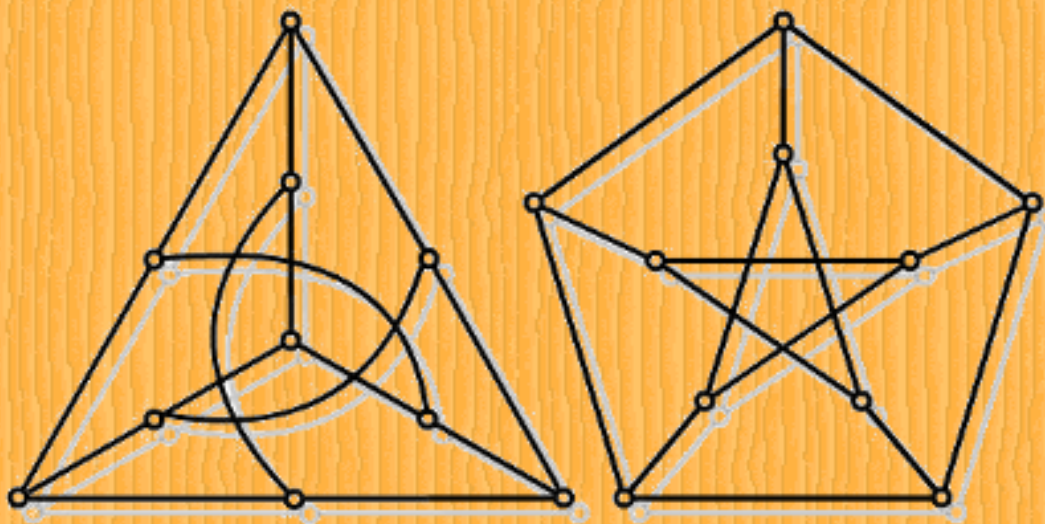
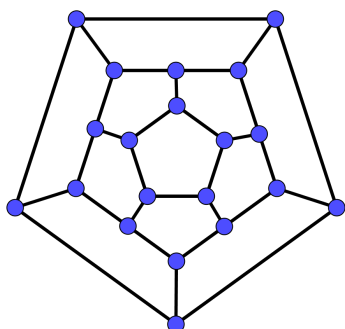




5. Hamiltonovské cykly, izomorfizmus grafov . . .

5.1 Hamiltonovské cykly

Problém existencie hamiltonovských cyklov¹ je tiež problémom teórie grafov, ktorý vznikol ešte v jej prvopočiatkoch ako hlavolam. V polovici 19. storočia írsky matematik Sir William Rowan Hamilton vymyslel nasledovný hlavolam. Máme dodekaéder², každý jeho vrchol predstavuje mesto a každá jeho hrana je cestou spájajúcou dve mestá. Úlohou je začať v niektorom meste, prejsť po cestách cez každé mesto práve raz a vrátiť sa do východzieho mesta. Tento problém je známy aj pod označením „*Problém obchodného cestujúceho*“ a už samotný názov naznačuje, že má aj praktické aplikácie. Na prvý pohľad sa môže zdať, že Hamiltonov problém je podobný problému nájdenia uzavretého eulerovského ťahu v grafe. Sú to však svojou podstatou aj náročnosťou dva veľmi odlišné problémy, k čomu sa bližšie vyjadríme ďalej. Pozrime sa teraz na Hamiltonov hlavolam.



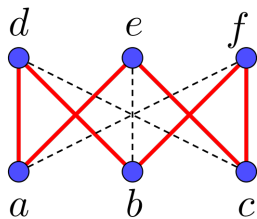
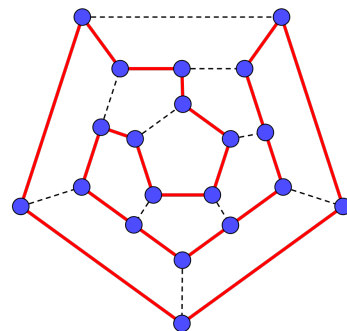
Dodekaéder môžeme reprezentovať grafom, aký vidíme na obrázku vľavo. Úloha z Hamiltonovho hlavolamu sa potom transformuje na úlohu nájdenia takého cyklu v grafe dodekaédra, ktorý obsahuje každý vrchol grafu práve raz. Takýto špeciálny typ cyklu sa nazýva *hamiltonovský* a vyskytuje v mnohých praktických aplikáciach teórie grafov. Uvedieme si jeho formálnu definíciu.

Definícia 5.1.1 — Hamiltonovský cyklus. Hamiltonovský cyklus v grafe G je taký cyklus, ktorý obsahuje všetky vrcholy grafu G .

¹Hamiltonovské cykly sa v slovenskej a českej terminológii často nazývajú aj *hamiltonovské kružnice*.

²Pravidelný dvanásťsten.

Ako sa môžeme presvedčiť na obrázku vpravo, graf dodekaedra, z Hamiltonovho hlavolamu, má hamiltonovský cyklus.

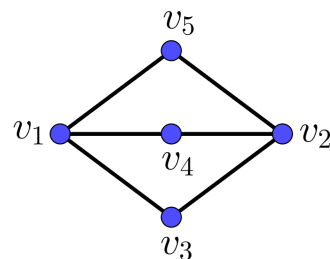


Aj kompletň bipartitň graf $K_{3,3}$, na obrázku vľavo, má hamiltonovský cyklus. Je to napríklad cyklus (a, e, c, f, b, d) .

Problém nájdenia hamiltonovského cyklu v grafe vyzerá podobne ako problém nájdenia uzavretého eulerovského ťahu v grafe. Sú však dva veľmi odlišné problémy. Napríklad ani v grafe dodekaedra, ani v bipartitnom grafe $K_{3,3}$ uzavretý eulerovský ťah neexistuje, pretože oba tieto grafy majú všetky vrcholy nepárneho stupňa. A pritom v oboch týchto grafoch hamiltonovský cyklus existuje. Už len samotný problém zistenia, či daný graf obsahuje hamiltonovský cyklus, sa veľmi líši od problému, či daný graf obsahuje uzavretý eulerovský ťah. V prípade uzavretého eulerovského ťahu máme vetu 4.6.1, ktorá nám dáva jednoducho overiteľnú podmienku, či v danom grafe takýto ťah existuje, alebo nie. V prípade hamiltonovského cyklu žiadna takáto jednoduchá podmienka neexistuje. Je to totiž jeden zo známych NP-úplných (čiže „veľmi ťažkých“) problémov. To znamená, že pre daný všeobecný graf, pokiaľ je dostatočne veľký, nevieme efektívne zistiť, či tento graf hamiltonovský cyklus obsahuje, alebo nie. Keďže hľadanie hamiltonovských cyklov, alebo aspoň zisťovanie ich existencie, je pre mnohé praktické aplikácie kľúčové, je táto problematika intenzívne skúmaná. Existujú niektoré typy a triedy grafov, pre ktoré vieme potvrdiť, alebo vylúčiť existenciu hamiltonovského cyklu. Ukážeme si to na jednoduchom príklade.

■ Príklad 5.1

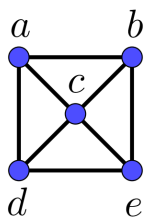
Dokážeme, že graf na obrázku vpravo nemá hamiltonovský cyklus.



Predpokladajme, že daný graf hamiltonovský cyklus obsahuje. Graf na obrázku má 5 vrcholov, a preto by jeho hamiltonovský cyklus musel mať 5 hrán, inak povedané, práve jedna jeho hrana do hamiltonovského cyklu nepatrí. Vynechajme teda z grafu hranu, ktorá nie je v hamiltonovskom cykle. Podľa definície 3.4.2 je cyklus pravidelný graf stupňa 2. Preto každý vrchol cyklu musí mať stupeň 2. Ak ale z daného grafu vynecháme ktorúkoľvek (jednu) hranu, tak vždy nám vznikne vrchol, ktorý je stupňa 1. Preto daný graf nemôže mať hamiltonovský cyklus. ■

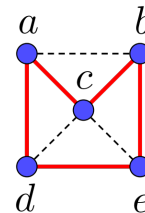
Na nasledujúcom príklade si ukážeme, že podobný argument nie vždy funguje.

■ **Príklad 5.2** Treba zistiť, či v grafe na obrázku vľavo existuje hamiltonovský cyklus.

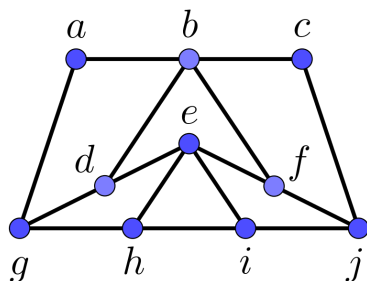


Ak by sme použili argument z predošlého príkladu, tak každý vrchol cyklu má stupeň 2, takže ak v grafe existuje hamiltonovský cyklus, musíme vynechať po jednej hrane pri vrchoch a, b, d, e a dve hrany pri vrchole c . Spolu teda 6 hrán. Daný graf má 8 hrán a ak 6 vynecháme, tak nám zostanú 2 a to je na hamiltonovský cyklus málo. **Uvedená úvaha je však nesprávna**, pretože každá hrana inciduje s dvoma vrcholmi a na zníženie stupňov uvedených vrcholov nemusíme vynechať 6 hrán.

Na obrázku vpravo sa môžeme presvedčiť, že daný graf má hamiltonovský cyklus. Na zníženie stupňov všetkých vrcholov na 2, stačilo vynechať z grafu 3 hrany $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ a $\{c, e\}$.



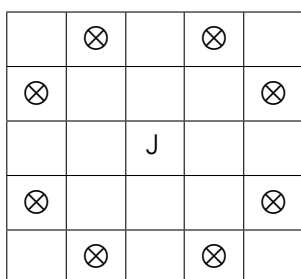
■ **Príklad 5.3** Ukážeme, že graf na obrázku vľavo nemá hamiltonovský cyklus.



Vrcholy a a c sú stupňa 2. Preto ak by daný graf mal hamiltonovský cyklus, tak hrany $\{a, b\}$, $\{a, g\}$, $\{b, c\}$ a $\{c, j\}$ by doň museli patriť. Následne by hrany $\{b, d\}$ a $\{b, f\}$ nesmeli patriť do hamiltonovského cyklu, pretože vrchol b už inciduje s hranami $\{a, b\}$ a $\{b, c\}$.

Ak ale vynecháme hrany $\{b, d\}$ a $\{b, f\}$, tak vrcholy d a f budú mať stupeň 2, a preto hrany $\{g, d\}$, $\{d, e\}$, $\{e, f\}$ a $\{f, j\}$ musia patriť do hamiltonovského cyklu. Následne by hrany $\{g, h\}$, $\{e, h\}$, $\{e, i\}$ a $\{f, j\}$ nesmeli patriť do hamiltonovského cyklu. Tým nám zostali dva vrcholy h a i , do ktorých sa už nemáme ako dostať. Takže daný graf hamiltonovský cyklus neobsahuje. ■

Ďalším veľmi známym hlavolamovým problémom, na ktorý sa dá aplikovať problém hamiltonovského cyklu v grafe, je „problém skákania jazdca po šachovnici“.



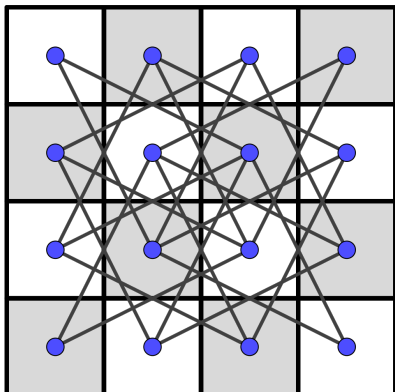
Skok jazdca na šachovnici má tvar písmena L. Znamená to, že jazdec J ide pri ťahu zo svojej pozície najskôr 2 políčka priamo a potom 1 políčko doprava, alebo doľava vzhľadom na pôvodný priamy smer. Na obrázku vľavo vidíme krížikmi vyznačené políčka, na ktoré môže skočiť jazdec umiestnený v strede.

