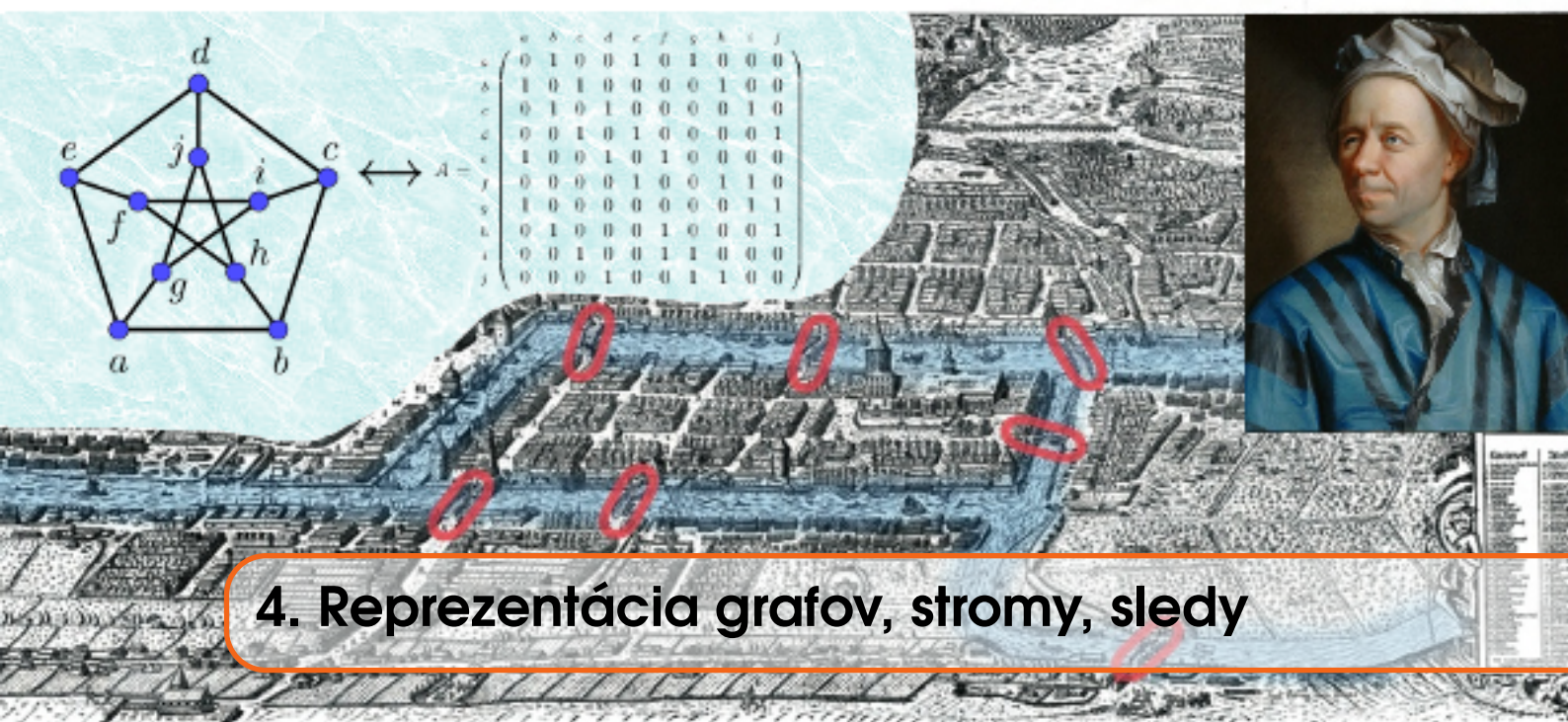




4. Reprezentácia grafov, stromy, sledy

4.1 Reprezentácia grafov

V predošlej kapitole sme grafy reprezentovali ich diagramami, t. j. nakreslili sme si obrázok grafu ako v príklade 3.1, alebo sme ich zadali vymenovaním ich vrcholov a hrán ako v príklade 3.2. Pri praktických aplikáciach, kde potrebujeme analyzovať grafy a pracovať s nimi, s týmto prístupom nevystačíme. Potrebujeme preto formálnejší a predovšetkým efektívnejší spôsob reprezentácie grafov. Ukážeme si dva spôsoby reprezentácie grafov. Prvým bude matica susednosti a druhým matica incidencie grafov.

4.1.1 Matica susednosti

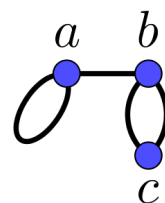
Jeden zo spôsobov reprezentácie grafov je popísať graf pomocou jeho matice susednosti.

Definícia 4.1.1 — Matica susednosti grafu. Nech G je graf s množinou vrcholov V , ktorej veľkosť je $|V| = n$. Matica susednosti grafu G bude matica s rozmermi $n \times n$, ktorej riadky a stĺpce zodpovedajú vrcholom grafu G pri pevne zvolenom usporiadaní. Číslo a_{ij} , v i . riadku a j . stĺpci matice susednosti, vyjadruje počet hrán, ktoré spájajú vrcholy i a j v grafe G .

Predošlú definíciu si ilustrujeme na jednoduchom príklade.

■ Príklad 4.1

Majme graf G , ktorý vidíme na obrázku vpravo. Graf G má 3 vrcholy, a preto matica susednosti grafu G bude mať rozmery 3×3 . Zvolíme si nejaké pevné usporiadanie vrcholov, napríklad lexikografické^a. Riadky a stĺpce matice budú zodpovedať vrcholom grafu G pri zvolenom usporiadaní. Prvky a_{ij} matice susednosti budú prirodzené čísla vyjadrujúce počet hrán idujúcich s vrcholmi i a j v grafe G . Ak sa jedná o slučky, čiže $i = j$, tak každá slučka inciduje s vrcholom dvakrát. Každá



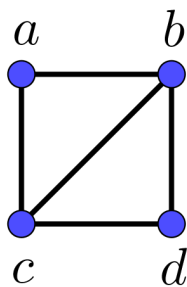
^apodľa abecedy

hrana prispeje do súčtu prvkov matice susednosti číslom 2. Preto matica susednosti grafu G bude

$$\begin{matrix} & a & b & c \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

■

My sa väčšinou budeme zaoberať len obyčajnými grafmi. Pre maticu susednosti obyčajného grafu bude platiť $a_{ii} = 0$ a pre $i \neq j$ bude $a_{ij} \in \{0, 1\}$. Budeme skúmať vlastnosti matíc susednosti obyčajných grafov a to, čo a akým spôsobom sa z nich dá zistiť.



Pozrime sa teraz na obyčajný graf, ktorý máme na obrázku vľavo. Matica

susednosti tohto grafu je $A = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$

Čo vieme povedať o maticiach $A, A^2, A^3, \dots, A^n, \dots$? Čo predstavujú prvky týchto matíc. Dá sa ukázať, že pre obyčajný graf G prvok a_{ij} v matici A^n predstavuje počet rôznych sledov dĺžky n z vrcholu i do vrcholu j .

Ilustrujeme si to na príklade vyššie uvedeného grafu.

$$A^2 = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & a & b & c & d \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Prvok a_{ij} matice A^2 v i . riadku a j . stĺpci, je počet rôznych sledov dĺžky 2 z vrcholu i do vrcholu j . Lahko to môžeme overiť na obrázku. Okrem toho sú v A^2 na hlavnej diagonále stupne príslušných vrcholov, čo v obyčajnom grafe zodpovedá počtu sledov dĺžky 2 z vrcholu i do vrcholu i . Napríklad číslo v b -tom riadku a c -tom stĺpci matice A^2 vypočítame ako skalárny súčin

$$\begin{matrix} & a & & d \\ b & (1 & 0 & 1 & 1) \end{matrix} \cdot \begin{matrix} c \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{matrix} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 2$$

Do celkového súčtu 2 sa započíta 1 len v prípade, že v b -tom riadku a i -tom stĺpci a i -tom riadku a c -tom stĺpci matice A bolo číslo 1. To znamená, že existuje taký vrchol i , že medzi vrcholmi b a i aj medzi vrcholmi i a c je hrana. Takže z vrcholu b sa vieme do vrcholu c dostať cez vrchol i , čo je sled dĺžky 2. V našom príklade je vrchol i buď vrchol a , alebo vrchol d , čo zodpovedá dvom sledom dĺžky 2 medzi vrcholmi b a c .

Teraz tvrdenie o n . mocnине matice susednosti grafu vyslovíme a dokážeme nasledujúcu vetu.

Veta 4.1.1 — O matici susednosti. Nech G je obyčajný graf a A je jeho matica susednosti. Potom číslo v riadku i a stĺpci j matice A^n sa rovná počtu rôznych sledov dĺžky n z vrcholu i do vrcholu j v grafe G .

Dôkaz: budeme robiť indukciou vzhľadom na číslo n .

1. **Overenie pre $n = 1$:** pre $n = 1$ je $A^1 = A$ matica susednosti grafu G . Ak číslo v i -tom riadku a j -tom stĺpci tejto matice je 1, tak existuje hrana, čiže sled dĺžky 1 medzi vrcholmi i a j a tvrdenie platí.
2. **Indukčný krok:** predpokladajme, že uvedené tvrdenie platí pre nejaké číslo n . Potom dokážeme, že musí platiť aj pre číslo $(n + 1)$.

$$A^{n+1} = A^n \cdot A$$

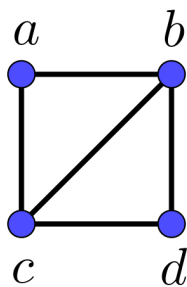
Prvok v i -tom riadku a k -tom stĺpci matice A^{n+1} dostaneme ako skalárny súčin i -tého riadku matice A^n a k -tého stĺpca matice A

$$\begin{array}{c} \textit{i-tý riadok matice } A^n \\ (s_1, s_2, \dots, s_j, \dots, s_m) \end{array} \cdot \begin{array}{c} \textit{k-tý stĺpec matice } A \\ \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_j \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} \end{array} = s_1 \cdot t_1 + s_2 \cdot t_2 + \dots + s_j \cdot t_j + \dots + s_m \cdot t_m.$$

Podľa indukčného predpokladu predstavuje číslo s_j počet sledov dĺžky n z vrcholu i do vrcholu j v grafe G . Ďalej vieme, že $t_j \in \{0, 1\}$ a platí $t_j = 1$ práve vtedy, ak v grafe G existuje hrana medzi vrcholmi j a k . Každý sled dĺžky $(n + 1)$, z vrcholu i do vrcholu k v grafe G , má ako predposledný vrchol j práve vtedy, ak existuje sled dĺžky n medzi vrcholmi i a j a ak existuje hrana medzi vrcholmi j a k , čiže ak $s_j \neq 0$ a $t_j = 1$. V grafe G existuje preto práve $s_j \cdot t_j$ sledov dĺžky $(n + 1)$ z vrcholu i do vrcholu k , ktoré majú ako predposledný vrchol j . Uvedený skalárny súčin je vlastne súčet počtu všetkých sledov dĺžky $(n + 1)$ z vrcholu i do vrcholu k v grafe G , ktorých predposledný vrchol je j , cez všetky vrcholy j susediace s vrcholom k . To sú všetky sledy dĺžky $(n + 1)$ z vrcholu i do vrcholu k v grafe G . Q.E.D.

Tvrdenie z predošlej vety si ilustrujeme na nasledujúcom príklade.

■ Príklad 4.2



Vráťme sa teraz ku grafu, s ktorým sme sa zaoberali pred sformulovaním vety 4.1.1. Jeho matica susednosti a štvrtá mocnina matice susednosti sú uvedené nižšie. Z matice A^4 napríklad vidíme, že počet rôznych sledov dĺžky 4 z vrcholu a do vrcholu a je 10.

$$A = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 10 & 9 & 9 & 10 \\ 9 & 15 & 14 & 9 \\ 9 & 14 & 15 & 9 \\ 10 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Sú to sledy

(a, b, a, b, a)	(a, b, c, b, a)	(a, b, d, c, a)	(a, c, a, c, a)	(a, c, d, b, a)
(a, b, a, c, a)	(a, b, d, b, a)	(a, c, a, b, a)	(a, c, b, c, a)	(a, c, d, c, a)

■

4.1.2 Matica incidencie

Ďalším spôsobom reprezentácie grafov je matica incidencie.

Definícia 4.1.2 — Matica incidencie grafu. Nech G je graf s množinou vrcholov V , množinou hrán E a $|V| = m$, $|E| = n$. Matica incidencie grafu G bude matica s rozmermi $m \times n$, ktorej riadky zodpovedajú vrcholom a stĺpce hranám grafu G , oboje pri pevne zvolenom usporiadaní. Pre všetky čísla a_{ij} , v i -tom riadku a j -tom stĺpci matice incidencie, platí $a_{ij} \in \{0, 1, 2\}$. Číslo a_{ij} vyjadruje počet incidencií vrchola i s hranou j v grafe G .

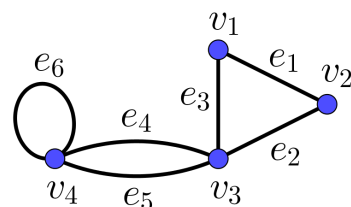
■ Príklad 4.3

Majme graf G , ktorý vidíme na obrázku vpravo. Jeho matica

incidencie bude

$$\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Hrana e_6 je slučka, čo v matici incidencie spoznáme podľa toho, že v príslušnom stĺpci je namiesto dvoch jednotiek len jedna dvojka.

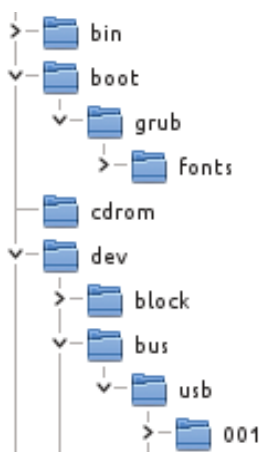


■

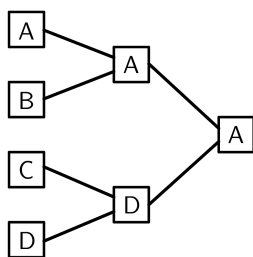
Matica incidencie sa obvykle používa pre obyčajné grafy, čiže grafy bez slučiek a násobných hrán. Preto pozostáva väčšinou len z núl a jednotiek a ľahko sa s ňou narába. Stupeň vrcholu v_i sa z matice incidencie vypočíta ako súčet čísel v riadku i .

