8.3.1 musia existovať konštanty s_{11} a s_{21} také, že platí

$$a_n = s_{11}1^n + s_{21}2^n. \quad (8.21)$$

Už len potrebujeme nájsť tieto konštanty. Poznáme prvé dva členy postupnosti $a_0 = 1$ a $a_1 = 2$. Keďže rovnosť (8.21) musí platiť aj pre tieto členy, dosadíme ich hodnoty do rovnosti (8.21) a dostaneme sústavu dvoch lineárnych rovníc o dvoch neznámych

$$\begin{aligned} 1 &= s_{11} + s_{21}2^0 & \implies & s_{11} + s_{21} = 1 \\ 2 &= s_{11} + s_{21}2^1 & \implies & s_{11} + 2s_{21} = 2 \end{aligned}$$

Riešením uvedenej sústavy sú konštanty $s_{11} = 0$ a $s_{21} = 1$. Preto explicitné vyjadrenie členov danej postupnosti bude $a_n = 2^n$. ■

8.3.4 Počet binárnych stromov na n vrcholoch

Predtým, než začneme s odvodzovaním vzorca pre počet binárnych stromov na n vrcholoch, si definujeme *Newtonove binomické koeficienty*. Každý sa už na stredoškolskej kombinatorike mohol stretnúť s pojmom *binomický koeficient*. Binomické koeficienty sú definované pre nezáporné celé čísla n, k , kde $n \geq k$, pomocou vzťahu

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!}$$

a používajú sa napríklad pri počítaní kombinácií, prípadne v binomickom rozvoji $(a+b)^n$ atď. Newtonove binomické koeficienty sú zovšeobecnením binomických koeficientov pre komplexné hodnoty n .

Definícia 8.3.1 — Newtonove binomické koeficienty. Nech $\alpha \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$. Potom Newtonov binomický koeficient $\binom{\alpha}{k}$ je definovaný vzťahom

$$\binom{\alpha}{0} = 1 \quad \text{a} \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}, \quad \text{pre } k \geq 1.$$

Zovšeobecnené binomické koeficienty zaviedol Isaac Newton pri skúmaní rozvoja $(1+x)^\alpha$. Ak je n celé číslo, tak binomická veta hovorí, ako bude vyzeráť rozvoj $(1+x)^n$. Ako však bude tento rozvoj vyzeráť, ak exponent nie je celé číslo, alebo je to dokonca komplexné číslo? Newton zistil¹², že rozvoj $(1+x)^\alpha$ bude mať pre ľubovoľné $\alpha \in \mathbb{C}$ tvar

$$(1+x)^\alpha = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \dots \quad (8.22)$$

Z (8.22) vidíme, že nekonečná postupnosť $\left(\binom{\alpha}{n}\right)_{n=0}^\infty$ má vytvárajúcu funkciu $(1+x)^\alpha$, ktorá konverguje pre všetky $|x| < 1$. Pre Newtonove (zovšeobecnené) binomické koeficienty, podobne ako pre binomické koeficienty, sa dajú dokázať rôzne identity. Tým sa tu však podrobnejšie zaoberať

¹²My to vieme zistiť tiež. Stačí rozvinúť funkciu $(1+x)^\alpha$ do Taylorovho radu so stredom $x_0 = 0$ (Maclaurinov rad).

nebudeme. Záujemci, v prípade potreby, nájdu dostatok informácií v odporúčanej literatúre. My si tu odvodíme len jednu takúto identitu, pretože ju neskôr budeme potrebovať. Predtým, než uvidíme príklad, definujeme si jeden pomocný pojem, ktorý nám zjednoduší zápis.

Definícia 8.3.2 — Dvojný faktoriál (semifaktoriál). Dvojný faktoriál čísla $n \in \mathbb{N}$, označujeme $n!!$ a definuje sa nasledovne. Pre $n = 0$ platí $0!! = 1$ a pre $n \geq 1$ je $n!!$ súčin všetkých celých čísel i , kde $1 \leq i \leq n$, takých, že číslo i má rovnakú paritu ako číslo n .

Pre lepšiu zrozumiteľnosť rozpíšeme definíciu dvojného faktoriálu zvlášť pre nepárne a zvlášť pre párne čísla

$$\begin{aligned} (2n-1)!! &= 1.3 \dots (2n-1) & \text{napríklad} & \quad 7!! = 1.3.5.7 = 105 \\ (2n)!! &= 2.4 \dots 2n & \text{napríklad} & \quad 8!! = 2.4.6.8 = 384 \end{aligned}$$

Priamo z definície dvojného faktoriálu je zrejmá rovnosť

$$(2n-1)!!(2n)!! = (2n)! \quad \implies \quad (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{(2n)!!} \quad (8.23)$$

a rovnako triviálne sa nahliadne platnosť rovnosti

$$(2n)!! = \underbrace{2.4 \dots (2n)}_{n \text{ činiteľov}} = 2^n (1.2 \dots n) = 2^n n! \quad (8.24)$$

■ **Príklad 8.14** Pre Newtonov binomický koeficient dokážte identitu

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^{(n-1)}}{4^n(2n-1)} \cdot \binom{2n}{n}$$

Riešenie: začneme tým, že si $\binom{\frac{1}{2}}{n}$ rozpíšeme podľa definície 8.3.1. Ďalej sú to už len jednoduché úpravy algebraických výrazov a využitie rovností (8.23), (8.24) a definície binomických koeficientov zo strednej školy

$$\begin{aligned} \binom{\frac{1}{2}}{n} &= \frac{\overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}^{n \text{ činiteľov}}}{n!} \cdot \frac{2^n}{2^n} = \frac{\overbrace{(1-2)(1-4)\dots(1-2(n-1))}^{(n-1) \text{ činiteľov}}}{2^n n!} = \\ &= \frac{\overbrace{(1-2)(1-4)\dots(1-2n)}^{(n-1) \text{ činiteľov}}}{2^n n!} \cdot \frac{(-1)^{(n-1)}}{(-1)^{(n-1)}} = \frac{(-1)^{(n-1)}(1.3\dots(2n-3))}{2^n n!} \cdot \frac{(2n-1)}{(2n-1)} = \\ &= \frac{(-1)^{(n-1)}(2n-1)!!}{2^n(2n-1)n!} = \frac{(-1)^{(n-1)}}{2^n(2n-1)n!} \cdot \frac{(2n)!}{(2n)!!} = \\ &= \frac{(-1)^{(n-1)}}{2^n(2n-1)n!} \cdot \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^{(n-1)}}{2^{2n}(2n-1)} \cdot \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(-1)^{(n-1)}}{4^n(2n-1)} \cdot \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