Zadanie problému „prechádzky jazdca po šachovnici“ je nasledovné

Majme šachovnicu rozmerov $n \times n$. Zistite, pre ktoré hodnoty $n \in \mathbb{N}$ môže jazdec výjsť z niektorého políčka šachovnice, prejsť celou šachovnicou tak, že každé políčko navštívi práve raz a skončí na políčku, z ktorého vyšiel. Jedine na počiatočnom = koncovom políčku svojej „prechádzky“ bude stáť jazdec dvakrát.

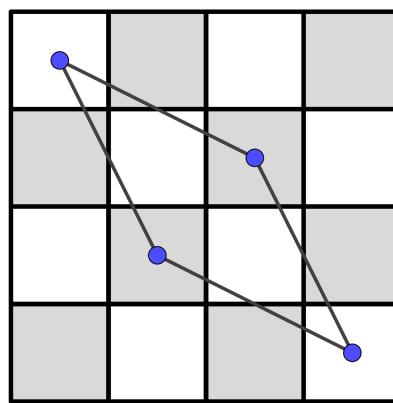
Problém prechádzky jazdca po šachovnici si môžeme modelovať grafom. Vrcholy grafu budú políčka šachovnice a dva vrcholy budú spojené hranou práve vtedy, ak môže jazdec skočiť jedným ťahom z políčka zodpovedajúcemu jednému vrcholu na políčko zodpovedajúce druhému vrcholu.

Pre takýto graf sa zaužíval názov *Knight graph*³ a pre šachovnicu rozmeru $n \times n$ sa Knight graf označuje KG_n .



Pre $n = 4$ vidíme graf KG_4 na obrázku vľavo. Ukážeme si, ako zistíme, či existuje hamiltonovský cyklus grafu KG_4 . Predovšetkým n musí byť párne číslo. Graf KG_n je totiž bipartitný. Šachovnicu môžeme rozdeliť na biele a čierne políčka a jazdec pri každom ťahu mení farbu políčka. To znamená, že v grafe KG_n každá hrana spája dve políčka rôznej farby. Ak by existoval v grafe hamiltonovský cyklus, začínal by napríklad na bielom políčku, potom by striedal čierne a biele políčka a skončil by na pôvodnom bielom políčku. Počet hrán hamiltonovského cyklu v bipartitnom grafe musí byť párny, a preto n musí byť párne číslo.

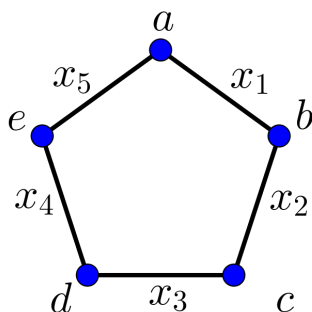
Pre $n = 2$ je šachovnica príliš malá na to, aby sa po nej mohol jazdec pohybovať. Pozrime sa preto na najbližšiu väčšiu šachovnicu pre $n = 4$. Vrcholy, zodpovedajúce rohovým políčkam šachovnice, majú stupeň 2, a preto sú hrany, s nimi incidujúce, v hamiltonovskom cykle „povinné“. Situáciu vidíme na obrázku vpravo. Dostali sme cyklus a ak by sme pridávali ďalšie hrany, tak buď zvýšime stupne už nakreslených vrcholov, alebo vzniknutý graf nebude súvislý. Preto hamiltonovský cyklus v grafe KG_4 nemôže existovať. Dá sa ukázať, že graf KG_n má hamiltonovský cyklus pre každé párne číslo $n \geq 6$, avšak dôkaz je netriviálny.



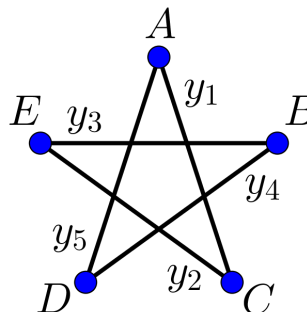
5.2 Izomorfizmus grafov

Pojem *izomorfizmu* grafov si najskôr ilustrujeme na jednoduchom príklade.

■ **Príklad 5.4** Predpokladajme, že dvaja ľudia dostanú za úlohu nakresliť graf, ktorý má 5 vrcholov spojených piatimi hranami do cyklu C_5 . Títo dvaja ľudia nezávisle od seba nakreslia dva grafy, ktoré vidíme na obrázkoch 5.1 a 5.2.



Obr. 5.1: Verzia 1. človeka



Obr. 5.2: Verzia 2. človeka

Vidíme, že podmienky zadania úlohy obaja ľudia splnili, a teda tieto dva grafy sú „rovnaké“, aj keď na prvý pohľad vyzerajú rôzne. Sú to dve rôzne realizácie toho istého grafu. Takéto grafy sa nazývajú *izomorfné*. ■

³V šachovej terminológii knight = jazdec.

Definícia 5.2.1 — Izomorfné grafy. Majme graf $G = (V, E)$ a graf $G' = (V', E')$. Potom grafy G a G' nazývame izomorfné, ak existuje vzájomne jednoznačné zobrazenie (bijekcia) $\varphi : V \rightarrow V'$ ich vrcholových množín, ktoré zachováva susednosť vrcholov a násobnosť hrán. Znamená to, že ak $u, v \in V$ a medzi týmito vrcholmi je v grafe G n hrán, tak potom medzi vrcholmi $\varphi(u)$ a $\varphi(v)$ v grafe G' je tiež práve n hrán. Takéto bijektívne zobrazenie φ sa nazýva izomorfizmus grafov G a G' .

P V definícii 5.2.1 sme použili pojem „bijekcia“, „bijektívne zobrazenie“, resp. jeho slovenský ekvivalent „vzájomne jednoznačné zobrazenie“. Na predmete *Diskrétna matematika* tento pojem bude formálne definovaný až v podkapitole 7.3, pozri definíciu 7.3.4 (str. 145). Je však veľmi pravdepodobné, že ste sa s ním už stretli na predmete *Matematika 1*. Pojem bijekcia, resp. bijektívne, alebo vzájomne jednoznačné, zobrazenie medzi dvoma množinami, môžeme neformálne definovať nasledovným spôsobom.

Každému prvku z jednej množiny prináleží práve jeden prvok z druhej množiny a rôznym prvkom jednej množiny zodpovedajú rôzne prvky druhej množiny, pričom obe uvedené vlastnosti musia platiť obojsmerne.

Vrátime sa teraz ku príkladu 5.4 a ukážeme, že grafy z obrázkov 5.1 a 5.2 sú izomorfné. Graf z obrázku 5.1 má množinu vrcholov $V = \{a, b, c, d, e\}$ a graf z obrázku 5.2 má množinu vrcholov $V' = \{A, B, C, D, E\}$. Bijekciu $\varphi : V \rightarrow V'$ si definujeme predpisom

$$\varphi(a) = A, \quad \varphi(b) = C, \quad \varphi(c) = E, \quad \varphi(d) = B, \quad \varphi(e) = D$$

Z uvedeného predpisu je zrejmé, že φ je bijekcia medzi množinami vrcholov V a V' . Treba ešte overiť, či táto bijekcia zachováva susednosť vrcholov a násobnosť hrán. Oba grafy sú obyčajné a násobné hrany nemajú. Stačí preto overiť, že dva vrcholy grafu G sú susedné práve vtedy, ak sú susedné ich obrazy v grafe G' . Vypíšeme si všetky dvojice susedných vrcholov (hrany) grafu G a grafu G' a overíme, že zobrazenie φ je bijekcia medzi nimi.

hrany grafu G		hrany grafu G'
$x_1 = \{a, b\}$	$\longleftrightarrow$	$\{A, C\} = y_1$
$x_2 = \{b, c\}$	$\longleftrightarrow$	$\{C, E\} = y_2$
$x_3 = \{c, d\}$	$\longleftrightarrow$	$\{E, B\} = y_3$
$x_4 = \{d, e\}$	$\longleftrightarrow$	$\{B, D\} = y_4$
$x_5 = \{e, a\}$	$\longleftrightarrow$	$\{D, A\} = y_5$

Z uvedeného je zrejmé, že bijekcia φ susednosť vrcholov zachováva. Takže φ je izomorfizmus grafov G a G' a o týchto dvoch grafoch môžeme povedať, že sú izomorfné.

Matice susednosti uvedených dvoch grafov pri lexikografickom usporiadaní ich vrcholov sú:

$$G: \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad G': \begin{matrix} & A & B & C & D & E \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

V nasledujúcej vete si ukážeme, ako sa dajú izomorfné grafy charakterizovať pomocou svojich matíc susednosti.

Veta 5.2.1 — O maticiach susednosti izomorfných grafov. Grafy G a G' sú izomorfné práve vtedy, keď sa ich matice susednosti pri vhodnom usporiadaní vrcholov rovnajú.

Dôkaz: tvrdenie vety má tvar ekvivalencie, takže dokazovať ho budeme ako dve implikácie. Množinu vrcholov grafu G označme $V = \{u_i\}_{i=1}^n$ a množinu vrcholov grafu G' si označme $V' = \{v_i\}_{i=1}^n$.

⇒ **Ak sú grafy G a G' izomorfné, tak ich matice susednosti, pri vhodnom usporiadaní vrcholov, sa rovnajú.**

Grafy G a G' sú izomorfné práve vtedy, ak existuje bijekcia $\varphi : V \rightarrow V'$, ktorá zachováva susednosť vrcholov a násobnosť hrán. Nech má matice susednosti grafu G vrcholy usporiadané lexikograficky, t.j. $(u_1, u_2, \dots, u_n)$. Usporiadajme potom vrcholy matice susednosti grafu G' takto

$$(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n)).$$

Ak je v i -tom riadku a j -tom stĺpci matice susednosti grafu G číslo n , tak to znamená, že vrcholy u_i a u_j sú v grafe G spojené n hranami. Potom ale vrcholy $\varphi(u_i)$ a $\varphi(u_j)$ v grafe G' sú tiež spojené n hranami, a preto aj v matici susednosti grafu G' bude pri zvolenom usporiadaní vrcholov v i -tom riadku a j -tom stĺpci číslo n .

⇐ **Ak sú matice susednosti grafov G a G' , pri nejakom usporiadaní vrcholov, rovnaké, tak grafy G a G' sú izomorfné.**

Ak sú matice susednosti grafov G a G' rovnaké, tak môžeme ich vrcholy „premenovať“ tak, že budú usporiadané lexikograficky. Takže bez straty všeobecnosti môžeme predpokladať, že graf G má vrcholy usporiadané $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ a graf G' má vrcholy usporiadané $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Definujme si teraz bijekciu $\varphi : V \rightarrow V'$ predpisom

$$\varphi(u_1) = v_1, \quad \varphi(u_2) = v_2, \quad \dots, \quad \varphi(u_n) = v_n$$

Matice susednosti sú, pri zvolenom usporiadaní vrcholov, rovnaké, takže ak medzi vrcholmi u_i a u_j je v grafe G n hrán, tak aj medzi vrcholmi v_i a v_j je v grafe G' n hrán.

Bijekcia φ je preto izomorfizmus grafov G a G' a tieto grafy sú izomorfné.

Q.E.D.

Vráťme sa ku grafom z obrázkov 5.1 a 5.2 z príkladu 5.4. Už vieme, že grafy G a G' sú izomorfné a izomorfizmus φ zobrazuje ich vrcholy v poradí $\varphi : (a, b, c, d, e) \rightarrow (A, C, E, B, D)$. Potom podľa vety 5.2.1, ak v maticiach susednosti usporiadame vrcholy grafu G v poradí (a, b, c, d, e) a vrcholy grafu G' v poradí (A, C, E, B, D) , tak dostaneme matice

$$G : \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad G' : \begin{matrix} & A & C & E & B & D \\ \begin{matrix} A \\ C \\ E \\ B \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

ktoré, ako vidíme, sú rovnaké.