4.2 Stromy

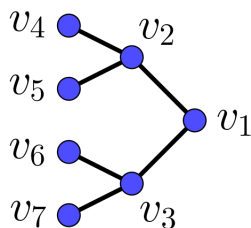
Stromy sú z hľadiska praktických aplikácií jednou z najdôležitejších podtried grafov a majú široké uplatnenie v informatike. Prakticky všetky hierarchicky usporiadané štruktúry dát sa reprezentujú



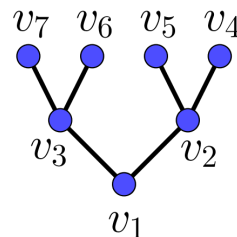
pomocou stromov. Každý sa už určite stretol so stromami v podobe rodokmeňov, obrázkami hierarchicky usporiadaných štruktúr rôznych inštitúcií, „pavúkov“ športových turnajov atď. Informatikom je určite veľmi dobre známy pojem „adresárový strom“ (directory tree). Na obrázku vľavo je zobrazená časť adresárového stromu linuxového filesystému. Avšak nielen adresárová štruktúra sa v informatike reprezentuje pomocou stromov. Aj dáta spracovávané v databázach a akékoľvek iné dáta, usporiadané hierarchicky, sa reprezentujú pomocou stromov. Ako si ukážeme neskôr, stromová štruktúra dát nám umožňuje rýchle prehľadávanie a triedenie. Športovcom bude bližší nasledujúci príklad. Predstavme si tenisový turnaj, na ktorom do semifinále postúpili štyria hráči A, B, C a D. V semifinále vyhral hráč A nad hráčom B a hráč D porazil hráča C. Vo finále potom hráč A vyhral nad hráčom D a stal sa víťazom turnaja. Táto situácia sa dá reprezentovať „pavúkom“ z obrázku 4.1.



Obr. 4.1: „Pavúk“ tenisového turnaja



Obr. 4.2: Grafová reprezentácia obrázku 4.1



Obr. 4.3: Koreňová podoba stromu z obrázku 4.2

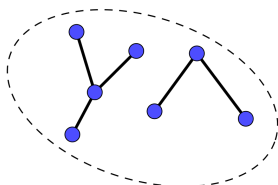
Tento sa dá zasa reprezentovať grafom, ktorý vidíme na obrázku 4.2. Napokon, ak tento graf otočíme o 90° , dostaneme tzv. koreňovú podobu tohto stromu, zobrazenú na obrázku 4.3. Takto nakreslený graf sa skutočne podobá na strom, odkiaľ pochádza aj jeho názov. Vrchol v_1 predstavuje „koreň“ stromu, hrany predstavujú jeho vetvy a vrcholy v_4 , v_5 , v_6 a v_7 sú jeho „listy“.

V predošlých motivačných príkladoch sme si uviedli niekoľko príkladov stromov a teraz si formálne definujeme pojem strom a ukážeme si niektoré vlastnosti, ktoré stromy majú.

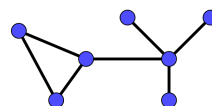
Definícia 4.2.1 — Strom. Súvislý a acyklický graf sa nazýva strom.

Predošlá definícia je veľmi stručná a jednoduchá. Pojem strom sa dá zadefinovať aj aspoň troma ďalšími spôsobmi a v niektorých zdrojoch sa môžeme stretnúť s jeho alternatívnymi definíciami. Závisí to predovšetkým od toho, čo autor sleduje a ktorá z definícií jeho cieľom najviac vyhovuje. My si najskôr ukážeme príklad grafov, ktoré nie sú stromy, potom príklad grafu, ktorý je strom. Nakoniec si vo vete 4.2.7 ukážeme štyri alternatívne definície pojmu strom a dokážeme, že sú navzájom ekvivalentné.

■ **Príklad 4.4** Grafy na obrázkoch 4.4 a 4.5 nie sú stromy.

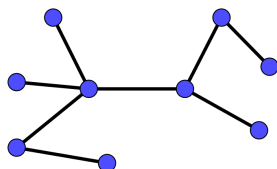


Obr. 4.4: Graf, ktorý nie je strom



Obr. 4.5: Graf, ktorý nie je strom

Graf na obrázku 4.4 síce nemá cyklus, ale nie je súvislý. Pozostáva z dvoch komponentov. Graf na obrázku 4.5 síce je súvislý, ale obsahuje cyklus C_3 . Graf na obrázku 4.6 je strom. Je súvislý a neobsahuje cyklus.



Obr. 4.6: Graf, ktorý je strom

■

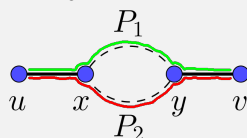
Ak sa pozrieme na definície kostry (str. 62) a stromu (str. 73), tak zistíme, že stromy sú grafy, ktoré sú sami sebe kosterou. Predtým, ako sformulujeme sľúbenú vetu o stromoch, dokážeme šesť

pomocných tvrdení, ktoré budeme využívať v jej dôkaze. Tým zdĺhavý dôkaz vety o stromoch rozložíme na šesť dôkazov jednoduchých tvrdení.

Lema 4.2.1 Ak je súvislý graf $G = (V, E)$ acyklický, tak je obyčajný a medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi $u, v \in V$ existuje práve jedna cesta.

Dôkaz: rozdelíme do troch bodov.

1. Graf G je súvislý, čiže medzi ľubovoľnými dvoma jeho vrcholmi existuje cesta.
2. Graf G je acyklický, a preto nemôže obsahovať slučky a násobné hrany. Dôkaz je triviálny a robí sa sporom. Ak by graf G obsahoval slučku, tak dostávame spor s tým, že je acyklický. Slučka je totiž súvislý pravidelný graf stupňa 2, takže podľa definície 3.4.2 je to cyklus dĺžky 1. A ak by v grafe G existovali medzi vrcholmi u a v násobné hrany h_1 a h_2 , tak tieto by tvorili cyklus dĺžky 2 (u, h_1, v, h_2) , čím opäť dostávame spor s tým, že graf G je acyklický. Tým je dokázané, že acyklický graf je obyčajný.
3. Potrebujeme už len dokázať, že v grafe $G = (V, E)$ medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi neexistuje viac než jedna cesta. Toto sa tiež dokáže sporom. Nech $u, v \in V$ a predpokladajme, že medzi týmito vrcholmi existujú dve rôzne cesty P_1 a P_2 . Poďme po cestách



P_1 a P_2 z vrcholu u do vrcholu v . Nech x je prvý vrchol, ktorý je ešte spoločný obom cestám, ale už nasledujúce vrcholy ciest P_1 a P_2 sú rôzne. Nech y je prvý vrchol cesty P_1 za vrcholom x , ktorý

je zároveň aj vrcholom cesty P_2 . Situácia je zobrazená na obrázku vyššie, pričom cesty P_1 a P_2 sú zvýraznené zelenou a červenou farbou. Keďže sme predpokladali, že cesty P_1 a P_2 sú rôzne, musia také vrcholy x a y existovať. Ale potom, ak spojíme úseky ciest P_1 a P_2 medzi vrcholmi x a y , tak dostaneme cyklus, čo je spor s tým, že graf G je acyklický.

V predošlých troch bodoch sme dokázali, že súvislý acyklický graf G je obyčajný a medzi ľubovoľnými dvoma jeho vrcholmi existuje práve jedna cesta. Q.E.D.

V druhom pomocnom tvrdení dokážeme opačnú implikáciu.

Lema 4.2.2 Ak v obyčajnom grafe $G = (V, E)$ existuje medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi $u, v \in V$ práve jedna cesta, tak graf G je súvislý a acyklický.

Dôkaz: je triviálny a v podstate ten istý ako dôkaz lemy 4.2.1. Rozdelíme ho do dvoch bodov.

1. V grafe G existuje medzi ľubovoľnými dvoma jeho vrcholmi (práve jedna) cesta, takže graf G je súvislý.
2. V grafe G existuje medzi ľubovoľnými dvoma jeho vrcholmi práve jedna cesta, a preto graf G nemôže obsahovať cyklus na viac než 1 vrchole. Dôkaz tohto tvrdenia sa robí sporom a je ten istý ako dôkaz tretieho bodu z lemy 4.2.1. Jediný cyklus, ktorý by graf G mohol obsahovať, je slučka. Ale graf G je obyčajný, takže slučky a násobné hrany neobsahuje.

V predošlých dvoch bodoch sme dokázali, že ak v obyčajnom grafe $G = (V, E)$ existuje medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi $u, v \in V$ práve jedna cesta, tak graf G je súvislý a acyklický. Q.E.D.

Tretie pomocné tvrdenie bude len obmenenou implikáciou lemy 3.4.4, takže ho vlastne už máme dokázané a len ho sformulujeme inými slovami.

Lema 4.2.3 Ak je graf G acyklický, tak každá jeho hrana je most.

Dôkaz: tvrdenie tejto lemy je obmenenou implikáciou tvrdenia lemy 3.4.4. Preto je táto lema ekvivalentná s lemov 3.4.4, a tým je dokázaná. Q.E.D.

Nasledujúce tvrdenie je veľmi dôležité a často sa v súvislosti so stromami využíva.

Lema 4.2.4 Ak je graf G strom na v vrchoch, tak má $h = (v - 1)$ hrán.

Dôkaz: graf G je strom, t. j. je to súvislý, obyčajný graf a podľa lemy 4.2.3 je každá jeho hrana most. Tvrdenie budeme dokazovať matematickou indukciou vzhľadom na počet vrcholov v .

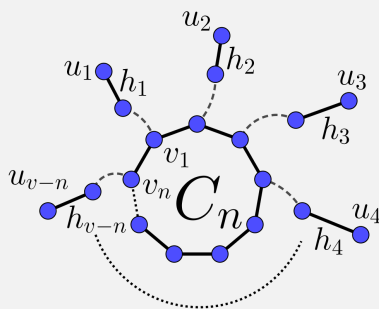
1. Ak obyčajný graf G má $v = 1$ vrchol, tak musí mať $h = 0$ hrán a tvrdenie platí.
2. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre grafy, ktoré majú najviac $v - 1$ vrcholov. Potom dokážeme, že tvrdenie platí aj pre grafy, ktoré majú v vrcholov.
Máme obyčajný, súvislý a acyklický graf, ktorý má v vrcholov. Podľa lemy 4.2.3 je každá hrana takého grafu mostom. Ak teda vynecháme ľubovoľnú jednu hranu grafu G , tak sa nám tento rozpadne na dva komponenty. Jeden komponent bude mať $v_1 < v$ vrcholov, druhý bude mať $v_2 < v$ vrcholov a pre oba platí indukčný predpoklad, čiže $h_1 = (v_1 - 1)$ a $h_2 = (v_2 - 1)$. Keďže $v_1 + v_2 = v$ a $h_1 + h_2 = h - 1$, dostávame

$$h = v_1 - 1 + v_2 - 1 + 1 = v_1 + v_2 - 1 = v - 1 \quad \text{Q.E.D.}$$

Posledné dve pomocné tvrdenia tiež hovoria o počte vrcholov stromov a tiež sa často využívajú v mnohých iných tvrdeniach týkajúcich sa stromov a ich vlastností.

Lema 4.2.5 Ak je graf G súvislý, má v vrcholov a $(v - 1)$ hrán, tak je acyklický.

Dôkaz: budeme robiť sporom. Predpokladajme, že v grafe G existuje nejaký cyklus C_n s vrcholmi $\{v_1, \dots, v_n\}$. Tých vrcholov grafu G , ktoré neležia na cykle C_n , je $(v - n)$ a množinu týchto vrcholov si označme $A = \{u_1, u_2, \dots, u_{v-n}\}$. Pre každý vrchol $u_i \in A$ zostrojme najkratšiu cestu vedúcu z u_i do niektorého vrcholu cyklu C_n a označme si h_i hranu tejto cesty, ktorá inciduje s vrcholom u_i . Je zrejmé, že pre $i \neq j$ platí $h_i \neq h_j$. Takže počet hrán grafu G musí byť aspoň $h = n + (v - n) = v$ (počet hrán cyklu C_n a všetkých hrán h_i), čo je spor s predpokladom, že hrán je $(v - 1)$. Takže predpoklad existencie cyklu C_n bol nesprávny a graf G je acyklický. Q.E.D.



Lema 4.2.6 Ak je graf G acyklický, má v vrcholov a $(v - 1)$ hrán, tak je súvislý.

Dôkaz: budeme robiť sporom. Predpokladajme, že graf G nie je súvislý a pozostáva z $n \geq 2$ komponentov $G_1, \dots, G_n$, ktorých počty vrcholov sú $v_1, \dots, v_n$. Graf G je acyklický, takže každý komponent je strom a v leme 4.2.4 sme dokázali, že pre každé i : $h_i = v_i - 1$. Preto pre počet vrcholov grafu G musí platiť

$$v = \sum_{i=1}^n v_i = \sum_{i=1}^n (h_i + 1) = \left(\sum_{i=1}^n h_i \right) + n = v - 1 + n > v - 1 + 1 = v$$

Tým sme dostali spor s predpokladom, že hrán je $(v - 1)$. Takže graf G musí byť súvislý. Q.E.D.

Teraz si už sformulujeme vetu o stromoch.

Veta 4.2.7 — Veta o stromoch. Pre obyčajný graf G sú nasledujúce štyri tvrdenia ekvivalentné

- A) Graf G je strom (v zmysle definície 4.2.1).
- B) Graf G je obyčajný a ľubovoľné jeho dva vrcholy sú spojené práve jednou cestou.
- C) Graf G je súvislý, má v vrcholov a $h = (v - 1)$ hrán.
- D) Graf G je acyklický, má v vrcholov a $h = (v - 1)$ hrán.

Dôkaz: máme dokázať ekvivalenciu štyroch tvrdení. Budeme to dokazovať ako štyri implikácie $A) \Rightarrow B) \Rightarrow C) \Rightarrow D) \Rightarrow A)$. Tým dokážeme, že ľubovoľné dve z tvrdení A), B), C), D) sú navzájom ekvivalentné.

- ▷ $A) \Rightarrow B)$: **Ak graf G je strom, tak je obyčajný a ľubovoľné dva jeho vrcholy sú spojené práve jednou cestou.** Táto implikácia je zhodná s lemov 4.2.1. Q.E.D.
- ▷ $B) \Rightarrow C)$: **Ak je graf G obyčajný a ľubovoľné jeho dva vrcholy sú spojené práve jednou cestou, tak je súvislý, má v vrcholov a $h = (v - 1)$ hrán.** Podľa lemy 4.2.2 je graf G za daných podmienok súvislý a acyklický, t.j. strom. A v leme 4.2.4 je dokázané, že strom na v vrcholoch má $h = (v - 1)$ hrán. Q.E.D.
- ▷ $C) \Rightarrow D)$: **Ak graf G je súvislý, má v vrcholov a $h = (v - 1)$ hrán, tak je acyklický a má v vrcholov a $h = (v - 1)$ hrán.** V tomto prípade stačí dokázať, že za daných podmienok je graf G acyklický. To je tvrdenie lemy 4.2.5. Q.E.D.
- ▷ $D) \Rightarrow A)$: **Ak graf G je acyklický, má v vrcholov a $h = (v - 1)$ hrán, tak je strom.** V tomto prípade nám stačí dokázať, že za daných podmienok je graf G súvislý, čo je dokázané v leme 4.2.6. Q.E.D.

