

$$R_1 = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,1)\}$$

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \{(2,3), (3,2), (3,3), (1,2)\}$$

7. Čiastočné usporiadanie, ekvivalencie, funkcie

7.1 Čiastočné usporiadanie

Lahko sa dá nahliadnuť, že relácia $\mathfrak{R}$ zadaná na množine celých čísel predpisom

$$\mathfrak{R} = \{(x,y); (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \wedge x \leq y\},$$

je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Túto reláciu zvykneme označovať aj symbolom „ $\leq$ “ a nazývať „usporiadanie“, pretože pomocou nej vieme množiny čísel usporiadať podľa veľkosti. Rovnako aj relácia $\mathfrak{D}$ zadaná na množine prirodzených čísel predpisom

$$\mathfrak{D} = \{(x,y); (x,y) \in \mathbb{N}^2 \wedge x \mid y\},$$

je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Vo všeobecnosti sa relácia s týmito vlastnosťami nazýva *čiastočné usporiadanie*.

Definícia 7.1.1 — Čiastočné usporiadanie. Relácia $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$ sa nazýva čiastočné usporiadanie množiny $\mathbb{X}$ ak je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna. Ak relácia $\mathfrak{R}$ je čiastočné usporiadanie množiny $\mathbb{X}$ a $(x,y) \in \mathfrak{R}$, tak to zvykneme označovať $x \preceq y$.

P Relácia čiastočného usporiadania na množine, nám prvky tejto množiny istým spôsobom „usporiadava“.

Definícia 7.1.2 — Porovnateľné a neporovnateľné prvky. Majme reláciu $\preceq$, ktorá je čiastočným usporiadaním na množine $\mathbb{X}$. Ak pre $x,y \in \mathbb{X} : (x \preceq y) \vee (y \preceq x)$, tak x a y nazývame *porovnateľné prvky*. Ak pre $x,y \in \mathbb{X} : (x \not\preceq y) \wedge (y \not\preceq x)$, tak x a y nazývame *neporovnateľné prvky*.

■ **Príklad 7.1** Zoberme si napríklad reláciu $\mathfrak{D} (\mid)$ na množine prirodzených čísel, spomenutú pred definíciou 7.1.1. Táto relácia je čiastočným usporiadaním množiny prirodzených čísel, ale nie každé dve prirodzené čísla sú ňou porovnateľné. Ak si napríklad zoberieme čísla 7 a 15, tak platí $(7 \nmid 15) \wedge (15 \nmid 7)$. Čísla 7 a 15 sú preto reláciou $\mid$ neporovnateľné. ■

Definícia 7.1.3 — Lineárne usporiadanie. Majme reláciu $\preceq$, ktorá je čiastočným usporiadaním na množine $\mathbb{X}$. Ak $\forall x, y \in \mathbb{X} : (x \preceq y) \vee (y \preceq x)$, tak sa relácia $\preceq$ nazýva lineárne usporiadanie na množine $\mathbb{X}$.

■ **Príklad 7.2** Zoberme si reláciu $\mathfrak{R} (\leq)$ na množine celých čísel, definovanú v úvode podkapitoly. Táto relácia je lineárne usporiadanie na množine $\mathbb{Z}$, pretože ľubovoľné dve čísla ňou vieme porovnať. Platí $\forall x, y \in \mathbb{Z} : (x \leq y) \vee (y \leq x)$. ■

P Čiastočné usporiadanie na množine $\mathbb{X}$ sa nazýva „čiastočné“ preto, lebo môžu existovať prvky množiny $\mathbb{X}$, ktoré sa týmto usporiadaním nedajú porovnať, sú neporovnateľné. Naproti tomu ak máme na množine $\mathbb{X}$ lineárne usporiadanie, tak týmto sa dajú porovnať ľubovoľné dva prvky množiny $\mathbb{X}$. Prvky množiny $\mathbb{X}$ môžeme „lineárne usporiadať“.

7.2 Rozklad množín a relácia ekvivalencie

Reláciu ekvivalencie môžeme definovať buď priamo pomocou jej vlastností, alebo sa k nej môžeme dopracovať prostredníctvom množín a ich rozkladov. Najskôr si ukážeme prístup cez rozklad množín a potom definujeme (definícia 7.2.3) reláciu ekvivalencie pomocou jej vlastností.

7.2.1 Rozklad množiny

Začneme definíciou jedného pomocného pojmu.

Definícia 7.2.1 — Systém množín. Systémom množín budeme nazývať množinu, ktorej prvkami sú množiny, t. j. množinu množín.

P So systémom množín sme sa už stretli na 1. prednáške pri definícii potenčnej množiny (definícia 1.1.10). Ak máme množinu $\mathbb{X}$, tak jej potenčná množina $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ je množina všetkých jej podmnožín.

■ **Príklad 7.3** Príklady systémov množín sú nasledovné množiny

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 &= \{\{0, 1, 3\}, \{2, 4, 5\}, \{1, 2, 7\}\} \\ \mathcal{S}_2 &= \{\langle k, k+1 \rangle : k \in \mathbb{Z}\} \\ \mathcal{S}_3 &= \{\{2n, 2n+1\} : n \in \mathbb{N}\} \\ \mathcal{S}_4 &= \{\{2n\} : n \in \mathbb{N}\} \\ \mathcal{S}_5 &= \{\{2n+1\} : n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

Definícia 7.2.2 — Rozklad množiny. Rozklad množiny $\mathbb{X}$ je taký systém $\mathcal{R}$ jej neprázdnych podmnožín, že každý prvok $x \in \mathbb{X}$ patrí práve do jednej množiny $R \in \mathcal{R}$. Množiny $R \in \mathcal{R}$ sa nazývajú triedy rozkladu $\mathcal{R}$.

■ **Príklad 7.4**

- $\mathcal{S}_2$ z príkladu 7.3 je rozklad množiny reálnych čísel $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{S}_3$ z príkladu 7.3 je rozklad množiny prirodzených čísel $\mathbb{N}$.
- $\mathcal{S}_4 \cup \mathcal{S}_5$ z príkladu 7.3 je tiež rozklad množiny prirodzených čísel $\mathbb{N}$.

■ **Príklad 7.5** Majme množinu $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Potom

$$\mathcal{R}_1 = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}_2 = \{\{1, 3, 5\}, \{2\}, \{4\}\}$$

sú dva rôzne rozklady množiny $\mathbb{X}$ a

$$\mathcal{R}_3 = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}\} \quad \text{a} \quad \mathcal{R}_4 = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4, 5\}\}$$

nie sú rozklady množiny $\mathbb{X}$. Žiadna z množín v $\mathcal{R}_3$ neobsahuje číslo 5 a v prípade $\mathcal{R}_4$ je číslo 3 v dvoch rôznych množinách. ■

■ **Príklad 7.6** Nech $\mathbb{X}$ je množina študentov v posluchárni s n radmi sedadiel, na prednáške z diskretnej matematiky. Ďalej nech R_i , pre $i = 1, 2, \dots, n$, označuje množinu študentov sediacich v i . rade posluchárne. Potom samozrejme platí $\forall i : R_i \subseteq \mathbb{X}$ a $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_n\}$ je rozklad množiny $\mathbb{X}$. Prečo? ■

7.2.2 Relácia ekvivalencie

Ak máme akúkoľvek množinu $\mathbb{X}$ a jej rozklad $\mathcal{R}$, tak tento rozklad úplne prirodzeným spôsobom definuje binárnu reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$ predpisom

$$\forall (x, y) \in \mathbb{X}^2 : ((x, y) \in \mathfrak{R}) \Leftrightarrow (\exists R \in \mathcal{R} : x, y \in R)$$

Inak povedané, dva prvky množiny $\mathbb{X}$ sú v relácii práve vtedy, keď patria do rovnakej triedy rozkladu $\mathcal{R}$.

Ak by sme si zobrali rozklad z príkladu 7.6, tak relácia medzi študentami bude definovaná tak, že dvaja študenti budú v relácii práve vtedy, ak sedia v rovnakom rade posluchárne. Táto relácia je reflexívna, symetrická a tranzitívna. Vieme to ľahko overiť a platí to aj všeobecne, ako ukážeme v nasledujúcej vete.

Veta 7.2.1 — O relácii danej rozkladom množiny. Nech $\mathcal{R}$ je rozklad množiny $\mathbb{X}$ a relácia $\mathfrak{R}$ je týmto rozkladom definovaná predpisom

$$\forall (x, y) \in \mathbb{X}^2 : ((x, y) \in \mathfrak{R}) \Leftrightarrow (\exists R \in \mathcal{R} : (x \in R) \wedge (y \in R))$$

Potom relácia $\mathfrak{R}$ je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Dôkaz:

▷ **reflexívna** – Priamo z definície rozkladu množiny a definície relácie $\mathfrak{R}$ platí

$$\forall x \in \mathbb{X} : (\exists R \in \mathcal{R} : (x \in R)) \Rightarrow ((x, x) \in \mathfrak{R}),$$

a preto je relácia $\mathfrak{R}$ reflexívna.

▷ **symetrická** – Platí $((x \in R) \wedge (y \in R)) \Leftrightarrow ((y \in R) \wedge (x \in R))$. Preto podľa definície relácie $\mathfrak{R}$ platí $((x, y) \in \mathfrak{R}) \Leftrightarrow ((y, x) \in \mathfrak{R})$, čiže relácia $\mathfrak{R}$ je symetrická.

▷ **tranzitívna** – Nech $(x, y) \in \mathfrak{R}$ a $(y, z) \in \mathfrak{R}$. Potom podľa definície relácie $\mathfrak{R}$ musí existovať nejaká trieda rozkladu, označme si ju $R_1 \in \mathcal{R}$, taká, že $(x \in R_1) \wedge (y \in R_1)$. Rovnako, vzhľadom na to že $(y, z) \in \mathfrak{R}$, musí existovať aj trieda rozkladu, označme si ju $R_2 \in \mathcal{R}$, taká, že $(y \in R_2) \wedge (z \in R_2)$. Avšak, podľa definície rozkladu množiny, prvok y nemôže patriť do dvoch rôznych tried rozkladu, takže platí $R_1 = R_2 = R$ a $(x \in R) \wedge (y \in R) \wedge (z \in R)$. Potom však $(x, z) \in \mathfrak{R}$ a relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna.

Q.E.D.