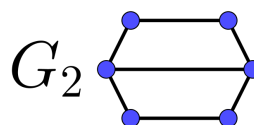
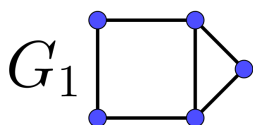
Zaujímavou úlohou je zistiť, či sú dva dané grafy izomorfné. Toto je ťažký problém a vo všeobecnosti nie je známy žiaden polynomiálny algoritmus na jeho riešenie. Na druhej strane zatiaľ ani neexistuje dôkaz toho, že by sa jednalo o NP úplný problém a pre viaceré kategórie grafov existujú polynomiálne algoritmy na riešenie tohto problému. Napríklad pre stromy je overovanie izomorfizmu veľmi jednoduché a rýchle. Ako si ukážeme neskôr v časti 11.2 (str. 217), existuje lineárny algoritmus, ktorý nám zistí, či dané dva stromy sú, alebo nie sú, izomorfné. My si tu teraz

ukážeme spôsob, ako sa pre dané dva grafy G_1 a G_2 dá zistiť, že izomorfné nie sú. Tento spôsob je založený na tom, že nájdeme nejakú vlastnosť grafu G_1 , ktorú graf G_2 nemá, ale mal by ju mať, ak by bol izomorfný s grafom G_1 . Takáto vlastnosť sa nazýva *invariant*.

Definícia 5.2.2 — Invariant. Vlastnosť P sa nazýva invariant, ak pre ľubovoľné dva izomorfné grafy G_1 a G_2 platí tvrdenie: *graf G_1 má vlastnosť P práve vtedy, keď graf G_2 má vlastnosť P .*

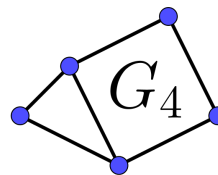
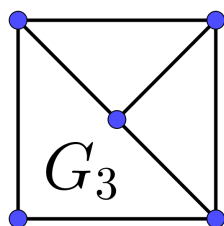
Z definície 5.2.1 vyplýva, že ak grafy G a G' sú izomorfné, musia mať rovnaký počet vrcholov a rovnaký počet hrán, pretože medzi ich množinami vrcholov existuje bijekcia, ktorá zachováva susednosť vrcholov a násobnosť hrán. To znamená, že vlastnosti „mať n vrcholov“ alebo „mať p hrán“ sú, v zmysle definície 5.2.2, invarianty.

■ **Príklad 5.5** Zoberme si grafy G_1 a G_2 z nasledovných obrázkov



Tieto dva grafy nemôžu byť izomorfné, pretože graf G_1 má 5 vrcholov a graf G_2 má 6 vrcholov. ■

■ **Príklad 5.6** Ako ďalší príklad si vezmeme nasledujúce dva grafy G_3 a G_4



Tieto dva grafy majú síce rovnaký počet vrcholov (5), ale nemôžu byť izomorfné, pretože graf G_3 má 7 hrán a graf G_4 má 6 hrán. ■

Dokážeme vetu, že aj vlastnosť „mať rovnaký počet vrcholov rovnakých stupňov“ je invariant. Predtým si však dokážeme pomocné tvrdenie.

Lema 5.2.2 — O invariantnosti stupňa vrcholu. Nech $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ sú izomorfné grafy a φ je izomorfizmus medzi nimi. Potom pre každé $u \in V$ platí $\text{st}(u) = \text{st}(\varphi(u))$, čiže stupeň vrcholu u je rovnaký ako stupeň jeho obrazu v izomorfnom grafe G' .

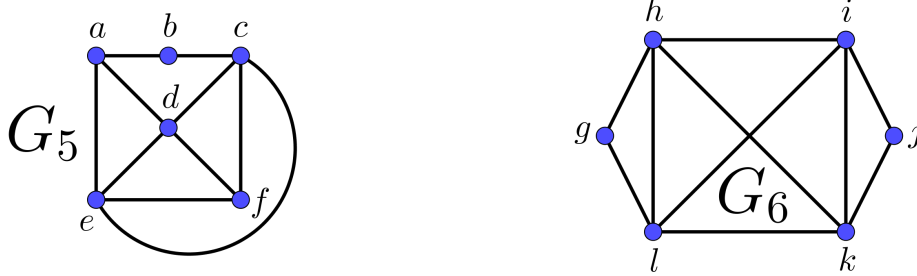
Dôkaz: podľa cvičenia 4.10, ak máme graf $G = (V, E)$ s n vrcholmi a jeho ľubovoľný vrchol $v_i \in V$, tak stupeň vrcholu v_i sa rovná súčtu čísel v i . riadku matice susednosti grafu G . Podľa vety 5.2.1 sú matice izomorfných grafov, pri vhodnom usporiadaní ich vrcholov, rovnaké. Preto ak máme dva izomorfné grafy, tak platí $\text{st}(u) = \text{st}(\varphi(u))$, kde $u \in V$ a $\varphi(u) \in V'$. Q.E.D.

Na základe lemy 5.2.2 môžeme vysloviť tvrdenie o invariantnosti stupňov všetkých vrcholov.

Veta 5.2.3 — O invariantnosti stupňov vrcholov. Nech G a G' sú dva izomorfné grafy. Potom tieto dva grafy majú rovnaký počet vrcholov rovnakých stupňov.

Dôkaz: tvrdenie vety je dôsledkom lemy 5.2.2. Zapišme si vrcholy grafu G v poradí $(u_1, \dots, u_n)$ a vrcholy grafu G' ako ich obrazy v izomorfizme, t. j. v poradí $(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n))$. Podľa lemy 5.2.2 platí $\text{st}(u_i) = \text{st}(\varphi(u_i))$, a preto majú G a G' rovnaký počet vrcholov rovnakých stupňov. Q.E.D.

■ **Príklad 5.7** Zoberme si grafy G_5 a G_6 z nasledovných obrázkov



Tieto dva grafy majú rovnaký počet vrcholov (6) aj hrán (10). Nemôžu však byť izomorfné, pretože graf G_5 má stupne vrcholov $(2, 3, 3, 4, 4, 4)$ a graf G_6 má stupne vrcholov $(2, 2, 4, 4, 4, 4)$. ■

■ **Príklad 5.8** Pozrime sa na grafy G_7 a G_8 z nasledovných obrázkov



Tieto dva grafy majú rovnaký počet vrcholov (5) aj hrán (7). Nemôžu ale byť izomorfné, pretože graf G_7 má vrchol stupňa 4 a graf G_8 vrchol stupňa 4 nemá. ■

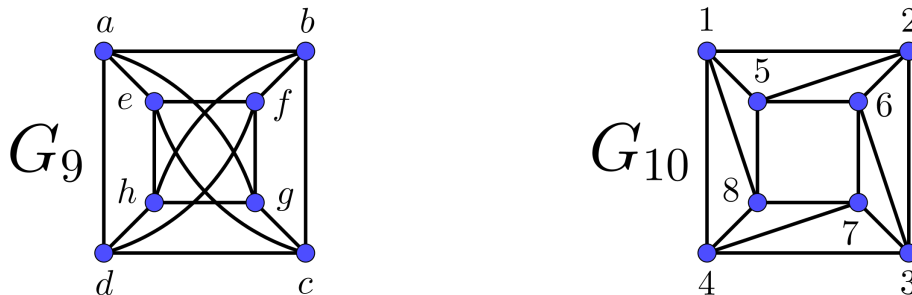
Dokážeme, že rovnako ako sú stupne vrcholov invariantom, je aj vlastnosť „mať ako podgraf cyklus dĺžky n “ invariant.

Veta 5.2.4 — O invariantnosti cyklu C_n . Nech grafy G a G' sú izomorfné. Potom graf G obsahuje ako podgraf cyklus C_n práve vtedy, keď graf G' obsahuje ako podgraf cyklus C_n .

Dôkaz: podľa definície 5.2.1 ak sú grafy $G = (V, E)$ a $G' = (V', E')$ izomorfné a $\varphi : V \rightarrow V'$ je ich izomorfizmus, tak zobrazenie φ zachováva susednosť vrcholov a násobnosť hrán. Inak povedané pre všetky $v_i, v_j \in V$ platí $\{v_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow \{\varphi(v_i), \varphi(v_j)\} \in E'$.

Nech vrcholy $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ tvoria cyklus C_n v grafe G . Znamená to, že graf G obsahuje hrany $\{v_i, v_{i+1}\}$ pre každé $i \in \{1, 2, \dots, (n-1)\}$ a hranu $\{v_1, v_n\}$. Avšak grafy G a G' sú izomorfné, a preto graf G obsahuje uvedené hrany práve vtedy, keď graf G' obsahuje hrany $\{\varphi(v_1), \varphi(v_n)\}$ a $\{\varphi(v_i), \varphi(v_{i+1})\}$ pre každé $i \in \{1, 2, \dots, (n-1)\}$. To znamená, že vrcholy $(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \dots, \varphi(v_n))$ tvoria cyklus C_n v grafe G' . Q.E.D.

■ **Príklad 5.9** Grafy G_9 a G_{10} z nasledovných obrázkov

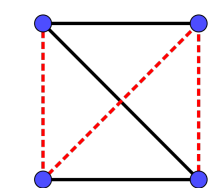


majú rovnaký počet vrcholov (8) aj hrán (16). Podľa vety 5.2.4 však nemôžu byť izomorfné, pretože graf G_{10} obsahuje cyklus C_3 (trojuholník) ale graf G_9 žiaden C_3 neobsahuje. ■

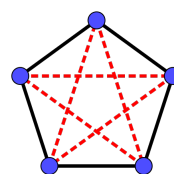
Pomocou izomorfizmu sa definuje *samokomplementárny graf*. Pojem *komplementárny graf* bol definovaný už v kapitole 3 (definícia 3.2.8, str. 53). Samokomplementárne grafy sú grafy komplementárne samé so sebou a sú zaujímavé z hľadiska mnohých aplikácií. My tu uvedieme ich formálnu definíciu a stretneme sa s nimi v cvičeniach na konci tejto kapitoly.

Definícia 5.2.3 — Samokomplementárny graf. Graf G sa nazýva samokomplementárny, ak je izomorfný s grafom $\overline{G}$.

■ **Príklad 5.10** Cesta na 4 vrchoch (P_4) a cyklus na 5 vrchoch (C_5) sú jednoduché príklady samokomplementárnych grafov. Vidíme ich na nasledujúcich dvoch obrázkoch. Čiernou farbou je zobrazený graf G a červenou farbou jeho komplement $\overline{G}$.

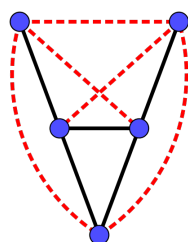


$$P_4 \simeq \overline{P_4}$$



$$C_5 \simeq \overline{C_5}$$

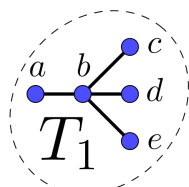
Iný príklad samokomplementárneho grafu je na ďalšom obrázku.



5.2.1 Izomorfizmus stromov

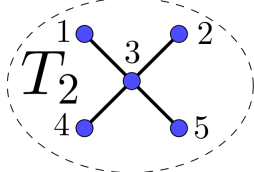
Na záver podkapitoly o izomorfizme grafov si ešte uvedieme jednu triedu grafov, pre ktoré vieme ľahko overiť, či sú, alebo nie sú dané dva grafy izomorfné. Touto triedou grafov, ako už bolo spomenuté skôr, sú stromy. Teraz si uvedieme len niekoľko príkladov a definícií a až v časti 11.2 (str. 217) sa budeme venovať rýchlym algoritmom na overovanie izomorfizmu stromov.

■ **Príklad 5.11** Sú stromy T_1 a T_2 z nasledujúceho obrázku izomorfné?



