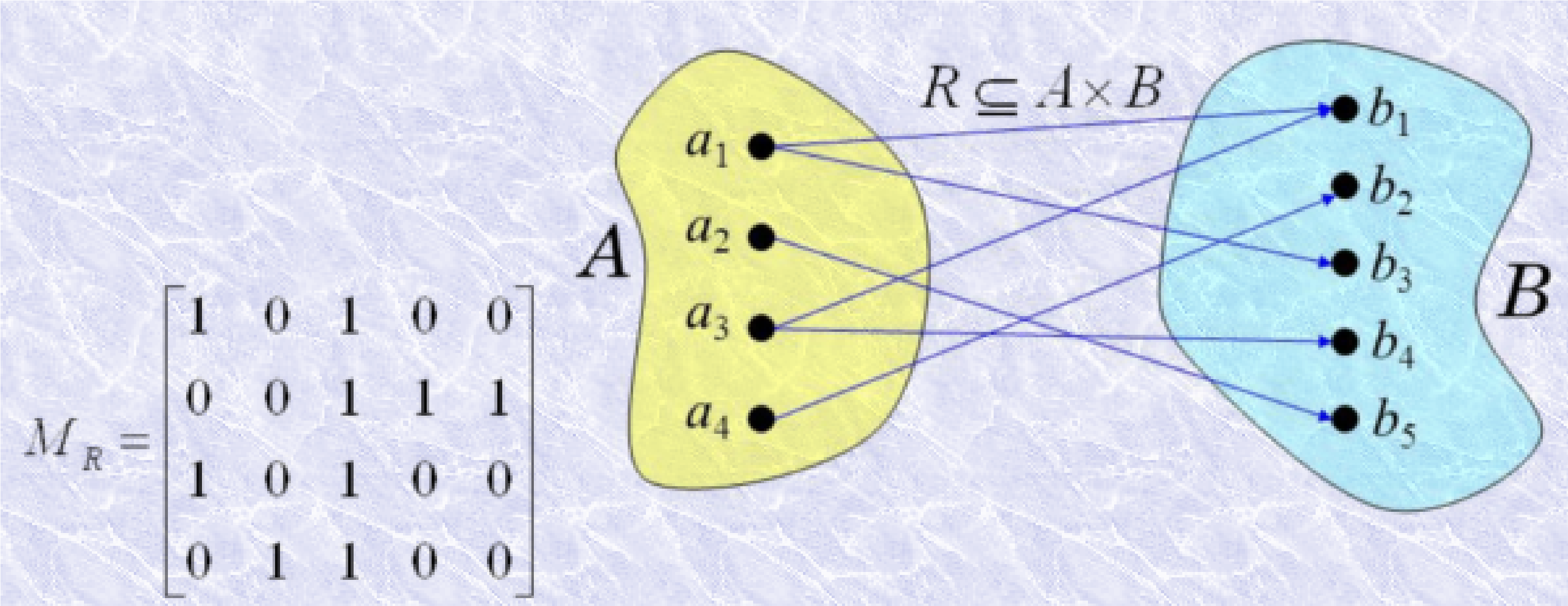


6. Binárne relácie, ich vlastnosti a reprezentácia

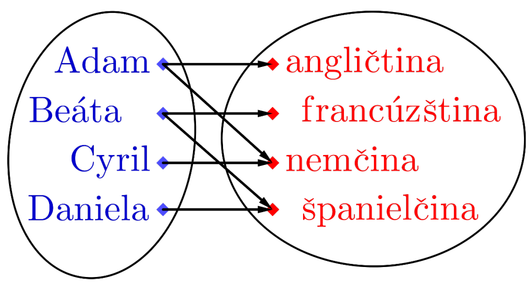
Relácia popisuje/vyjadruje vzťah medzi množinami. Vo všeobecnosti to môže byť n množín. V takom prípade hovoríme o n-árnej relácii. Nás ale budú zaujímať prevažne vzťahy medzi dvoma množinami a vtedy hovoríme o binárnej relácii. Binárne aj n-árne relácie slúžia na vyjadrovanie vzťahov medzi objektami reálneho života, pri ich popisovaní jazykom matematiky.

6.1 Binárne relácie

Ako už bolo spomenuté v úvode, binárne relácie vyjadrujú vzťah medzi dvoma množinami. Ilustrujeme si to na jednoduchom príklade.

■ **Príklad 6.1** V jazykovej škole Adam študuje angličtinu a nemčinu, Beáta francúzštinu a španielčinu, Cyril francúzštinu a Daniela španielčinu. Máme teda množinu študentov $\mathbb{A}$ ={Adam, Beáta, Cyril, Daniela} a množinu jazykov $\mathbb{B}$ ={angličtina, francúzština, nemčina, španielčina}. To, aký jazyk kto študuje, sme popísali slovne, dá sa to vyjadriť aj tabuľkou alebo obrázkom

študent	**jazyk**
Adam	angličtina
Adam	nemčina
Beáta	francúzština
Beáta	španielčina
Cyril	francúzština
Daniela	španielčina



a dá sa to vyjadriť aj pomocou usporiadaných dvojíc

$$\mathfrak{R} = \{(\text{A,a}), (\text{A,n}), (\text{B,f}), (\text{B,š}), (\text{C,f}), (\text{D,š})\}\,.$$

Je zrejmé, že $\mathfrak{R} \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{B}$. Množina $\mathfrak{R}$ sa nazýva binárna relácia a vyjadruje vzťah medzi prvkami množiny $\mathbb{A}$ a prvkami množiny $\mathbb{B}$, čiže to ktorý prvok jednej množiny, je vo vzťahu s prvkom druhej množiny. ■

Vzťah medzi prvkami dvoch množín môžeme formalizovať pomocou pojmu *binárnej relácie*.

Definícia 6.1.1 — Binárna relácia. Ľubovoľná podmnožina kartézskeho súčinu $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ sa nazýva binárna relácia $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$. Ak je $(x,y) \in \mathfrak{R}$, tak hovoríme, že x je v relácii s y a zapisujeme to $x\mathfrak{R}y$.
Ak platí $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$, tak hovoríme, že $\mathfrak{R}$ je binárna relácia na množine $\mathbb{X}$.

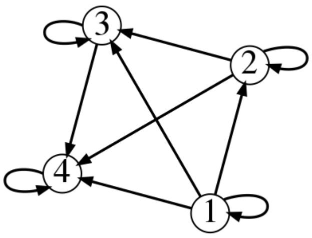
Ako sme si už ukázali v príklade 6.1, binárne relácie sa dajú popísať

1. vymenovaním množiny $\mathfrak{R}$,
2. tabuľkou,
3. šípkovým diagramom (príklad 6.1),
4. orientovaným grafom (pozri príklad 6.2),
5. pomocou nejakej vlastnosti zadanej napr. predpisom (príklad 6.2),
6. maticou (pozri podkapitolu 6.4, str. 128).

Pri popisovaní binárnej relácie $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ kreslíme množinu $\mathbb{X}$ vľavo, množinu $\mathbb{Y}$ vpravo a z prvku $x \in \mathbb{X}$ pôjde šípka do prvku $y \in \mathbb{Y}$ práve vtedy, ak $x\mathfrak{R}y$. Pre binárnu reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$ (pre $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$) zostrojíme orientovaný graf s množinou vrcholov $\mathbb{X}$.

■ **Príklad 6.2** Ukážeme si príklad relácie $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{A} = \{1,2,3,4\}$ definovanú predpisom

$$\mathfrak{R} = \{(a,b)\,;\; a,b \in \mathbb{A} \;\wedge\; a \leq b\}\,.$$



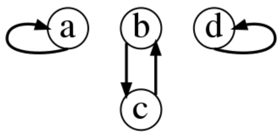
Platí $\mathfrak{R} \subseteq \mathbb{A} \times \mathbb{A}$, túto reláciu vieme popísať aj vymenovaním jej prvkov

$$\mathfrak{R} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$$

a pomocou orientovaného grafu túto reláciu môžeme zakresliť napríklad tak, ako to vidíme na obrázku vľavo. ■

Ak máme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$, tak vrcholy grafu relácie $\mathfrak{R}$ budú prvky množiny $\mathbb{X}$. Ak pre $x,y \in \mathbb{X}$, je $(x,y) \in \mathfrak{R}$, tak v orientovanom grafe pôjde orientovaná hrana z vrcholu x do vrcholu y. Ak $(x,x) \in \mathfrak{R}$, tak v grafe bude slučka na vrchole x.

■ **Príklad 6.3** Reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X} = \{a,b,c,d\}$ môžeme zadať aj pomocou orientovaného grafu. Nech je grafom relácie



Potom $\mathfrak{R} = \{(a,a),(b,c),(c,b),(d,d)\}$. ■

6.2 Vlastnosti relácií

Na predmete *Diskrétna matematika* sa budeme zaoberať prevažne **binárnymi reláciami na množine**, čiže binárnymi reláciami, pre ktoré $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$. V oboch kapitolách o reláciach, pokiaľ v konkrétnom prípade nebude uvedené inak, budeme pojmom *relácia* označovať binárnu reláciu na množine. Teraz si definujeme a na príkladoch ilustrujeme niektoré vlastnosti relácií.

Definícia 6.2.1 — Reflexívna relácia. Majme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$. Potom relácia $\mathfrak{R}$ je reflexívna, ak pre každé $x \in \mathbb{X}$: $(x,x) \in \mathfrak{R}$.