■ **Príklad 7.7** Majme množinu $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a jej rozklad $\mathcal{R} = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4\}\}$. Potom relácia $\mathfrak{R}$ definovaná týmto rozkladom bude

$$\mathfrak{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 6)\}$$

Majme rozklad $\mathcal{R}$ množiny $\mathbb{X}$ a reláciu $\mathfrak{R}$ definovanú týmto rozkladom. Potom prvky množiny $\mathbb{X}$, ktoré patria do rovnakej triedy rozkladu, považujeme za ekvivalentné, rovnocenné, v zmysle relácie $\mathfrak{R}$. Ak si napríklad zoberieme množinu, jej rozklad a reláciu ním definovanú, z príkladu 7.6, tak dvaja študenti budú v tejto relácii „ekvivalentní“, ak sedia v rovnakom rade posluchárne. Takto chápaná ekvivalencia, rovnocennosť, je motiváciou pre nasledujúcu definíciu.

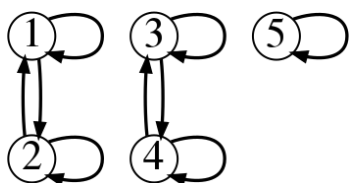
Definícia 7.2.3 — Relácia ekvivalencie. Binárna relácia na množine $\mathbb{X}$, ktorá je reflexívna, symetrická a tranzitívna, sa nazýva relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$.

Napríklad relácia z príkladu 7.7 je reláciou ekvivalencie na množine $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Buď priamo z množinového zápisu, alebo z orientovaného grafu tejto relácie sa ľahko môžeme presvedčiť, že je reflexívna, symetrická aj tranzitívna. Okrem toho to vyplýva aj z vety 7.2.1, keďže ide o reláciu definovanú rozkladom množiny $\mathbb{X}$.

■ **Príklad 7.8** Nech

$$\mathfrak{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5)\}$$

je relácia na množine $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Orientovaný graf tejto relácie je na nasledovnom obrázku



a z tohto grafu, ako aj z množinového zápisu danej relácie, vieme ľahko overiť, že táto relácia je reflexívna, symetrická aj tranzitívna. Takže $\mathfrak{R}$ je relácia ekvivalencie.

Presne podľa toho istého predpisu, ktorým sme pomocou rozkladu množiny definovali reláciu, vieme pomocou relácie definovať rozklad množiny.

V tomto prípade dostaneme rozklad $\mathcal{R} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$. Podrobnejšie sa tomu budeme venovať v nasledujúcom texte.

Uvedieme si teraz dva príklady relácií, ktoré nie sú reláciami ekvivalencie.

■ **Príklad 7.9** Majme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine celých čísel definovanú predpisom

$$\mathfrak{R} = \{(x, y); (x \leq y) \wedge ((x, y) \in \mathbb{Z}^2)\}.$$

Relácia $\mathfrak{R}$ je reflexívna, je aj tranzitívna, ale nie je symetrická. Napríklad $(2, 3) \in \mathfrak{R}$, ale $(3, 2) \notin \mathfrak{R}$. Takže táto relácia nie je reláciou ekvivalencie. Je však čiastočne usporiadaná, pretože je reflexívna, antisymetrická aj tranzitívna.

■ **Príklad 7.10** Majme reláciu $\mathfrak{R} = \{(a, a), (b, c), (c, b), (d, d)\}$ na množine $\mathbb{X} = \{a, b, c, d\}$. Táto relácia nie je reflexívna, pretože $(b, b) \notin \mathfrak{R}$ a $(c, c) \notin \mathfrak{R}$. Takže nie je to relácia ekvivalencie.

Veta 7.2.1 hovorí nielen o relácii definovanej rozkladom, ale aj o rozklade definovanom reláciou. V predpise

$$\forall (x, y) \in \mathbb{X}^2: ((x, y) \in \mathfrak{R}) \Leftrightarrow (\exists R \in \mathcal{R}: (x \in R) \wedge (y \in R))$$

je medzi reláciou $\mathfrak{R}$ a príslušnosťou prvkov množiny do triedy R rozkladu $\mathcal{R}$ ekvivalencia ($\Leftrightarrow$). Rovnako ako je každým rozkladom danej množiny prirodzene definovaná relácia ekvivalencie

na tejto množine, je aj každou reláciou ekvivalencie na množine prirodzene definovaný rozklad tejto množiny.

Definícia 7.2.4 — Triedy ekvivalencie. Nech $\mathfrak{R}$ je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$. Potom pre každé $a \in \mathbb{X}$ definujeme

$$[a] = \{x \in \mathbb{X}; (a, x) \in \mathfrak{R}\}.$$

Množinu $[a]$ nazývame trieda ekvivalencie prvku a v relácii $\mathfrak{R}$.

Trieda ekvivalencie prvku $a \in \mathbb{X}$ je teda tvorená všetkými tými prvkami množiny $\mathbb{X}$, ktoré sú s prvkom a v relácii $\mathfrak{R}$, čiže sú s ním „ekvivalentné“.

■ **Príklad 7.11** Zoberme si reláciu ekvivalencie z príkladu 7.8. Je to relácia

$$\mathfrak{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5)\}$$

na množine $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Triedy ekvivalencie tejto relácie sú

$$[1] = \{x \in \mathbb{X}; (1, x) \in \mathfrak{R}\} = \{1, 2\} \quad [3] = \{x \in \mathbb{X}; (3, x) \in \mathfrak{R}\} = \{3, 4\}$$

$$[2] = \{x \in \mathbb{X}; (2, x) \in \mathfrak{R}\} = \{1, 2\} \quad [4] = \{x \in \mathbb{X}; (4, x) \in \mathfrak{R}\} = \{3, 4\}$$

$$[5] = \{x \in \mathbb{X}; (5, x) \in \mathfrak{R}\} = \{5\}$$

Ako vidíme, platí $[1] = [2]$ a $[3] = [4]$ a triedy ekvivalencie dané reláciou $\mathfrak{R}$ tvoria rozklad $\mathcal{R} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}\} = \{[1], [3], [5]\} = \{[1], [2], [3], [4], [5]\}$ množiny $\mathbb{X}$. ■

P Rovnosť $\{[1], [3], [5]\} = \{[1], [2], [3], [4], [5]\}$, uvedená v predošlom príklade platí na základe definície množiny (definícia 1.1.1) a platnosti rovností $[1] = [2]$ a $[3] = [4]$. Na počte opakování rovnakých prvkov totiž v množine nezáleží. Platí $\{a, b, c\} = \{a, a, b, c, c\}$.

To, že triedy ekvivalencie definovanej reláciou ekvivalencie tvoria rozklad množiny, ako bolo ukázané v príkladoch 7.8 a 7.11, nie je náhoda. Platí to všeobecne. Triedy ekvivalencie a nimi daný rozklad množiny pekne vidno na obrázku orientovaného grafu v príklade 7.8 na strane 140. Triedy ekvivalencie, resp. nimi daný rozklad množiny, sú komponenty súvislosti orientovaného grafu. Ako už bolo spomenuté, skutočnosť, že triedy ekvivalencie definované reláciou ekvivalencie tvoria rozklad množiny, platí všeobecne. Sformulujeme to v nasledujúcej vete.

Veta 7.2.2 — O rozklade danom reláciou ekvivalencie. Ak $\mathfrak{R}$ je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$, tak $\mathcal{R} = \{[a] : a \in \mathbb{X}\}$ je rozklad množiny $\mathbb{X}$.

Dôkaz: Treba ukázať, že každý prvok $\mathbb{X}$ patrí práve jednému prvku systému množín $\mathcal{R}$.

▷ Nech $a \in \mathbb{X}$. Relácia $\mathfrak{R}$ je reflexívna, t. j. $(a, a) \in \mathfrak{R}$, a preto podľa definície 7.2.4 $a \in [a]$. Takže každý prvok množiny $\mathbb{X}$ patrí aspoň jednému prvku systému množín $\mathcal{R}$.

▷ Potrebujeme ešte ukázať, že každé $a \in \mathbb{X}$ patrí práve jednému prvku systému množín $\mathcal{R}$. To ukážeme sporom. Pre každé $a \in \mathbb{X}$ platí $a \in [a]$. Predpokladajme, že existuje $b \in \mathbb{X}$ také, že platí $(a \in [b]) \wedge ([a] \neq [b])$. Nerovnosť $[a] \neq [b]$ znamená, že $\exists c \in \mathbb{X} : (c \in [a]) \wedge (c \notin [b])$.

Poznámka: Prípad $(c \notin [a]) \wedge (c \in [b])$ sa dokazuje takmer rovnakým spôsobom, naviac sa ešte využíva to, že relácia $\mathfrak{R}$ je symetrická.

Ale $c \in [a] \Rightarrow (a, c) \in \mathfrak{R}$. Ďalej $a \in [b] \Rightarrow (b, a) \in \mathfrak{R}$. Keďže $(b, a) \in \mathfrak{R}$ a $(a, c) \in \mathfrak{R}$ a relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna, tak aj $(b, c) \in \mathfrak{R}$ a potom platí $c \in [b]$, čo je spor s $c \notin [b]$, a preto musí platiť $[a] = [b]$.

Q.E.D.

P Vo vete 7.2.2 sme okrem iného ukázali, že dve rôzne triedy ekvivalencie sú disjunktné, čiže $\forall a, b \in \mathbb{X} : ([a] \neq [b]) \Rightarrow ([a] \cap [b] = \emptyset)$. Takže systém tried ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$ tvorí rozklad množiny $\mathbb{X}$.

Vety 7.2.1 a 7.2.2 spolu hovoria o jednoznačnej korešpondencii medzi reláciami ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$ a rozkladmi množiny $\mathbb{X}$.

■ **Príklad 7.12** Majme na množine celých čísel danú reláciu

$$\mathfrak{R} = \{(x, y); 3 \mid (y - x) \wedge (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Lahko sa overí, že táto relácia je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

- ▷ **reflexívna** – pre každé $x \in \mathbb{Z}$ platí $x - x = 0$ a $3 \mid 0$. Preto $(x, x) \in \mathfrak{R}$, t.j. relácia $\mathfrak{R}$ je reflexívna.
- ▷ **symetrická** – Ak $(x, y) \in \mathfrak{R}$, tak $3 \mid (y - x)$. To znamená, že existuje $k \in \mathbb{Z}$ také, že platí $y - x = 3k$. Ale potom $x - y = -3k$ a $(k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (-k \in \mathbb{Z})$, čiže $(3 \mid (x - y)) \Rightarrow ((y, x) \in \mathfrak{R})$, a preto je relácia $\mathfrak{R}$ symetrická.
- ▷ **tranzitívna** – Nech $(x, y) \in \mathfrak{R}$ a $(y, z) \in \mathfrak{R}$. To znamená, že existujú celé čísla $k, l \in \mathbb{Z}$ také, že platí $(y - x = 3k) \wedge (z - y = 3l)$. Ale ak posledné dve rovnosti sčítame, tak dostaneme $z - x = 3(k + l)$, čiže $(3 \mid (z - x)) \Rightarrow ((x, z) \in \mathfrak{R})$, t.j. relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna.