■

Podme sa teraz venovať binárnym stromom. Pri zisťovaní počtu binárnych stromov na n vrchoch bude pre nás výhodnejšie použiť indukčnú (rekurzívnu) definíciu 4.4.1 (strana 80) binárnych stromov. Táto definícia hovorí

Binárny strom je buď prázdny strom, t. j. nemá žiadnu hranu ani vrchol, alebo je to koreňový strom s koreňom a usporiadanou dvojicou podstromov (B_1, B_2) , kde B_1 aj B_2 sú binárne stromy.

Budeme teraz skúmať nekonečnú postupnosť $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, kde b_n je počet všetkých neizomorfných binárnych stromov na n vrchoch. Prvé členy tejto postupnosti ľahko nájdeme aj skúšaním všetkých možností a zistíme, že

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 2, \quad b_3 = 5, \quad b_4 = 14, \quad \dots$$

Podľa definície 4.4.1 je aj prázdny strom binárnym stromom, a preto $b_0 = 1$. Vytvárajúca funkcia postupnosti $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ bude

$$b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots$$

Ak by sa nám podarilo nájsť rekurentné vyjadrenie postupnosti $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, tak podľa vety 8.3.1 by sme už ľahko našli aj explicitné vyjadrenie jej členov. V tomto prípade to však nebude také jednoduché, pretože rekurentné vyjadrenie postupnosti $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ síce existuje, ale nie je lineárne.

Vráťme sa opäť ku definícii 4.4.1, ktorej podstatnú časť máme odcitovanú vyššie. Ak poznáme hodnoty $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$, tak ako pomocou nich vypočítame hodnotu b_n ? Binárny strom na n vrchoch je tvorený koreňom (1 vrchol) a usporiadanou dvojicou (B_1, B_2) binárnych stromov, ktoré majú dokopy $(n-1)$ vrcholov. Preto musí pre $n \geq 1$ platiť

$$b_n = b_0b_{n-1} + b_1b_{n-2} + \dots + b_{n-2}b_1 + b_{n-1}b_0 = \sum_{i=0}^{n-1} b_ib_{n-1-i}. \quad (8.25)$$

Vzorec (8.25) nám ale, podľa definície 8.2.3, vyjadruje koeficient pri člene x^{n-1} v súčine vytvárajúcich funkcií $b(x) \cdot b(x) = b^2(x)$. Alebo inak povedané, b_n je, pre $n \geq 1$, koeficient pri člene x^n vo vytvárajúcej funkcii $xb^2(x)$. Takže funkcia $xb^2(x)$ bude „takmer“ zodpovedať postupnosti $(b_n)_{n=0}^{\infty}$. Rozdiel je len v člene b_0 , pretože prvý člen postupnosti, ktorú vytvára funkcia $xb^2(x)$, bude 0 a nie 1. Odtiaľ dostávame vzťah pre vytvárajúcu funkciu $b(x)$

$$xb^2(x) = b(x) - 1 \quad \implies \quad xb^2(x) - b(x) + 1 = 0 \quad (8.26)$$

na poslednú rovnicu v (8.26) sa môžeme pozeráť ako na funkcionálnu kvadratickú rovnicu a podľa známeho vzorca nájsť jej riešenie

$$b(x)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x} \quad (8.27)$$

Keďže $b_0 = 1$, zvolíme si ku funkcionálnej rovnici (8.26) počiatočnú podmienku $b(0) = 1$ a pozrieme sa bližšie na dve možnosti $(\pm)$ v (8.27).

- Ak by sme zobrali $b(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$, čomu sa bude rovnať $b(0)$? Musíme vypočítať limitu pre $x \rightarrow 0$

$$\text{Limita } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x} \text{ neexistuje!} \quad (8.28)$$

Čitateľ zlomku má limitu 2 a menovateľ konverguje k nule, ale znamienko sa líši v závislosti od smeru. Limita zľava je $-\infty$ a limita zprava je ∞ . Takže obojstranná limita neexistuje.

- Ak zoberieme $b(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$, čomu sa teraz bude rovnať $b(0)$? Počítame limitu pre $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \cdot \frac{1+\sqrt{1-4x}}{1+\sqrt{1-4x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{2x(1+\sqrt{1-4x})} = 1 \quad (8.29)$$

Z (8.28) a (8.29) vidíme, že jediné vyhovujúce riešenie rovnice (8.26) je $b(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. Vytvárajúcu funkciu už máme, potrebujeme ku nej ešte nájsť zodpovedajúcu nekonečnú postupnosť. Platí $\sqrt{1-4x} = (1-4x)^{\frac{1}{2}}$ a z (8.22) a lemy 8.2.3 vieme, že

$$\sqrt{1-4x} = \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1}(-4)x + \binom{\frac{1}{2}}{2}(-4)^2x^2 + \dots + \binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^nx^n + \dots$$

Máme teda vytvárajúcu funkciu $b(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ a poďme si nájsť jej zodpovedajúcu postupnosť krok po kroku