Veta 4.2.7 nám nielen hovorí o tom, že uvedené štyri tvrdenia, možné definície pojmu strom, sú navzájom ekvivalentné, ale aj nám poskytuje tvrdenia o vlastnostiach stromov. Vyplýva z nej, že ak graf G je strom, tak počet jeho vrcholov je o 1 väčší než počet jeho hrán, alebo inak povedané, počet jeho hrán je o 1 menší než počet jeho vrcholov.

Okrem toho, ako už bolo v dôkaze vety 4.2.7 (a v leme 4.2.3) spomenuté, ak graf G je strom, tak každá jeho hrana je most. Toto tvrdenie je priamym dôsledkom definície 4.2.1 a lemy 3.4.4. Uvedieme si ešte jednu vetu o vlastnostiach stromov.

Veta 4.2.8 — O vrcholoch stromov. Každý strom s aspoň dvoma vrcholmi má aspoň dva vrcholy stupňa 1.

Dôkaz: nech graf G je strom, ktorý má v vrcholov, označme si ich $\{u_1, u_2, \dots, u_v\}$, a h hrán. Potom podľa vety 3.2.1 a vety 4.2.7 platí

$$\sum_{i=1}^v \text{st}(u_i) = 2h = 2(v - 1) = 2v - 2$$

Pre všetky i musí platiť $\text{st}(u_i) \geq 1$, pretože stupeň žiadneho vrcholu, v strome s aspoň dvoma vrcholmi, nemôže byť 0. Avšak, ak by aspoň $(v - 1)$ vrcholov malo stupeň 2 alebo viac, tak by sme dostali spor, pretože uvedená suma by bola najmenej $2(v - 1) + 1 = 2v - 1$. Takže strom s aspoň dvoma vrcholmi musí mať aspoň dva vrcholy stupňa 1. Q.E.D.

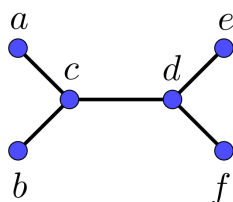
Kde sú stromy, tam je aj les a tam sú aj listy. Takže túto časť pre úplnosť zakončíme ďalšími dvoma definíciami.

Definícia 4.2.2 — Les. Graf G , ktorého všetky komponenty sú stromy, sa nazýva les.

Napríklad graf z obrázku 4.4 (str. 73) nie je strom, ale je to les. Tento graf pozostáva z dvoch komponentov, ktoré sú oba stromy.

Definícia 4.2.3 — List. List je vrchol stromu, ktorého stupeň je 1.

■ Príklad 4.5



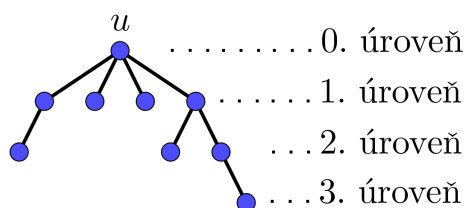
Graf na obrázku vľavo je strom so 4 listami. Sú to vrcholy a, b, e, f , ktoré majú stupeň 1.

■

4.3 Koreňové stromy

Koreňové stromy sú v podstate normálne stromy. Rozdiel spočíva len v tom, že pri koreňových stromoch si vyberieme jeden z vrcholov a ten prehlásime za *koreň*. Vo všetkých aplikáciach, v ktorých pomocou stromov reprezentujeme nejaké hierarchicky usporiadané dáta, sa používajú práve *koreňové stromy*.

Definícia 4.3.1 — Koreňový strom, koreň. Koreňový strom je strom s pevne vybraným vrcholom u , ktorý sa nazýva koreň.



Pri kreslení koreňových stromov sa obvykle umiestňuje koreň buď nahor, alebo nadol, je to vecou dohody. My budeme koreňové stromy kresliť takmer vždy s koreňom hore. Na obrázku vľavo máme príklad koreňového stromu s tromi úrovňami vrcholov. Koreň stromu sa vždy považuje za 0. úroveň.

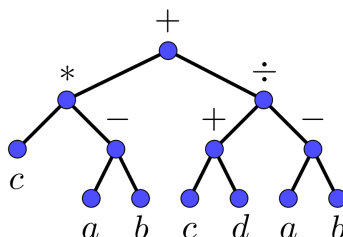
Obr. 4.7: Koreňový strom s výškou 3

Definícia 4.3.2 — Úroveň vrcholu, výška koreňového stromu. Ak T je koreňový strom, u jeho koreň a v jeho ľubovoľný vrchol, tak úroveň vrcholu v je jeho vzdialenosť od koreňa u . Výška koreňového stromu je maximálna úroveň, ktorú dosahujú jeho vrcholy.

Na obrázku 4.7 máme príklad koreňového stromu, ktorý má 3 úrovne vrcholov a výšku 3.

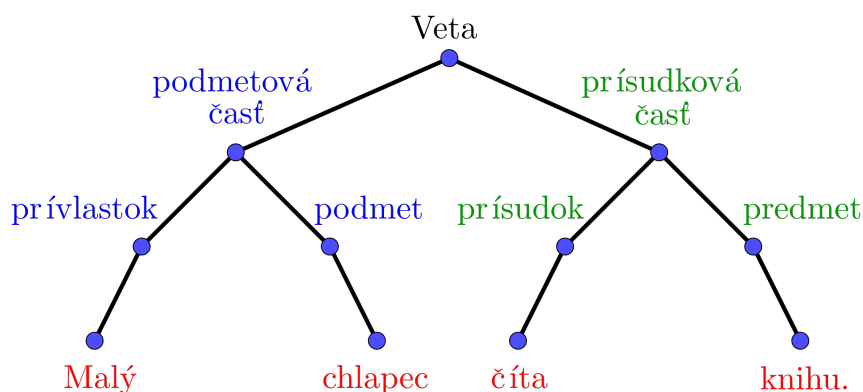
■ Príklad 4.6 Pomocou koreňových stromov môžeme napríklad reprezentovať algebraické výrazy. Strom na obrázku nižšie reprezentuje výraz

$$c * (a - b) + (c + d) \div (a - b)$$



■

■ **Príklad 4.7** Alebo môžeme koreňové stromy aplikovať na vetný rozbor vety „Malý chlapec číta knihu.“ tak, ako to máme zobrazené na obrázku nižšie.



Teraz si definujeme terminológiu používanú v súvislosti s koreňovými stromami.

4.3.1 Terminológia koreňových stromov

Najskôr si uvedieme obsahlu definíciu a potom si nové pojmy ilustrujeme na príklade.

Definícia 4.3.3 — Terminológia koreňových stromov. Nech T je koreňový strom s koreňom v_0 a vrcholmi x, y, z a všeobecne v_i . Ďalej nech $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$ je cesta z vrcholu v_0 do vrcholu v_n . Potom

- vrchol v_{n-1} sa nazýva *otec* (alebo *rodič*) vrcholu v_n ,
- vrcholy $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ sa nazývajú *predkovia* vrcholu v_n ,
- vrchol v_n sa nazýva *syn* (alebo *dieťa*) vrcholu v_{n-1} ,
- ak vrchol x je predkom vrcholu y , tak vrchol y sa nazýva *potomok* vrcholu x ,
- ak vrcholy x a y sú deti vrcholu z , tak sa vrcholy x a y nazývajú *súrodenci*,
- vrchol, ktorý nemá synov, sa nazýva *koncový vrchol*.
- vrchol, ktorý nie je koncový, sa nazýva *vnútorný vrchol*,
- podstrom* s koreňom x stromu T je podgraf stromu T s množinou vrcholov

$$V = \{x\} \cup \{y; y \text{ je potomok } x\}$$

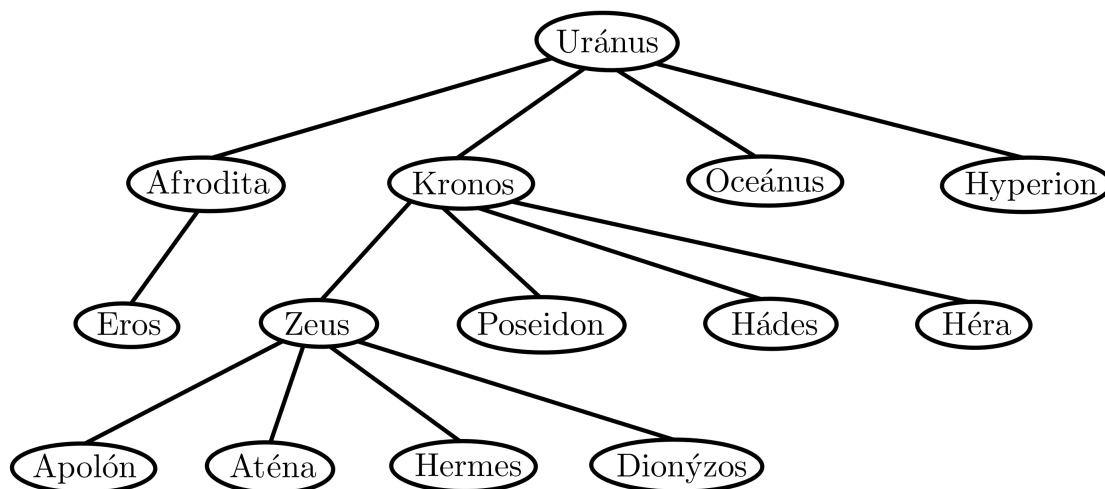
a s množinou hrán

$$E = \{e; e \text{ je hrana cesty z vrcholu } x \text{ do ľubovoľného vrcholu } z \text{ množiny } V\}$$

Ako vidíme, terminológia koreňových stromov je prevzatá z genealógie. To nie je náhoda, ale je to dôsledok toho, že rodokmene sa už po stáročia, omnoho skôr než vznikla teória grafov a pojmy ako strom a koreňový strom, reprezentujú a kreslia pomocou koreňových stromov.

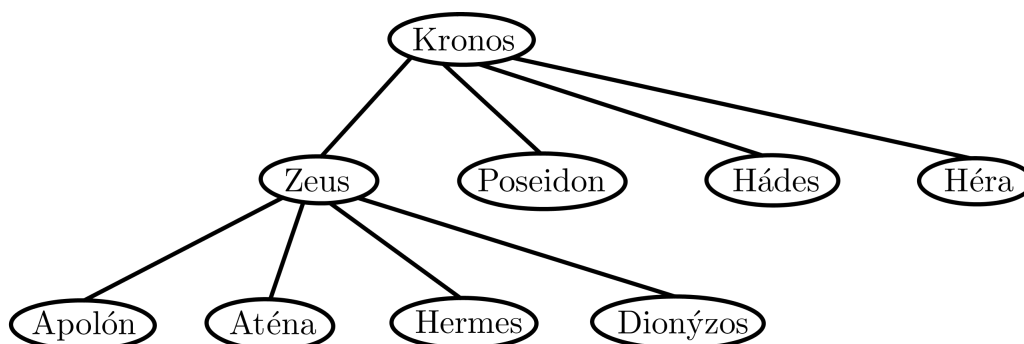
Poslednou kategóriou stromov, s ktorou sa na predmete *Diskrétna matematika* stretneme, sú binárne stromy. Predovšetkým v informatike sa s binárnymi a všeobecne s n -árnymi stromami stretávame veľmi často. Sú to frekventovane využívané dátové štruktúry používané napríklad na ukladanie a triedenie dát v databázach, súborových systémoch atď. Na predmete *Diskrétna matematika* sa budeme zaoberať len s binárnymi stromami.

■ **Príklad 4.8** Na obrázku 4.8 je zobrazená malá časť rodokmeňa starogréckych bohov.



Obr. 4.8: Časť rodokmeňa starogréckych bohov

- (a) Otec Apolóna je Zeus. Rodič Erosa je Afrodita.
- (b) Predkovia Hermesa sú Zeus, Kronos a Uránus.
- (c) Deti Uránusa sú Afrodita, Kronos, Oceánus a Hyperion.
- (d) Potomkovia Kronosa sú Zeus, Poseidon, Hádes, Héra, Apolón, Aténa, Hermes a Dionýzos.
- (e) Afrodita, Kronos, Oceánus a Hyperion sú súrodenci.
- (f) Koncové vrcholy sú Oceánus, Hyperion, Eros, Poseidon, Hádes, Héra, Apolón, Aténa, Hermes a Dionýzos.
- (g) Vnútorne vrcholy sú Uránus, Afrodita, Kronos a Zeus.
- (h) Podstrom s koreňom Kronos je zobrazený na obrázku 4.9.



Obr. 4.9: Podstrom s koreňom Kronos

■

4.4 Binárne stromy

Binárne stromy¹ sú veľmi dôležitá dátová štruktúra používaná v informatike. Je to v informatike najčastejšie využívaný typ stromov, používaný na

- prehľadávanie a triedenie dát,
- reprezentáciu dát (dôležitým príkladom je napr. Huffmanov kód).

Z hľadiska teórie grafov ide o usporiadané koreňové stromy. Binárne stromy sa často v literatúre berú ako orientované grafy. Keďže však ide o koreňové stromy, ktoré majú prirodzenú orientáciu, nie je nutné ešte naviac orientovať hrany grafu. My preto budeme binárne stromy brať ako neorientované grafy a v texte budeme binárne stromy označovať písmenami $B, B_1, B_2 \dots$

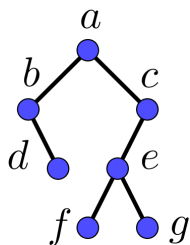
Binárne stromy sa dajú definovať viacerými spôsobmi. Najčastejšou je indukčná definícia (v informatickej terminológii rekurzívna definícia), ktorú si uvedieme ako prvú. Okrem toho sa dajú binárne stromy definovať aj explicitne, čo je síce názornejšie, avšak ťažkopádnejšie. Obe tieto definície sú ekvivalentné.

Definícia 4.4.1 — Binárny strom – indukčne. Binárny strom je buď prázdny strom, t.j. nemá žiadnu hranu ani vrchol, alebo je to koreňový strom s koreňom a usporiadanou dvojicou podstromov (B_1, B_2) , kde B_1 aj B_2 sú binárne stromy. Podstromu B_1 hovoríme *ľavý podstrom* a podstromu B_2 hovoríme *pravý podstrom*.