Ukážeme, že stromy T_1 a T_2 na obrázku vľavo sú izomorfné. Stačí si vziať nasledovnú bijekciu ich vrcholov

$$f(a) = 1, \quad f(b) = 3, \quad f(c) = 2, \quad f(d) = 4, \quad f(e) = 5.$$

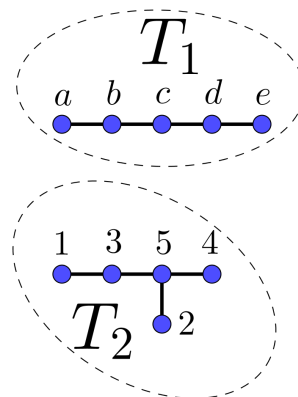


Táto bijekcia zachováva susednosť vrcholov, o čom sa ľahko môžeme presvedčiť z obrázku. Preto sú stromy T_1 a T_2 izomorfné.

To, že dva dané stromy nie sú izomorfné, ukážeme rovnako ako pri grafoch všeobecne. Znamená to, že nájdeme nejaký invariant, ktorý jeden z daných stromov má a druhý nemá.

■ **Príklad 5.12** Sú stromy T_1 a T_2 z nasledujúceho obrázku izomorfné?

Ukážeme, že stromy T_1 a T_2 na obrázku vpravo nie sú izomorfné. Stačí si uvedomiť, že strom T_2 má vrchol stupňa 3 a strom T_1 žiaden vrchol stupňa 3 nemá.



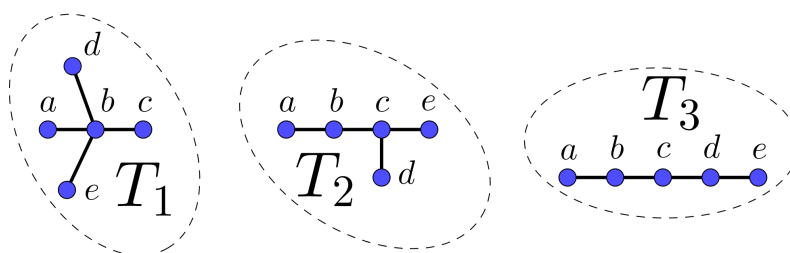
V ďalšom príklade si ukážeme, koľko existuje neizomorfných stromov na 5 vrchoch.

■ **Príklad 5.13** Koľko existuje neizomorfných stromov na 5 vrchoch?

Riešenie: z vety 4.2.7 (strana 76) vieme, že strom na 5 vrchoch má 4 hrany. To znamená, že žiaden vrchol nemôže mať stupeň viac než 4. Okrem toho z definície stromu vieme, že strom je súvislý graf. Takže každý vrchol musí mať stupeň aspoň 1. No a napokon, podľa vety 4.2.8 (strana 76), vieme, že každý strom s aspoň dvoma vrcholmi, má aspoň 2 vrcholy stupňa 1. Takže preberme si možnosti:

1. Strom na 5 vrchoch má vrchol stupňa 4. V tom prípade môže mať len 1 taký vrchol, pretože vrchol stupňa 4, inciduje so 4 hranami a spolu s druhými koncovými vrcholmi týchto 4 hrán, máme spolu už 5 vrcholov. Takže takýto strom musí byť izomorfný so stromom T_1 zobrazeným na obrázku 5.3.
2. Strom na 5 vrchoch, má vrchol stupňa 3. Potom môže mať len jeden takýto vrchol. Ak by mal aspoň dva vrcholy stupňa 3, tak súčet stupňov jeho vrcholov by bol aspoň 9 a takýto graf by mal viac než 4 hrany, čiže by to nebol strom, a máme spor. Takže strom na 5 vrchoch môže mať len jeden vrchol stupňa 3, aspoň dva vrcholy stupňa 1 (veta 4.2.8) a aby mal práve 4 hrany, musí mať ešte jeden vrchol stupňa 2. Preto takýto strom musí byť izomorfný so stromom T_2 na obrázku 5.3.
3. Ak strom na 5 vrchoch nemá vrcholy stupňa 4, alebo 3, tak musí mať len vrcholy stupňa 1 a 2. Podľa vety 4.2.8 musí mať aspoň dva vrcholy stupňa 1. Súčet stupňov jeho vrcholov musí byť 8, aby mal graf 4 hrany, takže takýto strom na 5 vrchoch musí mať tri vrcholy stupňa 2 a dva vrcholy stupňa 1. Takýto strom musí byť izomorfný so stromom T_3 na obrázku 5.3.

Spolu teda existujú 3 neizomorfné stromy na piatich vrchoch.



Obr. 5.3: Všetky neizomorfné stromy na 5 vrchoch

5.2.2 Izomorfizmus koreňových stromov

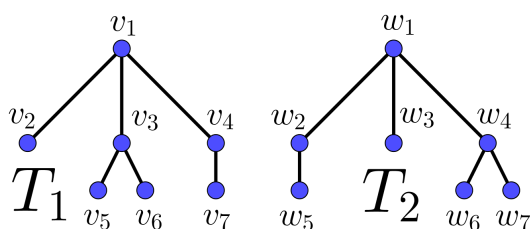
Koreňový strom sa od obyčajného stromu líši len tým, že má jeden pevne vybraný vrchol, ktorý sa nazýva koreň. Takže formálna definícia izomorfizmu koreňových stromov bude nasledovná.

Definícia 5.2.4 — Izomorfizmus koreňových stromov. Dva koreňové stromy $T_1 = (V, E)$ s koreňom $u_1 \in V$ a $T_2 = (V', E')$ s koreňom $v_1 \in V'$ sú izomorfné, ak existuje bijekcia $\varphi : V \rightarrow V'$, ktorá zachováva susednosť vrcholov a navyše platí $\varphi(u_1) = v_1$.

Izomorfizmus koreňových stromov je definovaný rovnako ako izomorfizmus stromov (grafov) rozšírený o podmienku, že bijekcia medzi vrcholovými množinami dvoch koreňových stromov musí zachovávať aj koreň. Ak porovnáme definície 5.2.1 a 5.2.4, tak vidíme, že nám vypadla podmienka zachovania násobnosti hrán. Stromy totiž násobné hrany mať nemôžu.

Takže ak sú dva koreňové stromy izomorfné, tak sa koreň jedného stromu zobrazí na koreň druhého stromu a okrem toho musí byť zachovaná susednosť vrcholov.

■ **Príklad 5.14** Sú koreňové stromy T_1 a T_2 z nasledujúceho obrázku izomorfné?



Ukážeme, že koreňové stromy T_1 a T_2 na obrázku vľavo sú izomorfné. Keďže ide o koreňové stromy, izomorfizmus musí zachovať koreň. Takže $f(v_1) = w_1$. Ostatné vrcholy potom môžeme zobraziť takto

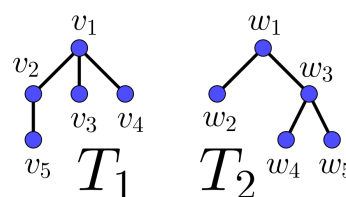
$$f(v_2) = w_3, \quad f(v_3) = w_4, \quad f(v_4) = w_2$$

$$f(v_5) = w_6, \quad f(v_6) = w_7, \quad f(v_7) = w_5.$$

Táto bijekcia zachováva korene stromov aj susednosť vrcholov, o čom sa ľahko môžeme presvedčiť z obrázku. Preto sú stromy T_1 a T_2 izomorfné. Okrem toho, uvedený izomorfizmus nie je jediný možný. Ak by sme prehodili $f'(v_5) = w_7$ a $f'(v_6) = w_6$, pri zachovaní zobrazení zvyšných vrcholov, tak tiež dostaneme izomorfizmus stromov T_1 a T_2 . ■

■ **Príklad 5.15** Sú koreňové stromy T_1 a T_2 z nasledujúceho obrázku izomorfné?

Koreňové stromy T_1 a T_2 , na obrázku vpravo, nie sú izomorfné, pretože koreň stromu T_1 má stupeň 3 a koreň stromu T_2 má stupeň len 2. Keďže stupeň, v izomorfizme si zodpovedajúcich vrcholov, je invariant, nemôžu byť tieto koreňové stromy izomorfné. Ak by sme však grafy T_1 a T_2 brali len ako stromy, čiže nie ako koreňové stromy, tak by boli izomorfné.



■ **Príklad 5.16** Koľko existuje neizomorfných koreňových stromov na 4 vrcholoch?

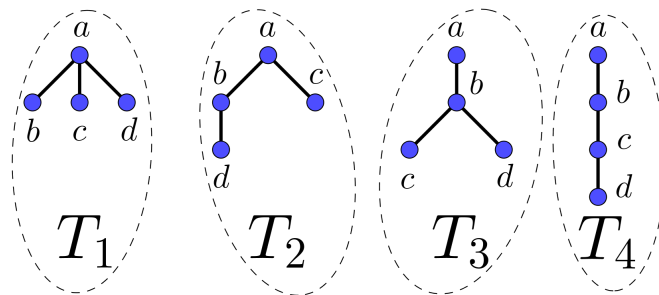
Riešenie: z vety 4.2.7 (strana 76) vieme, že strom na 4 vrcholoch má 3 hrany. To znamená, že žiaden vrchol nemôže mať stupeň viac než 3. Okrem toho strom je súvislý graf a každý vrchol musí mať stupeň aspoň 1. Navyše ide o koreňový strom, takže jeden vrchol je zafixovaný a označený ako koreň stromu. Takže preberme si možnosti:

1. Koreň stromu má stupeň 3. Potom inciduje s 3 hranami a koreň, spolu s druhými koncovými vrcholmi incidujúcich hrán, nám dáva dokopy 4 vrcholy. Takže takýto strom musí byť izomorfný so stromom T_1 , na obrázku 5.4.
2. Koreň stromu má stupeň 2. Potom inciduje s dvoma hranami a susedí s dvoma vrcholmi, označme si ich b a c . Chýba nám ešte 1 vrchol a tento môžeme spojiť hranou buď s vrcholom

b , alebo s vrcholom c , ale nie s oboma, pretože by vznikol cyklus. Takže výsledný strom musí byť izomorfný so stromom T_2 , na obrázku 5.4.

3. Koreň stromu má stupeň 1. Potom inciduje len s jednou hranou a susedí len s jedným vrcholom. Chýbajú nám ešte ďalšie 2 vrcholy, aby výsledný strom mal 4 vrcholy. Označme si koreň stromu a a jeho syna b . Potom máme dve možnosti: buď má vrchol b dvoch synov, alebo má len jedného syna. Takže výsledný strom musí byť izomorfný buď so stromom T_3 , alebo so stromom T_4 na obrázku 5.4.

Spolu teda existujú 4 neizomorfné koreňové stromy na 4 vrcholech.



Obr. 5.4: Všetky neizomorfné koreňové stromy na 4 vrcholech

■

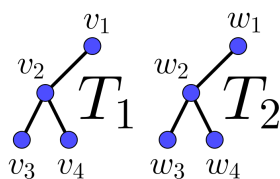
5.2.3 Izomorfizmus binárnych stromov

Binárne stromy sa od koreňových stromov líšia počtom a poradím (ľavý/pravý) synov vrcholu. Formálna definícia izomorfizmu binárnych stromov bude nasledovná.

Definícia 5.2.5 — Izomorfizmus binárnych stromov. Dva binárne stromy $T_1 = (V, E)$ s koreňom $u_1 \in V$ a $T_2 = (V', E')$ s koreňom $v_1 \in V'$ sú izomorfné, ak existuje bijekcia $\varphi : V \rightarrow V'$ zachovávajúca susednosť vrcholov, koreň (platí $\varphi(u_1) = v_1$) a poradie synov vrcholov. T.j. ak u_j je ľavý (pravý) syn vrcholu u_i , tak $\varphi(u_j)$ je ľavý (pravý) syn vrcholu $\varphi(u_i)$.

Izomorfizmus binárnych stromov je teda definovaný rovnako ako izomorfizmus koreňových stromov, rozšírený o podmienku, že izomorfizmus medzi vrcholovými množinami binárnych stromov musí zachovávať aj poradie synov vrcholov. Takže ľavý (pravý) syn vrcholu jedného stromu sa musí zobrazovať na ľavého (pravého) syna vrcholu druhého stromu. Samozrejme musí byť zachovaná aj susednosť vrcholov a koreň stromov.