- ▷ Funkcii $\sqrt{1-4x}$ prináleží nekonečná postupnosť $\left((-4)^n \binom{\frac{1}{2}}{n}\right)_{n=0}^{\infty}$.
- ▷ Funkcii $-\sqrt{1-4x}$ prináleží nekonečná postupnosť $\left((-1)(-4)^n \binom{\frac{1}{2}}{n}\right)_{n=0}^{\infty}$.
- ▷ Funkcii $1-\sqrt{1-4x}$ bude zodpovedať „takmer“ rovnaká postupnosť ako funkcii $-\sqrt{1-4x}$. Rozdiel je len v tom, že sa eliminuje konštantný člen 1.
- ▷ Koeficient $\frac{1}{x}$ pri vytvárajúcej funkcii $1-\sqrt{1-4x}$ nám, podľa lemy 8.2.2, posunie postupnosť o 1 miesto doľava. Konštantný člen sa už rovná 0, a preto je násobenie koeficientom $\frac{1}{x}$ dobre definované.
- ▷ Napokon nám násobenie koeficientom $\frac{1}{2}$ zníži hodnotu každého člena postupnosti na polovicu.

Podľa predošlých bodov už vieme, ako bude vyzeráť explicitné vyjadrenie nekonečnej postupnosti zodpovedajúcej vytvárajúcej funkcii $b(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$. To znamená, že už vieme explicitne vyjadriť počet binárnych stromov na n vrcholoch. Platí

$$b_n = -\frac{(-4)^{(n+1)}}{2} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{n+1} \quad (8.30)$$

V príklade 8.14 sme si odvodili identitu pre číslo $\binom{\frac{1}{2}}{n}$, čo teraz využijeme na zjednodušenie výrazu (8.30).

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{(-4)^{(n+1)}}{2} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{n+1} = -\frac{(-4)^{(n+1)}}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{4^{(n+1)}(2n+1)} \binom{2n+2}{n+1} = \\ &= \frac{(-4)^{(n+1)}}{2} \cdot \frac{(-1)^{(n+1)}}{4^{(n+1)}(2n+1)} \binom{2n+2}{n+1} = \frac{4^{(n+1)}}{2 \cdot 4^{(n+1)}(2n+1)} \binom{2n+2}{n+1} = \\ &= \frac{1}{2(2n+1)} \cdot \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} = \frac{1}{2(2n+1)} \cdot \frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)}{n!(n+1)n!(n+1)} = \\ &= \frac{2}{2(2n+1)} \cdot \binom{2n}{n} \frac{(2n+1)(n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \end{aligned}$$

Práve sme odvodili explicitné vyjadrenie počtu binárnych stromov na n vrcholech. Tento počet je $b_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}$. Čísla b_n sa nazývajú *Catalanove čísla* a môžeme sa s nimi stretnúť nielen

v súvislosti s počtom binárnych stromov na n vrcholoch, ale aj vo viacerých iných súvislostiach, v diskretnej matematike a informatike. Iné príklady ich použitia môžeme nájsť napríklad v knihe [13] a v ďalších knihách z doporučenej literatúry.

8.3.5 Poznámka na záver

Ako bolo spomenuté v časti 8.2.1, na záver pre úplnosť uvedieme, že existujú aj iné, než len obyčajné vytvárajúce funkcie. My sme v celej tejto kapitole pracovali len s obyčajnými vytvárajúcimi funkciami a nazývali sme ich len vytvárajúce funkcie. Existuje však celý rad ďalších typov vytvárajúcich funkcií, ktoré majú svoje uplatnenia v rôznych oblastiach. Ak sa pozrieme na titulný obrázok tejto kapitoly (strana 155), tak tam vidíme ešte exponenciálne, Lambertove a Poissonove vytvárajúce funkcie, a to ešte stále nie sú všetky. Uvedieme tu definíciu exponenciálnych vytvárajúcich funkcií, ktoré majú aplikácie napríklad aj v elektrotechnike.

Definícia 8.3.3 — Exponenciálna vytvárajúca funkcia. Nech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je nekonečná postupnosť reálnych čísel. Exponenciálna vytvárajúca funkcia tejto postupnosti je rad

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \cdot x^n.$$

P Nebude asi žiadnym prekvapením, že názov exponenciálnej vytvárajúcej funkcie je odvodený od exponenciálnej funkcie. Napríklad pre postupnosť $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (1)_{n=0}^{\infty}$ dostávame

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad (\text{pozri (8.1), strana 157})$$

Tento rad konverguje pre všetky hodnoty $x \in \mathbb{R}$. On dokonca konverguje aj pre všetky hodnoty $x \in \mathbb{C}$, ale komplexnými číslami a funkciami teraz čtených čitateľov nechceme strašiť.

8.4 Cvičenia

Cvičenie 8.1 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ jednotiek}}, 1, 0, 0, \dots)$.

Cvičenie 8.2 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $(\underbrace{n, n, \dots, n}_{n \times n}, 0, 0, \dots)$.

Cvičenie 8.3 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, kde

$$a_n = \begin{cases} (n+1)(n+2), & \text{pre } 0 \leq n \leq (k-1) \\ 0, & \text{pre } n \geq k, \end{cases} \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}.$$

Cvičenie 8.4 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $(\alpha n)_{n=0}^{\infty}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cvičenie 8.5 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $(n^2)_{n=0}^{\infty}$.