Uvedená definícia nám hovorí, že prázdny graf, čiže graf bez hrán a vrcholov, sa považuje za binárny strom. Prázdny graf sám osebe ale, v praktických aplikáciach, nie je príliš užitočný, takže sa radšej pozrieme na tie binárne stromy, ktoré sú neprázdne. Sú to také koreňové stromy, v ktorých každý vrchol má práve dva podstromy, tvoriace usporiadanú dvojicu (B_1, B_2) , kde B_1 aj B_2 sú binárne stromy. Až teraz vstupuje do hry aj prázdny graf, pretože jeden, alebo aj oba, z týchto podstromov, môžu byť aj prázdne grafy. Takže binárny strom by sme mohli definovať aj ako špeciálny koreňový strom. Bude to koreňový strom, v ktorom každý vrchol má 0, 1, alebo 2 synov a synov každého vrcholu rozlišujeme na ľavého a pravého. Z toho potom vyplýva explicitná definícia binárnych stromov.

Definícia 4.4.2 — Binárny strom – explicitne. Binárny strom je koreňový strom, v ktorom každý vrchol má buď 0 synov, alebo jedného syna, alebo má 2 synov. Synovia vrcholu tvoria usporiadanú dvojicu a označujú sa ako *ľavý syn* a *pravý syn* vrcholu. Aj v prípade, že vrchol má len jedného syna, rozlišujeme, či ide o ľavého, alebo pravého syna.

■ Príklad 4.9



Graf na obrázku vľavo je binárny strom. Jeho koreň je vrchol a , ktorý má ľavého syna b a pravého syna c . Vrchol b nemá ľavého syna, jeho ľavý podstrom je prázdny graf, a má pravého syna d . Vrchol c má ľavého syna e a nemá pravého syna, jeho pravý podstrom je prázdny graf. Podstrom s koreňom b je ľavý podstrom vrcholu a a podstrom s koreňom c je pravý podstrom vrcholu a .

Existuje viacero typov binárnych stromov. Sú to napríklad *úplný*, *kompletný*, *dokonalý* (*perfect binary tree*), *vyvážený*... My si zatiaľ definujeme len úplný a vyvážený binárny strom.

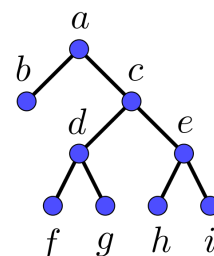
¹ Nesmieme si mýliť binárne stromy a tzv. B-stromy. B-strom (B -tree = *self-balancing tree*) je takisto stromová dátová štruktúra, používaná v informatike na efektívne ukladanie a triedenie veľkého množstva dát. B-stromy sú zovšeobecnením binárnych stromov a pri B-stromoch môže mať každý vrchol viac než 2 synov.

Definícia 4.4.3 — Úplný binárny strom. Binárny strom, v ktorom každý vrchol má 0 alebo 2 synov, sa nazýva úplný binárny strom.

P Strom z príkladu 4.9 nie je úplný, pretože vrcholy b a c majú len po jednom synovi. Vrchol b má len pravého a vrchol c má len ľavého syna.

■ Príklad 4.10

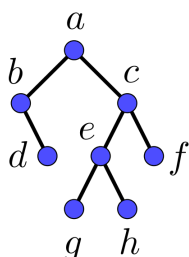
Graf na obrázku vpravo je úplný binárny strom. Každý jeho vrchol má buď dvoch synov, alebo nemá žiadneho syna.



Definícia 4.4.4 — Vyvážený binárny strom. Binárny strom, v ktorom sa výška ľavého a pravého podstromu každého vrcholu líši najviac o 1, sa nazýva vyvážený binárny strom.

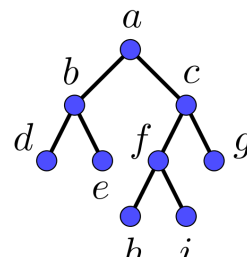
P Ani jeden zo stromov z príkladov 4.9 a 4.10 nie je vyvážený. V strome z príkladu 4.9 má vrchol c podstromy s výškou 2 a 0, a preto nemôže byť vyvážený. V strome z príkladu 4.10 má vrchol a podstromy s výškou 1 a 3, a preto nie je vyvážený.

■ Príklad 4.11



Graf na obrázku vľavo je vyvážený binárny strom. Podstromy každého jeho vrcholu sa líšia svojou výškou najviac o 1. Tento strom však nie je úplný, pretože vrchol b má len jedného syna.

Graf na obrázku vpravo je vyvážený, úplný binárny strom. Každý jeho vrchol má buď 0, alebo 2 synov a podstromy každého jeho vrcholu sa svojou výškou líšia najviac o 1.



Úplné a vyvážené binárne stromy sú dôležité pri efektívnom ukladaní a kódovaní dát. Napríklad Huffmanov kód (podkapitola 10.3, str. 204), s ktorým sa budeme zaoberať neskôr, je vlastne úplný binárny strom. Dôležitým výsledkom o úplných binárnych stromoch je nasledujúca veta.

Veta 4.4.1 — O počte koncových vrcholov úplných binárnych stromov. Nech B je úplný binárny strom, ktorý má n vnútorných vrcholov. Potom B má $(n + 1)$ koncových vrcholov a počet všetkých jeho vrcholov je $(2n + 1)$.

Dôkaz: v koreňovom strome je každý vrchol, okrem koreňa, syn nejakého vnútorného vrcholu. Úplný binárny strom B má n vnútorných vrcholov. Vnútorné vrcholy sú také, ktoré majú synov, a keďže strom je úplný, musia mať 2 synov. Takže v strome B musí byť $2n$ synov. Všetkých vrcholov stromu B musí byť $(2n + 1)$, čo je počet všetkých synov a koreňa stromu. Počet koncových vrcholov potom dostaneme, keď od celkového počtu vrcholov odpočítame vnútorné vrcholy. Koncových vrcholov je teda $(2n + 1) - n = (n + 1)$. Q.E.D.

Nasledujúca veta dáva do súvislosti počet koncových vrcholov binárneho stromu a jeho výšku (hĺbkou). Tvrdenie vety je intuitívne zrejmé a ľahko sa dá nahliadnuť aj priamym výpočtom počtu

koncových vrcholov stromu. My však túto vetu budeme dokazovať pomocou matematickej indukcie. Je to, v tomto prípade, matematicky „čistejší“ spôsob. Až za dôkazom vety ukážeme, ako by sa dalo tvrdenie vety nahliadnuť aj iným spôsobom.

Veta 4.4.2 — O súvislosti výšky a počtu koncových vrcholov binárnych stromov. Nech binárny strom B má výšku h a počet jeho koncových vrcholov je t . Potom platí nerovnosť

$$\log_2 t \leq h.$$

Dôkaz: uvedená nerovnosť sa ekvivalentne dá zapísať ako

$$t \leq 2^h.$$

Pomocou matematickej indukcie budeme dokazovať takto upravenú nerovnosť.

1. Pre $h = 0$ je binárny strom buď prázdny, alebo pozostáva z jedného izolovaného vrcholu. Takže $t \leq 1$ a platí $t \leq 1 = 2^0 = 2^h$.
2. Predpokladajme, že tvrdenie platí pre ľubovoľný binárny strom s výškou najviac $(h - 1)$. Potom ukážeme, že tvrdenie musí platiť aj pre ľubovoľný binárny strom s výškou h . Nech je vrchol a koreňom binárneho stromu B . Potom tento má 2 podstromy B_1 a B_2 . Označme si výšky a počet koncových vrcholov podstromov B_1 a B_2 ako h_1, t_1 a h_2, t_2 . Výšky podstromov B_1 a B_2 sú nanajvýš $(h - 1)$. Koncové vrcholy binárneho stromu B sú zjednotením koncových vrcholov podstromov B_1 a B_2 . Platí teda

$$h_1 \leq (h - 1), h_2 \leq (h - 1) \quad \text{a} \quad t_1 + t_2 = t.$$

Podľa uvedených nerovností pre podstromy B_1 a B_2 platí indukčný predpoklad, čiže platí $t_1 \leq 2^{h_1}$ a $t_2 \leq 2^{h_2}$. Odtiaľ dostávame

$$t = t_1 + t_2 \leq 2^{h_1} + 2^{h_2} \leq 2^{(h-1)} + 2^{(h-1)} = 2^h.$$

Q.E.D.

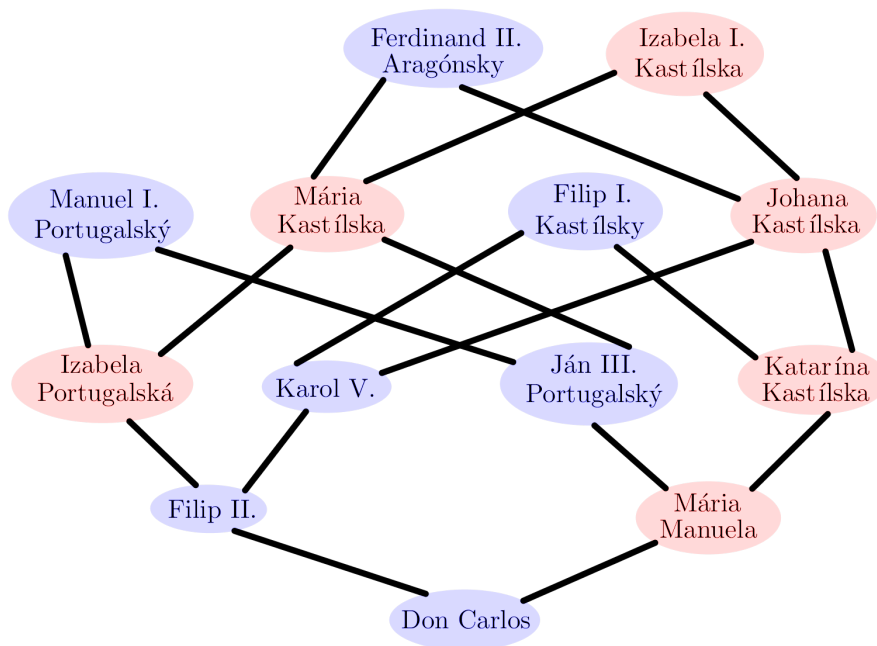
V binárnom strome môže mať každý vrchol najviac 2 synov. Ak máme binárny strom výšky h , tak je zrejmé, že počet jeho koncových vrcholov, listov, bude najväčší práve vtedy, keď všetky vrcholy na 0. až $(h - 1)$. úrovni budú mať práve 2 synov. Takýmto binárnym stromom sa hovorí *dokonalé* (perfect binary tree). Formálnu definíciu sme síce neuviedli a ani ju uvádzať nebudeme, ale uvedený neformálny popis jej zodpovedá. Napríklad rodokmeň nejakej konkrétnej osoby², ktorý zobrazuje všetkých predkov až po h . predchádzajúcu generáciu, je dokonalý binárny strom. Každý normálny jedinec má 2 rodičov, 4 starých rodičov, 8 prarodičov³ atď. Ak sa však pozrieme na rodokmeň Don Carlosa (1545-1568)⁴, pozri obrázok 4.10 (str. 83), tak vidíme, že mal 2 rodičov, 4 starých rodičov, ktorých tvorili dva súrodenecké páry, len 4 prarodičov a 6 praprarodičov namiesto obvyklých 16. V prípade incestu rodokmeň nie je strom, pretože obsahuje cykly.

Ako už bolo spomenuté pred vetou 4.4.2, tvrdenie vety je intuitívne zrejmé a dá sa nahliadnuť aj priamym výpočtom počtu listov stromu. Binárny strom výšky $h = 0$, môže mať maximálne $1 = 2^0$ list. Binárny strom výšky $h = 1$ bude mať maximálny počet koncových vrcholov práve vtedy, keď bude dokonalý. Čiže ak jeho koreň bude mať 2 synov. V každom ďalšom kroku bude počet koncových vrcholov maximálny práve vtedy, ak príslušný binárny strom bude dokonalý. Dokonalý binárny strom výšky h bude mať presne dvojnásobne viac koncových vrcholov, než dokonalý binárny strom výšky $(h - 1)$. Odtiaľ je potom zrejmé tvrdenie vety, čiže platnosť nerovnosti $t \leq 2^h$. Rovnosť sa nadobúda len pre dokonalé binárne stromy. Vzťah výšky binárneho stromu a počtu jeho koncových vrcholov si ilustrujeme na nasledujúcom príklade.

²Výnimky tvoria prípady incestu, pozri príklad Don Carlos.

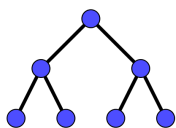
³Podľa zákona by toto malo platiť až po 4. generáciu predkov.

⁴Habsburg preslávený a zidealizovaný známou Verdiho operou *Don Carlos*.



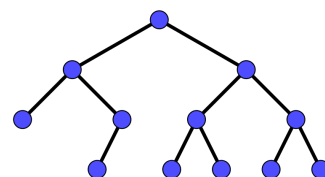
Obr. 4.10: Rodokmeň Don Carlosa – koreň „stromu“ je v tomto prípade umiestnený dole.

■ Príklad 4.12



Graf na obrázku vľavo je dokonalý binárny strom s výškou $h = 2$. Má $t = 4$ koncové vrcholy a vidíme, že v tomto prípade nastáva rovnosť $\log_2 t = \log_2 4 = 2 = h$.

Graf na obrázku vpravo je vyvážený binárny strom, ktorý nie je dokonalý. Jeho výška je $h = 3$ a počet jeho koncových vrcholov je $t = 6$. Platí preto ostrá nerovnosť $\log_2 t = \log_2 6 < 3 = h$.



■

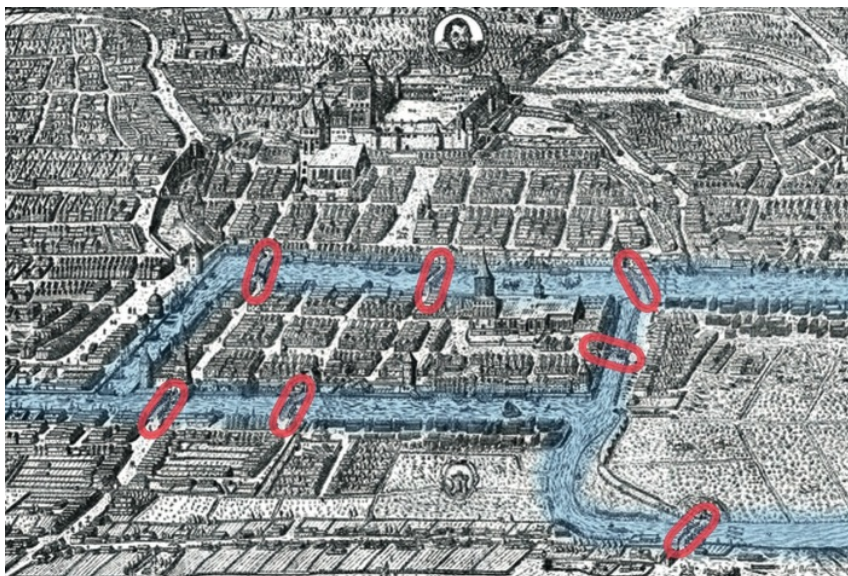
4.5 Eulerovské ťahy

V časti 3.1 sme už spomenuli, že počiatky teórie grafov sa datujú do začiatku 18. storočia a sú spojené so žánrom, ktorému dnes hovoríme „zábavná“, alebo „rekreačná“ matematika. Prvý problém vtedy ešte neexistujúcej teórie grafov bol problém Königsbergských mostov. Tento problém vznikol ako zábavný hlavolam, ale ako sa neskôr ukázalo, stretne sa s ním v mnohých praktických aplikáciách teórie grafov. Pozrieme sa preto na tento problém bližšie.