Ukázali sme, že $\mathfrak{R}$ je reláciou ekvivalencie na množine celých čísel a definuje na nej rozklad, ktorý bude mať tri triedy ekvivalencie.

$$\begin{aligned} [0] &= \{x \in \mathbb{Z}; 3 \mid (x - 0)\} = \{x; x - 0 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} = \{3k; k \in \mathbb{Z}\} \\ [1] &= \{x \in \mathbb{Z}; 3 \mid (x - 1)\} = \{x; x - 1 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} = \{3k + 1; k \in \mathbb{Z}\} \\ [2] &= \{x \in \mathbb{Z}; 3 \mid (x - 2)\} = \{x; x - 2 = 3k, k \in \mathbb{Z}\} = \{3k + 2; k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Iné triedy ekvivalencie už neexistujú, pretože každé celé číslo sa dá zapísať v tvare $3k, 3k + 1$ alebo $3k + 2$, kde $k \in \mathbb{Z}$. Takýto rozklad množiny celých čísel sa nazýva aj rozklad na zvyškové triedy. Do tej istej triedy ekvivalencie patria všetky celé čísla, ktoré dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom 3. ■

7.3 Funkcie

S funkciami sa študenti FEISTU stretli už aj na predmetoch *Matematika 1* a *Matematika 2*. Na týchto predmetoch sa funkcie skúmajú z pohľadu matematickej analýzy, t.j. hľadajú sa definičné obory, obory funkčných hodnôt, predpisy inverzných funkcií, limity, derivácie, integrály...

Teraz sa budeme zaoberať funkciami z iného pohľadu. Funkcie jednej premenej budeme skúmať ako špeciálny prípad binárnych relácií, inverzné funkcie ako špeciálny prípad inverzných relácií a zložené funkcie ako špeciálny prípad zložených relácií. Ilustrujeme si to na jednoduchom príklade.

■ **Príklad 7.13** Zoberme si funkciu $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanú predpisom $f(x) = x^2$. Potom

- pre $x = 0$ máme $f(0) = 0$,
- pre $x = 2$ máme $f(2) = 4$,
- pre $x = 4$ máme $f(4) = 16, \dots$

Uvedené priradenia môžeme zapísať aj ako usporiadné dvojice $(0, 0), (2, 4), (4, 16) \dots$ a na množinu týchto usporiadaných dvojíc sa potom môžeme pozerať ako na binárnu reláciu na reálnych číslach. ■

Funkciu si teraz definujeme ako istý druh množiny usporiadaných dvojíc.

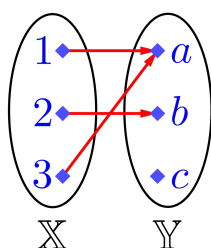
Definícia 7.3.1 — Funkcia. Nech $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ sú množiny. Funkcia f z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$, zapisujeme $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, je taká podmnožina kartézského súčinu $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, že pre každé $x \in \mathbb{X}$ existuje práve jedno $y \in \mathbb{Y}$ také, že $(x, y) \in f$.

Množina $\mathbb{X}$ sa nazýva *obor*, alebo *definičný obor*, funkcie f a množina $\mathbb{Y}$ sa nazýva *koobor* funkcie f . Množina $\{y; y \in \mathbb{Y} \wedge (\exists x \in \mathbb{X} : (x, y) \in f)\}$ sa nazýva *obor hodnôt* funkcie f . Definičný obor funkcie f sa zvykne označovať $D(f)$ a obor funkčných hodnôt funkcie f sa zvykne označovať $H(f)$ a platí $H(f) \subseteq \mathbb{Y}$.

- P**
- Niekedy sa za definičný obor neberie celá množina $\mathbb{X}$ ($D(f) = \mathbb{X}$), ale len jej podmnožina ($D(f) \subset \mathbb{X}$). Funkciám, pre ktoré $D(f) \subset \mathbb{X}$, sa niekedy vraví aj *parciálne funkcie*.
 - Skutočnosť, že existuje práve jedno $x \in \mathbb{X}$ sa zapisuje ako $\exists! x \in \mathbb{X}$.

Vidíme, že medzi binárnymi reláciami a funkciami tak, ako sú definované v definícii 7.3.1, je úzky vzájomný vzťah. Funkcia $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ je zároveň binárna relácia z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ a za istých podmienok to platí aj opačne. Napríklad funkciu z príkladu 7.13 môžeme zapísať aj ako $f = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Na nasledujúcich troch príkladoch si ukážeme, kedy daná relácia je a kedy nie je funkciou.

■ **Príklad 7.14** Majme binárnu reláciu¹ $f = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$ z množiny $\mathbb{X} = \{1, 2, 3\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a, b, c\}$.

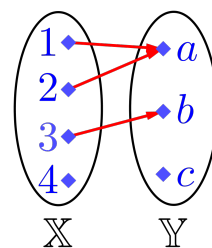


Podľa definície 7.3.1, je $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ funkcia z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$. Šípkový diagram tejto relácie/funkcie vidíme na obrázku vľavo. Každému vzoru, prvku množiny $\mathbb{X}$, prislúcha jeden obraz, prvok množiny $\mathbb{Y}$.

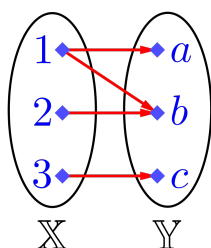
Ukážeme si aj dva príklady relácií, ktoré nie sú funkciami.

■ **Príklad 7.15** Majme binárnu reláciu $g = \{(1, a), (2, a), (3, b)\}$ z množiny $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a, b, c\}$.

Podľa definície 7.3.1 relácia g z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ nie je funkcia. Šípkový diagram tejto relácie vidíme na obrázku vpravo. Prvok $4 \in \mathbb{X}$ nemá v relácii g obraz z množiny $\mathbb{Y}$. Relácia g je len parciálna funkcia s definičným oborom $D(g) = \{1, 2, 3\} \subset \mathbb{X}$.



■ **Príklad 7.16** Majme binárnu reláciu $h = \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, c)\}$ z množiny $\mathbb{X} = \{1, 2, 3\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a, b, c\}$.



Podľa definície 7.3.1 relácia h z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ nie je funkcia. Šípkový diagram tejto relácie vidíme na obrázku vľavo. Prvok $1 \in \mathbb{X}$ má dva rôzne obrazy v množine $\mathbb{Y}$.

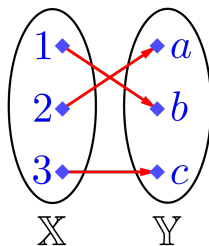
¹V podkapitole o funkciách budeme binárne relácie označovať malými písmenami latinskej abecedy.

Z matematickej analýzy poznáme definície injektívnosti, surjektívnosti a bijektívnosti funkcií. Analogicky k tomu vieme definovať tieto vlastnosti aj pre funkcie zadané pomocou relácií.

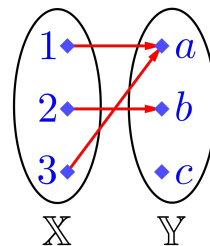
Definícia 7.3.2 — Injektívna funkcia. Funkcia $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ sa nazýva injektívna, niekedy len stručne injekcia, alebo po slovensky prostá, ak pre každé $y \in \mathbb{Y}$ existuje najviac jedno $x \in \mathbb{X}$ také, že $f(x) = y$.

P Uvedená definícia injektívnej funkcie presne zodpovedá tej, s ktorou sme sa už stretli na matematickej analýze.

■ **Príklad 7.17** Ukážeme si príklady dvoch funkcií, z ktorých jedna je a druhá nie je injektívna. Obe funkcie budú z množiny $\mathbb{X} = \{1, 2, 3\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a, b, c\}$ a zadáme ich šípkovým diagramom.



Táto funkcia je injektívna.



Funkcia z príkladu 7.14 nie je injektívna. ■

Podmienka injektívnosti, uvedená v definícii 7.3.2, sa dá zapísať a v matematickej analýze sa obvykle aj zapisuje ako

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X} : (x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)),$$

alebo, čo je ekvivalentné (veta o obmenenej implikácii), ako

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{X} : (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2).$$

Ďalšou vlastnosťou funkcií, ktorú si definujeme, je surjektívnosť.

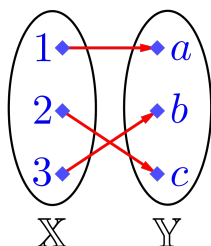
Definícia 7.3.3 — Surjektívna funkcia. Funkcia $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ sa nazýva surjektívna, niekedy len stručne surjekcia, ak platí $H(f) = Y$.

P V slovenskej terminológii sa surjekcia zvykne nazývať aj „funkcia na množinu ...“. Napríklad, ak by sme mali surjektívnu funkciu $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, tak by sme povedali „ f je funkcia na množinu $\mathbb{Y}$.“

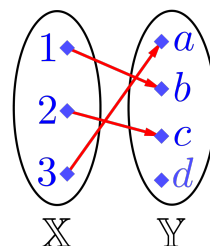
Podmienka surjektívnosti, uvedená v definícii 7.3.3, sa dá ekvivalentne zapísať a v matematickej analýze sa väčšinou aj zapisuje ako

$$(\forall y \in \mathbb{Y}) (\exists x \in \mathbb{X}) : f(x) = y.$$

■ **Príklad 7.18** Ukážeme si príklady dvoch funkcií, z ktorých jedna je a druhá nie je surjektívna. Obe funkcie zadáme šípkovým diagramom.



Táto funkcia je surjektívna.



Táto funkcia nie je surjektívna. ■

Keď už máme definovanú injektívnosť a surjektívnosť, môžeme tieto dve vlastnosti spojiť a definovať bijektívnosť.

Definícia 7.3.4 — Bijektívna funkcia. Funkcia $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, ktorá je súčasne injektívna aj surjektívna, sa nazýva bijektívna funkcia, alebo stručne bijekcia.