Cvičenie 8.6 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $(\alpha^n n)_{n=0}^{\infty}$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cvičenie 8.7 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, kde

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{pre } n = 0 \\ \frac{\alpha^n}{n}, & \text{pre } n \geq 1, \text{ kde } \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Cvičenie 8.8 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, kde

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{pre } n = 0 \\ \frac{\alpha^n}{n!}, & \text{pre } n \geq 1, \text{ kde } \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Cvičenie 8.9 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, kde

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{pre } n \text{ párne} \\ \frac{\alpha^n}{n!}, & \text{pre } n \text{ nepárne}. \end{cases}$$

Cvičenie 8.10 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, kde

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{pre } n \text{ nepárne} \\ \frac{\alpha^n}{n!}, & \text{pre } n \text{ párne}. \end{cases}$$

Cvičenie 8.11 Dokážte kombinatorickú identitu

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Cvičenie 8.12 Dokážte kombinatorickú identitu

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

Cvičenie 8.13 Vypočítajte súčet

$$(a) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}. \quad (b) \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

Cvičenie 8.14 Multinomická veta je zovšeobecnením binomickej vety a hovorí o tom, ako sa umocňuje súčet viacerých členov. Pre ľubovoľné $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n \\ k_1, k_2, \dots, k_m \geq 0}} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}$$

Výraz $\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m}$ sa nazýva *multinomický koeficient* a vypočíta sa zo vzťahu

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \dots k_m!}$$

Dokážte multinomickú vetu rovnakým spôsobom, aký sme na strane 159 použili pri dôkaze binomickej vety. ■

Cvičenie 8.15 Zistite, aký koeficient bude pri člene

- | | |
|--|---|
| (a) $a^2 b^3 c^5$ vo výraze $(a + b - c)^{12}$ | (e) x^4 vo výraze $(1 - x + 2x^2)^5$ |
| (b) $a^3 b^2 c^7$ vo výraze $(a + b - c)^{12}$ | (f) x^5 vo výraze $(1 + x + x^2 + x^3)^6$ |
| (c) $ab^6 c^2$ vo výraze $(2\sqrt{a} - b^3 + c^2)^5$ | (g) x^4 vo výraze $(1 - x + x^2 - x^3)^6$ |
| (d) $a^2 b^2 c^6 d^2$ vo výraze $\left(2a - 3b^2 + \frac{c^3}{2} - \frac{d}{3}\right)^7$ | (h) x^5 vo výraze $(1 - x + x^2 - x^3)^8$ |

■

Cvičenie 8.16 Nájdite vytvárajúcu funkciu postupnosti $(2^n + 3^n)_{n=0}^\infty$. ■

Cvičenie 8.17 Pre Newtonove binomické koeficienty dokážte identitu

$$\binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

■

Cvičenie 8.18 Postupnosť $(a_n)_{n=0}^\infty$ je daná rekurentne pomocou niekoľkých prvých členov a rekurentného vzťahu definujúceho ďalšie členy. Nájdite explicitné vyjadrenie člena a_n pre všetky $n \in \mathbb{N}$.

- $a_0 = a_1 = 1$, pre $n \geq 2$ $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$
- $a_0 = 1, a_1 = 2$, pre $n \geq 2$ $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$
- $a_0 = a_1 = 1, a_2 = 2$, pre $n \geq 3$ $a_n = 5a_{n-1} - 8a_{n-2} + 4a_{n-3}$
- $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, pre $n \geq 3$ $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$
- $a_0 = a_1 = 1$, pre $n \geq 2$ $a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$
- $a_0 = a_1 = 1$, pre $n \geq 2$ $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$

■

Cvičenie 8.19 Hraciu plochu rozmeru $1 \times n$ ofarbujeme troma rôznymi farbami. Koľko, pre dané $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, existuje takých zafarbení, pri ktorých žiadne dve susedné polia nie sú zafarbené rovnakou farbou?

Návod: Odvodte si rekurentný vzťah. ■

Cvičenie 8.20 Koľko n -ciferných čísel zložených len z jednotiek a dvojek neobsahuje žiadne dve jednotky bezprostredne za sebou? ■

Cvičenie 8.21 Nech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Koľko existuje slov dĺžky n , zložených len z písmen a, b a c tak, že neobsahujú dvojicu bezprostredne za sebou idúcich písmen a? ■

Cvičenie 8.22 Nech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Koľko existuje slov dĺžky n , zložených len z písmen a, b, c a d tak, že neobsahujú dvojicu bezprostredne za sebou idúcich písmen a alebo b a ani dvojice písmen ab alebo ba?? ■

Cvičenie 8.23 Nech $n \in \mathbb{N}$. Pre dané n zistite, koľko kostier má graf W_n , tzv. koleso na $(n+1)$ vrcholoch. ■

Cvičenie 8.24 Správne uzátvorkovaný výraz, obsahujúci n párov zátvoriek je taký, v ktorom sa dva páry zátvoriek „nekrížia“. Čiže ak si pri čítaní zľava-doprava očísľujeme otváracie zátvorky dvoch párov ako 1. a 2., tak najskôr musí prísť uzatváracia zátvorka 2. a potom až uzatváracia zátvorka 1. Napríklad pre $n = 1$ existuje len 1 správne uzátvorkovaný výraz $()$, pre $n = 2$ máme 2 správne uzátvorkované výrazy $()()$ a $(())$, ... Dokážte, že pre n párov zátvoriek zodpovedá počet správne uzátvorkovaných výrazov Catalanovmu číslu $c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. ■

Cvičenie 8.25 Nech $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Pre dané n vypočítajte determinant matice rozmeru $n \times n$

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$(e) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 3 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$(f) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$