4.5.1 Königsbergské mosty

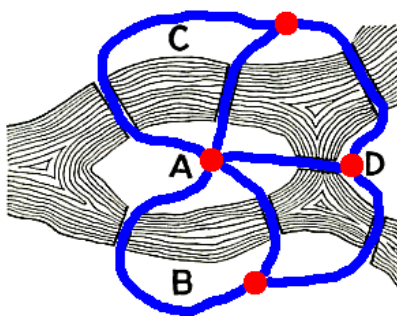
Cez mesto Königsberg (dnešný Kaliningrad) tečie rieka Pregel. Uprostred nej sú ostrovy a mesto s ostrovmi, ako aj ostrovy navzájom, boli spájané 7 mostami. Vtedajšia⁵ situácia je zobrazená na obrázku 4.11.

⁵Vďaka mapám na internete sa ľahko môžeme presvedčiť, že v súčasnosti sa dva mosty, spájajúce ľavý ostrov s mestom, presunuli na pravý ostrov. Tento detail je však pre riešenie danej úlohy nepodstatný. Z hľadiska teórie grafov je to identická situácia.



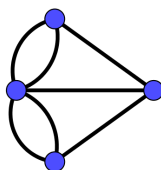
Obr. 4.11: Königsbergské mosty na začiatku 18. storočia

Vzhľadom na to, že na začiatku 18. storočia ešte neboli kiná, rádio, televízia ani internet, zabávali sa mešťania tým, že sa vo voľnom čase prechádzali po meste, alebo navštevovali koncerty. A niekto z nich vymyslel úlohu, prejsť sa po meste tak, že prechádzku začneme v nejakom bode A , prejdeme po každom z mostov práve raz a prechádzku ukončíme opäť v bode A . Bod A si môžeme, v rámci mesta, zvoliť ľubovoľne. Mnohí sa pokúšali túto úlohu vyriešiť, či už prakticky, alebo teoreticky, ale neuspeli. O úlohe sa dozvedel aj švajčiarsky matematik Leonhard Euler, ktorý v tom čase pôsobil na akadémii v Petrohrade. Euler si všimol, že tvar mesta, ostrovov a dĺžka mostov nemajú žiaden vplyv na riešenie úlohy. Takže úlohu môžeme pretransformovať na jednoduchý matematický problém. Časti mesta a ostrovy si označíme ako body A, B, C, D a čiarami spojíme body zodpovedajúce častiam mesta, ktoré sú spojené mostami. Asi tak, ako vidíme na obrázku 4.12.



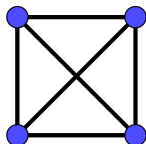
Obr. 4.12: Königsbergské mosty po Eulerovej úprave

Červené body a modré čiary z predošlého obrázku môžeme chápať ako graf so 4 vrcholmi a so 7 hranami. Graf pritom chápeme v zmysle definície 3.2.1. Predošlý obrázok si môžeme prekresliť do krajšej podoby.

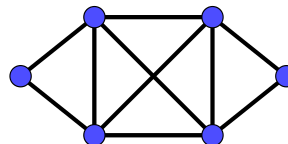


Obr. 4.13: Königsbergské mosty ako graf

Pôvodná úloha o prechádzke po Königsbergu sa potom transformuje na úlohu nájsť taký uzavretý ťah (definícia 3.3.3) v grafe na obrázku 4.13, ktorý obsahuje všetky hrany (a tým aj vrcholy). Sami sa ľahko môžeme, na grafoch z obrázkov 4.14 a 4.15, presvedčiť, že nie každý súvislý graf má uzavretý ťah obsahujúci všetky jeho hrany.



Obr. 4.14: Nemá uzavretý ťah



Obr. 4.15: Má uzavretý ťah

Euler dokázal, že úloha o Königsbergských mostoch je neriešiteľná. A ako správny matematik sa neuspokojil s tým, že by vyriešil len jeden konkrétny hlavolam pre mesto Königsberg. On tento problém zovšeobecnil a vyriešil ho pre ľubovoľný graf. Euler našiel a dokázal podmienky hovoriace o tom, pre ktoré grafy existuje otvorený alebo uzavretý ťah obsahujúci všetky hrany. Na jeho počesť sa preto ťahy, obsahujúce všetky hrany daného grafu, nazývajú *eulerovské ťahy*.

4.6 Otvorené a uzavreté eulerovské ťahy

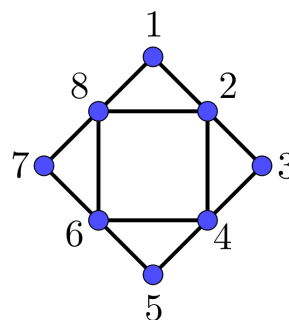
Pri definovaní eulerovských ťahov nemá zmysel zaoberať sa nesúvislými grafmi. Ak by bol graf nesúvislý (má viac než 1 komponent), tak v ňom celkom určite žiaden ťah, obsahujúci všetky hrany, nebude existovať. Takže sa budeme zaoberať len súvislými grafmi.

Definícia 4.6.1 — Otvorený a uzavretý eulerovský ťah. Nech G je súvislý graf. Potom v grafe G

- ▷ *otvorený eulerovský ťah* je taký ťah, ktorého počiatočný a koncový vrchol sú dva rôzne vrcholy a ktorý obsahuje všetky hrany grafu G .
- ▷ *uzavretý eulerovský ťah* je taký uzavretý ťah, ktorý obsahuje všetky hrany grafu G .

■ Príklad 4.13

Graf na obrázku vpravo má uzavretý eulerovský ťah (8, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 2, 4, 6, 8).



Na príklade 4.13 si všimnime, že v danom grafe je stupeň každého jeho vrcholu párny. Euler dokázal, že to je nutná aj postačujúca podmienka existencie uzavretého eulerovského ťahu v súvislom grafe.

Veta 4.6.1 — Veta o uzavretom eulerovskom ťahu. V grafe G existuje uzavretý eulerovský ťah práve vtedy, keď je graf G súvislý a stupeň každého jeho vrcholu je párny.

Dôkaz: Veta je sformulovaná ako ekvivalencia a dokazovať ju budeme ako dve implikácie.

⇒ **Ak v grafe G existuje uzavretý eulerovský ťah, tak je graf G súvislý a stupeň každého jeho vrcholu je párny.**

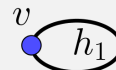
Uzavretý eulerovský ťah musí obsahovať všetky vrcholy grafu. To podľa vety 3.3.1 znamená, že medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi existuje cesta, a preto je graf G súvislý. Okrem toho uzavretý eulerovský ťah prechádza každou hranou grafu práve raz, takže ak ideme po tomto ťahu, tak do každého vrcholu musíme vojsť jednou a výjsť inou, ešte nepoužitou, hranou. To ale znamená, že stupeň každého vrcholu musí byť párny.

⇐ **Ak je graf G súvislý a stupeň každého jeho vrcholu je párny, tak v grafe G existuje uzavretý eulerovský ťah.**

Dôkaz budeme robiť matematicou indukciou vzhľadom na počet hrán grafu G . Nech G je súvislý graf, ktorého všetky vrcholy sú párneho stupňa a počet jeho hrán je e .

1. Overenie tvrdenia pre $e = 0$ a $e = 1$: súvislý graf bez hrán ($e = 0$) je len jeden vrchol a ten má triviálny uzavretý eulerovský ťah.

Jediný súvislý graf s jednou hranou a všetkými vrcholmi párneho stupňa, je slučka. Čiže taký graf, aký je na obrázku vpravo.



Tento graf má uzavretý eulerovský ťah (v, h_1, v) , čiže tvrdenie preň platí.

2. Indukčný krok: predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky grafy, ktoré majú najvyšš $e = (n - 1)$ hrán a na základe toho dokážeme, že potom musí platiť aj pre grafy, ktoré majú $e = n$ hrán.

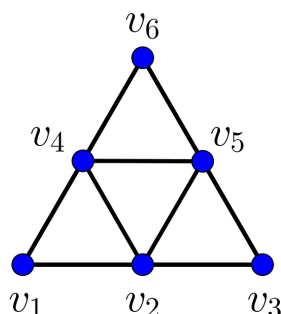
Majme súvislý graf G s $e = n$ hranami, ktorého všetky vrcholy sú párneho stupňa. Vyberme si ľubovoľnú hranu grafu G a označme ju h_1 . Sporom ľahko dokážeme, že hrana h_1 nemôže byť most. Ak by hrana h_1 bola most, tak po jej vynechaní by sa graf G rozpadol na dva komponenty, pričom v každom z nich by bol práve jeden vrchol nepárneho stupňa. To je spor s vetou 3.2.1 (pozri cvičenie 3.6). Ak hrana h_1 nie je most, tak podľa lemy 3.4.4 musí patriť do nejakého cyklu, označme si ho C . Ak z grafu G vynecháme všetky hrany cyklu C , tak sa nám G rozpadne na komponenty $\{G_1, \dots, G_k\}$, pričom môže nastať aj prípad $k = 1$. Všetky tieto komponenty sú súvislé grafy so všetkými vrcholmi párneho stupňa a menej než n hranami. Takže podľa indukčného predpokladu v každom z nich existuje uzavretý eulerovský ťah. Uzavretý eulerovský ťah v grafe G potom vytvoríme nasledovným spôsobom. Začneme vo vrchole komponentu G_1 ležiacom na cykle C . Vytvoríme v ňom uzavretý eulerovský ťah, po hranách cyklu C sa presunieme do nasledujúceho komponentu. V ňom tiež vytvoríme uzavretý eulerovský ťah, po hranách cyklu C sa presunieme ďalej a takto pokračujeme až do komponentu G_k . Z neho sa, po vytvorení jeho uzavretého eulerovského ťahu, vrátíme po hranách cyklu C do východzieho vrcholu.

Q.E.D.

P Matematická indukcia, ktorú sme použili v dôkaze vety 4.6.1, je iný typ matematickej indukcie, než s akým sme sa zatiaľ stretávali. Doteraz sme vždy predpokladali, že tvrdenie platí pre číslo $(n - 1)$ a na základe toho sme dokázali, že musí platiť aj pre číslo n . Teraz predpokladáme, že tvrdenie platí pre všetky čísla menšie než n a na základe toho dokážeme platnosť tvrdenia aj pre číslo n .

Z vety 4.6.1 vyplýva, že úloha o Königsbergských mostoch nemá riešenie. Graf z obrázku 4.13 nielenže nemá všetky vrcholy párneho stupňa, ale on má všetky vrcholy nepárneho stupňa. To isté platí aj o grafe z obrázku 4.14.

■ Príklad 4.14



Graf na obrázku vľavo je súvislý a má všetky vrcholy párneho stupňa. Jeho stupne vrcholov sú

$$\text{st}(v_1) = \text{st}(v_3) = \text{st}(v_6) = 2$$

$$\text{st}(v_2) = \text{st}(v_4) = \text{st}(v_5) = 4$$

Takže podľa vety 4.6.1 má tento graf uzavretý eulerovský ťah. Je to napríklad ťah

$$(v_1, v_2, v_3, v_5, v_6, v_4, v_5, v_2, v_4, v_1).$$

■

Na základe vety 4.6.1 a vďaka tomu, že grafy, ktoré majú uzavretý eulerovský ťah, majú významné postavenie v mnohých praktických aplikáciách, má zmysel definovať pojem *eulerovský graf*.

Definícia 4.6.2 — Eulerovský graf. Súvislý graf G , ktorého všetky vrcholy sú párneho stupňa, sa nazýva eulerovský graf.

Eulerovské grafy sú práve tie grafy, ktoré majú uzavretý eulerovský ťah. Tieto grafy vieme nakresliť jedným ťahom tak, že začneme aj skončíme v tom istom vrchole. V rôznych aplikáciách však má zmysel sa zaoberať aj takými grafmi, ktoré síce nemajú uzavretý eulerovský ťah, ale majú otvorený eulerovský ťah. Tieto grafy vieme nakresliť jedným ťahom tak, že kreslenie začíname a končíme v dvoch rôznych vrchole.

Veta 4.6.2 — Veta o otvorenom eulerovskom ťahu. V grafe G existuje otvorený eulerovský ťah práve vtedy, keď je graf G súvislý a má práve dva vrcholy nepárneho stupňa.

Dôkaz: Veta je sformulovaná ako ekvivalencia a dokazovať ju budeme ako dve implikácie.

⇐ **Ak je graf G súvislý a má práve dva vrcholy nepárneho stupňa, tak v ňom existuje otvorený eulerovský ťah.**

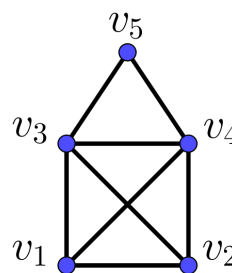
Nech u a v sú tie dva vrcholy grafu G , ktoré sú nepárneho stupňa. Spojme tieto dva vrcholy novou hranou h a dostaneme eulerovský graf G' . Podľa vety 4.6.1 v grafe G' existuje uzavretý eulerovský ťah a v ňom musí existovať buď sled (u, h, v) , alebo sled (v, h, u) . Vynechaním hrany h dostaneme otvorený eulerovský ťah v grafe G , ktorý sa začína v jednom z vrcholov u, v a končí sa v druhom z nich.

⇒ **Ak v grafe G existuje otvorený eulerovský ťah, tak potom je graf G súvislý a má práve dva vrcholy nepárneho stupňa.**

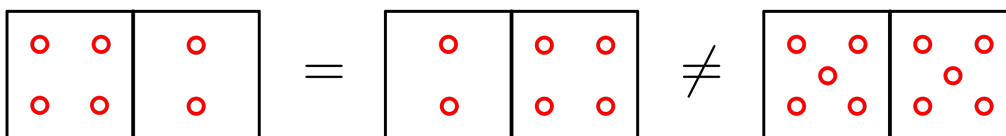
Ak v grafe G existuje otvorený eulerovský ťah, tak tento sa začína vo vrchole u , končí vo vrchole v a $u \neq v$. To znamená, že vrcholy u a v sú nepárneho stupňa, pretože ťah z jedného z nich na začiatku len vychádza a do druhého z nich na konci len vchádza. Všetky ostatné vrcholy grafu G musia byť párneho stupňa, pretože ťah do každého z nich musí vojsť jednou a výjsť inou, ešte nepoužitou, hranou. Navyše graf G musí byť súvislý, pretože otvorený eulerovský ťah obsahuje všetky jeho vrcholy, a preto medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi existuje podľa vety 3.3.1 cesta.