Relácia z príkladu 6.2 je reflexívna, lebo pre všetky $x \in \mathbb{X}: \ x \leq x$. Preto má jej orientovaný graf slučku pri každom svojom vrchole. To je zároveň vlastnosť grafu každej reflexívnej relácie. Relácia z príkladu 6.3 nie je reflexívna, lebo $(b,b) \notin \mathfrak{R}$ a ani $(c,c) \notin \mathfrak{R}$. Vidno to aj z jej grafu. Pri vrchole b, ani pri vrchole c táto relácia nemá slučku.

Definícia 6.2.2 — Symetrická relácia. Majme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$. Potom relácia $\mathfrak{R}$ je symetrická, ak platí $(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X}): \ (x,y) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (y,x) \in \mathfrak{R}$.

Relácia z príkladu 6.3 je symetrická, pretože platí

$$\begin{aligned} (a,a) \in \mathfrak{R} \quad &\Rightarrow \quad (a,a) \in \mathfrak{R} & \qquad (b,c) \in \mathfrak{R} \quad &\Rightarrow \quad (c,b) \in \mathfrak{R} \\ (d,d) \in \mathfrak{R} \quad &\Rightarrow \quad (d,d) \in \mathfrak{R} & \qquad (c,b) \in \mathfrak{R} \quad &\Rightarrow \quad (b,c) \in \mathfrak{R} \end{aligned}$$

Ak v orientovanom grafe symetrickej relácie existuje hrana z vrcholu x do vrcholu y, tak musí existovať aj spätná hrana z vrcholu y do vrcholu x. Graf relácie z príkladu 6.3 má túto vlastnosť a graf relácie z príkladu 6.2 ju nemá. Relácia z príkladu 6.2 nie je symetrická, pretože pre $x \neq y$ neplatí implikácia $(x \leq y) \Rightarrow (y \leq x)$.
Na to, ako zistiť, či daná relácia nie je symetrická si znegujeme jej definíciu. Negáciou tvrdenia

$$(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X}): \ (x,y) \in \mathfrak{R} \Rightarrow (y,x) \in \mathfrak{R}$$

je tvrdenie

$$(\exists x \in \mathbb{X})\,(\exists y \in \mathbb{X}): \ (x,y) \in \mathfrak{R} \ \wedge \ (y,x) \notin \mathfrak{R}$$

Na orientovanom grafe relácie sa to prejaví tak, že existuje hrana z vrcholu x do vrcholu y, ale neexistuje spätná hrana z vrcholu y do vrcholu x.

Definícia 6.2.3 — Antisymetrická relácia. Majme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$. Potom relácia $\mathfrak{R}$ je antisymetrická, ak platí $(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X}): \ \big((x,y) \in \mathfrak{R} \ \wedge \ (y,x) \in \mathfrak{R}\big) \Rightarrow (x = y)$.

Relácia z príkladu 6.2 je antisymetrická, pretože platí $(x \leq y \ \wedge \ y \leq x) \Rightarrow (x = y)$. Naopak, relácia z príkladu 6.3 antisymetrická nie je, pretože $(b,c) \in \mathfrak{R}$ a $(c,b) \in \mathfrak{R}$, ale $b \neq c$.

Z vety o obmenenej implikácii, spomenutej v podkapitole o nepriamom dôkaze (podkapitola 2.2), vieme, že výroky $p \Rightarrow q$ a $\neg q \Rightarrow \neg p$ sú tautologicky ekvivalentné. Spravme teraz obmenenú implikáciu ku implikácii z definície 6.2.3. Pôvodná implikácia je

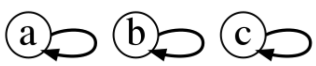
$$(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X}): \ \big((x,y) \in \mathfrak{R} \ \wedge \ (y,x) \in \mathfrak{R}\big) \Rightarrow (x = y).$$

Ku nej obrátená, tautologicky ekvivalentná, implikácia bude

$$(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X}): \ (x \neq y) \Rightarrow \big((x,y) \notin \mathfrak{R} \ \vee \ (y,x) \notin \mathfrak{R}\big).$$

Z posledne uvedenej implikácie vyplýva, že v orientovanom grafe antisymetrickej relácie medzi každými dvoma rôznymi vrcholmi existuje najviac jedna hrana. Graf relácie z príkladu 6.2 túto podmienku spĺňa, graf relácie z príkladu 6.3 ju nespĺňa.
Ak relácia nemá členy (x,y) pre $x \neq y$, tak je automaticky antisymetrická.

■ **Príklad 6.4** Napríklad relácia $\mathfrak{R} = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$, ktorej graf je na nasledovnom obrázku, je antisymetrická. Takisto je z predošlých definícií a grafu tejto relácie zrejmé, že je aj symetrická.



Z tohto príkladu vidíme, že vlastnosť *„byť antisymetrická“*, neznamená *„nebyť symetrická“*. Relácia môže byť súčasne symetrická aj antisymetrická. ■

To, kedy daná relácia nie je antisymetrická, zisťujeme tak, že znegujeme podmienku v definícii 6.2.3. Pôvodna podmienka je

$$(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X}):\ \big((x,y) \in \mathfrak{R} \,\wedge\, (y,x) \in \mathfrak{R}\big) \Rightarrow (x = y)$$

a jej negácia bude mať podobu

$$(\exists x \in \mathbb{X})\,(\exists y \in \mathbb{X}):\ \big((x,y) \in \mathfrak{R} \,\wedge\, (y,x) \in \mathfrak{R}\big) \,\wedge\, (x \neq y).$$

Na orientovanom grafe nie antisymetrickej relácie nastáva situácia, že dva rôzne vrcholy sú obojsmerne spojené hranami. Taký graf je napríklad graf relácie z príkladu 6.3. Medzi vrcholmi b a c existujú hrany v oboch smeroch a pritom $b \neq c$, sú to dva rôzne objekty z množiny $\mathbb{X}$.

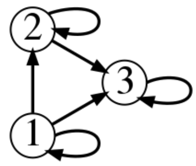
Definícia 6.2.4 — Tranzitívna relácia. Majme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$. Potom relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna, ak platí $(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X})\,(\forall z \in \mathbb{X}):\ \big((x,y) \in \mathfrak{R} \,\wedge\, (y,z) \in \mathfrak{R}\big) \Rightarrow \big((x,z) \in \mathfrak{R}\big)$.

■ **Príklad 6.5** Nech $\mathfrak{R}$ je relácia na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ definovaná predpisom

$$\mathfrak{R} = \big\{(x,y):\ x,y \in \mathbb{X} \,\wedge\, x \leq y\big\}.$$

Orientovaný graf tejto relácie je na obrázku vpravo. Relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna, pretože platí

$$(x \leq y \,\wedge\, y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)\,.$$

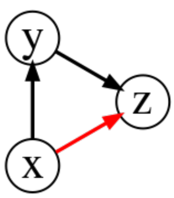


■

Vo všeobecnosti musíme na overenie tranzitívnosti danej relácie prehľadať všetky dvojice usporiadaných dvojíc, pre ktoré platí $(x,y) \in \mathfrak{R}$, $(y,z) \in \mathfrak{R}$ a zistiť či aj $(x,z) \in \mathfrak{R}$. V prípadoch ak $x = y$, alebo $y = z$, je podmienka $\big((x,y) \in \mathfrak{R} \,\wedge\, (y,z) \in \mathfrak{R}\big) \Rightarrow \big((x,z) \in \mathfrak{R}\big)$ automaticky splnená a netreba ju overovať. Overovať stačí prípady, keď $x \neq y \neq z$.

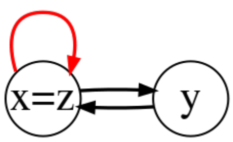
Vlastnosť *„byť tranzitívna"* na orientovanom grafe relácie znamená, že ak existuju hrana z vrcholu x do vrcholu y a existuje hrana z vrcholu y do vrcholu z, tak musí existovať aj hrana z vrcholu x do vrcholu z. Celkovo, ak je daná relácia tranzitívna, môžu nastať dva prípady.

1. $\boldsymbol{x \neq y\,,\ y \neq z\,,\ x \neq z}$

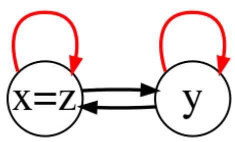


Červená hrana z vrcholu x do vrcholu z je vynútená tranzitívnosťou danej relácie a existenciou hrán z x do y a z y do z.

2. $\boldsymbol{x = z\,,\ x \neq y}$



Existenia hrán z x do y a z y do $z = x$ vynucuje aj existenciu slučky na vrchole x. Na obrázku vľavo je to zvýraznené červenou farbou. Ale rovnako táto situácia vynucuje aj existenciu slučky na vrchole y, čo je vidieť na obrázku vpravo.



Ako zistíme, že daná relácia nie je tranzitívna? Znegujeme podmienku z definície 6.2.4. Pôvodná podmienka je

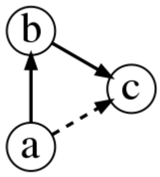
$$(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X})\,(\forall z \in \mathbb{X}):\ \big((x,y) \in \mathfrak{R} \wedge (y,z) \in \mathfrak{R}\big) \Rightarrow \big((x,z) \in \mathfrak{R}\big)$$

a jej negácia bude

$$(\exists x \in \mathbb{X})\,(\exists y \in \mathbb{X})\,(\exists z \in \mathbb{X}):\ \big((x,y) \in \mathfrak{R} \wedge (y,z) \in \mathfrak{R}\big) \wedge \big((x,z) \notin \mathfrak{R}\big).$$

Relácia z príkladu 6.3 nie je tranzitívna, pretože $(b,c) \in \mathfrak{R}$, $(c,b) \in \mathfrak{R}$, ale (b,b), ani (c,c) nepatria do relácie $\mathfrak{R}$.