Funkcie uvedené v príkladoch 7.17 a 7.18 vľavo, t. j. tie, ktoré sú injektívne, resp. surjektívne, sú zároveň aj bijekciami, čiže majú obe uvedené vlastnosti. O bijektívnych funkciách platí nasledujúca veta.

Veta 7.3.1 — O inverznej funkcii. Ak $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ je bijektívna funkcia, tak relácia definovaná predpisom

$$f^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in f\}$$

je bijektívna funkcia z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{X}$. Funkcia f^{-1} sa nazýva inverzná funkcia ku funkcii f .

Dôkaz: musíme dokázať, že f^{-1} je funkcia a navyše aj bijekcia.

1. **f^{-1} je funkcia** Funkcia f je injektívna a zároveň surjektívna.

- ▷ Funkcia f je surjektívna. To, podľa definície 7.3.3 a poznámky za ňou, znamená že $((\forall y \in \mathbb{Y}) (\exists x \in \mathbb{X}) : f(x) = y) \Leftrightarrow ((\forall y \in \mathbb{Y}) (\exists x \in \mathbb{X}) : (x, y) \in f)$, takže podľa definície relácie f^{-1} platí $(\forall y \in \mathbb{Y}) (\exists x \in \mathbb{X}) : (y, x) \in f^{-1}$.
- ▷ Funkcia f je injektívna. To, podľa definície 7.3.2 znamená, že pre každé $y \in \mathbb{Y}$ existuje najviac jedno $x \in \mathbb{X}$ také, že $((x, y) \in f) \Leftrightarrow ((y, x) \in f^{-1})$.

Uvedené dva body hovoria o tom, že pre každé $y \in \mathbb{Y}$ existuje práve jedno $x \in \mathbb{X}$ také, že $(y, x) \in f^{-1}$. Takže podľa definície 7.3.1 je f^{-1} funkcia z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{X}$.

2. **f^{-1} je bijekcia** Potrebujeme ukázať, že funkcia f^{-1} je injektívna a súčasne surjektívna.

- ▷ f je funkcia, čiže pre každé $x \in \mathbb{X}$ existuje práve jedno $y \in \mathbb{Y}$ také, že $(x, y) \in f$ alebo ekvivalentne $(y, x) \in f^{-1}$. To potom znamená, že f^{-1} je injektívna, pretože nemôžu existovať $y_1, y_2 \in \mathbb{Y} : y_1 \neq y_2$ také, že $(y_1, x) \in f^{-1}$ aj $(y_2, x) \in f^{-1}$.
- ▷ Platí, že $D(f) = \mathbb{X}$, pretože f je funkcia. Takže platí

$$(\forall x \in \mathbb{X}) (\exists y \in \mathbb{Y}) : ((x, y) \in f) \Leftrightarrow ((y, x) \in f^{-1}),$$

čo znamená, že f^{-1} je surjektívna funkcia.

Tým sme dokázali, že f^{-1} je funkcia a je injektívna a surjektívna súčasne, t. j. f^{-1} je bijektívna funkcia. Q.E.D.

P V matematickej analýze sa pod pojmom *funkcia* obvykle myslí to, čo my nazývame *parciálna funkcia* (pozri poznámku za definíciou 7.3.1). Rozdiel medzi funkciou a parciálnou funkciou v našom podaní je v tom, že pre funkciu platí $D(f) = \mathbb{X}$ a pre parciálnu funkciu platí $D(f) \subseteq \mathbb{X}$. Veta 7.3.1 pre parciálne funkcie neplatí. Pre parciálne funkcie platí takáto veta:

Veta: *Nech $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ je injektívna parciálna funkcia. Potom funkcia definovaná predpisom*

$$f^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in f\}$$

je injektívna parciálna funkcia z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{X}$. Funkcia f^{-1} sa nazýva inverzná funkcia ku funkcii f .

Ak bijektívnu funkciu $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ chápeme ako reláciu $\mathfrak{R}_f$ medzi množinami $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$, tak inverzná funkcia f^{-1} zodpovedá inverznej relácii $\mathfrak{R}_f^{-1}$.

■ **Príklad 7.19** Majme bijektívnu funkciu / reláciu $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ z množiny $\mathbb{X} = \{1, 2, 3\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a, b, c\}$, definovanú predpisom

$$f = \{(1, a), (2, c), (3, b)\} = \mathfrak{R}_f.$$

Potom inverzná funkcia / relácia $f^{-1} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ bude mať predpis

$$f^{-1} = \{(a, 1), (b, 3), (c, 2)\} = \mathfrak{R}_f^{-1}.$$

■

Funkcia je teda len špeciálny prípad relácie, rovnako ako inverzná funkcia je len špeciálny prípad inverznej relácie. A keďže relácie možno aj skladať, nebude žiadnym prekvapením, že zložená funkcia je len špeciálny prípad zloženej relácie.

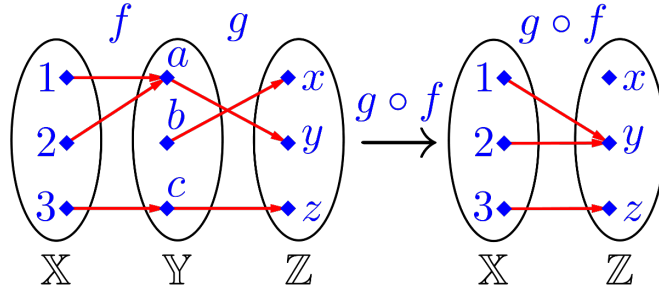
Definícia 7.3.5 — Zložená funkcia. Nech $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ a $g : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$. Zloženou funkciou $g \circ f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ nazývame funkciu danú predpisom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

■ **Príklad 7.20** Nech $f = \{(1, a), (2, a), (3, c)\}$ je funkcia z množiny $\mathbb{X} = \{1, 2, 3\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a, b, c\}$ a $g = \{(a, y), (b, x), (c, z)\}$ je funkcia z množiny $\mathbb{Y} = \{a, b, c\}$ do množiny $\mathbb{Z} = \{x, y, z\}$. Potom $g \circ f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ bude funkcia

$$g \circ f = \{(1, y), (2, y), (3, z)\}.$$

Šípkový diagram funkcie $g \circ f$ bude



Funkciu f môžeme chápať aj ako reláciu $\mathfrak{R}_f \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ a funkciu g ako reláciu $\mathfrak{R}_g \subseteq \mathbb{Y} \times \mathbb{Z}$. Zložená funkcia $g \circ f$ potom presne zodpovedá zloženej relácii $\mathfrak{R}_g \circ \mathfrak{R}_f$ a aj ich šípkové diagramy sú zhodné. ■

7.4 Cvičenia

Cvičenie 7.1 O každej relácii z cvičení 6.4, 6.5 a 6.6 (strana 133) rozhodnite, či je to čiastočné usporiadanie. ■

Cvičenie 7.2 Maticou

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

je daná relácia $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Je táto relácia čiastočným usporiadaním? ■

Cvičenie 7.3 Nasledujúce relácie sú všetky na množine prirodzených čísel $\mathbb{N}$. O každej z nich rozhodnite, či je to čiastočné usporiadanie.

- (a) $\mathfrak{R} = \{(x, y); x = y^2 \wedge (x, y) \in \mathbb{N}^2\}$ (e) $\mathfrak{R} = \{(x, y); x - y = 2 \wedge (x, y) \in \mathbb{N}^2\}$
 (b) $\mathfrak{R} = \{(x, y); 3 \mid (x - y) \wedge (x, y) \in \mathbb{N}^2\}$ (f) $\mathfrak{R} = \{(x, y); x > y \wedge (x, y) \in \mathbb{N}^2\}$
 (c) $\mathfrak{R} = \{(x, y); 3 \mid (x + 2y) \wedge (x, y) \in \mathbb{N}^2\}$ (g) $\mathfrak{R} = \{(x, y); x \geq y \wedge (x, y) \in \mathbb{N}^2\}$
 (d) $\mathfrak{R} = \{(x, y); |x - y| = 2 \wedge (x, y) \in \mathbb{N}^2\}$ ■

Cvičenie 7.4 O každej z nasledujúcich relácií na danej množine $\mathbb{X}$ overte, či je to čiastočné usporiadanie.

- (a) $\mathbb{X} = \{a, b, c, d\}$ a $\mathfrak{R} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (b, d), (c, d), (d, d)\}$
 (b) $\mathbb{X} = \{0, 1, 2\}$ a $\mathfrak{R} = \{(x, y); x \leq y \wedge (x, y) \in \mathbb{X}^2\}$
 (c) $\mathbb{X} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ a $\mathfrak{R} = \{(x, y); 3 \mid (y - x) \wedge (x, y) \in \mathbb{X}^2\}$
 (d) $\mathbb{X} = \mathbb{N}$ a $\mathfrak{R} = \{(x, y); x < 1 + y \wedge (x, y) \in \mathbb{X}^2\}$
 (e) $\mathbb{X} = \mathbb{Z}$ a $\mathfrak{R} = \{(x, y); x < 1 - y \wedge (x, y) \in \mathbb{X}^2\}$
 (f) $\mathbb{X} = \mathbb{Z}$ a $\mathfrak{R} = \{(x, y); x \mid y^2 \wedge (x, y) \in \mathbb{X}^2\}$
 (g) $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ a $\mathfrak{R} = \{(x, y); x \cdot y \in \mathbb{Q} \wedge (x, y) \in \mathbb{X}^2\}$
 (h) $\mathbb{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $(a, b)\mathfrak{R}(c, d) \Leftrightarrow ((a + b \leq c) \wedge (b \leq d) \wedge ((a, b), (c, d) \in \mathbb{X}))$ ■

Cvičenie 7.5 Nech $\mathbb{X} \neq \emptyset$. Definujeme reláciu $\mathfrak{R}$ na potenčnej množine $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ predpisom $(\mathbb{A}, \mathbb{B}) \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow (\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B})$. Je táto relácia čiastočné usporiadanie? ■

Cvičenie 7.6 O každej relácii z cvičení 6.11 (strana 134), 6.12 c) a 6.15 (strana 135) zistite z jej maticovej reprezentácie, či je čiastočným usporiadaním. ■

Cvičenie 7.7 Nech relácia $\mathfrak{R}_1$ je čiastočné usporiadanie na množine $\mathbb{X}_1$ a relácia $\mathfrak{R}_2$ je čiastočné usporiadanie na množine $\mathbb{X}_2$. Dokážte, že relácia $\mathfrak{R}$ definovaná predpisom

$$(x_1, x_2)\mathfrak{R}(x_3, x_4) \Leftrightarrow ((x_1 \mathfrak{R}_1 x_3) \wedge (x_2 \mathfrak{R}_2 x_4))$$

je čiastočné usporiadanie na množine $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$. ■

Cvičenie 7.8 Nech $\mathbb{X}$ je množina všetkých 4-bitových reťazcov. Každý bit má hodnotu 0 alebo 1. Definujeme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$ takto: $r_1 \mathfrak{R} r_2$ práve vtedy, keď nejaký podreťazec dĺžky 2 reťazca r_1 je rovnaký ako podreťazec dĺžky 2 reťazca r_2 . Napríklad $0111 \mathfrak{R} 1010$, pretože oba reťazce obsahujú podreťazec 01, ale reťazce 1110 a 0001 nie sú v relácii, pretože neobsahujú spoločný podreťazec dĺžky 2. Je relácia $\mathfrak{R}$ čiastočné usporiadanie? ■

Cvičenie 7.9 Zistite, či sú nasledujúce relácie reláciami ekvivalencie na množine $\mathbb{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Ak áno, vypíšte všetky triedy ekvivalencie.