■ **Príklad 4.15**

Graf na obrázku vpravo, podľa definície 4.6.2, nie je eulerovský a veta 4.6.1 nám hovorí, že v ňom neexistuje uzavretý eulerovský ťah. Stupne jeho vrcholov sú $\text{st}(v_5) = 2$, $\text{st}(v_1) = \text{st}(v_2) = 3$, $\text{st}(v_3) = \text{st}(v_4) = 4$. Tento graf má práve dva vrcholy $\{v_1, v_2\}$ nepárneho stupňa a všetky ostatné vrcholy párneho stupňa. Podľa vety 4.6.2 má teda graf G otvorený eulerovský ťah. Napríklad $(v_1, v_2, v_3, v_1, v_4, v_5, v_3, v_4, v_2)$. Vidíme, že tento ťah začína vo vrchole v_1 a končí vo vrchole v_2 , teda práve v jediných dvoch vrcholoch, ktorých stupeň je nepárny.



■ **Príklad 4.16** Domino kameň má tvar obdĺžnika, ktorý je zložený z dvoch štvorcov. V každom zo štvorcov je nakreslených n ôk, kde $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Príklady dvoch domino kameňov sú na nasledujúcom obrázku.



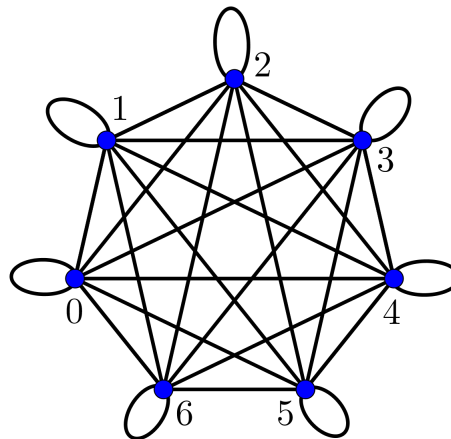
Kompletná sada domino kameňov obsahuje kamene so všetkými možnými neusporiadanými dvojicami $\{m, n\}$ ôk, pričom $m, n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a každá neusporiadaná dvojica $\{m, n\}$ ôk sa v sade vyskytuje práve raz.

Úloha na okraj: koľko domino kameňov obsahuje kompletná sada?

Je možné všetky dominá usporiadať do kruhu tak, aby sa susediace domino kamene navzájom dotýkali štvorcami obsahujúcimi rovnaký počet ôk?

Riešenie:

Táto zdanlivo komplikovaná úloha má vďaka grafom a vete 4.6.1 jednoduché riešenie. Domino kameňom priradíme neorientovaný graf G tak, že vrcholy budú zodpovedať počtu ôk a hrany samotným kameňom. Čiže graf bude mať 7 vrcholov z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a vrcholy incidujúce s hranou grafu, zodpovedajú počtu ôk na domino kameni. Graf G , predstavujúci kompletnú sadu domino kameňov, vidíme na obrázku vpravo. Usporiadať domino kamene do kruhu tak, aby sa susediace domino kamene navzájom dotýkali štvorcami obsahujúcimi rovnaký počet ôk, zodpovedá nájdeniu uzavretého eulerovského ťahu v grafe G . Graf G je súvislý a všetky jeho vrcholy sú párneho stupňa, takže v ňom, podľa vety 4.6.1 existuje uzavretý eulerovský ťah. Odpoveď na úlohu v zadaní je preto „áno“.



■ **Príklad 4.17** Bude sa dať vyriešiť úloha z príkladu 4.16 aj v prípade, že počet ôk na kameňoch by sa vyberal len z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

Riešenie: Nie. Odpoveď opäť vyplýva z vety 4.6.1. Ak si rovnakým spôsobom ako v predošlom príklade nakreslíme neorientovaný graf zodpovedajúci kompletnej sade domino kameňov, tak každý vrchol tohto grafu bude mať stupeň 7, čiže nepárny. A podľa vety 4.6.1 takýto graf neobsahuje uzavretý eulerovský ťah.

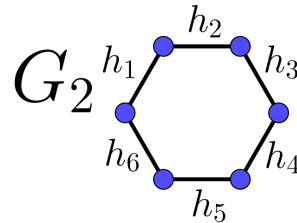
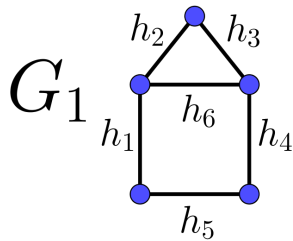
Pred uvedením cvičení ku tejto kapitole si ešte definujeme tri nové pojmy, ktoré sa v týchto cvičeniach používajú.

Definícia 4.6.3 — Párovanie. Nech $G = (V, E)$ je graf. Potom množina $E' \subset E$ sa nazýva párovanie, ak žiadne dve hrany z množiny E' nemajú spoločný vrchol a žiadna hrana z E' nie je slučka. Povedané inak, podmnožina hrán $E' \subset E$ grafu G je párovanie, ak má každý vrchol grafu $G' = (V, E')$ stupeň 0 alebo 1.

Definícia 4.6.4 — Maximálne párovanie. Maximálne párovanie grafu G je také párovanie, ktoré má najväčší možný počet hrán.

Definícia 4.6.5 — Perfektné párovanie. Nech $G = (V, E)$ je graf. Potom množina $E' \subset E$ sa nazýva perfektné (dokonalé) párovanie, ak je to párovanie a pokrýva všetky vrcholy z množiny V , t. j. každý vrchol z V inciduje s práve jednou hranou z E' .

■ **Príklad 4.18** Vezmime si napríklad grafy G_1 a G_2 zobrazené nižšie. Potom



v grafe G_1 :

- (a) $E' = \{h_6\}$ je podľa definície 4.6.3 párovanie.
- (b) $E' = \{h_4, h_6\}$ nie je párovanie, pretože hrany h_4 a h_6 incidujú so spoločným vrcholom.
- (c) $E' = \{h_1, h_4\}$, alebo $E'' = \{h_3, h_5\}$, alebo $E''' = \{h_2, h_5\} \dots$ sú maximálne párovania.
- (d) neexistuje perfektné párovanie, pretože graf G_1 má 5 vrcholov. Jeho maximálne párovanie môže mať najviac 2 hrany a 4 vrcholy.

v grafe G_2 :

- (a) $E' = \{h_1\}$ je párovanie.
- (b) $E' = \{h_1, h_2\}$ nie je párovanie, pretože hrany h_1 a h_2 incidujú so spoločným vrcholom.
- (c) $E' = \{h_1, h_3, h_5\}$ a $E'' = \{h_2, h_4, h_6\}$ sú jediné dve maximálne párovania.
- (d) obe uvedené maximálne párovania sú súčasne aj perfektné párovania, pretože pokrývajú celú vrcholovú množinu grafu G_2 .

■

4.7 Cvičenia

Cvičenie 4.1 Nakreslite grafy dané maticou susednosti a priamo z matice zistite, ktoré z týchto grafov sú obyčajné

$$(a) \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$(c) \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$(e) \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

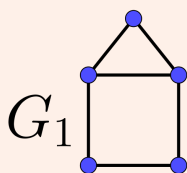
$$(b) \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$(d) \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

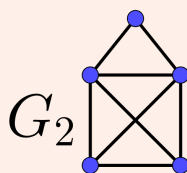
$$(f) \begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Cvičenie 4.2 Ku daným grafom napíšte maticu susednosti.

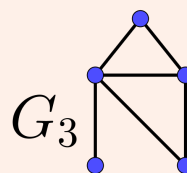
(a)



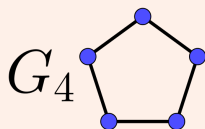
(b)



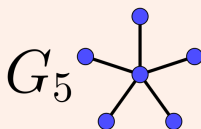
(c)



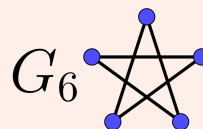
(d)



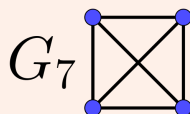
(e)



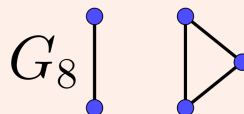
(f)



(g)



(h)



Cvičenie 4.3 Nakreslite graf daný maticou incidencie

$$\begin{matrix} & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & h_6 \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Cvičenie 4.4 Napíšte matice incidencie grafov G_1 až G_7 z cvičenia 4.2.

Cvičenie 4.5 Napíšte matice susednosti a incidencie grafov

- (a) K_4 (b) K_5 (c) C_5 (d) $K_{3,3}$ (e) $K_{2,4}$

Cvičenie 4.6 Vypočítajte druhé mocniny matíc susednosti grafov

- (a) K_4 (b) K_5 (c) $K_{3,3}$ (d) $K_{2,3}$ (e) C_5

Cvičenie 4.7 Čo vieme povedať o grafe G , ak jeho matica susednosti A má tvar

$$(a) \quad A = \left(\begin{array}{c|c} \emptyset & A_1 \\ \hline A_2 & \emptyset \end{array} \right) \qquad (b) \quad A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \emptyset \\ \hline \emptyset & A_2 \end{array} \right)$$

kde $\emptyset$ označuje v príklade (a) štvorcovú nulovú maticu a A_1, A_2 označujú v príklade (b) ľubovoľné (prípustné) štvorcové matice?

Cvičenie 4.8 Čo vieme povedať o grafe G , ak jeho matica incidencie A má tvar

$$(a) \quad A = \left(\begin{array}{c|c} \emptyset & A_1 \\ \hline A_2 & \emptyset \end{array} \right) \qquad (b) \quad A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \emptyset \\ \hline \emptyset & A_2 \end{array} \right)$$

kde $\emptyset$ označuje nulovú maticu a A_1, A_2 sú ľubovoľné (prípustné) matice?

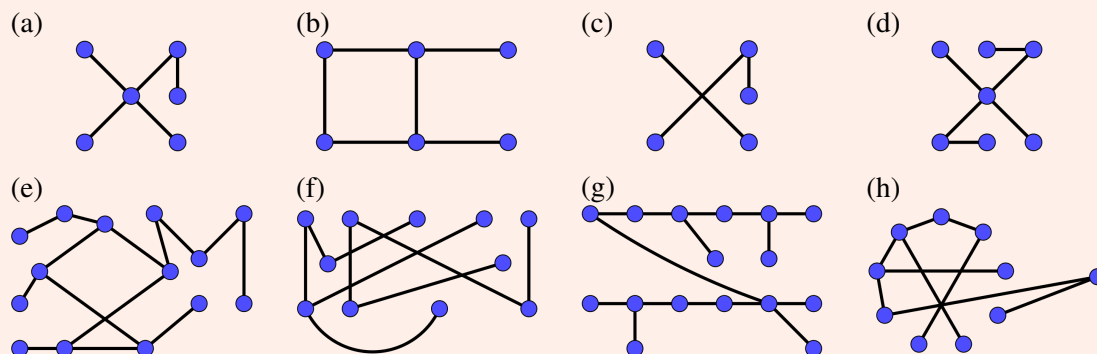
Cvičenie 4.9 Čo vieme povedať o grafe, ktorého matica incidencie má nulový riadok? Nakreslite taký graf.

Cvičenie 4.10 Majme graf $G = (V, E)$ s n vrcholmi a nech $v_i \in V$. Dokážte, že stupeň vrcholu v_i sa rovná súčtu čísel v i . riadku matice susednosti grafu G , t. j.

$$\text{st}(v_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij},$$

kde a_{ij} je číslo v i . riadku a j . stĺpci matice susednosti grafu G .

Cvičenie 4.11 Ktoré z nasledujúcich grafov sú stromy? Zdôvodnite, prečo daný graf je, alebo nie je, strom.



Cvičenie 4.12 Pre ktoré čísla $n \in \mathbb{N}$ je graf K_n stromom? ■

Cvičenie 4.13 Pre ktoré čísla $m, n \in \mathbb{N}$ je graf $K_{m,n}$ stromom? ■

Cvičenie 4.14 Dokážte, že jediný strom na n vrcholoch, ktorý sa dá nakresliť jedným ťahom, je cesta P_{n-1} . ■

Cvičenie 4.15 Nájdite strom, ktorý má párny počet vrcholov, ale nemá perfektné párovanie (pozri definícia 4.6.5). ■

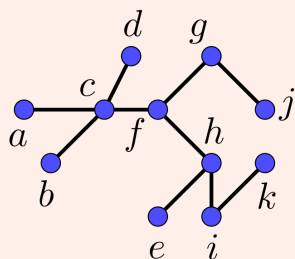
Cvičenie 4.16 Dokážte, že graf s n vrcholmi a menej než $(n - 1)$ hranami nie je súvislý. ■

Cvičenie 4.17 Dokážte, že graf G je strom práve vtedy keď platí, že G je súvislý graf a vynechaním ľubovoľnej jeho hrany vznikne nesúvislý graf. ■

Cvičenie 4.18 Dokážte, že graf G je strom práve vtedy keď platí, že G je acyklický graf a pridaním ľubovoľnej hrany, pri nezmenenej množine vrcholov, vznikne cyklický graf (obsahujúci cyklus). ■

Cvičenie 4.19 Nakreslite graf G , ktorý je súvislý, má jedinú cestu medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi, ale nie je strom. Ak sa to nedá, tak dokážte, že sa to nedá. ■

Cvičenie 4.20



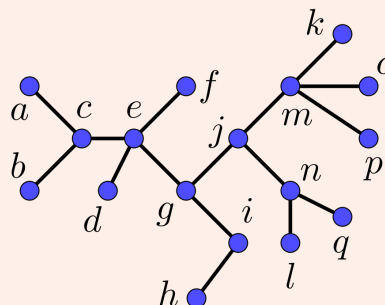
Na obrázku vľavo je daný strom.

- Nech c je jeho koreň. Nájdite úroveň všetkých vrcholov a výšku stromu.
- Nech f je jeho koreň. Nájdite úroveň všetkých vrcholov a výšku stromu.
- Nech e je jeho koreň. Nájdite úroveň všetkých vrcholov a výšku stromu.

Cvičenie 4.21

Na obrázku vpravo je daný strom.