■ **Príklad 5.17** Sú binárne stromy T_1 a T_2 z nasledujúceho obrázku izomorfné?



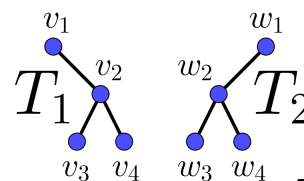
Ukážeme, že binárne stromy T_1 a T_2 na obrázku vľavo sú izomorfné. Keďže ide o binárne, a teda aj koreňové, stromy, izomorfizmus musí zachovať koreň. Takže $f(v_1) = w_1$. Ostatné vrcholy potom môžeme zobrazovať takto

$$f(v_2) = w_2, \quad f(v_3) = w_3, \quad f(v_4) = w_4.$$

Táto bijekcia zachováva korene stromov aj susednosť vrcholov a poradie synov, o čom sa ľahko môžeme presvedčiť z obrázku. Preto sú stromy T_1 a T_2 izomorfné. ■

■ **Príklad 5.18** Sú binárne stromy T_1 a T_2 z nasledujúceho obrázku izomorfné?

Binárne stromy T_1 a T_2 na obrázku vpravo nie sú izomorfné, pretože koreň stromu T_1 má len pravého syna a koreň stromu T_2 má len ľavého syna. Takže nemôže existovať žiadna bijekcia, ktorá by zachovala poradie synov koreňa. Pritom ako grafy, aj ako koreňové nie binárne stromy, sú T_1 a T_2 izomorfné.



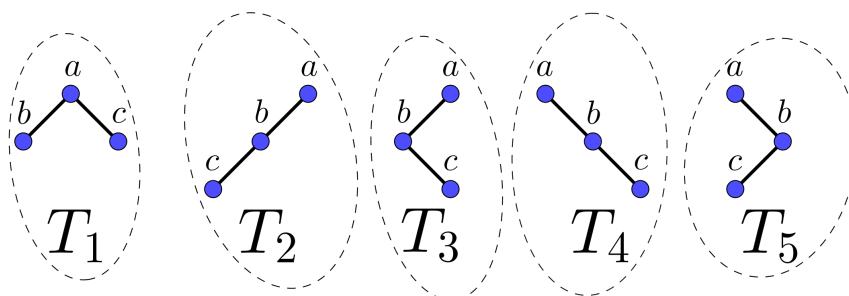
V nasledujúcom príklade si ukážeme, koľko existuje neizomorfných binárnych stromov na troch vrchoch.

■ **Príklad 5.19** Koľko existuje neizomorfných binárnych stromov na 3 vrchoch?

Riešenie: z vety 4.2.7 (strana 76) vieme, že strom na 3 vrchoch má 2 hrany. To znamená, že žiaden vrchol nemôže mať stupeň viac než 2. Okrem toho strom je súvislý graf a každý vrchol musí mať stupeň aspoň 1. Navyše ide o koreňový strom, takže jeden vrchol je zafixovaný a označený ako koreň stromu. Takže preberme si možnosti:

1. Koreň stromu má stupeň 2. Potom inciduje s 2 hranami a koreň, spolu s druhými koncovými vrcholmi incidujúcich hrán, nám dáva dokopy 3 vrcholy. Takže takýto strom musí byť izomorfný so stromom T_1 , na obrázku 5.5.
2. Koreň stromu má stupeň 1. Potom tento vrchol má len 1 syna a tento musí mať tiež jedného syna, pretože potrebujeme spolu 3 vrcholy. Keďže však ide o binárny strom, musíme v oboch úrovniach rozlišovať, či sa jedná o ľavého, alebo o pravého syna. Máme preto dokopy 4 možnosti.
 - (a) Koreň má ľavého syna a ten má ľavého syna. Potom je výsledný strom izomorfný so stromom T_2 , na obrázku 5.5.
 - (b) Koreň má ľavého syna a ten má pravého syna. Potom je výsledný strom izomorfný so stromom T_3 , na obrázku 5.5.
 - (c) Koreň má pravého syna a ten má pravého syna. Potom je výsledný strom izomorfný so stromom T_4 , na obrázku 5.5.
 - (d) Koreň má pravého syna a ten má ľavého syna. Potom je výsledný strom izomorfný so stromom T_5 , na obrázku 5.5.

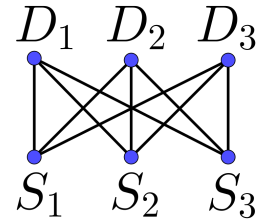
Spolu teda existuje 5 neizomorfných binárnych stromov na 3 vrchoch. Sú to stromy, ktoré vidíme na nasledujúcom obrázku.



Obr. 5.5: Všetky neizomorfné binárne stromy na 3 vrchoch

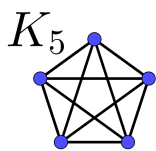
5.3 Rovinnosť grafov

Predstavme si situáciu, že máme tri domy D_1, D_2, D_3 , tri studne S_1, S_2, S_3 a každý dom chceme spojiť s každou studňou cestou tak, aby sa tieto cesty nekrížili. Dá sa to? Situáciu vidíme na obrázku vpravo a ide o graf $K_{3,3}$. Každý si môže skúsiť tento graf nakresliť tak, aby sa jeho hrany nekrížili (ani „mimoúrovňovo“), ale určite sa mu to nepodarí. Dôkaz, prečo je to tak, uvedieme neskôr.

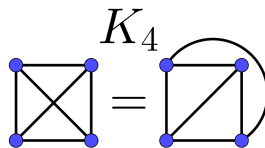


Definícia 5.3.1 — Rovinný graf. Graf G sa nazýva rovinný, ak sa dá v rovine nakresliť tak, aby sa jeho hrany nepretínali. Takémuto nakresleniu hovoríme *rovinné nakreslenie* grafu G .

P V definícii 5.3.1 sa používa bližšie nešpecifikovaný pojem „rovina“. V teórii grafov budeme týmto pojmom označovať dvojrozmerný priestor (plochu) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zodpovedajúci bežnému dvojrozmernému Euklidovskému priestoru E^2 . Takejto ploche v topologickej teórii grafov zodpovedá povrch gule. Topologická teória grafov v súčasnosti intenzívne skúma problémy súvisiace s vnáraním (kreslením) grafov aj do plôch vyšších rodov (torus ...). Tieto napohľad „hlavolamové“ úlohy majú totiž veľmi dôležité aplikácie vo viacerých oblastiach vedy a techniky. V mikroelektronike napr. pri návrhu procesorov.



Graf $K_{3,3}$ z úvodu tejto časti teda nie je rovinný a rovnako nie je rovinný ani graf K_5 na obrázku vľavo. Tiež môžeme skúsiť nakresliť tento graf tak, aby sa jeho hrany nepretínali a nepodarí sa nám to. Rovnako ako pri grafe $K_{3,3}$ uvedieme formálny dôkaz nerovinnosti grafu K_5 neskôr. Ale napríklad graf K_4 rovinný je, ako vidíme na nasledujúcom obrázku.



Ako vidíme, niektoré grafy rovinné sú a niektoré nie. Všimnime si, že ak nakreslíme do roviny rovinný graf, tak tento nám rovinu rozdelí na niekoľko oblastí ohraničených hranami grafu. Napríklad graf K_4 , nakreslený na predošlom obrázku vpravo, rozdeľuje rovinu na 4 oblasti: dva vnútorné trojuholníky, oblasť medzi štvorcom a oblúkovou hranou a napokon celý zvyšok roviny. Teraz uvedieme formálnu definíciu niekoľkých pojmov používaných v topologickej teórii grafov.

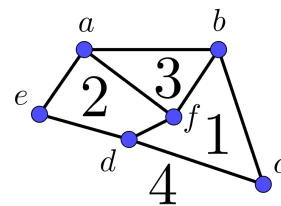
Definícia 5.3.2 — Oblasť, hranica oblasti, susedné oblasti. Nech G je súvislý, rovinný graf nakreslený v rovine tak, že jeho hrany sa nepretínajú. Potom

- ▷ každú hranu grafu G pozdĺžne rozrežeme na polovicu a rovina, v ktorej bol graf G nakreslený, sa tým môže (ale nemusí) rozpadnúť na niekoľko častí. Maximálne súvislé časti roviny, ktoré takto dostaneme, sa nazývajú *oblasti* grafu G ,
- ▷ *hranica oblasti* je cyklus idúci rozrezanými hranami grafu G po obvodu príslušnej oblasti,
- ▷ dve oblasti grafu, ktorých hranice majú spoločnú hranu, nazývame *susedné oblasti*.

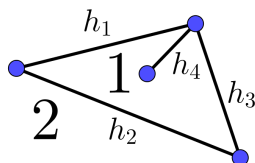
P V definícii 5.3.2 sme opäť použili bližšie nešpecifikovaný pojem „súvislá časť roviny“. Formálnu matematickú definíciu nebudeme uvádzať, ale tento pojem si neformálne môžeme opísať nasledovne. Ak je nejaká oblasť súvislou časťou roviny, tak z ľubovoľného jej bodu vieme ceruzkou nakresliť čiaru do ľubovoľného iného jej bodu tak, že pri kreslení nezdvihneme ceruzku z papiera a nakreslená čiara nepretne hranicu tejto oblasti.

■ **Príklad 5.20**

Pozrime sa napríklad na graf, ktorý máme na obrázku vpravo. Je to rovinný graf so štyrmi oblasťami označenými 1, 2, 3, 4. Oblasť 1 je ohraničená cyklom (b, c, d, f) , oblasť 2 je ohraničená cyklom (a, e, d, f) , oblasť 3 je ohraničená cyklom (a, b, f) a nakoniec oblasť 4 je ohraničená cyklom (a, b, c, d, e) .

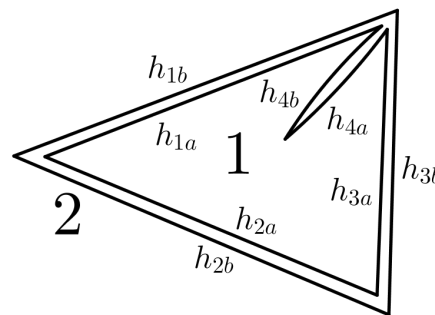


V predošlom príklade sú cykly tvoriace hranice oblastí zároveň cyklami v danom grafe. Táto situácia sa nám javí ako prirodzená a je intuitívne zrejmé. Pozrime sa však na nasledujúci príklad.

■ **Príklad 5.21**

Graf na obrázku vľavo je rovinný graf s dvoma oblasťami. Toto je ešte intuitívne zrejmé. Ale čo sú hranice týchto oblastí? Úmyselne sme v danom grafe neoznačili vrcholy, ale hrany. Podľa definície 5.3.2 dostaneme oblasti grafu tak, že každú jeho hranu pozdĺžne „rozrežeme“.

To znamená, že hrana h_i sa nám rozpadne na dve polovice, ktoré si pracovne označíme h_{ia} a h_{ib} . Výsledok vidíme na obrázku vpravo. Takže oblasť 1 je ohraničená cyklom $(h_{1a}, h_{2a}, h_{3a}, h_{4a}, h_{4b})$ a oblasť 2 je ohraničená cyklom (h_{1b}, h_{2b}, h_{3b}) . V skutočnosti nemáme hrany h_{ia} a h_{ib} , ale len hrany h_i . Preto sú podľa definície 5.3.2 v danom grafe hrany h_1, h_2, h_3 spoločné obom oblastiam a hrana h_4 patrí len do oblasti 1.



Každé rovinné nakreslenie ľubovoľného rovinného grafu má minimálne jednu oblasť. V definícii 5.3.2 a v príklade 5.20 sme použili pojem *rovina*. Vo všeobecnosti sa však v teórii grafov grafy kreslia nielen do roviny, ale aj do rôznych iných *plôch* (napr. na povrch torusu). Okrem toho sa namiesto kreslenia hovorí o *vnáraní* grafov.