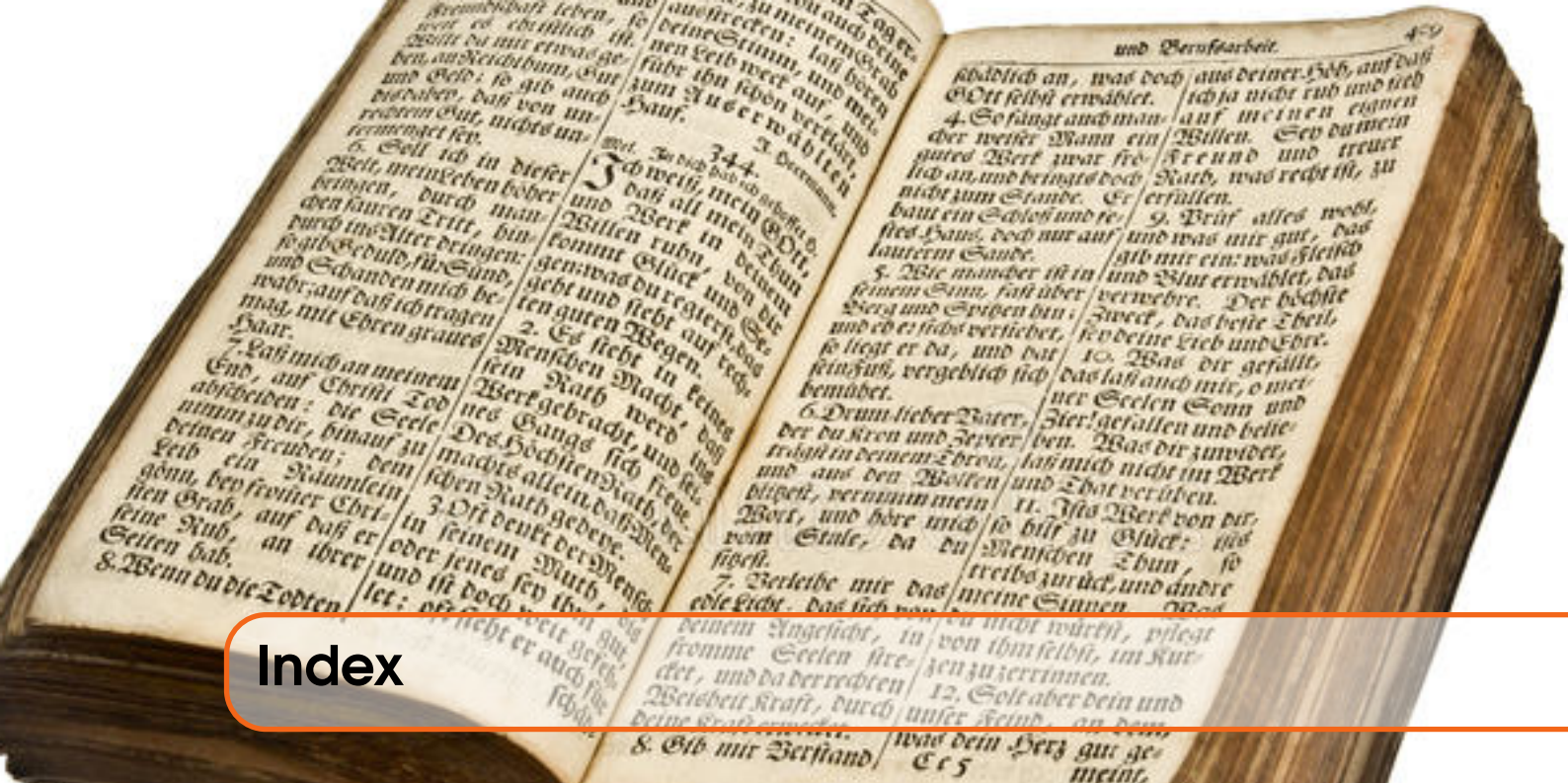
Použitá a odporúčaná literatúra

- [1] Martin Aigner: **Combinatorial Theory**, SPRINGER VERLAG, HEIDELBERG 1979.
- [2] Bohuslav Balcar, Petr Štěpánek: **Teorie množin**, ACADEMIA, PRAHA 1986.
- [3] Berežný, Draženská, Kravcová: **Zbierka úloh z diskkrétnej matematiky**, FEI TU, KOŠICE 2005. <http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/10/Zbierka-DM.pdf>
- [4] J. A. Bondy, U. S. Murty: **Graph Theory With Applications**, NORTH-HOLLAND 1976.
- [5] Reinhard Diestel: **Graph Theory**, SPRINGER 2000.
- [6] Harary, Frank: **Graph theory**, ADDISON-WESLEY 1969.
- [7] Richard Johnsonbaugh: **Discrete Mathematics**, PEARSON 2017.
- [8] Josef Kaucký: **Kombinatorické identity**, VEDA, VYDAVATELSTVO SAV, BRATISLAVA 1975.
- [9] Martin Knor: **Úvod do matematickej logiky**, FIIT STU, BRATISLAVA 2016.
<http://www.math.sk/jmkollar/literatura/Knor-Uvod.do.matematickej.logiky.pdf>
- [10] Martin Knor: **Teória grafov**, SVF STU, BRATISLAVA 2008.
<http://www.svf.stuba.sk/docs/dokumenty/skripta/teoria-grafov.martin.knor.pdf>
- [11] Martin Knor, Jozef Kollár: **Matematika pre architektov**, STU BRATISLAVA, 2002.
- [12] Donald E. Knuth: **The Art of Computer Programming, Volume 1**, ADDISON-WESLEY, 1997.
- [13] Sergei K. Lando: **Lectures on Generating Functions**, AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, STUDENT MATHEMATICAL LIBRARY 2003.
- [14] Milan Mareš: **Příběhy matematiky**, PISTORIUS & OLŠANSKÁ, PŘÍBRAM 2011.
- [15] J. Matoušek, J. Nešetřil: **Kapitoly z diskrétní matematiky**, KAROLINUM, PRAHA 2002.