■ **Príklad 6.6** Zoberme si reláciu $\mathfrak{R} = \{(a,b),(b,c)\}$ na množine $\mathbb{X} = \{a,b,c\}$.



Na obrázku vľavo je orientovaný graf relácie $\mathfrak{R}$. Táto relácia nie je tranzitívna, pretože v grafe je hrana z vrcholu a do vrcholu b, je tam aj hrana z vrcholu b do vrcholu c, avšak chýba tam pre tranzitívnosť „povinná“ hrana z vrcholu a do vrcholu c. Na obrázku je táto chýbajúca hrana znázornená čiarkovane. ■

6.3 Operácie s reláciami

Pre ľubovoľnú reláciu $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ vieme zostrojiť aj „opačnú“ reláciu z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{X}$. Takáto „opačná“ relácia sa matematicky korektne nazýva *inverzná* relácia a dostaneme ju tak, že v relácii $\mathfrak{R}$ prehodíme poradie všetkých jej usporiadaných dvojíc.

P Inverzné relácie sú zovšeobecnením inverzných funkcií.

Definícia 6.3.1 — Inverzná relácia. Majme reláciu $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$. Inverzná relácia k relácii $\mathfrak{R}$, označujeme ju $\mathfrak{R}^{-1}$, je relácia z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{X}$ definovaná predpisom $\mathfrak{R}^{-1} = \{(y,x);\ (x,y) \in \mathfrak{R}\}$.

■ **Príklad 6.7** Majme množiny $\mathbb{X} = \{2,3,4\}$, $\mathbb{Y} = \{3,4,5,6,7\}$ a reláciu $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$, danú predpisom $\mathfrak{R} = \big\{(x,y);\ x \mid y \wedge (x,y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y}\big\}$. Takže prvky relácie $\mathfrak{R}$ sú

$$\mathfrak{R} = \big\{(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4)\big\}$$

a potom inverzná relácia $\mathfrak{R}^{-1}$ bude

$$\mathfrak{R}^{-1} = \big\{(4,2),(6,2),(3,3),(6,3),(4,4)\big\}.$$

Slovne by sme inverznú reláciu $\mathfrak{R}^{-1}$ mohli popísať tak, že $(x,y) \in \mathfrak{R}^{-1}$ práve vtedy, keď *„číslo x je deliteľné číslom y“*. ■

Ak máme reláciu $\mathfrak{R}_1$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ a reláciu $\mathfrak{R}_2$ z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{Z}$, tak tieto dve relácie môžeme „zložiť“. Robíme to tak, že reláciu $\mathfrak{R}_2$ aplikujeme na výsledok relácie $\mathfrak{R}_1$.

P Skladanie relácií je zovšeobecnením skladania funkcií.

Definícia 6.3.2 — Skladanie relácií. Majme reláciu $\mathfrak{R}_1$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ a reláciu $\mathfrak{R}_2$ z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{Z}$. Zložením relácií $\mathfrak{R}_1$ a $\mathfrak{R}_2$ je relácia $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Z}$, definovaná predpisom

$$\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1 = \Big\{(x,z);\ \Big(\exists y \in \mathbb{Y}:\ (x,y) \in \mathfrak{R}_1 \ \wedge\ (y,z) \in \mathfrak{R}_2\Big)\Big\}.$$

■ **Príklad 6.8** Nech $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$, $\mathbb{Y} = \{a,b,c\}$ a $\mathbb{Z} = \{x,y\}$. Ďalej nech $\mathfrak{R}_1$ je relácia z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ daná predpisom

$$\mathfrak{R}_1 = \big\{(1,a),(1,b),(2,b),(3,b),(3,c)\big\}$$

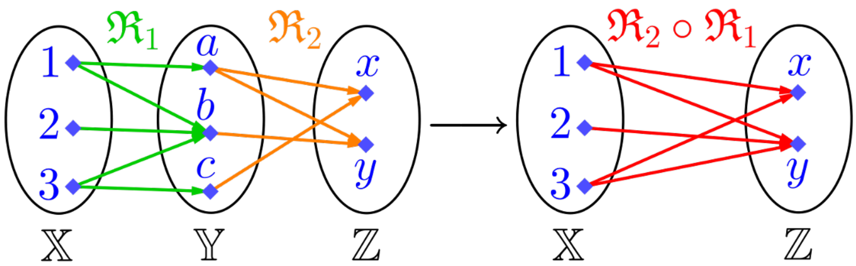
a $\mathfrak{R}_2$ je relácia z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{Z}$ daná predpisom

$$\mathfrak{R}_2 = \big\{(a,x),(a,y),(b,y),(c,x)\big\}.$$

Potom zložená relácia $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$ bude

$$\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1 = \big\{(1,x),(1,y),(2,y),(3,x),(3,y)\big\}.$$

Uvedené skladanie relácií $\mathfrak{R}_1$ a $\mathfrak{R}_2$ si môžeme pekne ilustrovať na nasledujúcom obrázku.



■

6.4 Maticová reprezentácia binárnych relácií

V časti 6.1 sme si ukázali, že binárne relácie sa dajú reprezentovať viacerými spôsobmi. Už sme si na príkladoch ukázali reprezentáciu relácií vymenovaním ich prvkov, tabuľkou alebo šípkovým diagramom (príklad 6.1, str. 123), orientovaným grafom aj popísaním vlastností nejakej relácie. Ešte si ukážeme reprezentáciu binárnych relácií maticami.

Matice sú vhodný prostriedok na reprezentáciu binárnych relácií medzi dvoma konečnými množinami. Ak máme reláciu $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$, tak riadky matice budú zodpovedať prvkom množiny $\mathbb{X}$ a stĺpce matice budú zodpovedať prvkom množiny $\mathbb{Y}$, oboje v nejakom poradí. Čísla v matici budú len 0 alebo 1. V prípade, že nejaký prvok množiny $x \in \mathbb{X}$ je v relácii s prvkom $y \in \mathbb{Y}$, bude v matici na pozícii xy číslo 1. Na všetkých ostatných pozíciach budú čísla 0.

■ **Príklad 6.9** Majme reláciu $\mathfrak{R} = \{(1,b),(1,d),(2,c),(3,b),(3,c)\}$ z množiny $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a,b,c,d\}$. Pri lexikografickom usporiadaní prvkov množín $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ bude (6.1) maticou relácie $\mathfrak{R}$.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (6.1) \qquad\qquad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} d & b & a & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (6.2)$$

Ak by sme ale prvky množiny $\mathbb{X}$ usporiadali v poradí $(2,3,1)$ a prvky množiny $\mathbb{Y}$ v poradí (d,b,a,c), tak maticou tej istej relácie $\mathfrak{R}$ bude (6.2). ■

Ukážeme si ešte iný príklad. Tentoraz si zoberieme reláciu na množine.

■ **Príklad 6.10** Relácia $\mathfrak{R}$ je daná na množine $\mathbb{X} = \{a,b,c,d\}$, vymenovaním svojich prvkov

$$\mathfrak{R} = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c),(d,d)\}.$$

Pri lexikografickom usporiadaní prvkov množiny $\mathbb{X}$ bude matica relácie $\mathfrak{R}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

■

P Matica relácie na množine je vždy štvorcová.

V časti 6.2 sme si definovali vlastnosti relácií: reflexívnosť, symetrickosť, antisymetrickosť, tranzitívnosť. Ukázali sme ako zistíme, či daná relácia tieto vlastnosti má, alebo nemá, na základe množinového zápisu alebo orientovaného grafu relácie. Často však, napr. pri reláciach na veľkých množinách alebo spracovávaní na počítači, je na overovanie vlastností relácií výhodnejšia práve ich maticová reprezentácia. Teraz si ukážeme ako z maticového zápisu danej relácie zistíme jej vlastnosti. Rovnako ako v časti 6.2 sa tu budeme zaoberať len reláciami na množine a v ich maticovej reprezentácií budú riadky aj stĺpce matice relácie vždy v rovnakom usporiadaní.

6.4.1 Reflexívnosť

Ak máme maticovú reprezentáciu reflexívnej relácie, tak všetky čísla na hlavnej diagonále matice musia byť 1. Zoberme si napr. matice relácie z príkladu 6.2, strana 124. Bude to matica

$$\text{Matica relácie z príkladu 6.2:} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.3}$$

Táto matica má všetky čísla na hlavnej diagonále 1 a z toho hneď vidíme, že zodpovedajúca relácia je reflexívna. Pozrime sa teraz na maticu relácie z príkladu 6.3, strana 124.

$$\text{Matica relácie z príkladu 6.3:} \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.4}$$

Táto matica má v 2. a 3. riadku na hlavnej diagonále čísla 0, a preto zodpovedajúca relácie nie je reflexívna.

6.4.2 Symetrickosť

To, či daná relácia je, alebo nie je, symetrická, zistíme z jej matice rovnako ľahko ako jej reflexívnosť. Matica symetrickej relácie musí byť symetrická podľa hlavnej diagonály. Ak si maticu relácie $\mathfrak{R}$ označíme $\mathbb{R}$ a jej prvky r_{ij}, tak pre symetrickú reláciu musí platiť $\mathbb{R} = \mathbb{R}^T$, alebo inak povedané $\forall i,j: \; r_{ij} = r_{ji}$.
Relácia z príkladu 6.3 je symetrická, pozri maticu (6.4) a relácia z príkladu 6.2 symetrická nie je, pozri maticu (6.3).