- (a) $\mathfrak{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
- (b) $\mathfrak{R} = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
- (c) $\mathfrak{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- (d) $\mathfrak{R} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 4), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$
- (e) $\mathfrak{R} = \{(x, y); (1 \leq x \leq 5) \wedge (1 \leq y \leq 5) \wedge (x, y) \in \mathbb{A}^2\}$
- (f) $\mathfrak{R} = \{(x, y); 4 \mid (x - y) \wedge (x, y) \in \mathbb{A}^2\}$
- (g) $\mathfrak{R} = \{(x, y); 3 \mid (x + y) \wedge (x, y) \in \mathbb{A}^2\}$
- (h) $\mathfrak{R} = \{(x, y); x \mid (2 - y) \wedge (x, y) \in \mathbb{A}^2\}$ ■

Cvičenie 7.10 Ako musí vyzeráť relácia ekvivalencie, ak má len jednu triedu ekvivalencie? ■

Cvičenie 7.11 Zistite, či sú dané relácie reláciami ekvivalencie na množine všetkých ľudí.

- (a) $\mathfrak{R} = \{(x, y); x \text{ je rovnako vysoký ako } y\}$
- (b) $\mathfrak{R} = \{(x, y); x \text{ žije v tom istom štáte ako } y\}$
- (c) $\mathfrak{R} = \{(x, y); x \text{ má to isté krstné meno ako } y\}$
- (d) $\mathfrak{R} = \{(x, y); x \text{ je vyšší než } y\}$
- (e) $\mathfrak{R} = \{(x, y); x \text{ má tých istých rodičov ako } y\}$
- (f) $\mathfrak{R} = \{(x, y); x \text{ má tú istú farbu vlasov ako } y\}$ ■

Cvičenie 7.12 Zapíšte ako množinu usporiadaných dvojíc reláciu ekvivalencie na množine $\{1, 2, 3, 4\}$ danú príslušným rozkladom. Vypíšte aj všetky triedy ekvivalencie $[1], [2], [3], [4]$.

- (a) $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ (c) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$ (e) $\{\{1, 2, 3, 4\}\}$
- (b) $\{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}$ (d) $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ ■

Cvičenie 7.13 Nech $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\mathbb{Y} = \{3, 4\}$. Definujme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathcal{P}(\mathbb{X})$ predpisom $(\mathbb{A} \mathfrak{R} \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\mathbb{A} \cup \mathbb{Y} = \mathbb{B} \cup \mathbb{Y})$.

- (a) Dokážte, že $\mathfrak{R}$ je relácia ekvivalencie. (c) Koľko existuje rôznych tried ekvivalencie danej relácie $\mathfrak{R}$?
- (b) Nájdite $[\mathbb{C}]$, pre $\mathbb{C} = \{1, 3\}$. ■

Cvičenie 7.14 Ak je $\mathfrak{R}$ relácia ekvivalencie na konečnej množine $\mathbb{X}$ a ak $|\mathbb{X}| = |\mathfrak{R}|$, tak čo vieme s istotou povedať o tom, ako musí relácia $\mathfrak{R}$ vyzeráť? ■

Cvičenie 7.15 Uveďte príklad relácie ekvivalencie na množine $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ktorá má práve štyri triedy ekvivalencie. ■

Cvičenie 7.16 Koľko relácií ekvivalencie existuje na množine $\{1, 2, 3\}$? ■

Cvičenie 7.17 Definujme reláciu ρ na množine $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, t. j. množine všetkých funkcií $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, predpisom $(f\rho g) \Leftrightarrow (f(0) = g(0))$.

- (a) Dokážte, že ρ je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- (b) Nech pre každé $x \in \mathbb{R}: f(x) = x$. Popíšte $[f]$. ■

Cvičenie 7.18 Nech $\mathbb{X} = \{1, 2, \dots, 10\}$. Definujme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}^2$ predpisom $((a, b)\mathfrak{R}(c, d)) \Leftrightarrow (a + d = b + c)$.

- (a) Dokážte, že $\mathfrak{R}$ je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}^2$.
- (b) Vypíšte jeden prvok každej triedy ekvivalencie relácie $\mathfrak{R}$. ■

Cvičenie 7.19 Nech $\mathbb{X} = \{1, 2, \dots, 10\}$. Definujme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}^2$ predpisom $((a, b)\mathfrak{R}(c, d)) \Leftrightarrow (ad = bc)$. Dokážte, že $\mathfrak{R}$ je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}^2$. ■

Cvičenie 7.20 Nech $\mathfrak{R}$ je reflexívna a tranzitívna relácia na množine $\mathbb{X}$. Dokážte, že $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}^{-1}$ je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$. ■

Cvičenie 7.21 Nech $\mathfrak{R}_1$ a $\mathfrak{R}_2$ sú dve relácie ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$.

- (a) Dokážte, že $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2$ je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$.
- (b) Popíšte triedy ekvivalencie $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2$ pomocou tried ekvivalencie relácií $\mathfrak{R}_1$ a $\mathfrak{R}_2$. ■

Cvičenie 7.22 Daná je funkcia $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$. Definujme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$ predpisom $(x\mathfrak{R}y) \Leftrightarrow (f(x) = f(y))$. Dokážte, že $\mathfrak{R}$ je relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$. ■

V nasledujúcej úlohe budeme používať pojem „*charakteristická funkcia množiny*“, a preto si ho najskôr definujeme.

Definícia 7.4.1 — Charakteristická funkcia množiny. Nech $\mathcal{U}$ je univerzum a $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{U}$. Potom pre každé $x \in \mathcal{U}$ definujeme funkciu f predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ak } x \in \mathbb{A} \\ 0, & \text{ak } x \notin \mathbb{A} \end{cases}$$

Takto definovaná funkcia $f: \mathcal{U} \rightarrow \{0, 1\}$ sa nazýva charakteristická funkcia množiny $\mathbb{A}$.

Cvičenie 7.23 Nech $\mathcal{U}$ je univerzum, $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{U}$ a f je charakteristická funkcia množiny $\mathbb{A}$. Na $\mathcal{U}$ definujeme reláciu $\mathfrak{R}$ predpisom $(x\mathfrak{R}y) \Leftrightarrow (f(x) = f(y))$. Podľa cvičenia 7.22 je $\mathfrak{R}$ relácia ekvivalencie na $\mathcal{U}$. Ako budú vyzeráť triedy ekvivalencie pre reláciu $\mathfrak{R}$? ■

Cvičenie 7.24 Nech O je pevne daný bod v rovine. Nech $\mathfrak{R}$ je relácia ekvivalencie na množine všetkých bodov roviny daná predpisom $(A \mathfrak{R} B) \Leftrightarrow (|AO| = |BO|)$, kde $|AO|$, resp. $|BO|$ označujú dĺžky úsečiek AO , resp. BO . Načrtnite triedu ekvivalencie nejakého bodu $C \neq O$. ■

Cvičenie 7.25 Relácia ekvivalencie na množine $\mathbb{X}$ je daná maticou. Ako pomocou matice relácie určíme triedu ekvivalencie daného prvku $x \in \mathbb{X}$? ■

Cvičenie 7.26 Nájdite všetky triedy ekvivalencie relácie $\mathfrak{R}$ danej maticou

$$\mathfrak{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Cvičenie 7.27 Ako len pomocou matice relácie zistíme, či je daná relácia funkciou? ■

Cvičenie 7.28 Nech A je matica funkcie $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ vzhľadom na nejaké usporiadanie množín $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$. Akú podmienku musí matica A spĺňať, aby funkcia f bola surjekcia? ■

Cvičenie 7.29 Pre každú z daných relácií $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a, b, c, d\}$ zistite, či ide o funkciu. Pokiaľ je daná relácia funkcia, tak nájdite jej obor hodnôt, nakreslite jej šípkový diagram, zistite, či ide o injekciu, surjekciu, bijekciu. Pokiaľ je daná funkcia bijektívna, nájdite k nej inverznú funkciu.

- (a) $\mathfrak{R} = \{(1, a), (2, a), (3, c), (4, b)\}$
- (b) $\mathfrak{R} = \{(1, c), (2, a), (2, d), (3, b), (4, c)\}$
- (c) $\mathfrak{R} = \{(1, c), (2, d), (3, a), (4, b)\}$
- (d) $\mathfrak{R} = \{(1, d), (2, d), (4, a)\}$
- (e) $\mathfrak{R} = \{(1, b), (2, b), (3, b), (4, b)\}$

Cvičenie 7.30 Koľko existuje rôznych funkcií $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ z množiny $\mathbb{X} = \{1, 2, 3\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a, b, c, d\}$? ■

Cvičenie 7.31 Koľko existuje rôznych injektívnych funkcií $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, ak

- (a) $\mathbb{X} = \{1, 2, 3\}$ a $\mathbb{Y} = \{a, b, c, d\}$?
- (b) $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ a $\mathbb{Y} = \{a, b, c, d\}$?
- (c) $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\mathbb{Y} = \{a, b, c, d\}$?

Cvičenie 7.32 Koľko existuje rôznych surjektívnych funkcií $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, ak

- (a) $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ a $\mathbb{Y} = \{a, b, c, d\}$?
- (b) $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ a $\mathbb{Y} = \{a, b, c\}$?
- (c) $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ a $\mathbb{Y} = \{a, b, c, d, e\}$?