- [16] М. В. Меньшиков, А. М. Ревякин, А. Н. Копылова, Ю. Н. Макаров, Б. С. Стечкин: **Комбинаторный Анализ – Задачи и упражнения**, ИЗДАТЕЛЬСТВО »НАУКА«, МОСКВА 1982.
- [17] В. А. Носов: **Комбинаторика и теория графов**, МОСКВА 1999.
<http://intsys.msu.ru/staff/vnosov/combgraph.htm> (PDF verzia)
- [18] Stanislav Palúch: **Algoritmická teória grafov**, ŽILINSKÁ UNIVERZITA, 2008.
<http://frcatel.fri.uniza.sk/users/paluch/grafy.pdf>
- [19] Ján Plesník: **Grafové algoritmy**, VEDA, BRATISLAVA 1983.
- [20] Franco P. Preparata, Raymond T. Yeh: **Úvod do teórie diskretných matematických štruktúr**, ALFA, BRATISLAVA 1982.
- [21] Edward M. Reingold, Jurg Nievergelt, Narsingh Deo: **Combinatorial Algorithms – Theory and Practice**, PRENTICE-HALL, NEW JERSEY 1977.
- [22] Beloslav Riečan a kol.: **Úlohy z matematiky pre 4. ročník gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1976.
- [23] Beloslav Riečan a kol.: **Matematika pre 4. ročník gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1987.
- [24] Beloslav Riečan a kol.: **Zbierka úloh z matematiky pre 4. ročník gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1991.
- [25] Karol Rován a kol.: **Zbierka riešených úloh z algebry pre SVŠ a odborné školy**, SPN, BRATISLAVA 1969.
- [26] К. А. Рыбников: **Введение в Комбинаторный Анализ**, ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА, МОСКВА 1985.
- [27] Raymond M. Smullyan: **A Beginner's Guide to Mathematical Logic**, DOVER PUBLICATIONS, NEW YORK 2014.
- [28] František Vejsada, František Talafous: **Zbierka úloh z matematiky pre SVŠ a gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1973.
- [29] Naum J. Vilenkin: **Rozhovory o množinách**, SPN, BRATISLAVA 1972.
- [30] Herbert S. Wilf: **generatingfunctionology**, ACADEMIC PRESS, INC. 1994.
<https://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>
- [31] Niklaus Wirth: **Algoritmy a štruktúry údajov**, ALFA, BRATISLAVA 1989.
- [32] Štefan Znáť: **Kombinatorika a teória grafov**, PF UK, BRATISLAVA 1978.

IV

Index



Index

Symboly

$\in$ operátor „patrí do množiny“	11
$\notin$ operátor „nepatří do množiny“	11
$\subset$ operátor vlastnej podmnožiny	12
$\subseteq$ operátor nevlastnej podmnožiny	12
$\cup$ operátor zjednotenia množín	12
$\cap$ operátor prieniku množín	13
$\setminus$ operátor rozdielu množín	13
$\bar{A}$ komplement množiny A	14
$\neg$ operátor logickej negácie	20
$\vee$ operátor disjunkcie	20
$\wedge$ operátor konjunkcie	20
$\Leftrightarrow$ operátor ekvivalencie	20
$\Rightarrow$ operátor implikácie	20
$\exists$ existenčný kvantifikátor	23
$\forall$ všeobecný kvantifikátor	23
$ $ operátor „ a delí b “ ($a b$)	40
$\triangle$ operátor symetrickej diferencie	41

A

acyklický graf	62
algoritmus	
Borůvkov	203
Dijkstrov	229–231
hľadania kostry grafy	179
Jarníkov (Primov)	197
konštrukcie očíslovaného stromu z Prüferovho kódu	241

B

konštrukcie optimálneho Huffmanovho kódu	206
konštrukcie Prüferovho kódu z očíslovaného stromu	235
konštrukcie prehľadávacieho binárneho stromu	215
Kruskalov	201, 202
pažravý	201
prehľadávania grafu do hĺbky	187
prehľadávania grafu do šírky	182
zostavovania identifikačného kódu binárneho stromu	219
zostavovania identifikačného kódu koreňového stromu	222
antisymetrickosť (relácie)	125, 130
Appel Kenneth (1932–2013)	48
ASCII kód	204
atomická formula	20
axióma	31
backtracking	186
bijektivnosť	145
binárny strom	80
binomický koeficient	171
Borůvka Otakar (1899–1995)	196, 203
Bouton Charles Leonard (1869–1922)	224

C

Catalanovo číslo 174, 213
 Cayley Arthur (1821–1895) 16, 48, 241
 centrálny vrchol grafu 56
 centrum grafu 56
 cesta (v grafe) 55, 112
 cyklus (v grafe) 57, 112

Č

číslo

Catalanovo 174, 213
 celé $\mathbb{Z}$ 15
 iracionálne 15
 komplexné $\mathbb{C}$ 16
 kvaternion 16
 oktonion 16
 prirodzené $\mathbb{N}$ 14
 racionálne $\mathbb{Q}$ 15
 reálne $\mathbb{R}$ 15