6.4.3 Antisymetrickosť

Podľa definície je daná relácia na množine $\mathbb{X}$ antisymetrická, ak platí

$$(\forall x \in \mathbb{X})\,(\forall y \in \mathbb{X}):\ \big((x,y) \in \mathfrak{R} \wedge (y,x) \in \mathfrak{R}\big) \Rightarrow (x = y)\,.$$

Alebo môžeme povedať, že daná relácia na množine $\mathbb{X}$ antisymetrická nie je, ak platí

$$(\exists x \in \mathbb{X})\,(\exists y \in \mathbb{X}):\ \big((x,y) \in \mathfrak{R} \wedge (y,x) \in \mathfrak{R}\big) \wedge (x \neq y)\,.$$

Priamo z definície je zrejmé, že antisymetrickosť vieme z matice danej relácie overiť rovnako ľahko ako predošlé vlastnosti. Budeme pritom overovať, či daná relácie **nie je** antisymetrická, pretože tento test je jednoduchší (rýchlejší), než overovanie či, antisymetrická je. Ak si maticu relácie $\mathfrak{R}$ označíme $\mathbb{R}$ a jej prvky r_{ij}, tak relácia $\mathfrak{R}$ nie je antisymetrická, ak

$$\exists\, i,j:\ \ (i \neq j) \wedge (r_{ij} = r_{ji} = 1)\,.$$

Relácia z príkladu 6.3 nie je antisymetrická, pozri maticu (6.4). V tejto matici $r_{23} = r_{32} = 1$ a $2 \neq 3$. Relácia z príkladu 6.2 antisymetrická je, pozri maticu (6.3). Ešte si môžeme pozrieť aj maticu relácie z príkladu 6.4 (str. 125). Je to matica

$$\text{Matica relácie z príkladu 6.4:}\quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{6.5}$$

Táto relácia je aj symetrická, aj antisymetrická.

6.4.4 Tranzitívnosť

S overovaním tranzitívnosti danej relácie pomocou jej maticovej reprezentácie je to trochu komplikovanejšie než s ostatnými troma vlastnosťami. Preto si najskôr situáciu ilustrujeme na príklade relácie medzi dvoma množinami. Až potom sformulujeme vetu hovoriacu o tom, ako zistíme tranzitívnosť relácie z jej maticového zápisu. Bude to veta 6.4.3.

■ **Príklad 6.11** Nech $\mathfrak{R}_1 = \{(1,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$ je relácia z množiny $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ do množiny $\mathbb{Y} = \{a,b\}$ a nech $\mathfrak{R}_2 = \{(a,x),(a,y),(b,y),(b,z)\}$ je relácia z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{Z} = \{x,y,z\}$. Pri lexikografickom usporiadaní prvkov množín $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ a $\mathbb{Z}$ budú mať relácie $\mathfrak{R}_1$ a $\mathfrak{R}_2$ matice $\mathbb{R}_1$ a $\mathbb{R}_2$.

$$\mathbb{R}_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{a} \qquad \mathbb{R}_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

a súčin týchto dvoch matíc bude

$$\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ukážeme si čo predstavuje súčin $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$. Dokážeme, že ak by sme číslo 2 v poslednom riadku nahradili číslom 1, tak takto upravená matica $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$ by bola maticou zloženej relácie $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$. Toto dokážeme ako lemu, aj keď ide len o pomocné tvrdenie ku tomuto konkrétnemu príkladu.

Lema 6.4.1 — O súčine $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$ z príkladu 6.11. Nech $i \in \{1,2,3\}$ a $k \in \{x,y,z\}$. Potom prvok v i. riadku a k. stĺpci matice $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$ (budeme ho označovať r_{ik}) je nenulový práve vtedy, keď $(i,k) \in \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$.

Dôkaz: v tvrdení sa jedná o ekvivalenciu, takže dokazovať ho budeme ako dve implikácie.

$\Rightarrow$ Prvok r_{ik} matice $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$ sa počíta ako skalárny súčin i. riadku matice $\mathbb{R}_1$ a k. stĺpca matice $\mathbb{R}_2$. Označme si

$$i.\text{ riadok matice } \mathbb{R}_1: \ (s,t) \quad \text{a} \quad k.\text{ stĺpec matice } \mathbb{R}_2: \ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \ \text{kde } s,t,u,v \in \{0,1\}.$$

Potom

$$r_{ik} = \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline i & s & t \end{array} \, . \, \begin{array}{c|c} & k \\ \hline a & u \\ b & v \end{array} = s.u + t.v.$$

Nech $r_{ik} \neq 0$, čiže $s.u + t.u \neq 0$. Potom buď $s.u \neq 0$, alebo $t.v \neq 0$. Nech $s.u \neq 0$ (prípad $t.v \neq 0$ sa ukáže podobne). Potom $s \neq 0$ a $u \neq 0$. To ale znamená, že $(i,a) \in \mathfrak{R}_1$ a $(a,k) \in \mathfrak{R}_2$, a preto $(i,k) \in \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$.

$\Leftarrow$ Nech $(i,k) \in \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$. Potom $(i,a) \in \mathfrak{R}_1$ a $(a,k) \in \mathfrak{R}_2$, alebo $(i,b) \in \mathfrak{R}_1$ a $(b,k) \in \mathfrak{R}_2$. V prvom prípade $s.u = 1$, v druhom prípade $t.v = 1$. Z toho vyplýva, že $r_{ik} = s.u + t.v \neq 0$. Takže dokázali sme, že ak $(i,k) \in \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$, tak $r_{ik} \neq 0$.

Q.E.D.

V predošlom tvrdení sme dokázali, že $(i,k) \in \mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$ práve vtedy, keď matica $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$ má v i. riadku a k. stĺpci nenulové číslo. Preto matica $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$ je „takmer“ matica relácie $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$. Stačí ak všetky nenulové čísla matice $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$ nahradíme jednotkami a dostaneme tým maticu relácie $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$. Matica relácie $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$ bude teda

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

■

Výsledok dokázaný v príklade 6.11 sa dá zovšeobecniť.

Veta 6.4.2 — O matici zloženej relácie. Nech $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ a $\mathbb{Z}$ sú konečné množiny. Ďalej nech $\mathfrak{R}_1$ je relácia z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ a $\mathfrak{R}_2$ je relácia z množiny $\mathbb{Y}$ do množiny $\mathbb{Z}$. Zvoľme si pevné usporiadanie množín $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ a $\mathbb{Z}$ a nech $\mathbb{R}_1$ je matica relácie $\mathfrak{R}_1$ a $\mathbb{R}_2$ je matica relácie $\mathfrak{R}_2$ v tomto usporiadaní. Potom matica relácie $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$, vzhľadom na zvolené usporiadenie, sa získa tak, že v matici $\mathbb{R}_1.\mathbb{R}_2$ všetky nenulové čísla nahradíme jednotkami.

Dôkaz: tejto vety sa robí analogicky ako dôkaz lemy 6.4.1.

Pomocou vety 6.4.2 už vieme rozhodnúť o tranzitívnosti danej relácie na základe jej maticovej reprezentácie. Podmienku určenia tranzitívnosti danej relácie na základe jej maticovej reprezentácie dokážeme ako vetu 6.4.3.

Veta 6.4.3 — Tranzitívnosť relácie na množine. Relácia $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$ je daná maticou $\mathbb{R}$, pričom prvky množiny $\mathbb{X}$ sú pevne usporiadané. Relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna práve vtedy, keď platí tvrdenie: *„ak (ij). prvok matice $\mathbb{R}^2$ je nenulový, tak aj (ij). prvok matice $\mathbb{R}$ je nenulový.“*

Dôkaz: je založený na vete 6.4.2. Tvrdenie budeme opäť dokazovať ako dve implikácie.

$\Rightarrow$ Nech relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna a nech (ij). prvok matice $\mathbb{R}^2$ je nenulový. To, podľa vety 6.4.2, znamená, že $(i,j) \in \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}$. Musí preto existovať $k \in \mathbb{X}: \ (i,k) \in \mathfrak{R} \wedge (k,j) \in \mathfrak{R}$. Z tranzitívnosti relácie $\mathfrak{R}$ potom dostávame, že $(i,j) \in \mathfrak{R}$, čiže (ij). prvok matice $\mathbb{R}$ je nenulový.

$\Leftarrow$ Nech platí tvrdenie: *„ak (ij). prvok matice $\mathbb{R}^2$ je nenulový, tak aj (ij). prvok matice $\mathbb{R}$ je nenulový.“* Nech $x,y,z \in \mathbb{X}$ a pri danom usporiadaní množiny $\mathbb{X}$, x je i., y je k. a z je j. prvok množiny $\mathbb{X}$. Ďalej nech $(x,y) \in \mathfrak{R}$ a $(y,z) \in \mathfrak{R}$. Potom $(x,z) \in \mathfrak{R} \circ \mathfrak{R}$, čiže (ij). prvok matice $\mathbb{R}^2$ je nenulový. To podľa platného tvrdenia znamená, že aj (ij). prvok matice $\mathbb{R}$ je nenulový, čo ďalej znamená, že $(x,z) \in \mathfrak{R}$. Takže ak platí uvedené tvrdenie, tak relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna.

Q.E.D.

Využitie vety 6.4.3 si ilustrujeme na nasledujúcich dvoch príkladoch.