V nasledujúcom texte, všade kde budeme písať o „počte oblastí rovinného grafu G “, alebo „rovinný graf G má o oblastí“, tým budeme rozumieť „počet oblastí ľubovoľného rovinného nakreslenia grafu G “. Vo vete 5.3.2 ukážeme, že všetky rovinné nakreslenia daného grafu majú ten istý počet oblastí.

Lema 5.3.1 Ak je graf G strom, tak je rovinný a má len 1 oblasť.

Dôkaz: to, že každý strom je rovinný graf, sa ľahko dokáže matematickou indukciou vzhľadom na počet jeho vrcholov (pozri cvičenie 5.22). Fakt, že každý strom vieme nakresliť tak, že vznikne len jedna oblasť, triviálne vyplýva z definície stromu – strom je acyklický graf.

Všimnime si, že graf z príkladu 5.20 má $v = 6$ vrcholov, $h = 8$ hrán a $o = 4$ oblastí a platí preň vzorec $v - h + o = 2$. To nie je náhoda, ale dôležitý vzťah platiaci pre všetky rovinné grafy. Objavil a dokázal ho Leonhard Euler. Pre každý súvislý rovinný graf platí nasledujúca veta.

Veta 5.3.2 — Eulerova veta o rovinných grafoch. Ak G je súvislý, rovinný graf s v vrcholmi, h hranami a o oblasťami, tak platí vzťah

$$v - h + o = 2.$$

Dôkaz: budeme robiť indukciou vzhľadom na počet hrán h .

1. **Overenie pre $h = 0$:** súvislý graf bez hrán pozostáva len z jedného vrcholu a má len jednu oblasť. Čiže $v = 1$, $h = 0$ a $o = 1$ a platí $v - h + o = 1 - 0 + 1 = 2$.
2. **Indukčný krok:** predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky súvislé rovinné grafy, ktoré majú najviac $(n - 1)$ hrán. Potom ukážeme, že musí platiť aj pre grafy s n hranami. Majme súvislý, rovinný graf G , ktorý má v vrcholov, $h = n$ hrán a o oblastí. Môžu nastať dva prípady
 - (a) **Graf G je strom.** Potom podľa lemy 5.3.1 má len jednu oblasť a podľa lemy 4.2.4 má $h = (v - 1)$ hrán a platí $v - h + o = v - (v - 1) + 1 = v - v + 1 + 1 = 2$.
 - (b) **Graf G nie je strom.** Potom obsahuje cyklus a nech h_1 je hrana tohto cyklu. Táto hrana leží na hranici dvoch oblastí, ktoré sa po jej odstránení spoja do jednej. Takže odstránením hrany h_1 z grafu G dostaneme graf G' , ktorého počet vrcholov, hrán a oblastí bude $v' = v$, $h' = (h - 1) = (n - 1)$ a $o' = (o - 1)$. Podľa indukčného predpokladu pre graf G' platí tvrdenie vety, takže

$$v' - h' + o' = 2 = v - (h - 1) + (o - 1) = v - h + 1 + o - 1 \Rightarrow v - h + o = 2$$

Q.E.D.

Veta 5.3.2 má mnoho dôsledkov. Uvedieme si niektoré z nich.

Dôsledok 5.3.3 — 1. Dôsledok vety 5.3.2. Nech G je súvislý, rovinný graf s v vrcholmi, h hranami a o oblasťami, v ktorom sú všetky oblasti ohraničené cyklami C_n pôvodného grafu G . Potom platí

$$h = \frac{n \cdot (v - 2)}{n - 2}$$

Dôkaz: ak sú všetky oblasti ohraničené cyklami C_n pôvodného grafu G , tak hrana leží na hraniciach dvoch oblastí, t.j. musí byť obsiahnutá v dvoch cykloch dĺžky n . Preto platí

$$o \cdot n = 2h \implies o = \frac{2h}{n}.$$

Dosadením o do vzťahu $v - h + o = 2$ dostaneme horeuvedené tvrdenie. Q.E.D.

Dôsledok 5.3.4 — 2. Dôsledok vety 5.3.2. Nech G je obyčajný, súvislý, rovinný graf s aspoň $v \geq 3$ vrcholmi a h hranami, ktorý má maximálny možný počet hrán. Potom každá jeho oblasť je ohraničená cyklom C_3 a platí

$$h = 3v - 6$$

Dôkaz: ak by niektorá oblasť nebola ohraničená cyklom C_3 , mohli by sme pridať ďalšiu hranu bez toho, aby sme porušili rovinnosť grafu. Overenie tohto tvrdenia prenechávame na čitateľa. To by bol ale spor s predpokladom, že G má maximálny možný počet hrán. Takže v grafe G je každá oblasť ohraničená cyklom C_3 a dosadením $n = 3$, do vzťahu z dôsledku 5.3.3, dostaneme vyššieuvedené tvrdenie. Q.E.D.

Dôsledok 5.3.5 — 3. Dôsledok vety 5.3.2. Nech G je súvislý, rovinný graf s v vrcholmi a h hranami, ktorý má všetky oblasti ohraničené cyklami C_4 pôvodného grafu G . Potom platí

$$h = 2v - 4$$

Dôkaz: Toto je len špeciálny prípad dôsledku 5.3.3 pre $n = 4$ a niet čo dokazovať. Q.E.D.

Pomocou uvedených dôsledkov už vieme dokázať, že grafy K_5 a $K_{3,3}$, spomínané za definíciou 5.3.1, nie sú rovinné.

Dôsledok 5.3.6 — O nerovinnosti grafov K_5 a $K_{3,3}$. Grafy K_5 a $K_{3,3}$ nie sú rovinné.

Dôkaz:

K_5 – Graf K_5 je obyčajný a kompletný takže má maximálny možný počet hrán. Počet jeho hrán je $h = \binom{5}{2} = 10$. Ak by bol rovinný, tak by, podľa dôsledku 5.3.4, musel mať $3v - 6 = 3 \cdot 5 - 6 = 9 < 10$ hrán, čím dostávame spor. Takže graf K_5 nie je rovinný. Q.E.D.

$K_{3,3}$ – Graf $K_{3,3}$ neobsahuje cykly C_3 ani žiadne iné cykly nepárnej dĺžky. Preto, ak je rovinný, nemôže mať viac než $2v - 4 = 2 \cdot 6 - 4 = 8$ hrán (pozri dôsledok 5.3.5 a cvičenie 5.23). Graf $K_{3,3}$ má však $h = 9 > 8$ hrán, čím dostávame spor. Preto graf $K_{3,3}$ nie je rovinný. Q.E.D.

Ďalším pekným a dôležitým dôsledkom Eulerovej vety 5.3.2, je nasledujúca veta.

Veta 5.3.7 — O stupňoch vrcholov rovinného grafu. Každý obyčajný, súvislý, rovinný graf G s aspoň $v \geq 2$ vrcholmi má aspoň dva vrcholy stupňa nanajvyš 5.

Dôkaz: Predpokladajme, že graf G má aspoň $(v - 1)$ vrcholov stupňa väčšieho než 5. Potom, podľa vety 3.2.1, platí

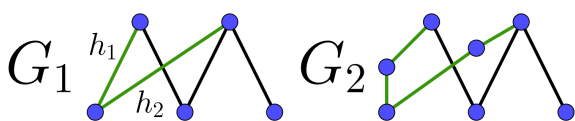
$$h = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^v \text{st}(u_i) \geq \frac{1}{2} (v - 1) \cdot 6 = 3(v - 1) = 3v - 3.$$

Dostali sme nerovnosť $h \geq 3v - 3$, ktorá je v spore s dôsledkom 5.3.4. Predpoklad bol preto nesprávny a graf G musí mať aspoň dva vrcholy stupňa nanajvyš 5. Q.E.D.

V dôsledku 5.3.6 sme ukázali, že grafy K_5 a $K_{3,3}$ nie sú rovinné. Poľský matematik Kazimierz Kuratowski v roku 1930 dokázal, že pomocou týchto dvoch grafov sa dajú charakterizovať všetky rovinné grafy. Skôr než sformulujeme Kuratowského vetu, potrebujeme definovať pojmy *subdivízia hrany* a *homeomorfné grafy*.

Definícia 5.3.3 — Subdivízia hrany. Operácia nahradenia ľubovoľnej hrany grafu G cestou ľubovoľnej dĺžky sa nazýva subdivízia hrany.

■ Príklad 5.22



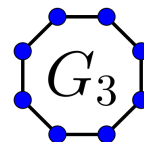
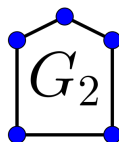
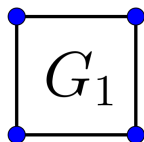
Na obrázku vľavo máme dané dva grafy G_1 a G_2 . Graf G_2 sme z grafu G_1 dostali subdivíziou vyznačených hrán h_1 a h_2 .

■

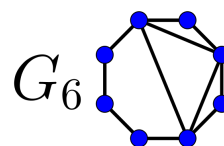
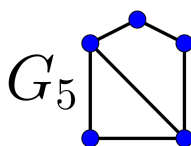
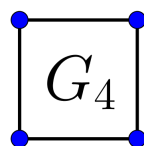
Definícia 5.3.4 — Homeomorfné grafy. Grafy G_1 a G_2 sú homeomorfné, ak existuje graf G , z ktorého vieme dostať graf G_1 , aj graf G_2 , konečnou postupnosťou subdivízií hrán.

■ **Príklad 5.23** Podľa definície 5.3.4 sú grafy G_1 a G_2 z príkladu 5.22 homeomorfné, pretože graf G_2 dostaneme z grafu G_1 subdivíziou dvoch jeho hrán. ■

■ **Príklad 5.24** Grafy G_1 , G_2 a G_3 , na nasledujúcom obrázku, sú navzájom homeomorfné



Ale žiadne dva z grafov G_4 , G_5 a G_6 , na ďalšom obrázku, nie sú homeomorfné.



Veta 5.3.8 — Kuratowského veta. Graf G je rovinný práve vtedy, keď neobsahuje podgraf homeomorfný s grafom K_5 alebo $K_{3,3}$.

Dôkaz Kuratowského vety presahuje rámec náplne predmetu *Diskrétna matematika*, a preto ho nebudeme uvádzať.

5.4 Katalóg špeciálnych grafov

V tejto časti uvedieme niekoľko špeciálnych grafov, pričom slovo „špeciálny“ v tomto prípade znamená len to, že tieto grafy majú v literatúre svoje zaužívané mená a často aj zaužívané označenia. Niektoré špeciálne grafy, ako sú kompletný graf, kompletný bipartitný graf, cyklus a cesta, už boli spomenuté skôr, ďalšie budú nové.

5.4.1 Kompletný graf (K_n)

Kompletný graf bol definovaný na strane 52. Pripomínáme, že kompletný graf na n vrchoch sa označuje K_n a je to obyčajný graf s n vrcholmi, ktorý obsahuje hranu medzi ľubovoľnými dvoma rôznymi vrcholmi.

5.4.2 Kompletný bipartitný graf ($K_{m,n}$)

Kompletný bipartitný graf bol definovaný na strane 54. Označujeme ho $K_{m,n}$ a je to obyčajný bipartitný graf s dvoma partíciami m a n vrcholov, pričom každý vrchol jednej partície susedí s každým vrcholom druhej partície.

5.4.3 Cesta (P_n)

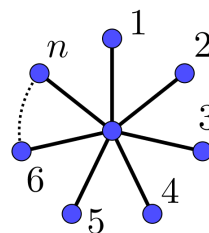
Cesta bola definovaná na strane 55, avšak bez uvedenia označenia. Cesta je sled, v ktorom sa žiaden vrchol neopakuje. Označenie P_n budeme používať pre cestu dĺžky n , čiže pre cestu s n hranami a $n + 1$ vrcholmi.

5.4.4 Cyklus (C_n)

Cyklus bol definovaný na strane 57. Cyklus C_n je súvislý pravidelný graf stupňa 2 na n vrchoch.