Cvičenie 7.33 Koľko existuje rôznych bijektívnych funkcií $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, ak

- (a) $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4\}$ a $\mathbb{Y} = \{a, b, c, d, e\}$?
- (b) $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\mathbb{Y} = \{a, b, c, d\}$?
- (c) $\mathbb{X} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\mathbb{Y} = \{a, b, c, d, e\}$?

■

Cvičenie 7.34 Koľko existuje rôznych bijektívnych funkcií $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ na množine $\mathbb{X} = \{1, 2, \dots, n\}$?

■

Cvičenie 7.35 Na množine $\mathbb{X} = \{a, b, c\}$ je daná funkcia $f = \{(a, b), (b, c), (c, b)\}$.

- (a) Zapište zložené funkcie $f \circ f$ a $f \circ f \circ f$ ako množiny usporiadaných dvojíc.
- (b) Zapište zložené funkcie $f \circ f$ a $f \circ f \circ f$ pomocou matíc.
- (c) Definujeme funkciu

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n\text{-krát}}.$$

Zapište funkcie f^9 a f^{623} ako množiny usporiadaných dvojíc a pomocou matíc.

■

Cvičenie 7.36 Na množine $\mathbb{X} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ máme danú funkciu $f(x) = 4x \pmod{5}$. Zapište funkciu f ako množinu usporiadaných dvojíc a nakreslite jej šípkový diagram. Zistite, či je funkcia f injekcia, surjekcia, bijekcia.

■

Cvičenie 7.37 Na množine $\mathbb{X} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ máme danú funkciu $f(x) = 4x \pmod{6}$. Zapište funkciu f ako množinu usporiadaných dvojíc a nakreslite jej šípkový diagram. Zistite, či je funkcia f injekcia, surjekcia, bijekcia.

■

Cvičenie 7.38 Na množine $\mathbb{N}$ definujte funkciu, ktorá

- (a) je injekcia, ale nie surjekcia.
- (b) je surjekcia, ale nie injekcia.
- (c) je bijekcia, ale nie identická funkcia (identická funkcia je $f(n) = n$).
- (d) nie je ani injekcia, ani surjekcia.

■

Cvičenie 7.39 Riešte úlohu 7.38, ale pre funkciu $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$.

■

Cvičenie 7.40 Majme $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ a $\mathbb{S}, \mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$. Dokážte, že platí

- (a) $f(\mathbb{S} \cup \mathbb{T}) = f(\mathbb{S}) \cup f(\mathbb{T})$
- (b) $f(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) \subseteq f(\mathbb{S}) \cap f(\mathbb{T})$
- (c) ak f je injekcia, tak $f(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = f(\mathbb{S}) \cap f(\mathbb{T})$

■

Cvičenie 7.41 Majme $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ a $\mathbb{S}, \mathbb{T} \subseteq \mathbb{B}$. Definujeme $f^{-1}(\mathbb{S}) = \{a \in \mathbb{A} : f(a) \in \mathbb{S}\}$. Dokážte, že platí

- (a) $f^{-1}(\mathbb{S} \cup \mathbb{T}) = f^{-1}(\mathbb{S}) \cup f^{-1}(\mathbb{T})$
- (b) $f^{-1}(\mathbb{S} \cap \mathbb{T}) = f^{-1}(\mathbb{S}) \cap f^{-1}(\mathbb{T})$
- (c) $f^{-1}(\overline{\mathbb{S}}) = \overline{f^{-1}(\mathbb{S})}$

■

Cvičenie 7.42 Majme dané funkcie $g : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ a $f : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$. O každom z nasledujúcich výrokov zistite, či je pravdivý. Ak je daný výrok pravdivý, dokažte ho, ak nie je pravdivý, nájdite kontrapríklad.

- (a) Ak g je injekcia, tak aj $f \circ g$ je injekcia.
- (b) Ak f je surjekcia, tak aj $f \circ g$ je surjekcia.
- (c) Ak g je surjekcia, tak aj $f \circ g$ je surjekcia.
- (d) Ak f aj g sú surjekcie, tak aj $f \circ g$ je surjekcia.
- (e) Ak f aj g sú bijekcie, tak aj $f \circ g$ je bijekcia.
- (f) Ak $f \circ g$ je injekcia, tak aj f je injekcia.
- (g) Ak $f \circ g$ je injekcia, tak aj g je injekcia.
- (h) Ak $f \circ g$ je surjekcia, tak aj f je surjekcia.
- (i) Ak f a $f \circ g$ sú injekcie, tak aj g je injekcia.
- (j) Ak f a $f \circ g$ sú surjekcie, tak aj g je surjekcia.

■

Cvičenie 7.43 Nech $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ označuje množinu všetkých funkcií z množiny $\mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{R}$. Pre $a \in \mathbb{R}$ definujeme funkciu $E_a : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ predpisom $E_a(f) = f(a)$.

- (a) Je funkcia E_a injektívna? Zdôvodnite!
- (b) Je funkcia E_a surjektívna? Zdôvodnite!

■

Cvičenie 7.44 Nech $\mathcal{U}$ je univerzum a $\mathbb{A} \subseteq \mathcal{U}$. Charakteristickú funkciu množiny $\mathbb{A}$, pozri definíciu 7.4.1 (strana 149), označíme $C_{\mathbb{A}}(x)$. Dokažte že platí

- (a) $\forall x \in \mathcal{U} : C_{\mathbb{A} \cap \mathbb{B}}(x) = C_{\mathbb{A}}(x) \cdot C_{\mathbb{B}}(x)$
- (b) $\forall x \in \mathcal{U} : C_{\mathbb{A} \cup \mathbb{B}}(x) = C_{\mathbb{A}}(x) + C_{\mathbb{B}}(x) - C_{\mathbb{A}}(x) \cdot C_{\mathbb{B}}(x)$
- (c) $\forall x \in \mathcal{U} : C_{\overline{\mathbb{A}}}(x) = 1 - C_{\mathbb{A}}(x)$
- (d) $\forall x \in \mathcal{U} : C_{\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}}(x) = C_{\mathbb{A}}(x) \cdot (1 - C_{\mathbb{B}}(x))$
- (e) Ak $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, tak $\forall x \in \mathcal{U} : C_{\mathbb{A}}(x) \leq C_{\mathbb{B}}(x)$
- (f) $\forall x \in \mathcal{U} : C_{\mathbb{A} \triangle \mathbb{B}}(x) = C_{\mathbb{A}}(x) + C_{\mathbb{B}}(x) - 2C_{\mathbb{A}}(x) \cdot C_{\mathbb{B}}(x)$

Poznámka: Symbol $\triangle$ je symetrická diferencia množín, definovaná na strane 41.

■

Cvičenie 7.45 Majme dané množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$, pričom $|\mathbb{A}| = m$, $|\mathbb{B}| = n$ a $m \neq n$. Určte podmienku na to, aby funkcia $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{B}$ mohla byť injekcia. Môže byť potom funkcia f aj surjekcia?

■

Cvičenie 7.46 Ukážte, že existuje bijekcia z množiny $\mathbb{A} \times \mathbb{B}$ do množiny $\mathbb{B} \times \mathbb{A}$.

■

Cvičenie 7.47 Zistite

- (a) koľko existuje surjekcií z trojprvkovej množiny na dvojprvkovú množinu.
- (b) koľko existuje injekcií z trojprvkovej množiny na štvorprvkovú množinu.

■

Cvičenie 7.48 Ktoré z nasledujúcich vlastností funkcií sa zachovávajú pri kompozícii funkcií? Svoje tvrdenia dokážte!

(a) Injektívnosť?

(b) Surjektívnosť?

(c) Bijektívnosť?