■ **Príklad 6.12** Majme reláciu $\mathfrak{R} = \{(a,a),(b,b),(b,c),(c,b),(c,c),(d,d)\}$, (príklad 6.10) na množine $\mathbb{X} = \{a,b,c,d\}$. Matica tejto relácie je

$$\mathbb{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{a} \quad \mathbb{R}^2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Z uvedených matíc vidíme, že ak (ij). prvok matice $\mathbb{R}^2$ je nenulový, tak aj (ij). prvok matice $\mathbb{R}$ je nenulový. To podľa vety 6.4.3 znamená, že relácia $\mathfrak{R}$ je tranzitívna. ■

■ **Príklad 6.13** Majme reláciu $\mathfrak{R} = \{(a,a),(a,c),(b,b),(c,b),(c,c),(d,d)\}$, definovanú na množine $\mathbb{X} = \{a,b,c,d\}$. Matica tejto relácie je

$$\mathbb{R} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{a} \quad \mathbb{R}^2 = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Z uvedených matíc vidíme, že neplatí tvrdenie *„ak (ij). prvok matice $\mathbb{R}^2$ je nenulový, tak aj (ij). prvok matice $\mathbb{R}$ je nenulový“*, pretože $\{\mathbb{R}^2\}_{12} = 1$, ale $\{\mathbb{R}\}_{12} = 0$. To podľa vety 6.4.3 znamená, že relácia $\mathfrak{R}$ nie je tranzitívna. ■

6.5 Cvičenia

Cvičenie 6.1 Nakreslite orientovaný graf relácie

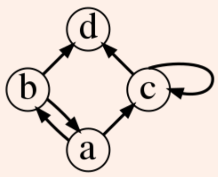
(a) $\mathfrak{R} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$, na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$,

(b) $\mathfrak{R} = \{(1,1),(2,3),(3,4),(4,1)\}$, na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$,

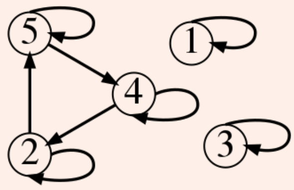
(c) $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$ a $\mathbb{R} = \big\{(x,y);\ (x,y) \in \mathbb{X}^2 \wedge x^2 \geq 4\big\}$. ■

Cvičenie 6.2 Zapíšte reláciu danú orientovaným grafom ako množinu usporiadaných dvojíc

a)



b)



■

Cvičenie 6.3 Pre každú reláciu z cvičení 6.1 a 6.2 nájdite inverznú reláciu. ■

Cvičenie 6.4 Predpisom $\mathfrak{R} = \big\{(x,y);\ 3 \mid (x-y) \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\big\}$ je daná relácia $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$.

(a) Zapíšte reláciu $\mathfrak{R}$ ako množinu usporiadaných dvojíc.

(b) Nakreslite orientovaný graf relácie $\mathfrak{R}$.

(c) Zostrojte reláciu $\mathfrak{R}^{-1}$. ■

Cvičenie 6.5 Predpisom $\mathfrak{R} = \big\{(x,y);\ x+y \leq 6 \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\big\}$ je daná relácia $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$.

(a) Zapíšte reláciu $\mathfrak{R}$ ako množinu usporiadaných dvojíc.

(b) Nakreslite orientovaný graf relácie $\mathfrak{R}$.

(c) Zostrojte reláciu $\mathfrak{R}^{-1}$. ■

Cvičenie 6.6 Predpisom $\mathfrak{R} = \big\{(x,y);\ x = y-1 \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\big\}$ je daná relácia $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$.

(a) Zapíšte reláciu $\mathfrak{R}$ ako množinu usporiadaných dvojíc.

(b) Nakreslite orientovaný graf relácie $\mathfrak{R}$.

(c) Zostrojte reláciu $\mathfrak{R}^{-1}$. ■

Cvičenie 6.7 Na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$ sú dané dve relácie

$$\mathfrak{R}_1 = \{(1,1),(1,2),(3,4),(4,2)\} \quad \text{a} \quad \mathfrak{R}_2 = \{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(4,4)\}.$$

Nájdite relácie

(a) $\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_1$ (b) $\mathfrak{R}_1 \circ \mathfrak{R}_2$ (c) $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$ (d) $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_2$ ■

Cvičenie 6.8 Na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$ nájdite príklad relácie, ktorá je

(a) reflexívna a symetrická, ale nie tranzitívna,
(b) reflexívna, nie symetrická, nie tranzitívna,
(c) reflexívna a antisymetrická, ale nie tranzitívna,
(d) nie reflexívna, symetrická, nie antisymetrická, tranzitívna,
(e) nie reflexívna, nie symetrická, tranzitívna,

■

Cvičenie 6.9 Nech $\mathfrak{R}$ a $\mathfrak{S}$ sú dve relácie na množine $\mathbb{X}$. O každom z nasledujúcich výrokov rozhodnite, či je pravdivý. Ak je pravdivý, dokážte ho, ak nie je pravdivý, nájdite kontrapríklad.

(a) Ak $\mathfrak{R}$ je tranzitívna, tak $\mathfrak{R}^{-1}$ je tranzitívna.
(b) Ak $\mathfrak{R}$ je reflexívna, tak $\mathfrak{R}^{-1}$ je reflexívna.
(c) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ reflexívne, tak je $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{S}$ reflexívna.
(d) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ reflexívne, tak je $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$ reflexívna.
(e) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ reflexívne, tak je $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{S}$ reflexívna.
(f) Ak $\mathfrak{R}$ je symetrická, tak $\mathfrak{R}^{-1}$ je symetrická.
(g) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ symetrické, tak je $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{S}$ symetrická.
(h) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ symetrické, tak je $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$ symetrická.
(i) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ symetrické, tak je $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{S}$ symetrická.
(j) Ak $\mathfrak{R}$ je antisymetrická, tak $\mathfrak{R}^{-1}$ je antisymetrická.
(k) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ antisymetrické, tak je $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{S}$ antisymetrická.
(l) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ antisymetrické, tak je $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$ antisymetrická.
(m) Ak sú $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ antisymetrické, tak je $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{S}$ antisymetrická.

■

Cvičenie 6.10 Nájdite maticu relácie $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$ pri usporiadaní množín $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$ tak, ako je to uvedené v zadaní.

(a) $\mathfrak{R} = \big\{(1,\delta),(2,\alpha),(2,\varepsilon),(3,\beta),(3,\varepsilon)\big\}$, $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ a $\mathbb{Y} = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$
(b) $\mathfrak{R} = \big\{(1,\delta),(2,\alpha),(2,\varepsilon),(3,\beta),(3,\varepsilon)\big\}$, $\mathbb{X} = \{3,2,1\}$ a $\mathbb{Y} = \{\varepsilon,\gamma,\beta,\alpha,\delta\}$
(c) $\mathfrak{R} = \big\{(x,a),(x,c),(y,a),(y,b),(z,d)\big\}$, $\mathbb{X} = \{x,y,z\}$ a $\mathbb{Y} = \{a,b,c,d\}$

■

Cvičenie 6.11 Nájdite maticu relácie $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$ vzhľadom na usporiadanie množiny $\mathbb{X}$ uvedené v zadaní.

(a) $\mathfrak{R} = \big\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\big\}$, $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$
(b) $\mathfrak{R} = \big\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\big\}$, $\mathbb{X} = \{5,3,1,2,4\}$
(c) $\mathfrak{R} = \big\{(x,y);\ (x<y)\ \wedge\ (x,y \in \mathbb{X})\big\}$, $\mathbb{X} = \{1,2,3,4\}$

■

Cvičenie 6.12 Zapíšte reláciu $\mathfrak{R}$ danú maticou, ako množinu usporiadaných dvojíc

(a)
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} w & x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} w \\ x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

■

Cvičenie 6.13 Je daná relácia $\mathfrak{R}$ z množiny $\mathbb{X}$ do množiny $\mathbb{Y}$. Ako možno z jej matice určiť reláciu $\mathfrak{R}^{-1}$? ■

Cvičenie 6.14 Dané sú množiny $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$, $\mathbb{Y} = \{x,y\}$ a $\mathbb{Z} = \{a,b,c\}$ v uvedenom usporiadaní. Okrem toho sú dané relácie

$$\mathfrak{R}_1 = \big\{(1,x),(1,y),(2,x),(3,x)\big\} \qquad \text{a} \qquad \mathfrak{R}_2 = \big\{(x,b),(y,a),(y,b),(y,c)\big\}.$$

Nájdite

(a) maticu relácie $\mathfrak{R}_1$ pri daných usporiadaniach,

(b) maticu relácie $\mathfrak{R}_2$ pri daných usporiadaniach,

(c) maticu zloženej relácie $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$ pri daných usporiadaniach,

(d) reláciu $\mathfrak{R}_2 \circ \mathfrak{R}_1$ ako množinu usporiadaných dvojíc. ■

Cvičenie 6.15 Na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3\}$ sú dané relácie $\mathfrak{R}_1$ a $\mathfrak{R}_2$ maticami

$$\mathbb{R}_1 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{a} \qquad \mathbb{R}_2 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Nájdite maticu relácie $\mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$ pri rovnakom usporiadaní množiny $\mathbb{X}$.

(b) Nájdite maticu relácie $\mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2$ pri rovnakom usporiadaní množiny $\mathbb{X}$. ■

Cvičenie 6.16 O každej relácii z cvičení 6.4, 6.5 a 6.6 (strana 133) rozhodnite, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna. ■

Cvičenie 6.17 Maticou

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

je daná relácia $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X} = \{1,2,3,4,5\}$. Zistite o tejto relácii, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna. ■

Cvičenie 6.18 Nasledujúce relácie sú všetky na množine prirodzených čísel $\mathbb{N}$. O každej z nich rozhodnite, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

(a) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x = y^2 \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(b) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ 3 \mid (x-y) \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(c) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ 3 \mid (x+2y) \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(d) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ |x-y| = 2 \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(e) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x-y = 2 \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(f) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x > y \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$
(g) $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x \geq y \wedge (x,y) \in \mathbb{N}^2\}$ ■

Cvičenie 6.19 O každej z nasledujúcich relácií na danej množine $\mathbb{X}$ overte, či je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna.