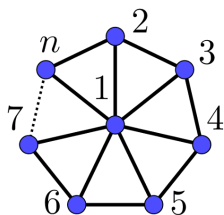
5.4.5 Hviezda (S_n)

Hviezda⁴ S_n je úplný bipartitný graf $K_{1,n}$. Označenie S_n nie je úplne jednotné. Najčastejšie S_n označuje graf na $n + 1$ vrchoch, t. j. jeden centrálny vrchol a n vrcholov s ním spojených tak, ako je to vidieť na obrázku vpravo. Niektorí autori však do čísla n zahŕňajú aj centrálny vrchol, takže S_n u nich označuje graf na n vrchoch. A napokon v kapitole 3 na strane 62 používame označenie S_n pre kosť grafu (odvodené od slova *skeleton*). Takže pri označení S_n si je potrebné z kontextu overiť, o aký graf sa jedná.



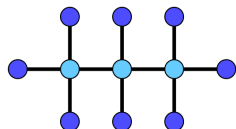
5.4.6 Koleso (W_n)

Koleso⁵ (*Wheel*) W_n je graf, ktorý má jeden centrálny vrchol a ten je spojený so všetkými vrcholmi cyklu C_{n-1} . Príklad kolesa W_n vidíme na obrázku vľavo. Na rozdiel od hviezdy sa pri označovaní kolesa centrálny vrchol započítava do n . Takže koleso W_n je vždy graf na n vrchoch. Koleso je typ grafu, ktorý má viaceré vlastnosti zaujímavé z hľadiska aplikácií. Tieto vlastnosti súvisia napr. s rovinnosťou, ale aj s farbením grafov, ktorým sa my na predmete *Diskrétna matematika* nezaobráame.

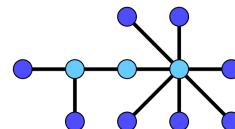


5.4.7 Húsenica

Húsenica⁶ je graf, ktorý je zaujímavý z hľadiska aplikácií. Húsenica je strom, z ktorého po odstránení všetkých listov zostane len cesta. Na obrázkoch nižšie je táto cesta vyznačená svetlejšou modrou farbou. Niekedy sa za húsenicu považuje len taký strom, z ktorého po odstránení všetkých listov zostane cesta a navyše všetky vrcholy tejto cesty, ktoré nie sú jej listy, majú stupeň 0 alebo 2. Príklady húseníc sú na obrázkoch 5.6 a 5.7. Húsenicu, v ktorej z každého vrcholu svetlo modrej cesty vychádzajú najviac 3 listy, budeme pracovne nazývať „obyčajná húsenica“. Vo všeobecnosti môže húsenica vyzeráť aj tak, ako to vidno na obrázku 5.7.



Obr. 5.6: „Obyčajná“ húsenica



Obr. 5.7: Húsenica

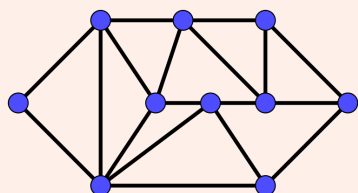
⁴[https://en.wikipedia.org/wiki/Star_\(graph_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Star_(graph_theory))

⁵https://en.wikipedia.org/wiki/Wheel_graph

⁶https://en.wikipedia.org/wiki/Caterpillar_tree

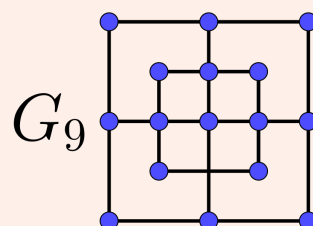
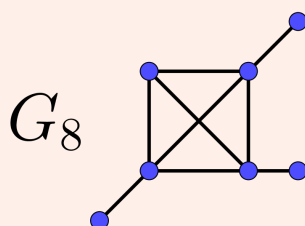
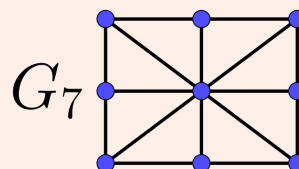
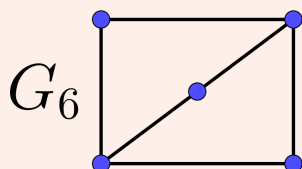
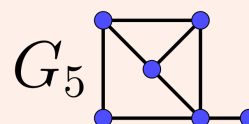
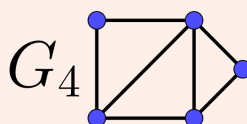
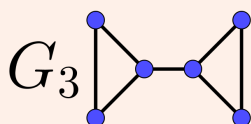
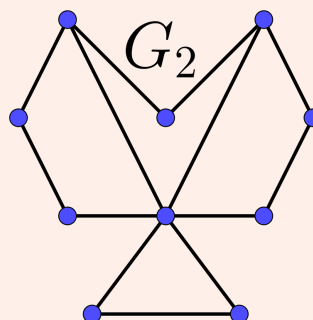
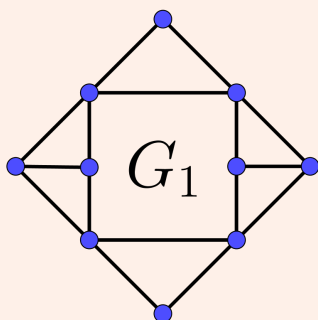
5.5 Cvičenia

Cvičenie 5.1



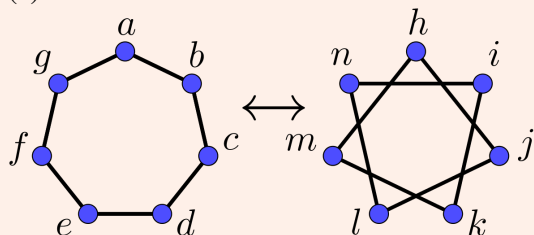
Nájdite hamiltonovský cyklus v grafe na obrázku vľavo.

Cvičenie 5.2 Zistite, či dané grafy majú hamiltonovský cyklus

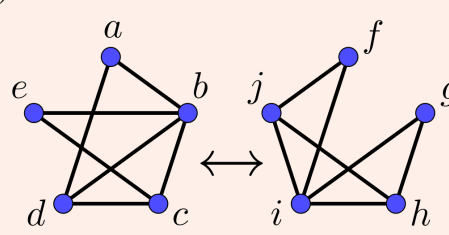


Cvičenie 5.3 Zistite či dané dvojice grafov sú izomorfné a ak sú, nájdite ich izomorfizmus.

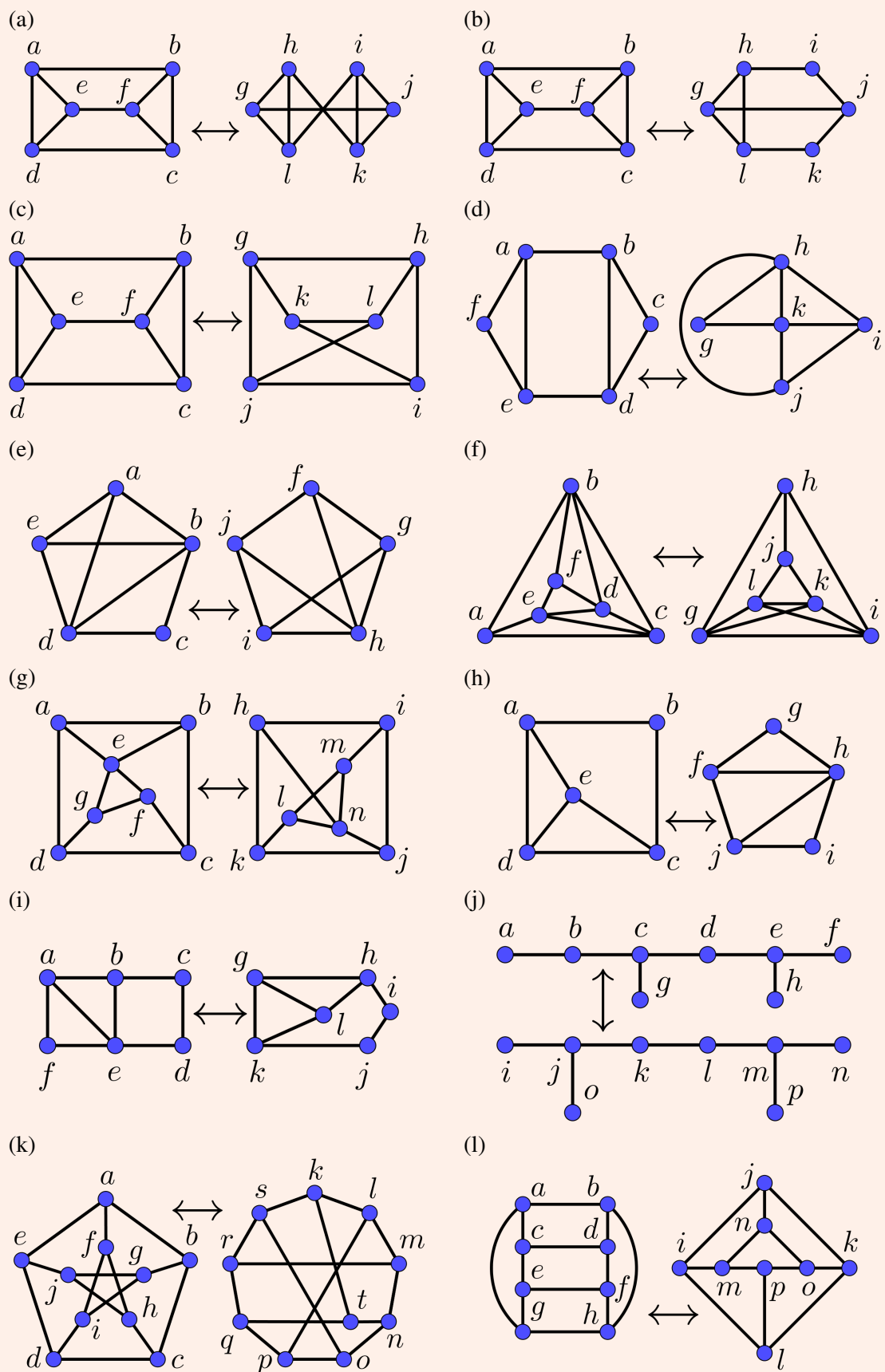
(a)



(b)



Cvičenie 5.4 Zistite, či dané dvojice grafov sú izomorfné a ak sú, nájdite ich izomorfizmus.



Cvičenie 5.5 Rozhodnite a zdôvodnite, či daná vlastnosť grafu je invariant

- | | |
|---|----------------------------------|
| (a) mať C_k , | (e) mať n cyklov C_k , |
| (b) mať n vrcholov stupňa k , | (f) mať k komponentov, |
| (c) byť súvislý, | (g) mať uzavretý eulerovský ťah, |
| (d) byť nesúvislý, | (h) byť bipartitný, |
| (i) mať hranu $\{u, v\}$, pričom $\text{st}(u) = i$ a $\text{st}(v) = j$. | |

■

Cvičenie 5.6 Nájdite nejakú vlastnosť grafu, ktorá je invariant a dokážte, že je invariantom. ■

Cvičenie 5.7 Nájdite

- (a) všetky neizomorfné obyčajné grafy na 3 vrchoch a zistite, koľko z nich je súvislých,
- (b) všetky neizomorfné obyčajné grafy na 4 vrchoch a zistite, koľko z nich je súvislých,
- (c) všetky neizomorfné obyčajné grafy na 5 vrchoch a zistite, koľko z nich je súvislých,
- (d) všetky neizomorfné obyčajné grafy, ktoré majú 6 vrcholov a 4 hrany.