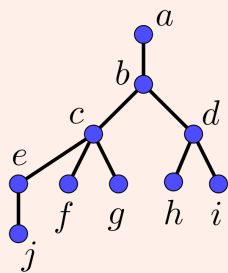
- Nech e je jeho koreň. Nájdite úroveň všetkých vrcholov a výšku stromu.
- Nech g je jeho koreň. Nájdite úroveň všetkých vrcholov a výšku stromu.
- Nech n je jeho koreň. Nájdite úroveň všetkých vrcholov a výšku stromu.



Cvičenie 4.22 Dokážte, že všetky kostry daného grafu majú rovnaký počet hrán. ■

Cvičenie 4.23

Na obrázku vľavo je daný koreňový strom. Nájdite



- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| (a) rodičov vrcholu c , | (h) rodičov vrcholu h , |
| (b) predkov vrcholu c , | (i) predkov vrcholu j , |
| (c) deti vrcholu d , | (j) deti vrcholu e , |
| (d) potomkov vrcholu c , | (k) potomkov vrcholu e , |
| (e) súrodencov vrcholu f , | (l) súrodencov vrcholu h , |
| (f) koncové vrcholy, | (m) vnútorné vrcholy, |
| (g) podstrom s koreňom j , | (n) podstrom s koreňom e . |

Cvičenie 4.24 Čo sa dá povedať o

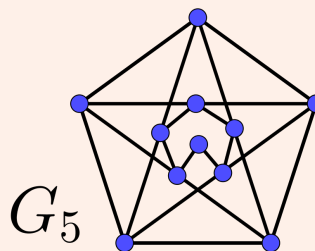
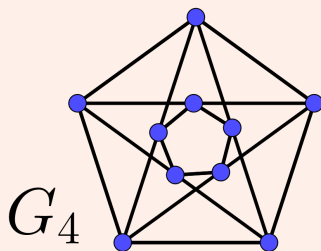
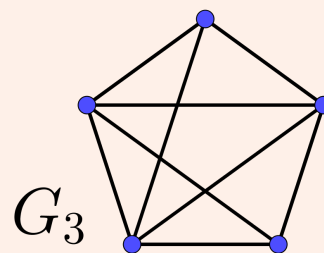
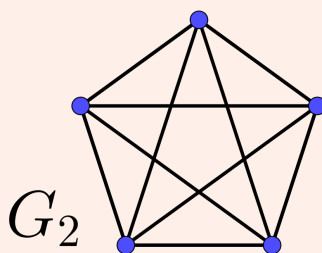
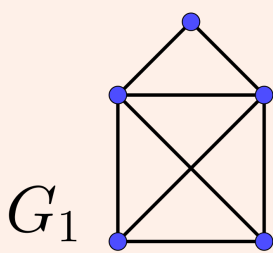
- dvoch vrcholoch koreňového stromu, ktoré majú rovnakého otca (rodiča)?
- dvoch vrcholoch koreňového stromu, ktoré majú tých istých predkov?
- vrchole koreňového stromu, ktorý nemá žiadnych predkov?
- dvoch vrcholoch koreňového stromu, ktoré majú spoločného potomka?

Cvičenie 4.25 Nakreslite obyčajný graf s danými vlastnosťami, alebo zdôvodnite, prečo taký graf neexistuje.

- Graf má 6 hrán a 8 vrcholov.
- Graf je acyklický, má 4 hrany a 6 vrcholov.
- Graf je strom a má všetky vrcholy stupňa 2.
- Graf je strom a má 6 vrcholov so stupňami 1, 1, 1, 1, 3, 3.
- Graf je koreňový strom, má 4 vnútorné vrcholy a 6 koncových vrcholov.

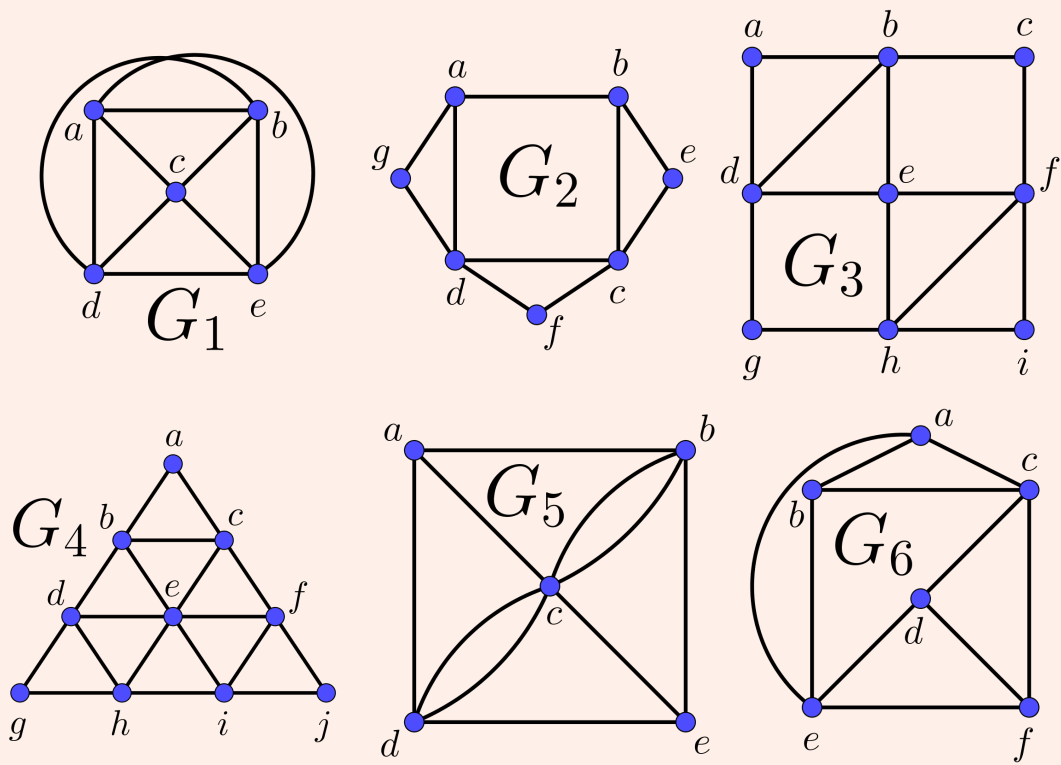
Cvičenie 4.26 Pri každom z uvedených grafov

- rozhodnite, či daný graf má uzavretý eulerovský ťah. Ak áno, nájdite ho.
- rozhodnite, či daný graf má otvorený eulerovský ťah. Ak áno, nájdite ho.



Cvičenie 4.27 Pri každom z uvedených grafov

- rozhodnite, či daný graf má uzavretý eulerovský ťah. Ak áno, nájdite ho.
- rozhodnite, či daný graf má otvorený eulerovský ťah. Ak áno, nájdite ho.
- nájdite polomer a priemer daného grafu.

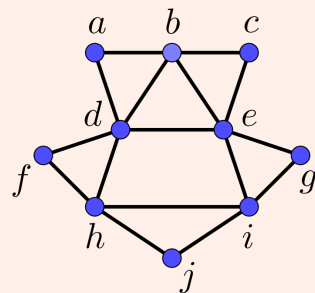


Cvičenie 4.28 Zistite pre ktoré čísla $n \in \mathbb{N}$ má graf K_n uzavretý eulerovský ťah.

Cvičenie 4.29 Zistite pre ktoré čísla $m, n \in \mathbb{N}$ má graf $K_{m,n}$ uzavretý eulerovský ťah.

Cvičenie 4.30 Daný je graf na obrázku vpravo.

- Rozhodnite či daný graf má uzavretý eulerovský ťah. Ak áno, nájdite ho.
- Rozhodnite či daný graf má otvorený eulerovský ťah. Ak áno, nájdite ho.
- Nájdite polomer a priemer daného grafu.



Cvičenie 4.31 Nájdite všetky grafy, ktoré majú všetky vrcholy nepárneho stupňa a dajú sa nakresliť jedným ťahom.

Cvičenie 4.32 V Pythone alebo v C naprogramujte test, ktorý zistí, či daný graf má uzavretý alebo otvorený eulerovský ťah..



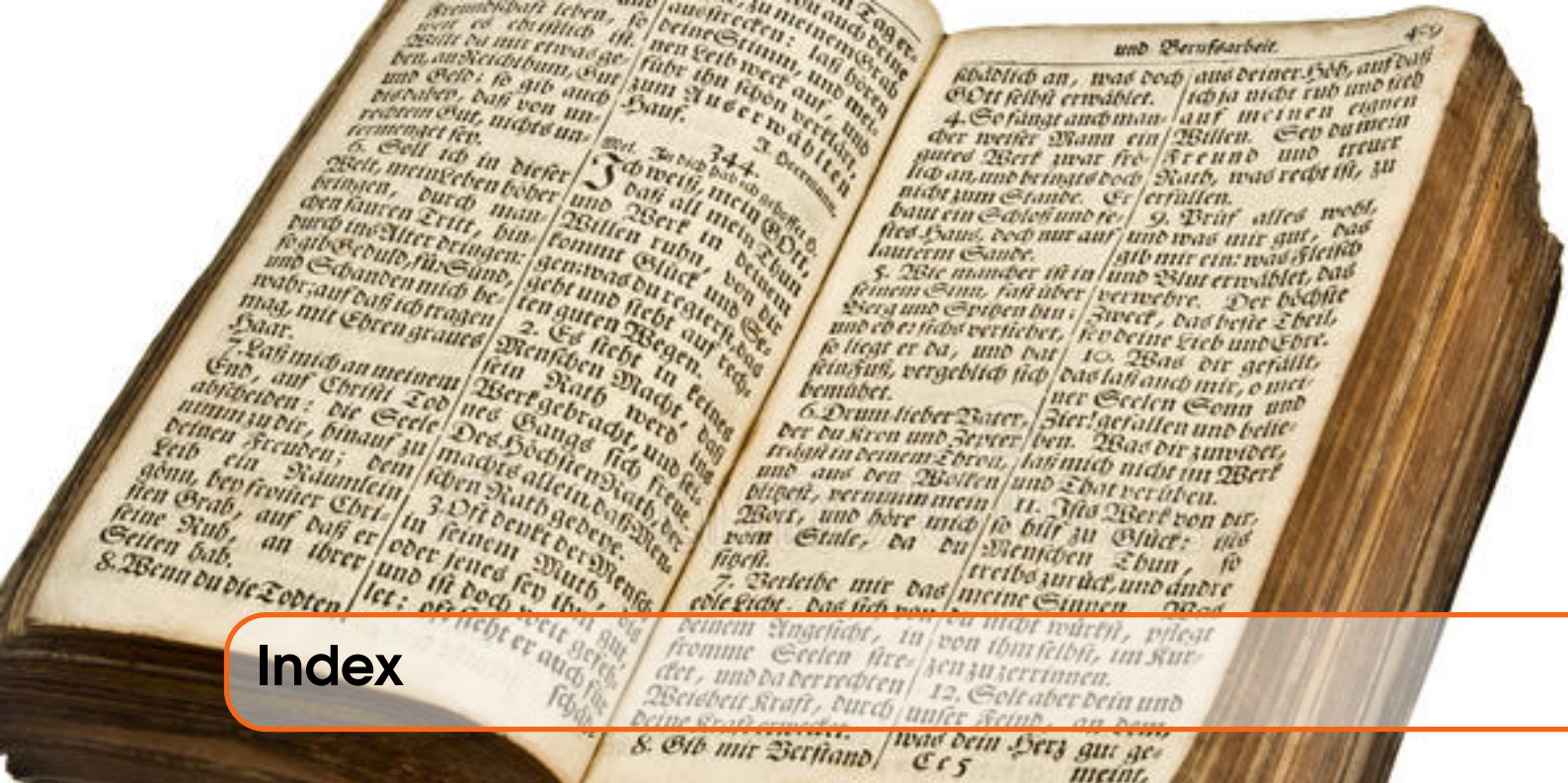
Použitá a odporúčaná literatúra

- [1] Martin Aigner: **Combinatorial Theory**, SPRINGER VERLAG, HEIDELBERG 1979.
- [2] Bohuslav Balcar, Petr Štěpánek: **Teorie množin**, ACADEMIA, PRAHA 1986.
- [3] Berežný, Draženská, Kravcová: **Zbierka úloh z diskkrétnej matematiky**, FEI TU, KOŠICE 2005. <http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/10/Zbierka-DM.pdf>
- [4] J. A. Bondy, U. S. Murty: **Graph Theory With Applications**, NORTH-HOLLAND 1976.
- [5] Reinhard Diestel: **Graph Theory**, SPRINGER 2000.
- [6] Harary, Frank: **Graph theory**, ADDISON-WESLEY 1969.
- [7] Richard Johnsonbaugh: **Discrete Mathematics**, PEARSON 2017.
- [8] Josef Kaucký: **Kombinatorické identity**, VEDA, VYDAVATELSTVO SAV, BRATISLAVA 1975.
- [9] Martin Knor: **Úvod do matematickej logiky**, FIIT STU, BRATISLAVA 2016.
<http://www.math.sk/jmkollar/literatura/Knor-Uvod.do.matematickej.logiky.pdf>
- [10] Martin Knor: **Teória grafov**, SVF STU, BRATISLAVA 2008.
<http://www.svf.stuba.sk/docs/dokumenty/skripta/teoria-grafov.martin.knor.pdf>
- [11] Martin Knor, Jozef Kollár: **Matematika pre architektov**, STU BRATISLAVA, 2002.
- [12] Donald E. Knuth: **The Art of Computer Programming, Volume 1**, ADDISON-WESLEY, 1997.
- [13] Sergei K. Lando: **Lectures on Generating Functions**, AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, STUDENT MATHEMATICAL LIBRARY 2003.
- [14] Milan Mareš: **Příběhy matematiky**, PISTORIUS & OLŠANSKÁ, PŘÍBRAM 2011.
- [15] J. Matoušek, J. Nešetřil: **Kapitoly z diskrétní matematiky**, KAROLINUM, PRAHA 2002.