D

dátová štruktúra

fronta 180
 zásobník 180

dôkaz

matematickou indukciou 37, 39
 nepriamy 35
 priamy 32
 sporom 36

de Moivre Abraham (1667–1754) 155

de Morgan Augustus (1806–1871) 48

definícia 32

Dijkstra Edsger Wybe (1930–2002) . 197, 230

Dijkstrov algoritmus 229, 231

disjunkcia ($\vee$) 21

disjunktné množiny 13

E

ekvivalencia ($\Leftrightarrow$) 22

ekvivalencia (relácie) 140

entropický kód 204

Euklides Alexandrijský (~3. stor. pred n.l.) 15

Euklidovský priestor 108

Euler Leonhard (1707–1783) 47, 84, 109, 156

F

faktor grafu 62

faktoriál 39

dvojný 172

Fano Roberto Mario (1917–2016) 204

Fibonacci Leonardo (~1170 – ~1240) ... 167

Fibonacciho postupnosť 167

formula

atomatická 20

prvotná 20

výroková 20, 22

formuly

ekvivalentné 22

fronta 180

funkcia 143

bijektívna 145

charakteristická funkcia množiny 149

definičný obor 143

injektívna 144

inverzná 145

koobor 143

obor hodnôt 143

parciálna 143

surjektívna 144

vytvárajúca

exponenciálna, 175

obyčajná, 160

zložená 146

G

Gauss Carl Friedrich (1777-1855) 38

geometrická postupnosť

súčet prvých n členov 39

Gonthier Georges 48

graf

acyklický 62

artikulácia 61

bipartitný 53

kompletný ($K_{m,n}$), 54, 112

centrum 56

cesta 55, 112

cesta (P_n) 112

cyklus 57, 112

hamiltonovský, 95

cyklus (C_n) 112

digraf 50

dĺžka ťahu 55

dĺžka cesty 55

graf

dĺžka cyklu	57
dĺžka sledu	54
dokonalé párovanie	89
Eulerova veta o rovinných grafoch	110
eulerovský	87
eulerovský ťah	85
otvorený, 85, 87	
uzavretý, 85, 86	
excentricita vrcholu	56
faktor	62
hodnota	196
hodnota hrany	195
hodnota sledu	229
homeomorfné grafy	112
hrana	49
ohodnotená, 195	
hranica oblasti	108
húsenica	113
hviezda (S_n)	113
incidencia (vrchol–hrana)	50
invariant	101
izomorfizmus	
binárnych stromov, 106	
koreňových stromov, 105	
izomorfizmus grafov	98, 99
izomorfné grafy	99
jadro	225
jednoduchý (obyčajný)	51
Knight graph	98
koleso (W_n)	113
komplementárny	53
kompletný (K_n)	52, 112
kompletný bipartitný ($K_{m,n}$)	54, 112
komponent súvislosti	57, 60
konečný	49
koreňový strom	77
dieťa vrcholu, 78	
koncový vrchol, 78	
list, 78	
otec vrcholu, 78	
podstrom, 78	
potomok vrcholu, 78	
predkovia vrcholu, 78	
súrodenci (vrcholy), 78	
úroveň vrcholu, 77	
vnútorný vrchol, 78	
výška, 77	

graf

kostra	62
minimálna, 196	
Kuratowského veta	112
ľavý podstrom	213
les	77
list	77
matica incidencie	72
matica susednosti	69
minimálna kostra	196
množina vrcholov	
nezávislá, 225	
stabilná, 225	
most	61
najlacnejšia cesta	230
najlacnejšia kostra	196
násobné hrany	50
nekonečný	49
neorientovaný	49
nesúvislý	57
nezávislá množina vrcholov	225
oblasť	108
obyčajný (jednoduchý)	51
ohodnotený	195
ohodnotenie hrany	195
orientovaná hrana	49, 50
orientovaný	49, 50
otvorený sled	55
párovanie	89
maximálne, 89	
perfektné párovanie	89
podgraf	58
polomer	56
pravý podstrom	213
pravidelný	52
prázdny	49, 80
prehľadávanie do šírky	182
prehľadávanie do hĺbky	187
priemer	56
problém obchodného cestujúceho	234
rovinné nakreslenie	108
rovinný	108
sled	54
otvorený, 55	
uzavretý, 55	
slučka (hrana)	50
stabilná množina vrcholov	225

graf
 strom 73
 binárny, 80
 binárny úplný, 81
 binárny dokonalý, 82
 binárny prehľadavací, 214
 binárny vyvážený, 81
 koreň, 77, 105
 očíslovaný, 234
 prehľadavací binárny, 213
 stupeň vrcholu 51
 subdivízia hrany 111
 susedné oblasti 108
 susednosť (vrchol–vrchol) 50
 súvislý 57
 ťah 55
 uzavretý sled 55
 vrchol 49, 50
 centrálny, 56
 izolovaný, 50
 stupeň, 51
 vzdialenosť vrcholov 56
 Graves John Thomas (1806–1870) 16
 Guthrie Francis (1831–1899) 48

H

Haken Wolfgang (1928–...) 48
 Hamilton William R. (1805–1865) . 16, 48, 95
 harmonická postupnosť 166
 Herón Alexandrijský (10–75) 15
 Hippasos (~530–~450 pred n. l.) 15
 hodnota grafu 196
 hrana
 koncový vrchol 181
 počiatočný vrchol 181
 Huffman David Albert (1925–1999) 204
 Huffmanov kód 80, 204, 206
 húsenica (graf) 113
 hviezda (graf) 113
 hypotéza 32

I

implikácia ($\Rightarrow$) 21
 indukčný
 krok 38
 predpoklad 38
 injektívnosť 144
 inverzná funkcia 145

inverzná relácia 127

J

jadro grafu 225
 Jarník Vojtěch (1897–1970) 196, 197
 Jarníkov (Primov) algoritmus 197
 jazyk 1. rádu 23
 jednotka
 imaginárna 16
 kvaternionová 16
 oktonionová 16

K

kartézsky súčin 19
 Kempe Alfred Bray (1849–1922) 48
 kód
 ASCII 204
 Huffmanov 80, 204, 206
 Prüferov 234
 koeficient
 binomický 171
 Newtonov, 171
 multinomický 177
 koleso (graf) 113
 komplementárna množina 14
 komponent súvislosti (grafu) 60
 konjunkcia ($\wedge$) 21
 kontradikcia 20
 koreň 77
 koreňový strom 77
 kostra grafu 62
 Kőnig Dénes (1884–1944) 48
 Kruskal Joseph B. (1928–2010) 196, 201
 Kruskalov algoritmus 202
 Kuratowski Kazimierz (1896–1980) 111
 kvantifikátor
 existenčný 23
 všeobecný 23

L

Laplace Pierre-Simon (1749–1827) 156
 lema 62
 les 77
 list 77
 logická
 hodnota 19
 premenná 19

logická	
spojka	19, 20
logický	
operátor	19
výrok	19
logika	
predikátová	23
výroková	22

M

matematická indukcia	37, 39
matica	
incidencie grafu	72
relácie	128
susednosti grafu	69
maximálne párovanie grafu	89
množina	11
charakteristická funkcia	149
kartézsky súčin množín	19
komplementárna	14
konečná	12
mohutnosť	12
nekonečná	12
podmnožina	12
potenčná	13
prázdna	11
rozklad	138
spočítateľná	37
systém množín	138
univerzálna	14
univerzum	13, 14
množiny	
disjunktné	13
prienik množín	13
rovnosť množín	11
rozdiel množín	13
symetrická diferencia množín	41
zjednotenie množín	12
mocninový rad	156
modulo (zvyšok po delení)	41
modulo $a \pmod{b}$	41
modus ponens	32
mohutnosť množiny	12
Moskovský papyrus	16
multinomická veta	177
multinomický koeficient	177