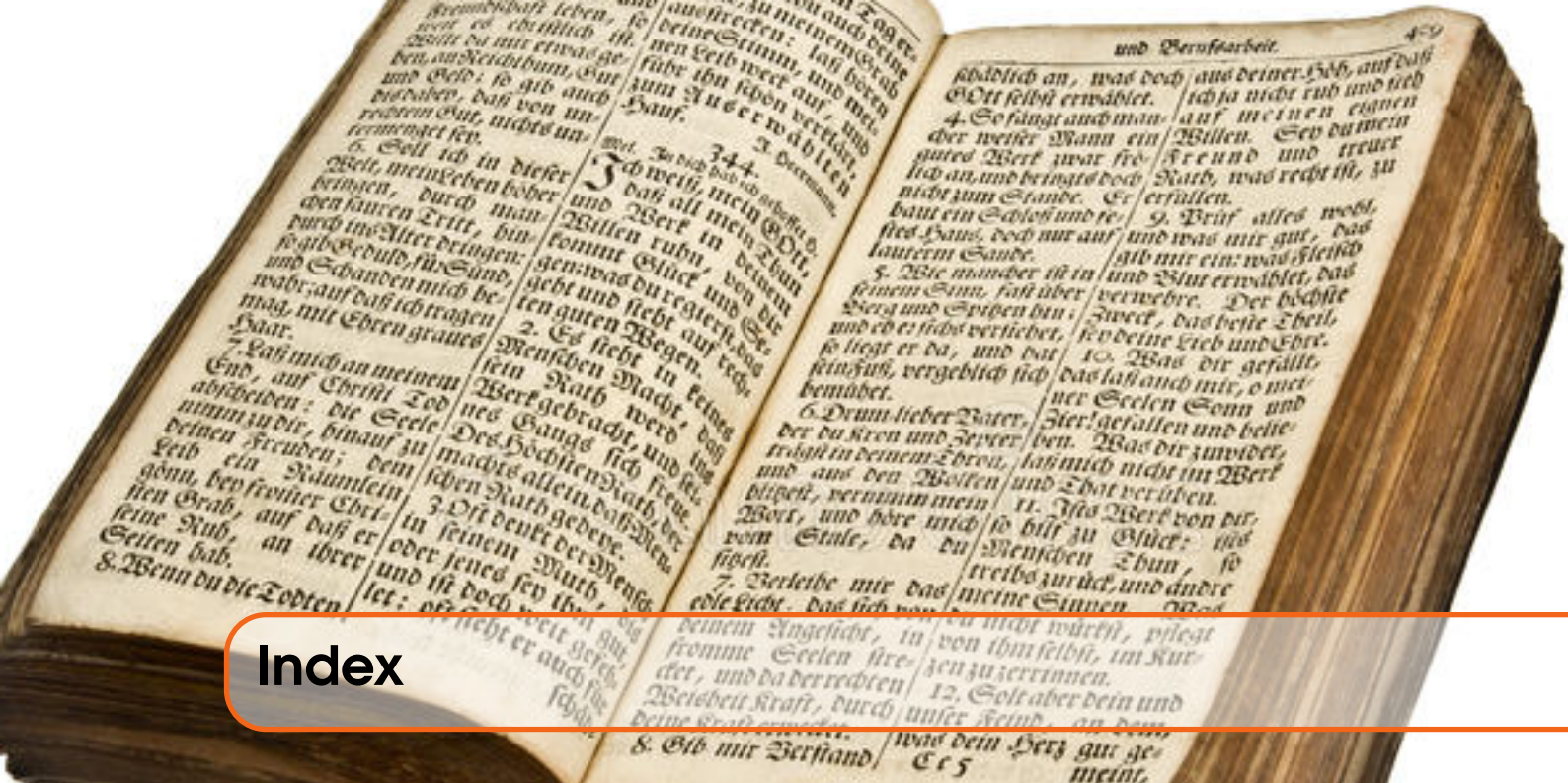
Použitá a odporúčaná literatúra

- [1] Martin Aigner: **Combinatorial Theory**, SPRINGER VERLAG, HEIDELBERG 1979.
- [2] Bohuslav Balcar, Petr Štěpánek: **Teorie množin**, ACADEMIA, PRAHA 1986.
- [3] Berežný, Draženská, Kravcová: **Zbierka úloh z diskkrétnej matematiky**, FEI TU, KOŠICE 2005. <http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/10/Zbierka-DM.pdf>
- [4] J. A. Bondy, U. S. Murty: **Graph Theory With Applications**, NORTH-HOLLAND 1976.
- [5] Reinhard Diestel: **Graph Theory**, SPRINGER 2000.
- [6] Harary, Frank: **Graph theory**, ADDISON-WESLEY 1969.
- [7] Richard Johnsonbaugh: **Discrete Mathematics**, PEARSON 2017.
- [8] Josef Kaucký: **Kombinatorické identity**, VEDA, VYDAVATELSTVO SAV, BRATISLAVA 1975.
- [9] Martin Knor: **Úvod do matematickej logiky**, FIIT STU, BRATISLAVA 2016.
<http://www.math.sk/jmkollar/literatura/Knor-Uvod.do.matematickej.logiky.pdf>
- [10] Martin Knor: **Teória grafov**, SVF STU, BRATISLAVA 2008.
<http://www.svf.stuba.sk/docs/dokumenty/skripta/teoria-grafov.martin.knor.pdf>
- [11] Martin Knor, Jozef Kollár: **Matematika pre architektov**, STU BRATISLAVA, 2002.
- [12] Donald E. Knuth: **The Art of Computer Programming, Volume 1**, ADDISON-WESLEY, 1997.
- [13] Sergei K. Lando: **Lectures on Generating Functions**, AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, STUDENT MATHEMATICAL LIBRARY 2003.
- [14] Milan Mareš: **Příběhy matematiky**, PISTORIUS & OLŠANSKÁ, PŘÍBRAM 2011.
- [15] J. Matoušek, J. Nešetřil: **Kapitoly z diskrétní matematiky**, KAROLINUM, PRAHA 2002.

- [16] М. В. Меньшиков, А. М. Ревякин, А. Н. Копылова, Ю. Н. Макаров, Б. С. Стечкин: **Комбинаторный Анализ – Задачи и упражнения**, Издательство »НАУКА«, МОСКВА 1982.
- [17] В. А. Носов: **Комбинаторика и теория графов**, МОСКВА 1999.
<http://intsys.msu.ru/staff/vnosov/combgraph.htm> (PDF verzia)
- [18] Stanislav Palúch: **Algoritmická teória grafov**, ŽILINSKÁ UNIVERZITA, 2008.
<http://frcatel.fri.uniza.sk/users/paluch/grafy.pdf>
- [19] Ján Plesník: **Grafové algoritmy**, VEDA, BRATISLAVA 1983.
- [20] Franco P. Preparata, Raymond T. Yeh: **Úvod do teórie diskretných matematických štruktúr**, ALFA, BRATISLAVA 1982.
- [21] Edward M. Reingold, Jurg Nievergelt, Narsingh Deo: **Combinatorial Algorithms – Theory and Practice**, PRENTICE-HALL, NEW JERSEY 1977.
- [22] Beloslav Riečan a kol.: **Úlohy z matematiky pre 4. ročník gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1976.
- [23] Beloslav Riečan a kol.: **Matematika pre 4. ročník gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1987.
- [24] Beloslav Riečan a kol.: **Zbierka úloh z matematiky pre 4. ročník gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1991.
- [25] Karol Rován a kol.: **Zbierka riešených úloh z algebry pre SVŠ a odborné školy**, SPN, BRATISLAVA 1969.
- [26] К. А. Рыбников: **Введение в Комбинаторный Анализ**, Издательство Московского Университета, МОСКВА 1985.
- [27] Raymond M. Smullyan: **A Beginner's Guide to Mathematical Logic**, DOVER PUBLICATIONS, NEW YORK 2014.
- [28] František Vejsada, František Talafous: **Zbierka úloh z matematiky pre SVŠ a gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1973.
- [29] Naum J. Vilenkin: **Rozhovory o množinách**, SPN, BRATISLAVA 1972.
- [30] Herbert S. Wilf: **generatingfunctionology**, ACADEMIC PRESS, INC. 1994.
<https://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>
- [31] Niklaus Wirth: **Algoritmy a štruktúry údajov**, ALFA, BRATISLAVA 1989.
- [32] Štefan Znáň: **Kombinatorika a teória grafov**, PF UK, BRATISLAVA 1978.

IV

Index



Index

Symboly

∈ operátor „patrí do množiny“	11
∉ operátor „nepatrí do množiny“	11
⊂ operátor vlastnej podmnožiny	12
⊆ operátor nevlastnej podmnožiny	12
⋃ operátor zjednotenia množín	12
⋂ operátor prieniku množín	13
∖ operátor rozdielu množín	13
Ā komplement množiny A	14
¬ operátor logickej negácie	20
∨ operátor disjunkcie	20
∧ operátor konjunkcie	20
⇔ operátor ekvivalencie	20
⇒ operátor implikácie	20
∃ existenčný kvantifikátor	23
∀ všeobecný kvantifikátor	23
operátor „a delí b“ (a b)	40
△ operátor symetrickej diferencie	41

A

acyklický graf	62
algoritmus	
Borůvkov	203
Dijkstrov	229–231
hľadania kostry grafy	179
Jarníkov (Primov)	197
konštrukcie očíslovaného stromu z Prüferovho kódu	241

B

konštrukcie optimálneho Huffmanovho kódu	206
konštrukcie Prüferovho kódu z očíslovaného stromu	235
konštrukcie prehľadávacieho binárneho stromu	215
Kruskalov	201, 202
pažravý	201
prehľadávania grafu do hĺbky	187
prehľadávania grafu do šírky	182
zostavovania identifikačného kódu binárneho stromu	219
zostavovania identifikačného kódu koreňového stromu	222
antisymetrickosť (relácie)	125, 130
Appel Kenneth (1932–2013)	48
ASCII kód	204
atomická formula	20
axióma	31
backtracking	186
bijektivnosť	145
binárny strom	80
binomický koeficient	171
Borůvka Otakar (1899–1995)	196, 203
Bouton Charles Leonard (1869–1922)	224

C

Catalanovo číslo 174, 213
 Cayley Arthur (1821–1895) 16, 48, 241
 centrálny vrchol grafu 56
 centrum grafu 56
 cesta (v grafe) 55, 112
 cyklus (v grafe) 57, 112

Č

číslo

Catalanovo 174, 213
 celé $\mathbb{Z}$ 15
 iracionálne 15
 komplexné $\mathbb{C}$ 16
 kvaternion 16
 oktonion 16
 prirodzené $\mathbb{N}$ 14
 racionálne $\mathbb{Q}$ 15
 reálne $\mathbb{R}$ 15

D

dátová štruktúra

fronta 180
 zásobník 180

dôkaz

matematickou indukciou 37, 39
 nepriamy 35
 priamy 32
 sporom 36

de Moivre Abraham (1667–1754) 155

de Morgan Augustus (1806–1871) 48

definícia 32

Dijkstra Edsger Wybe (1930–2002) . 197, 230

Dijkstrov algoritmus 229, 231

disjunkcia ($\vee$) 21

disjunktné množiny 13

E

ekvivalencia ($\Leftrightarrow$) 22

ekvivalencia (relácie) 140

entropický kód 204

Euklides Alexandrijský (~3. stor. pred n.l.) 15

Euklidovský priestor 108

Euler Leonhard (1707–1783) 47, 84, 109, 156

F

faktor grafu 62

faktoriál 39

dvojný 172

Fano Roberto Mario (1917–2016) 204

Fibonacci Leonardo (~1170 – ~1240) ... 167

Fibonacciho postupnosť 167

formula

atomatická 20

prvotná 20

výroková 20, 22

formuly

ekvivalentné 22

fronta 180

funkcia 143

bijektívna 145

charakteristická funkcia množiny 149

definičný obor 143

injektívna 144

inverzná 145

koobor 143

obor hodnôt 143

parciálna 143

surjektívna 144

vytvárajúca

exponenciálna, 175

obyčajná, 160

zložená 146

G

Gauss Carl Friedrich (1777-1855) 38

geometrická postupnosť

súčet prvých n členov 39

Gonthier Georges 48

graf

acyklický 62

artikulácia 61

bipartitný 53

kompletný ($K_{m,n}$), 54, 112

centrum 56

cesta 55, 112

cesta (P_n) 112

cyklus 57, 112

hamiltonovský, 95

cyklus (C_n) 112

digraf 50

dĺžka ťahu 55

dĺžka cesty 55

graf

dĺžka cyklu	57
dĺžka sledu	54
dokonalé párovanie	89
Eulerova veta o rovinných grafoch	110
eulerovský	87
eulerovský ťah	85
otvorený, 85, 87	
uzavretý, 85, 86	
excentricita vrcholu	56
faktor	62
hodnota	196
hodnota hrany	195
hodnota sledu	229
homeomorfné grafy	112
hrana	49
ohodnotená, 195	
hranica oblasti	108
húsenica	113
hviezda (S_n)	113
incidencia (vrchol–hrana)	50
invariant	101
izomorfizmus	
binárnych stromov, 106	
koreňových stromov, 105	
izomorfizmus grafov	98, 99
izomorfné grafy	99
jadro	225
jednoduchý (obyčajný)	51
Knight graph	98
koleso (W_n)	113
komplementárny	53
kompletný (K_n)	52, 112
kompletný bipartitný ($K_{m,n}$)	54, 112
komponent súvislosti	57, 60
konečný	49
koreňový strom	77
dieťa vrcholu, 78	
koncový vrchol, 78	
list, 78	
otec vrcholu, 78	
podstrom, 78	
potomok vrcholu, 78	
predkovia vrcholu, 78	
súrodenci (vrcholy), 78	
úroveň vrcholu, 77	
vnútorný vrchol, 78	
výška, 77	