(a) $\mathbb{X} = \{a,b,c,d\}$ a $\mathfrak{R} = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(b,d),(c,d),(d,d)\}$
(b) $\mathbb{X} = \{0,1,2\}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x \leq y \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(c) $\mathbb{X} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ 3 \mid (y-x) \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(d) $\mathbb{X} = \mathbb{N}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x < 1+y \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(e) $\mathbb{X} = \mathbb{Z}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x < 1-y \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(f) $\mathbb{X} = \mathbb{Z}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x \mid y^2 \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(g) $\mathbb{X} = \mathbb{R}$ a $\mathfrak{R} = \{(x,y);\ x.y \in \mathbb{Q} \wedge (x,y) \in \mathbb{X}^2\}$
(h) $\mathbb{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $(a,b)\,\mathfrak{R}\,(c,d) \Leftrightarrow \Big((a+b \leq c) \wedge (b \leq d) \wedge \big((a,b),(c,d) \in \mathbb{X}\big)\Big)$ ■

Cvičenie 6.20 Nech $\mathbb{X} \neq \emptyset$. Definujeme reláciu $\mathfrak{R}$ na potenčnej množine $\mathscr{P}(\mathbb{X})$ predpisom $(\mathbb{A},\mathbb{B}) \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow (\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B})$. Je táto relácia reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna? ■

Cvičenie 6.21 O každej relácii z cvičení 6.11 (strana 134), 6.12 c) a 6.15 (strana 135) zistite z jej maticovej reprezentácie, či je príslušná relácia reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna. ■

Cvičenie 6.22 Nech $\mathbb{X}$ je množina všetkých 4-bitových reťazcov. Každý bit má hodnotu 0 alebo 1. Definujeme reláciu $\mathfrak{R}$ na množine $\mathbb{X}$ takto: $r_1 \mathfrak{R} r_2$ práve vtedy, keď nejaký podreťazec dĺžky 2 reťazca r_1 je rovnaký ako podreťazec dĺžky 2 reťazca r_2. Napríklad $0111\,\mathfrak{R}\,1010$, oba reťazce obsahujú podreťazec 01, ale reťazce 1110 a 0001 nie sú v relácii, neobsahujú spoločný podreťazec dĺžky 2. Je relácia $\mathfrak{R}$ reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna? ■

Cvičenie 6.23 Nájdite maticu inverznej relácie ku každej relácii z cvičení 6.10, 6.11 (str. 134), 6.12 a 6.17 (str. 135). ■

Použitá a odporúčaná literatúra

[1] Martin Aigner: **Combinatorial Theory**, Springer Verlag, Heidelberg 1979.

[2] Bohuslav Balcar, Petr Štěpánek: **Teorie množin**, Academia, Praha 1986.

[3] Berežný, Draženská, Kravecová: **Zbierka úloh z diskrétnej matematiky**, FEI TU, Košice 2005. http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/10/Zbierka-DM.pdf

[4] J. A. Bondy, U. S. Murty: **Graph Theory With Applications**, North-Holland 1976.

[5] Reinhard Diestel: **Graph Theory**, Springer 2000.

[6] Harary, Frank: **Graph theory**, Addison-Wesley 1969.

[7] Richard Johnsonbaugh: **Discrete Mathematics**, Pearson 2017.

[8] Josef Kaucký: **Kombinatorické identity**, VEDA, vydavateľstvo SAV, Bratislava 1975.

[9] Martin Knor: **Úvod do matematickej logiky**, FIIT STU, Bratislava 2016. http://www.math.sk/jmkollar/literatura/Knor-Uvod_do_matematickej_logiky.pdf

[10] Martin Knor: **Teória grafov**, SvF STU, Bratislava 2008. http://www.svf.stuba.sk/docs/dokumenty/skripta/teoria_grafov_martin_knor.pdf

[11] Martin Knor, Jozef Kollár: **Matematika pre architektov**, STU Bratislava, 2002.

[12] Donald E. Knuth: **The Art of Computer Programming, Volume 1**, Addison-Wesley, 1997.

[13] Sergei K. Lando: **Lectures on Generating Functions**, American Mathematical Society, Student Mathematical Library 2003.

[14] Milan Mareš: **Příběhy matematiky**, Pistorius & Olšanská, Příbram 2011.

[15] J. Matoušek, J. Nešetřil: **Kapitoly z diskrétní matematiky**, Karolinum, Praha 2002.

[16] М. В. Меньшиков, А. М. Ревякин, А. Н. Копылова, Ю. Н. Макаров, Б. С. Стечкин: **Комбинаторный Анализ – Задачи и упражнения**, Издательство »НАУКА«, Москва 1982.

[17] В. А. Носов: **Комбинаторика и теория графов**, Москва 1999. http://intsys.msu.ru/staff/vnosov/combgraph.htm (PDF verzia)

[18] Stanislav Palúch: **Algoritmická teória grafov**, Žilinská univerzita, 2008. http://frcatel.fri.uniza.sk/users/paluch/grafy.pdf

[19] Ján Plesník: **Grafové algoritmy**, VEDA, Bratislava 1983.

[20] Franco P. Preparata, Raymond T. Yeh: **Úvod do téorie diskrétnych matematických štruktúr**, Alfa, Bratislava 1982.

[21] Edward M. Reingold, Jurg Nievergelt, Narsingh Deo: **Combinatorial Algorithms – Theory and Practice**, Prentice-Hall, New Jersey 1977.

[22] Beloslav Riečan a kol.: **Úlohy z matematiky pre 4. ročník gymnázia**, SPN, Bratislava 1976.

[23] Beloslav Riečan a kol.: **Matematika pre 4. ročník gymnázia**, SPN, Bratislava 1987.

[24] Beloslav Riečan a kol.: **Zbierka úloh z matematiky pre 4. ročník gymnázia**, SPN, Bratislava 1991.

[25] Karol Rovan a kol.: **Zbierka riešených úloh z algebry pre SVŠ a odborné školy**, SPN, Bratislava 1969.

[26] К. А. Рыбников: **Введение в Комбинаторный Анализ**, Издательство Московского Университета, Москва 1985.

[27] Raymond M. Smullyan: **A Beginner's Guide to Mathematical Logic**, Dover Publications, New York 2014.

[28] František Vejsada, František Talafous: **Zbierka úloh z matematiky pre SVŠ a gymnázia**, SPN, Bratislava 1973.

[29] Naum J. Vilenkin: **Rozhovory o množinách**, SPN, Bratislava 1972.

[30] Herbert S. Wilf: **generatingfunctionology**, Academic Press, Inc. 1994. https://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html

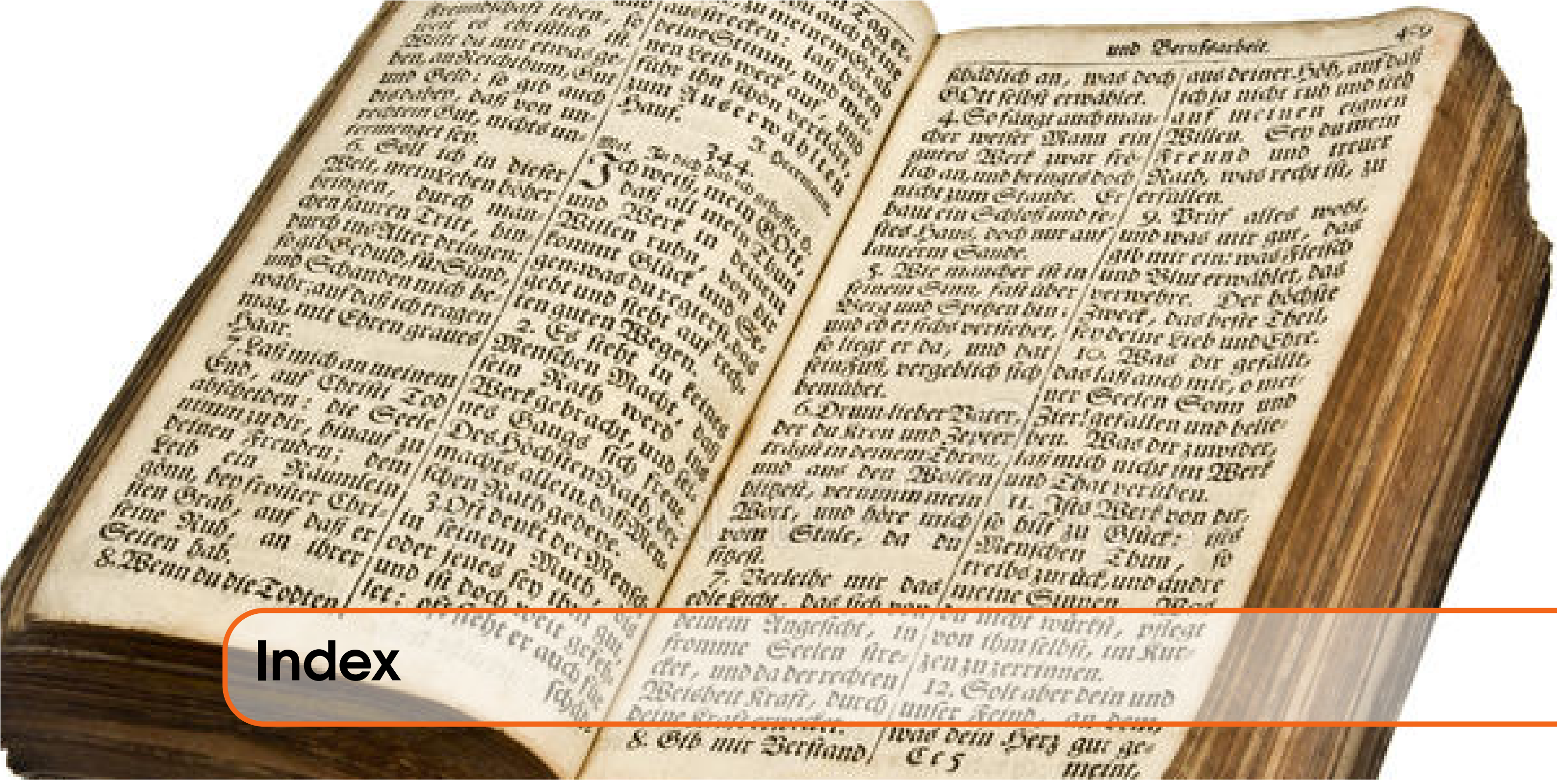
[31] Niklaus Wirth: **Algoritmy a štruktúry údajov**, Alfa, Bratislava 1989.