N

negácia ($\neg$)	20
Newton Isaac (1642–1727)	171
Newtonov binomický koeficient	171

P

P-kód (prefixový kód)	204
párovanie grafu	89
perfektné párovanie	89
podgraf grafu	58
podmnožina	
vlastná	12
postupnosť	
Fibonacciho	167
harmonická	166
potenčná množina	13
pravdivostná hodnota	19
pravdivostná tabuľka	20
prázdna množina	11
prázdny graf	80
prefixový kód	204
prehľadavací binárny strom	213, 214
prehľadávanie grafu	
do hĺbky	186, 187
do šírky	181, 182
prienik množín	13
Prim Robert Clay (1921–...)	197
princíp zapojenia-vypojenia	18
problém	
NP-úplný	96
obchodného cestujúceho	47, 234
štyroch farieb	48
Prüfer Ernst Paul Heinz (1896–1934)	241
Prüferov kód	234
prvky	
porovnateľné	137
neporovnateľné	137
prvotná formula	20
pseudokód	
Dijkstrovho algoritmu	231
hľadania kostry grafu	179
Jarníkovho algoritmu	197
konštrukcie očíslovaného stromu z Prüfe- rovho kódu	241
konštrukcie optimálneho Huffmanovho kódu	206
konštrukcie prehľadávacieho binárneho stromu	215

konštrukcie Prüferovho kódu z očíslovaného stromu 235
 Kruskalovho algoritmu 202
 prehľadávania grafu do hĺbky 187
 prehľadávania grafu do šírky 182
 zostavovania identifikačného kódu binárneho stromu 219
 zostavovania identifikačného kódu koreňového stromu 222
 pytagorejci 15

R

rad
 formálny mocninový 156
 Maclaurinov 156
 mocninový 156
 Taylorov 156
 reflexívnosť (relácie) 124, 129
 relácia
 n -árna 123
 antisymetrická 125, 130
 binárna 123, 124
 čiasťočné usporiadanie 137
 ekvivalencie 140
 inverzná 127
 maticová reprezentácia 128
 na množine 124
 reflexívna 124, 129
 symetrická 125, 129
 tranzitívna 126
 zložená 128
 rovnosť množín 11
 rozdiel množín 13
 rozklad množiny 138
 triedy ekvivalencie 141
 triedy rozkladu 138

S

semifaktoriál 172
 skladanie funkcií 146
 skladanie relácií 128
 sled (v grafe) 54
 slučka (graf) 50
 spočítateľná množina 37
 Stirling James (1692–1770) 156
 strom (graf) 73
 vyvážený binárny 81
 subdivízia hrany 111

súčín
 kartézsky 19
 surjektívnosť 144
 sylogizmus 34
 symetrická diferencia množín (Δ) 41
 symetrickosť (relácie) 125, 129
 systém množín 138

T

tabuľka
 pravdivostná 20
 Tait Peter Guthrie (1831–1901) 48
 tautológia 20
 tautologicky ekvivalentné formuly 22
 tranzitívnosť (relácie) 126
 trieda
 rozkladu 138
 zvyšková 142
 trieda ekvivalencie 141

Ť

ťah (v grafe) 55

U

univerzum množín 13, 14
 usporiadaná dvojica 18
 usporiadanie
 čiasťočné 137
 neporovnateľnosť, 137
 porovnateľnosť, 137
 lineárne 138

Ú

úplný binárny strom 81

V

Vennove diagramy 16
 veta
 Cayleyho 242
 Eulerova o rovinných grafoch 110
 Kuratowského 112
 multinomická 177
 o centre stromu 224
 o cykloch 58
 o existencii cesty v grafe 56
 o existencii jadra grafu 226

veta	
o existencii kostry grafu	63
o explicitnom vyjadrení rekurentných postupností	170
o invariantnosti cyklu C_n	102
o invariantnosti stupňov vrcholov	101
o inverznej funkcii	145
o komponentoch grafu	61
o korektnosti prehľ. algoritmov	191
o matematickej indukcii	39
o matici susednosti	71
o matici zloženej relácie	131
o maticiach susednosti izomorfných grafov	100
o mohutnosti kartézskeho súčinu	19
o optimálnej lokalizácii v prehľadávacom binárnom strome	217
o otvorenom eulerovskom ťahu	87
o počte koncových vrcholov úplných binárnych stromov	81
o potenčnej množine	40
o relácii danej rozkladom množiny	139
o rozklade danom rel. ekvivalencie	141
o správnosti Jarníkovho algoritmu	199
o stromoch	76
o stupňoch vrcholov rovinného grafu	111
o súčte stupňov vrcholov grafu	52
o súvislosti výšky a počtu koncových vrcholov binárnych stromov	82
o tranzitívnosti relácie na množine	132
o uzavretom eulerovskom ťahu	86
o vrchoch stromov	76
pravidlo sylogizmu	34
základná algebry	16
základná aritmetiky	37
veta (matematická)	31
vrchol	
dieťa	78
koncový	50, 78
list	77
otec	78
počiatočný	50
potomok	78
predkovia	78
rodič	78
súrodenci	78
syn	78
vnútorný	78
výroková formula	20, 22

vytvárajúca funkcia	
exponenciálna	175
obyčajná	160
súčet	161
súčin	162
vyvážený binárny strom	81

W

Werner Benjamin	48
-----------------	----

Z

základná veta algebry	16
základná veta aritmetiky	37
zásobník	180
zjednotenie množín	12
zložená funkcia	146
zvyšková trieda	142
zvyšok po delení (modulo)	41