graf

kostra	62
minimálna, 196	
Kuratowského veta	112
ľavý podstrom	213
les	77
list	77
matica incidencie	72
matica susednosti	69
minimálna kostra	196
množina vrcholov	
nezávislá, 225	
stabilná, 225	
most	61
najlacnejšia cesta	230
najlacnejšia kostra	196
násobné hrany	50
nekonečný	49
neorientovaný	49
nesúvislý	57
nezávislá množina vrcholov	225
oblasť	108
obyčajný (jednoduchý)	51
ohodnotený	195
ohodnotenie hrany	195
orientovaná hrana	49, 50
orientovaný	49, 50
otvorený sled	55
párovanie	89
maximálne, 89	
perfektné párovanie	89
podgraf	58
polomer	56
pravý podstrom	213
pravidelný	52
prázdny	49, 80
prehľadávanie do šírky	182
prehľadávanie do hĺbky	187
priemer	56
problém obchodného cestujúceho	234
rovinné nakreslenie	108
rovinný	108
sled	54
otvorený, 55	
uzavretý, 55	
slučka (hrana)	50
stabilná množina vrcholov	225

graf
 strom 73
 binárny, 80
 binárny úplný, 81
 binárny dokonalý, 82
 binárny prehľadavací, 214
 binárny vyvážený, 81
 koreň, 77, 105
 očíslovaný, 234
 prehľadavací binárny, 213
 stupeň vrcholu 51
 subdivízia hrany 111
 susedné oblasti 108
 susednosť (vrchol–vrchol) 50
 súvislý 57
 ťah 55
 uzavretý sled 55
 vrchol 49, 50
 centrálny, 56
 izolovaný, 50
 stupeň, 51
 vzdialenosť vrcholov 56
 Graves John Thomas (1806–1870) 16
 Guthrie Francis (1831–1899) 48

H

Haken Wolfgang (1928–...) 48
 Hamilton William R. (1805–1865) . 16, 48, 95
 harmonická postupnosť 166
 Herón Alexandrijský (10–75) 15
 Hippasos (~530–~450 pred n. l.) 15
 hodnota grafu 196
 hrana
 koncový vrchol 181
 počiatočný vrchol 181
 Huffman David Albert (1925–1999) 204
 Huffmanov kód 80, 204, 206
 húsenica (graf) 113
 hviezda (graf) 113
 hypotéza 32

I

implikácia ($\Rightarrow$) 21
 indukčný
 krok 38
 predpoklad 38
 injektívnosť 144
 inverzná funkcia 145

inverzná relácia 127

J

jadro grafu 225
 Jarník Vojtěch (1897–1970) 196, 197
 Jarníkov (Primov) algoritmus 197
 jazyk 1. rádu 23
 jednotka
 imaginárna 16
 kvaternionová 16
 oktonionová 16

K

kartézsky súčin 19
 Kempe Alfred Bray (1849–1922) 48
 kód
 ASCII 204
 Huffmanov 80, 204, 206
 Prüferov 234
 koeficient
 binomický 171
 Newtonov, 171
 multinomický 177
 koleso (graf) 113
 komplementárna množina 14
 komponent súvislosti (grafu) 60
 konjunkcia ($\wedge$) 21
 kontradikcia 20
 koreň 77
 koreňový strom 77
 kostra grafu 62
 Kőnig Dénes (1884–1944) 48
 Kruskal Joseph B. (1928–2010) 196, 201
 Kruskalov algoritmus 202
 Kuratowski Kazimierz (1896–1980) 111
 kvantifikátor
 existenčný 23
 všeobecný 23

L

Laplace Pierre-Simon (1749–1827) 156
 lema 62
 les 77
 list 77
 logická
 hodnota 19
 premenná 19

logická	
spojka	19, 20
logický	
operátor	19
výrok	19
logika	
predikátová	23
výroková	22

M

matematická indukcia	37, 39
matica	
incidencie grafu	72
relácie	128
susednosti grafu	69
maximálne párovanie grafu	89
množina	11
charakteristická funkcia	149
kartézsky súčin množín	19
komplementárna	14
konečná	12
mohutnosť	12
nekonečná	12
podmnožina	12
potenčná	13
prázdna	11
rozklad	138
spočítateľná	37
systém množín	138
univerzálna	14
univerzum	13, 14
množiny	
disjunktné	13
prienik množín	13
rovnosť množín	11
rozdiel množín	13
symetrická diferencia množín	41
zjednotenie množín	12
mocninový rad	156
modulo (zvyšok po delení)	41
modulo $a \pmod{b}$	41
modus ponens	32
mohutnosť množiny	12
Moskovský papyrus	16
multinomická veta	177
multinomický koeficient	177

N

negácia ($\neg$)	20
Newton Isaac (1642–1727)	171
Newtonov binomický koeficient	171

P

P-kód (prefixový kód)	204
párovanie grafu	89
perfektné párovanie	89
podgraf grafu	58
podmnožina	
vlastná	12
postupnosť	
Fibonacciho	167
harmonická	166
potenčná množina	13
pravdivostná hodnota	19
pravdivostná tabuľka	20
prázdna množina	11
prázdny graf	80
prefixový kód	204
prehľadavací binárny strom	213, 214
prehľadávanie grafu	
do hĺbky	186, 187
do šírky	181, 182
prienik množín	13
Prim Robert Clay (1921–...)	197
princíp zapojenia-vypojenia	18
problém	
NP-úplný	96
obchodného cestujúceho	47, 234
štyroch farieb	48
Prüfer Ernst Paul Heinz (1896–1934)	241
Prüferov kód	234
prvky	
porovnateľné	137
neporovnateľné	137
prvotná formula	20
pseudokód	
Dijkstrovho algoritmu	231
hľadania kostry grafu	179
Jarníkovho algoritmu	197
konštrukcie očíslovaného stromu z Prüferovho kódu	241
konštrukcie optimálneho Huffmanovho kódu	206
konštrukcie prehľadávacieho binárneho stromu	215

konštrukcie Prüferovho kódu z očíslovaného stromu 235
 Kruskalovho algoritmu 202
 prehľadávania grafu do hĺbky 187
 prehľadávania grafu do šírky 182
 zostavovania identifikačného kódu binárneho stromu 219
 zostavovania identifikačného kódu koreňového stromu 222
 pytagorejci 15

R

rad
 formálny mocninový 156
 Maclaurinov 156
 mocninový 156
 Taylorov 156
 reflexívnosť (relácie) 124, 129
 relácia
 n -árna 123
 antisymetrická 125, 130
 binárna 123, 124
 čiasťočné usporiadanie 137
 ekvivalencie 140
 inverzná 127
 maticová reprezentácia 128
 na množine 124
 reflexívna 124, 129
 symetrická 125, 129
 tranzitívna 126
 zložená 128
 rovnosť množín 11
 rozdiel množín 13
 rozklad množiny 138
 triedy ekvivalencie 141
 triedy rozkladu 138

S

semifaktoriál 172
 skladanie funkcií 146
 skladanie relácií 128
 sled (v grafe) 54
 slučka (graf) 50
 spočítateľná množina 37
 Stirling James (1692–1770) 156
 strom (graf) 73
 vyvážený binárny 81
 subdivízia hrany 111

súčín
 kartézsky 19
 surjektívnosť 144
 sylogizmus 34
 symetrická diferencia množín (Δ) 41
 symetrickosť (relácie) 125, 129
 systém množín 138

T

tabuľka
 pravdivostná 20
 Tait Peter Guthrie (1831–1901) 48
 tautológia 20
 tautologicky ekvivalentné formuly 22
 tranzitívnosť (relácie) 126
 trieda
 rozkladu 138
 zvyšková 142
 trieda ekvivalencie 141

Ť

ťah (v grafe) 55

U

univerzum množín 13, 14
 usporiadaná dvojica 18
 usporiadanie
 čiasťočné 137
 neporovnateľnosť, 137
 porovnateľnosť, 137
 lineárne 138

Ú

úplný binárny strom 81

V

Vennove diagramy 16
 veta
 Cayleyho 242
 Eulerova o rovinných grafoch 110
 Kuratowského 112
 multinomická 177
 o centre stromu 224
 o cykloch 58
 o existencii cesty v grafe 56
 o existencii jadra grafu 226

veta	
o existencii kostry grafu	63
o explicitnom vyjadrení rekurentných postupností	170
o invariantnosti cyklu C_n	102
o invariantnosti stupňov vrcholov	101
o inverznej funkcii	145
o komponentoch grafu	61
o korektnosti prehľ. algoritmov	191
o matematickej indukcii	39
o matici susednosti	71
o matici zloženej relácie	131
o maticiach susednosti izomorfných grafov	100
o mohutnosti kartézskeho súčinu	19
o optimálnej lokalizácii v prehľadávacom binárnom strome	217
o otvorenom eulerovskom ťahu	87
o počte koncových vrcholov úplných binárnych stromov	81
o potenčnej množine	40
o relácii danej rozkladom množiny	139
o rozklade danom rel. ekvivalencie	141
o správnosti Jarníkovho algoritmu	199
o stromoch	76
o stupňoch vrcholov rovinného grafu	111
o súčte stupňov vrcholov grafu	52
o súvislosti výšky a počtu koncových vrcholov binárnych stromov	82
o tranzitívnosti relácie na množine	132
o uzavretom eulerovskom ťahu	86
o vrchoch stromov	76
pravidlo sylogizmu	34
základná algebry	16
základná aritmetiky	37
veta (matematická)	31
vrchol	
dieťa	78
koncový	50, 78
list	77
otec	78
počiatočný	50
potomok	78
predkovia	78
rodič	78
súrodenci	78
syn	78
vnútorný	78
výroková formula	20, 22

vytvárajúca funkcia	
exponenciálna	175
obyčajná	160
súčet	161
súčin	162
vyvážený binárny strom	81

W

Werner Benjamin	48
-----------------	----

Z

základná veta algebry	16
základná veta aritmetiky	37
zásobník	180
zjednotenie množín	12
zložená funkcia	146
zvyšková trieda	142
zvyšok po delení (modulo)	41