■

Cvičenie 5.8 Nájdite samokomplementárny graf s aspoň dvoma vrcholmi rôznych stupňov. ■

Cvičenie 5.9 Dokážte, že ak existuje samokomplementárny graf na n vrchoch, tak n dáva po delení 4 zvyšok 0 alebo 1. ■

Cvičenie 5.10 Nakreslite graf s danými vlastnosťami alebo zdôvodnite, prečo neexistuje

- (a) úplný binárny strom so 4 vnútornými a 5 koncovými vrcholmi,
- (b) úplný binárny strom s výškou 3 a 9 koncovými vrcholmi,
- (c) úplný binárny strom s výškou 4 a 9 koncovými vrcholmi.

■

Cvičenie 5.11 Nájdite všetky neizomorfné

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| (a) stromy s 3 vrcholmi, | (e) koreňové stromy s 5 vrcholmi, |
| (b) stromy so 4 vrcholmi, | (f) binárne stromy s 2 vrcholmi, |
| (c) stromy so 6 vrcholmi, | (g) binárne stromy s 4 vrcholmi, |
| (d) koreňové stromy s 3 vrcholmi, | (h) binárne stromy so 5 vrcholmi. |

■

Cvičenie 5.12 Nech $T = (V, E)$ je strom. Dokážte, že pre ľubovoľné jeho dva vrcholy $u, v \in V$, ktoré nie sú listy, existuje list $l \in V$ taký, že najkratšia cesta z vrcholu u do listu l , vedie cez vrchol v . ■

Cvičenie 5.13 Nech T je strom. Dokážte, že každý jeho vrchol nadobúda svoju excentricitu v niektorom liste stromu T . ■

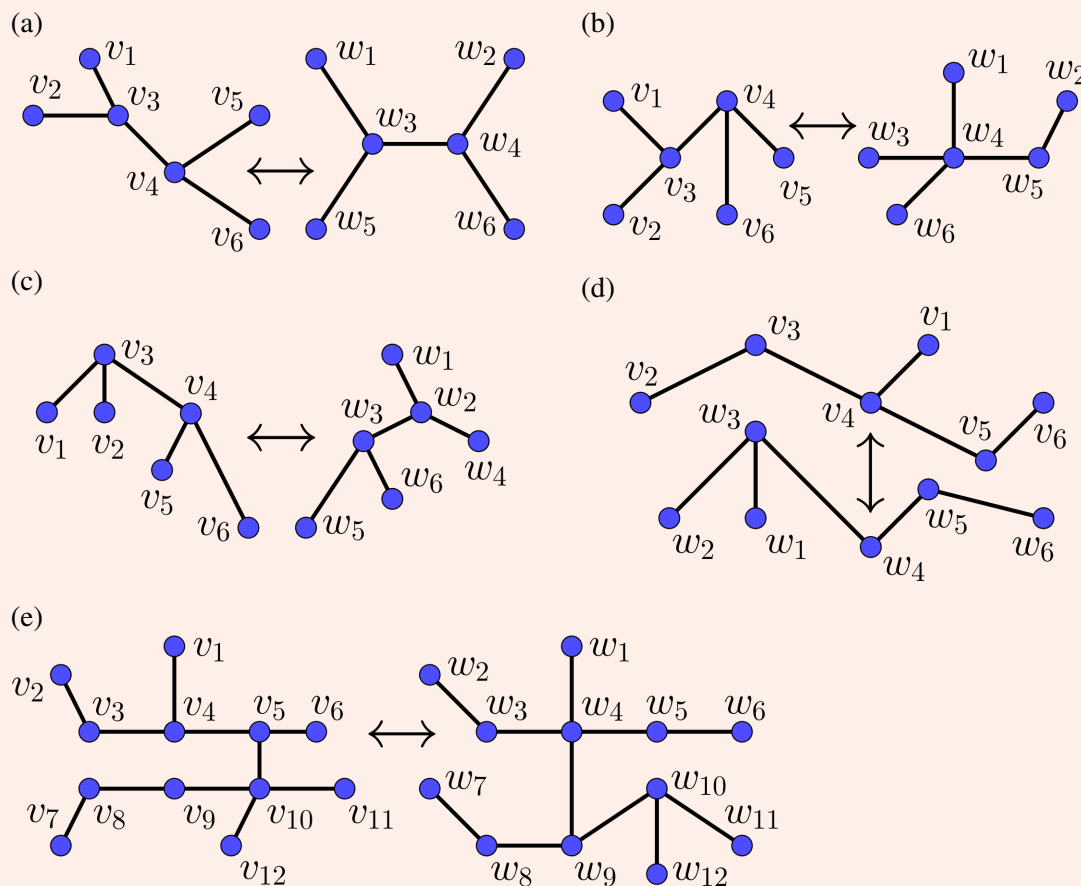
Cvičenie 5.14 Nájdite všetky navzájom neizomorfné pravidelné obyčajné grafy stupňa 3 na ôsmich vrchoch. Koľko z nich je nesúvislých? ■

Cvičenie 5.15 Dokážte, že ak G je obyčajný rovinný graf s v vrcholmi, h hranami, o oblasťami a k komponentami, tak platí

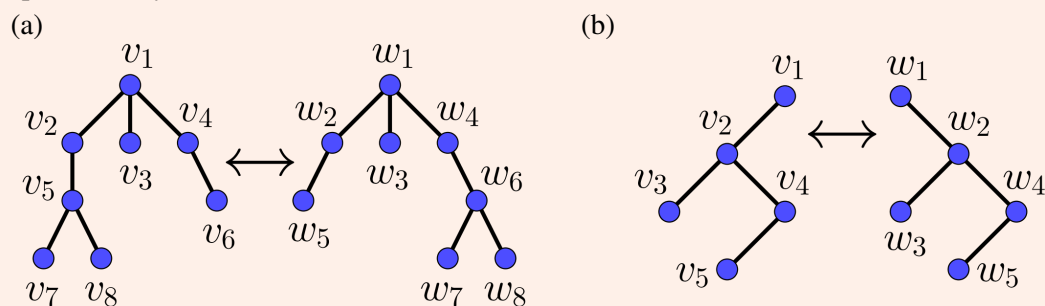
$$v - h + o = 1 + k$$

Cvičenie 5.16 Koľko rôznych navzájom neizomorfných kostier má graf K_5 ?

Cvičenie 5.17 O každom z daných párov stromov rozhodnite, či sú tieto stromy izomorfné. Ak sú, nájdite izomorfizmus, ak nie sú, nájdite invariant, ktorý jeden strom spĺňa a druhý nie.



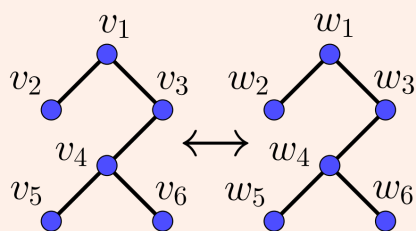
Cvičenie 5.18 O každom z daných párov koreňových stromov rozhodnite, či sú tieto koreňové stromy izomorfné. Ak sú, nájdite izomorfizmus, ak nie sú, nájdite invariant, ktorý jeden strom spĺňa a druhý nie.



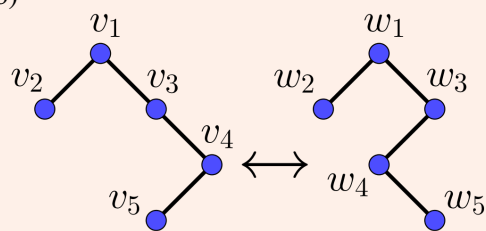
(c) Grafy z cvičenia 5.17 (c), brané ako koreňové stromy s koreňmi v_3 a w_1 .

Cvičenie 5.19 O každom z daných párov binárnych stromov rozhodnite, či sú izomorfné. Ak sú, nájdite izomorfizmus, ak nie sú, nájdite invariant, ktorý jeden strom spĺňa a druhý nie.

(a)



(b)

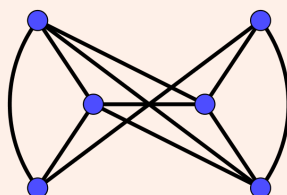


(c) Grafy z cvičenia 5.18 (b), brané ako binárne stromy.

Cvičenie 5.20 Nech Q_n je graf, ktorého množine vrcholov zodpovedajú všetky n -rozmerné binárne vektory. Dva jeho vrcholy sú spojené hranou práve vtedy, keď sa im zodpovedajúce vektory líšia práve v 1 bite.

- Koľko vrcholov a koľko hrán má graf Q_n pre dané $n \in \mathbb{N}$?
- Aké sú stupne vrcholov v grafe Q_n ?
- Nakreslite graf Q_n pre $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- Napíšte matice susednosti a incidencie grafu Q_n pre $n \in \{1, 2, 3\}$.
- Má Q_n hamiltonovský cyklus pre každé $n \in \mathbb{N}$?
- Aký priemer má graf Q_n pre dané $n \in \mathbb{N}$?

Cvičenie 5.21 Dokážte, že graf na obrázku nižšie nie je rovinný.



Cvičenie 5.22 Dokážte, že každý strom je rovinný graf.

Cvičenie 5.23 Dokážte, že ak súvislý, obyčajný, rovinný graf G s v vrcholmi neobsahuje oblasť ohraničenú nepárnym cyklom, tak má maximálne $h = 2v - 4$ hrán.

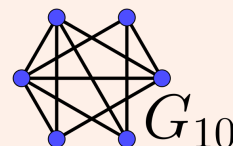
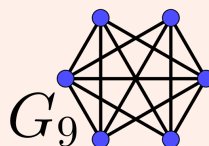
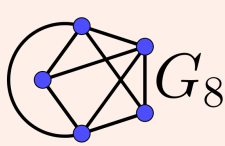
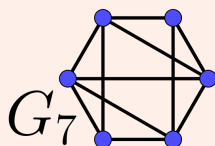
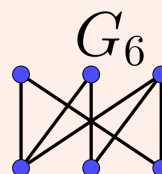
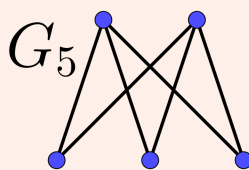
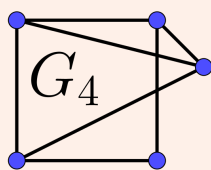
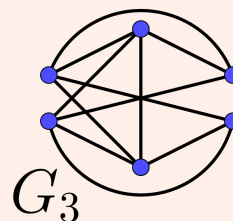
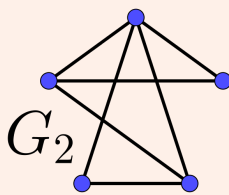
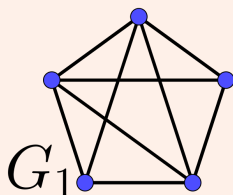
Cvičenie 5.24 Dokážte, že súvislý, rovinný, graf G s v vrcholmi, ktorý neobsahuje oblasť ohraničenú cyklom menším než C_4 , má maximálne $h = 2v - 4$ hrán.

Cvičenie 5.25 Nakreslite obyčajný, súvislý, rovinný graf s v vrcholmi, ktorý má všetky oblasti ohraničené cyklami C_3 pre

- | | | |
|-------------|-------------|-------------|
| (a) $v = 3$ | (c) $v = 5$ | (e) $v = 7$ |
| (b) $v = 4$ | (d) $v = 6$ | (f) $v = 8$ |

Cvičenie 5.26 Nakreslite obyčajný, súvislý, rovinný graf s $v = 7$ vrcholmi, ktorého všetky oblasti sú ohraničené cyklami C_4 . Koľko má tento graf hrán? ■

Cvičenie 5.27 Pre každý z uvedených grafov rozhodnite, či je rovinný. Ak je rovinný, nakreslite ho tak, aby sa jeho hrany nepretínali. Ak rovinný nie je, tak to dokažte. ■



Cvičenie 5.28 Nakreslite obyčajný, súvislý, rovinný graf s $v = 5$ vrcholmi, ktorý má $h = 6$ hrán. Koľko má tento graf oblastí a akými cyklami sú tieto oblasti ohraničené? ■

Cvičenie 5.29 Dokážte, že pre každé prirodzené číslo $v \geq 4$ existuje rovinný graf s v vrcholmi, ktorý má všetky oblasti ohraničené cyklami C_4 . ■