[32] Štefan Znám: **Kombinatorika a teória grafov**, PF UK, Bratislava 1978.

IV

Index

Index 251



Index

Symboly

$\in$ operátor „patrí do množiny“ 11
$\notin$ operátor „nepatrí do množiny“ 11
$\subset$ operátor vlastnej podmnožiny 12
$\subseteq$ operátor nevlastnej podmnožiny 12
$\cup$ operátor zjednotenia množín 12
$\cap$ operátor prieniku množín 13
$\setminus$ operátor rozdielu množín 13
$\bar{\mathbb{A}}$ komplement množiny $\mathbb{A}$ 14
$\neg$ operátor logickej negácie 20
$\vee$ operátor disjunkcie 20
$\wedge$ operátor konjunkcie 20
$\Leftrightarrow$ operátor ekvivalencie 20
$\Rightarrow$ operátor implikácie 20
$\exists$ existenčný kvantifikátor 23
$\forall$ všeobecný kvantifikátor 23
$|$ operátor „a delí b“ $(a \mid b)$ 40
$\triangle$ operátor symetrickej diferencie 41

A

acyklický graf 62
algoritmus
  Borůvkov 203
  Dijkstrov 229–231
  hľadania kostry grafy 179
  Jarníkov (Primov) 197
  konštrukcie očíslovaného stromu z Prüferovho kódu 241
  konštrukcie optimálneho Huffmanovho kódu 206
  konštrukcie Prüferovho kódu z očíslovaného stromu 235
  konštrukcie prehľadávacieho binárneho stromu 215
  Kruskalov 201, 202
  pažravý 201
  prehľadávania grafu do hĺbky 187
  prehľadávania grafu do šírky 182
  zostavovania identifikačného kódu binárneho stromu 219
  zostavovania identifikačného kódu koreňového stromu 222
antisymetrickosť (relácie) 125, 130
Appel Kenneth (1932–2013) 48
ASCII kód 204
atomická formula 20
axióma 31

B

backtracking 186
bijektívnosť 145
binárny strom 80
binomický koeficient 171
Borůvka Otakar (1899–1995) 196, 203
Bouton Charles Leonard (1869–1922) 224

C

Catalanovo číslo 174, 213
Cayley Arthur (1821–1895) 16, 48, 241
centrálny vrchol grafu 56
centrum grafu 56
cesta (v grafe) 55, 112
cyklus (v grafe) 57, 112

Č

číslo
  Catalanovo 174, 213
  celé $\mathbb{Z}$ 15
  iracionálne 15
  komplexné $\mathbb{C}$ 16
  kvaternion 16
  oktonion 16
  prirodzené $\mathbb{N}$ 14
  racionálne $\mathbb{Q}$ 15
  reálne $\mathbb{R}$ 15

D

dátová štruktúra
  fronta 180
  zásobník 180
dôkaz
  matematickou indukciou 37, 39
  nepriamy 35
  priamy 32
  sporom 36
de Moivre Abraham (1667–1754) 155
de Morgan Augustus (1806–1871) 48
definícia 32
Dijkstra Edsger Wybe (1930–2002) . 197, 230
Dijkstrov algoritmus 229, 231
disjunkcia ($\vee$) 21
disjunktné množiny 13

E

ekvivalencia ($\Leftrightarrow$) 22
ekvivalencia (relácie) 140
entropický kód 204
Euklides Alexandrijský (~3. stor. pred n. l.) 15
Euklidovský priestor 108
Euler Leonhard (1707–1783) 47, 84, 109, 156

F

faktor grafu 62
faktoriál 39
  dvojný 172
Fano Roberto Mario (1917–2016) 204
Fibonacci Leonardo (~1170 – ~1240) . . . 167
Fibonacciho postupnosť 167
formula
  atomická 20
  prvotná 20
  výroková 20, 22
formuly
  ekvivalentné 22
fronta 180
funkcia 143
  bijektívna 145
  charakteristická funkcia množiny 149
  definičný obor 143
  injektívna 144
  inverzná 145
  koobor 143
  obor hodnôt 143
  parciálna 143
  surjektívna 144
  vytvárajúca
    exponenciálna, 175
    obyčajná, 160
  zložená 146

G

Gauss Carl Friedrich (1777-1855) 38
geometrická postupnosť
  súčet prvých n členov 39
Gonthier Georges 48
graf
  acyklický 62
  artikulácia 61
  bipartitný 53
    kompletný ($K_{m,n}$), 54, 112
  centrum 56
  cesta 55, 112
  cesta (P_n) 112
  cyklus 57, 112
    hamiltonovský, 95
  cyklus (C_n) 112
  digraf 50
  dĺžka ťahu 55
  dĺžka cesty 55

graf
- dĺžka cyklu . . . 57
- dĺžka sledu . . . 54
- dokonalé párovanie . . . 89
- Eulerova veta o rovinných grafoch . . . 110
- eulerovský . . . 87
- eulerovský ťah . . . 85
  - otvorený, 85, 87
  - uzavretý, 85, 86
- excentricita vrcholu . . . 56
- faktor . . . 62
- hodnota . . . 196
- hodnota hrany . . . 195
- hodnota sledu . . . 229
- homeomorfné grafy . . . 112
- hrana . . . 49
  - ohodnotená, 195
- hranica oblasti . . . 108
- húsenica . . . 113
- hviezda (S_n) . . . 113
- incidencia (vrchol–hrana) . . . 50
- invariant . . . 101
- izomorfizmus
  - binárnych stromov, 106
  - koreňových stromov, 105
- izomorfizmus grafov . . . 98, 99
- izomorfné grafy . . . 99
- jadro . . . 225
- jednoduchý (obyčajný) . . . 51
- Knight graph . . . 98
- koleso (W_n) . . . 113
- komplementárny . . . 53
- kompletný (K_n) . . . 52, 112
- kompletný bipartitný $(K_{m,n})$ . . . 54, 112
- komponent súvislosti . . . 57, 60
- konečný . . . 49
- koreňový strom . . . 77
  - dieťa vrcholu, 78
  - koncový vrchol, 78
  - list, 78
  - otec vrcholu, 78
  - podstrom, 78
  - potomok vrcholu, 78
  - predkovia vrcholu, 78
  - súrodenci (vrcholy), 78
  - úroveň vrcholu, 77
  - vnútorný vrchol, 78
  - výška, 77

graf
- kostra . . . 62
  - minimálna, 196
- Kuratowského veta . . . 112
- ľavý podstrom . . . 213
- les . . . 77
- list . . . 77
- matica incidencie . . . 72
- matica susednosti . . . 69
- minimálna kostra . . . 196
- množina vrcholov
  - nezávislá, 225
  - stabilná, 225
- most . . . 61
- najlacnejšia cesta . . . 230
- najlacnejšia kostra . . . 196
- násobné hrany . . . 50
- nekonečný . . . 49
- neorientovaný . . . 49
- nesúvislý . . . 57
- nezávislá množina vrcholov . . . 225
- oblasť . . . 108
- obyčajný (jednoduchý) . . . 51
- ohodnotený . . . 195
- ohodnotenie hrany . . . 195
- orientovaná hrana . . . 49, 50
- orientovaný . . . 49, 50
- otvorený sled . . . 55
- párovanie . . . 89
  - maximálne, 89
- perfektné párovanie . . . 89
- podgraf . . . 58
- polomer . . . 56
- pravý podstrom . . . 213
- pravidelný . . . 52
- prázdny . . . 49, 80
- prehľadávanie do šírky . . . 182
- prehľadávanie do hĺbky . . . 187
- priemer . . . 56
- problém obchodného cestujúceho . . . 234
- rovinné nakreslenie . . . 108
- rovinný . . . 108
- sled . . . 54
  - otvorený, 55
  - uzavretý, 55
- slučka (hrana) . . . 50
- stabilná množina vrcholov . . . 225

graf
- strom . . . 73
  - binárny, 80
  - binárny úplný, 81
  - binárny dokonalý, 82
  - binárny prehľadávací, 214
  - binárny vyvážený, 81
  - koreň, 77, 105
  - očíslovaný, 234
  - prehľadávací binárny, 213
- stupeň vrcholu . . . 51
- subdivízia hrany . . . 111
- susedné oblasti . . . 108
- susednosť (vrchol–vrchol) . . . 50
- súvislý . . . 57
- ťah . . . 55
- uzavretý sled . . . 55
- vrchol . . . 49, 50
  - centrálny, 56
  - izolovaný, 50
  - stupeň, 51
- vzdialenosť vrcholov . . . 56

Graves John Thomas (1806–1870) . . . 16
Guthrie Francis (1831–1899) . . . 48

H

Haken Wolfgang (1928–. . .) . . . 48
Hamilton William R. (1805–1865) . 16, 48, 95
harmonická postupnosť . . . 166
Herón Alexandrijský (10–75) . . . 15
Hippasos (∼530–∼450 pred n. l.) . . . 15
hodnota grafu . . . 196
hrana
- koncový vrchol . . . 181
- počiatočný vrchol . . . 181

Huffman David Albert (1925–1999) . . . 204
Huffmanov kód . . . 80, 204, 206
húsenica (graf) . . . 113
hviezda (graf) . . . 113
hypotéza . . . 32

I

implikácia ($\Rightarrow$) . . . 21
indukčný
- krok . . . 38
- predpoklad . . . 38

injektívnosť . . . 144
inverzná funkcia . . . 145
inverzná relácia . . . 127

J

jadro grafu . . . 225
Jarník Vojtěch (1897–1970) . . . 196, 197
Jarníkov (Primov) algoritmus . . . 197
jazyk 1. rádu . . . 23
jednotka
- imaginárna . . . 16
- kvaternionová . . . 16
- oktonionová . . . 16

K

kartézsky súčin . . . 19
Kempe Alfred Bray (1849-1922) . . . 48
kód
- ASCII . . . 204
- Huffmanov . . . 80, 204, 206
- Prüferov . . . 234

koeficient
- binomický . . . 171
  - Newtonov, 171
- multinomický . . . 177

koleso (graf) . . . 113
komplementárna množina . . . 14
komponent súvislosti (grafu) . . . 60
konjunkcia ($\wedge$) . . . 21
kontradikcia . . . 20
koreň . . . 77
koreňový strom . . . 77
kostra grafu . . . 62
Kőnig Dénes (1884–1944) . . . 48
Kruskal Joseph B. (1928–2010) . . . 196, 201
Kruskalov algoritmus . . . 202
Kuratowski Kazimierz (1896–1980) . . . 111
kvantifikátor
- existenčný . . . 23
- všeobecný . . . 23

L

Laplace Pierre-Simon (1749–1827) . . . 156
lema . . . 62
les . . . 77
list . . . 77
logická
- hodnota . . . 19
- premenná . . . 19

logická
- spojka . . . 19, 20

logický
- operátor . . . 19
- výrok . . . 19

logika
- predikátová . . . 23
- výroková . . . 22

M

matematická indukcia . . . 37, 39
matica
- incidencie grafu . . . 72
- relácie . . . 128
- susednosti grafu . . . 69

maximálne párovanie grafu . . . 89
množina . . . 11
- charakteristická funkcia . . . 149
- kartézsky súčin množín . . . 19
- komplementárna . . . 14
- konečná . . . 12
- mohutnosť . . . 12
- nekonečná . . . 12
- podmnožina . . . 12
- potenčná . . . 13
- prázdna . . . 11
- rozklad . . . 138
- spočítateľná . . . 37
- systém množín . . . 138
- univerzálna . . . 14
- univerzum . . . 13, 14

množiny
- disjunktné . . . 13
- prienik množín . . . 13
- rovnosť množín . . . 11
- rozdiel množín . . . 13
- symetrická diferencia množín . . . 41
- zjednotenie množín . . . 12

mocninový rad . . . 156
modulo (zvyšok po delení) . . . 41
modulo $a \pmod{b}$ . . . 41
modus ponens . . . 32
mohutnosť množiny . . . 12
Moskovský papyrus . . . 16
multinomická veta . . . 177
multinomický koeficient . . . 177

N

negácia (¬) . . . 20
Newton Isaac (1642–1727) . . . 171
Newtonov binomický koeficient . . . 171

P

P-kód (prefixový kód) . . . 204
párovanie grafu . . . 89
perfektné párovanie . . . 89
podgraf grafu . . . 58
podmnožina
- vlastná . . . 12

postupnosť
- Fibonacciho . . . 167
- harmonická . . . 166

potenčná množina . . . 13
pravdivostná hodnota . . . 19
pravdivostná tabuľka . . . 20
prázdna množina . . . 11
prázdny graf . . . 80
prefixový kód . . . 204
prehľadávací binárny strom . . . 213, 214
prehľadávanie grafu
- do hĺbky . . . 186, 187
- do šírky . . . 181, 182

prienik množín . . . 13
Prim Robert Clay (1921–. . .) . . . 197
princíp zapojenia-vypojenia . . . 18
problém
- NP-úplný . . . 96
- obchodného cestujúceho . . . 47, 234
- štyroch farieb . . . 48

Prüfer Ernst Paul Heinz (1896–1934) . . . 241
Prüferov kód . . . 234
prvky
- porovnateľné . . . 137
- neporovnateľné . . . 137

prvotná formula . . . 20
pseudokód
- Dijkstrovho algoritmu . . . 231
- hľadania kostry grafu . . . 179
- Jarníkovho algoritmu . . . 197
- konštrukcie očíslovaného stromu z Prüferovho kódu . . . 241
- konštrukcie optimálneho Huffmanovho kódu . . . 206
- konštrukcie prehľadávacieho binárneho stromu . . . 215

konštrukcie Prüferovho kódu z očíslovaného stromu . . . 235
Kruskalovho algoritmu . . . 202
prehľadávania grafu do hĺbky . . . 187
prehľadávania grafu do šírky . . . 182
zostavovania identifikačného kódu binárneho stromu . . . 219
zostavovania identifikačného kódu koreňového stromu . . . 222
pytagorejci . . . 15

R

rad
formálny mocninový . . . 156
Maclaurinov . . . 156
mocninový . . . 156
Taylorov . . . 156
reflexívnosť (relácie) . . . 124, 129
relácia
n-árna . . . 123
antisymetrická . . . 125, 130
binárna . . . 123, 124
čiastočné usporiadanie . . . 137
ekvivalencie . . . 140
inverzná . . . 127
maticová reprezentácia . . . 128
na množine . . . 124
reflexívna . . . 124, 129
symetrická . . . 125, 129
tranzitívna . . . 126
zložená . . . 128
rovnosť množín . . . 11
rozdiel množín . . . 13
rozklad množiny . . . 138
triedy ekvivalencie . . . 141
triedy rozkladu . . . 138

S

semifaktoriál . . . 172
skladanie funkcií . . . 146
skladanie relácií . . . 128
sled (v grafe) . . . 54
slučka (graf) . . . 50
spočítateľná množina . . . 37
Stirling James (1692–1770) . . . 156
strom (graf) . . . 73
vyvážený binárny . . . 81
subdivízia hrany . . . 111
súčin
kartézsky . . . 19
surjektívnosť . . . 144
sylogizmus . . . 34
symetrická diferencia množín ($\triangle$) . . . 41
symetrickosť (relácie) . . . 125, 129
systém množín . . . 138

T

tabuľka
pravdivostná . . . 20
Tait Peter Guthrie (1831–1901) . . . 48
tautológia . . . 20
tautologicky ekvivalentné formuly . . . 22
tranzitívnosť (relácie) . . . 126
trieda
rozkladu . . . 138
zvyšková . . . 142
trieda ekvivalencie . . . 141

Ť

ťah (v grafe) . . . 55

U

univerzum množín . . . 13, 14
usporiadaná dvojica . . . 18
usporiadanie
čiastočné . . . 137
neporovnateľnosť, 137
porovnateľnosť, 137
lineárne . . . 138

Ú

úplný binárny strom . . . 81

V

Vennove diagramy . . . 16
veta
Cayleyho . . . 242
Eulerova o rovinných grafoch . . . 110
Kuratowského . . . 112
multinomická . . . 177
o centre stromu . . . 224
o cykloch . . . 58
o existencii cesty v grafe . . . 56
o existencii jadra grafu . . . 226

veta
- o existencii kostry grafu . . . 63
- o explicitnom vyjadrení rekurentných postupností . . . 170
- o invariantnosti cyklu C_n . . . 102
- o invariantnosti stupňov vrcholov . . . 101
- o inverznej funkcii . . . 145
- o komponentoch grafu . . . 61
- o korektnosti prehľ. algoritmov . . . 191
- o matematickej indukcii . . . 39
- o matici susednosti . . . 71
- o matici zloženej relácie . . . 131
- o maticiach susednosti izomorfných grafov . . . 100
- o mohutnosti kartézskeho súčinu . . . 19
- o optimálnej lokalizácii v prehľadávacom binárnom strome . . . 217
- o otvorenom eulerovskom ťahu . . . 87
- o počte koncových vrcholov úplných binárnych stromov . . . 81
- o potenčnej množine . . . 40
- o relácii danej rozkladom množiny . . 139
- o rozklade danom rel. ekvivalencie . . 141
- o správnosti Jarníkovho algoritmu . . . 199
- o stromoch . . . 76
- o stupňoch vrcholov rovinného grafu . 111
- o súčte stupňov vrcholov grafu . . . 52
- o súvislosti výšky a počtu koncových vrcholov binárnych stromov . . . 82
- o tranzitívnosti relácie na množine . . . 132
- o uzavretom eulerovskom ťahu . . . 86
- o vrcholoch stromov . . . 76
- pravidlo sylogizmu . . . 34
- základná algebry . . . 16
- základná aritmetiky . . . 37

veta (matematická) . . . 31

vrchol
- dieťa . . . 78
- koncový . . . 50, 78
- list . . . 77
- otec . . . 78
- počiatočný . . . 50
- potomok . . . 78
- predkovia . . . 78
- rodič . . . 78
- súrodenci . . . 78
- syn . . . 78
- vnútorný . . . 78

výroková formula . . . 20, 22

vytvárajúca funkcia
- exponenciálna . . . 175
- obyčajná . . . 160
- súčet . . . 161
- súčin . . . 162

vyvážený binárny strom . . . 81

W

Werner Benjamin . . . 48

Z

základná veta algebry . . . 16
základná veta aritmetiky . . . 37
zásobník . . . 180
zjednotenie množín . . . 12
zložená funkcia . . . 146
zvyšková trieda . . . 142
zvyšok po delení (modulo) . . . 41