- [16] М. В. Меньшиков, А. М. Ревякин, А. Н. Копылова, Ю. Н. Макаров, Б. С. Стечкин: **Комбинаторный Анализ – Задачи и упражнения**, ИЗДАТЕЛЬСТВО »НАУКА«, МОСКВА 1982.
- [17] В. А. Носов: **Комбинаторика и теория графов**, МОСКВА 1999.
<http://intsys.msu.ru/staff/vnosov/combgraph.htm> (PDF verzia)
- [18] Stanislav Palúch: **Algoritmická teória grafov**, ŽILINSKÁ UNIVERZITA, 2008.
<http://frcatel.fri.uniza.sk/users/paluch/grafy.pdf>
- [19] Ján Plesník: **Grafové algoritmy**, VEDA, BRATISLAVA 1983.
- [20] Franco P. Preparata, Raymond T. Yeh: **Úvod do teórie diskretných matematických štruktúr**, ALFA, BRATISLAVA 1982.
- [21] Edward M. Reingold, Jurg Nievergelt, Narsingh Deo: **Combinatorial Algorithms – Theory and Practice**, PRENTICE-HALL, NEW JERSEY 1977.
- [22] Beloslav Riečan a kol.: **Úlohy z matematiky pre 4. ročník gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1976.
- [23] Beloslav Riečan a kol.: **Matematika pre 4. ročník gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1987.
- [24] Beloslav Riečan a kol.: **Zbierka úloh z matematiky pre 4. ročník gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1991.
- [25] Karol Rován a kol.: **Zbierka riešených úloh z algebry pre SVŠ a odborné školy**, SPN, BRATISLAVA 1969.
- [26] К. А. Рыбников: **Введение в Комбинаторный Анализ**, ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА, МОСКВА 1985.
- [27] Raymond M. Smullyan: **A Beginner's Guide to Mathematical Logic**, DOVER PUBLICATIONS, NEW YORK 2014.
- [28] František Vejsada, František Talafous: **Zbierka úloh z matematiky pre SVŠ a gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1973.
- [29] Naum J. Vilenkin: **Rozhovory o množinách**, SPN, BRATISLAVA 1972.
- [30] Herbert S. Wilf: **generatingfunctionology**, ACADEMIC PRESS, INC. 1994.
<https://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>
- [31] Niklaus Wirth: **Algoritmy a štruktúry údajov**, ALFA, BRATISLAVA 1989.
- [32] Štefan Znáť: **Kombinatorika a teória grafov**, PF UK, BRATISLAVA 1978.

IV

Index



Index

Symboly

$\in$ operátor „patrí do množiny“	11
$\notin$ operátor „nepatrí do množiny“	11
$\subset$ operátor vlastnej podmnožiny	12
$\subseteq$ operátor nevlastnej podmnožiny	12
$\cup$ operátor zjednotenia množín	12
$\cap$ operátor prieniku množín	13
$\setminus$ operátor rozdielu množín	13
$\bar{A}$ komplement množiny A	14
$\neg$ operátor logickej negácie	20
$\vee$ operátor disjunkcie	20
$\wedge$ operátor konjunkcie	20
$\Leftrightarrow$ operátor ekvivalencie	20
$\Rightarrow$ operátor implikácie	20
$\exists$ existenčný kvantifikátor	23
$\forall$ všeobecný kvantifikátor	23
$ $ operátor „ a delí b “ ($a b$)	40
$\triangle$ operátor symetrickej diferencie	41

A

acyklický graf	62
algoritmus	
Borůvkov	203
Dijkstrov	229–231
hľadania kostry grafy	179
Jarníkov (Primov)	197
konštrukcie očíslovaného stromu z Prüferovho kódu	241

B

konštrukcie optimálneho Huffmanovho kódu	206
konštrukcie Prüferovho kódu z očíslovaného stromu	235
konštrukcie prehľadávacieho binárneho stromu	215
Kruskalov	201, 202
pažravý	201
prehľadávania grafu do hĺbky	187
prehľadávania grafu do šírky	182
zostavovania identifikačného kódu binárneho stromu	219
zostavovania identifikačného kódu koreňového stromu	222
antisymetrickosť (relácie)	125, 130
Appel Kenneth (1932–2013)	48
ASCII kód	204
atomická formula	20
axióma	31
backtracking	186
bijektivnosť	145
binárny strom	80
binomický koeficient	171
Borůvka Otakar (1899–1995)	196, 203
Bouton Charles Leonard (1869–1922)	224

C

Catalanovo číslo 174, 213
 Cayley Arthur (1821–1895) 16, 48, 241
 centrálny vrchol grafu 56
 centrum grafu 56
 cesta (v grafe) 55, 112
 cyklus (v grafe) 57, 112

Č

číslo

Catalanovo 174, 213
 celé $\mathbb{Z}$ 15
 iracionálne 15
 komplexné $\mathbb{C}$ 16
 kvaternion 16
 oktonion 16
 prirodzené $\mathbb{N}$ 14
 racionálne $\mathbb{Q}$ 15
 reálne $\mathbb{R}$ 15

D

dátová štruktúra

fronta 180
 zásobník 180

dôkaz

matematickou indukciou 37, 39
 nepriamy 35
 priamy 32
 sporom 36

de Moivre Abraham (1667–1754) 155

de Morgan Augustus (1806–1871) 48

definícia 32

Dijkstra Edsger Wybe (1930–2002) . 197, 230

Dijkstrov algoritmus 229, 231

disjunkcia ($\vee$) 21

disjunktné množiny 13

E

ekvivalencia ($\Leftrightarrow$) 22

ekvivalencia (relácie) 140

entropický kód 204

Euklides Alexandrijský (~3. stor. pred n. l.) 15

Euklidovský priestor 108

Euler Leonhard (1707–1783) 47, 84, 109, 156

F

faktor grafu 62

faktoriál 39

dvojný 172

Fano Roberto Mario (1917–2016) 204

Fibonacci Leonardo (~1170 – ~1240) ... 167

Fibonacciho postupnosť 167

formula

atomatická 20

prvotná 20

výroková 20, 22

formuly

ekvivalentné 22

fronta 180

funkcia 143

bijektívna 145

charakteristická funkcia množiny 149

definičný obor 143

injektívna 144

inverzná 145

koobor 143

obor hodnôt 143

parciálna 143

surjektívna 144

vytvárajúca

exponenciálna, 175

obyčajná, 160

zložená 146

G

Gauss Carl Friedrich (1777–1855) 38

geometrická postupnosť

súčet prvých n členov 39

Gonthier Georges 48

graf

acyklický 62

artikulácia 61

bipartitný 53

kompletný ($K_{m,n}$), 54, 112

centrum 56

cesta 55, 112

cesta (P_n) 112

cyklus 57, 112

hamiltonovský, 95

cyklus (C_n) 112

digraf 50

dĺžka ťahu 55

dĺžka cesty 55

graf

dĺžka cyklu	57
dĺžka sledu	54
dokonalé párovanie	89
Eulerova veta o rovinných grafoch	110
eulerovský	87
eulerovský ťah	85
otvorený, 85, 87	
uzavretý, 85, 86	
excentricita vrcholu	56
faktor	62
hodnota	196
hodnota hrany	195
hodnota sledu	229
homeomorfné grafy	112
hrana	49
ohodnotená, 195	
hranica oblasti	108
húsenica	113
hviezda (S_n)	113
incidencia (vrchol–hrana)	50
invariant	101
izomorfizmus	
binárnych stromov, 106	
koreňových stromov, 105	
izomorfizmus grafov	98, 99
izomorfné grafy	99
jadro	225
jednoduchý (obyčajný)	51
Knight graph	98
koleso (W_n)	113
komplementárny	53
kompletný (K_n)	52, 112
kompletný bipartitný ($K_{m,n}$)	54, 112
komponent súvislosti	57, 60
konečný	49
koreňový strom	77
dieťa vrcholu, 78	
koncový vrchol, 78	
list, 78	
otec vrcholu, 78	
podstrom, 78	
potomok vrcholu, 78	
predkovia vrcholu, 78	
súrodenci (vrcholy), 78	
úroveň vrcholu, 77	
vnútorný vrchol, 78	
výška, 77	

graf

kostra	62
minimálna, 196	
Kuratowského veta	112
ľavý podstrom	213
les	77
list	77
matica incidencie	72
matica susednosti	69
minimálna kostra	196
množina vrcholov	
nezávislá, 225	
stabilná, 225	
most	61
najlacnejšia cesta	230
najlacnejšia kostra	196
násobné hrany	50
nekonečný	49
neorientovaný	49
nesúvislý	57
nezávislá množina vrcholov	225
oblasť	108
obyčajný (jednoduchý)	51
ohodnotený	195
ohodnotenie hrany	195
orientovaná hrana	49, 50
orientovaný	49, 50
otvorený sled	55
párovanie	89
maximálne, 89	
perfektné párovanie	89
podgraf	58
polomer	56
pravý podstrom	213
pravidelný	52
prázdny	49, 80
prehľadávanie do šírky	182
prehľadávanie do hĺbky	187
priemer	56
problém obchodného cestujúceho	234
rovinné nakreslenie	108
rovinný	108
sled	54
otvorený, 55	
uzavretý, 55	
slučka (hrana)	50
stabilná množina vrcholov	225

graf
 strom 73
 binárny, 80
 binárny úplný, 81
 binárny dokonalý, 82
 binárny prehľadavací, 214
 binárny vyvážený, 81
 koreň, 77, 105
 očíslovaný, 234
 prehľadavací binárny, 213
 stupeň vrcholu 51
 subdivízia hrany 111
 susedné oblasti 108
 susednosť (vrchol–vrchol) 50
 súvislý 57
 ťah 55
 uzavretý sled 55
 vrchol 49, 50
 centrálny, 56
 izolovaný, 50
 stupeň, 51
 vzdialenosť vrcholov 56
 Graves John Thomas (1806–1870) 16
 Guthrie Francis (1831–1899) 48

H

Haken Wolfgang (1928–...) 48
 Hamilton William R. (1805–1865) . 16, 48, 95
 harmonická postupnosť 166
 Herón Alexandrijský (10–75) 15
 Hippasos (~530–~450 pred n. l.) 15
 hodnota grafu 196
 hrana
 koncový vrchol 181
 počiatočný vrchol 181
 Huffman David Albert (1925–1999) 204
 Huffmanov kód 80, 204, 206
 húsenica (graf) 113
 hviezda (graf) 113
 hypotéza 32

I

implikácia ($\Rightarrow$) 21
 indukčný
 krok 38
 predpoklad 38
 injektívnosť 144
 inverzná funkcia 145

inverzná relácia 127

J

jadro grafu 225
 Jarník Vojtěch (1897–1970) 196, 197
 Jarníkov (Primov) algoritmus 197
 jazyk 1. rádu 23
 jednotka
 imaginárna 16
 kvaternionová 16
 oktonionová 16

K

kartézsky súčin 19
 Kempe Alfred Bray (1849–1922) 48
 kód
 ASCII 204
 Huffmanov 80, 204, 206
 Prüferov 234
 koeficient
 binomický 171
 Newtonov, 171
 multinomický 177
 koleso (graf) 113
 komplementárna množina 14
 komponent súvislosti (grafu) 60
 konjunkcia ($\wedge$) 21
 kontradikcia 20
 koreň 77
 koreňový strom 77
 kostra grafu 62
 Kőnig Dénes (1884–1944) 48
 Kruskal Joseph B. (1928–2010) 196, 201
 Kruskalov algoritmus 202
 Kuratowski Kazimierz (1896–1980) 111
 kvantifikátor
 existenčný 23
 všeobecný 23

L

Laplace Pierre-Simon (1749–1827) 156
 lema 62
 les 77
 list 77
 logická
 hodnota 19
 premenná 19

logická	
spojka	19, 20
logický	
operátor	19
výrok	19
logika	
predikátová	23
výroková	22

M

matematická indukcia	37, 39
matica	
incidencie grafu	72
relácie	128
susednosti grafu	69
maximálne párovanie grafu	89
množina	11
charakteristická funkcia	149
kartézsky súčin množín	19
komplementárna	14
konečná	12
mohutnosť	12
nekonečná	12
podmnožina	12
potenčná	13
prázdna	11
rozklad	138
spočítateľná	37
systém množín	138
univerzálna	14
univerzum	13, 14
množiny	
disjunktné	13
prienik množín	13
rovnosť množín	11
rozdiel množín	13
symetrická diferencia množín	41
zjednotenie množín	12
mocninový rad	156
modulo (zvyšok po delení)	41
modulo $a \pmod{b}$	41
modus ponens	32
mohutnosť množiny	12
Moskovský papyrus	16
multinomická veta	177
multinomický koeficient	177

N

negácia ($\neg$)	20
Newton Isaac (1642–1727)	171
Newtonov binomický koeficient	171

P

P-kód (prefixový kód)	204
párovanie grafu	89
perfektné párovanie	89
podgraf grafu	58
podmnožina	
vlastná	12
postupnosť	
Fibonacciho	167
harmonická	166
potenčná množina	13
pravdivostná hodnota	19
pravdivostná tabuľka	20
prázdna množina	11
prázdny graf	80
prefixový kód	204
prehľadavací binárny strom	213, 214
prehľadávanie grafu	
do hĺbky	186, 187
do šírky	181, 182
prienik množín	13
Prim Robert Clay (1921–...)	197
princíp zapojenia-vypojenia	18
problém	
NP-úplný	96
obchodného cestujúceho	47, 234
štyroch farieb	48
Prüfer Ernst Paul Heinz (1896–1934)	241
Prüferov kód	234
prvky	
porovnateľné	137
neporovnateľné	137
prvotná formula	20
pseudokód	
Dijkstrovho algoritmu	231
hľadania kostry grafu	179
Jarníkovho algoritmu	197
konštrukcie očíslovaného stromu z Prüferovho kódu	241
konštrukcie optimálneho Huffmanovho kódu	206
konštrukcie prehľadávacieho binárneho stromu	215

konštrukcie Prüferovho kódu z očíslovaného stromu 235
 Kruskalovho algoritmu 202
 prehľadávania grafu do hĺbky 187
 prehľadávania grafu do šírky 182
 zostavovania identifikačného kódu binárneho stromu 219
 zostavovania identifikačného kódu koreňového stromu 222
 pytagorejci 15

R

rad
 formálny mocninový 156
 Maclaurinov 156
 mocninový 156
 Taylorov 156
 reflexívnosť (relácie) 124, 129
 relácia
 n -árna 123
 antisymetrická 125, 130
 binárna 123, 124
 čiasťočné usporiadanie 137
 ekvivalencie 140
 inverzná 127
 maticová reprezentácia 128
 na množine 124
 reflexívna 124, 129
 symetrická 125, 129
 tranzitívna 126
 zložená 128
 rovnosť množín 11
 rozdiel množín 13
 rozklad množiny 138
 triedy ekvivalencie 141
 triedy rozkladu 138

S

semifaktoriál 172
 skladanie funkcií 146
 skladanie relácií 128
 sled (v grafe) 54
 slučka (graf) 50
 spočítateľná množina 37
 Stirling James (1692–1770) 156
 strom (graf) 73
 vyvážený binárny 81
 subdivízia hrany 111

súčín
 kartézsky 19
 surjektívnosť 144
 sylogizmus 34
 symetrická diferencia množín (Δ) 41
 symetrickosť (relácie) 125, 129
 systém množín 138

T

tabuľka
 pravdivostná 20
 Tait Peter Guthrie (1831–1901) 48
 tautológia 20
 tautologicky ekvivalentné formuly 22
 tranzitívnosť (relácie) 126
 trieda
 rozkladu 138
 zvyšková 142
 trieda ekvivalencie 141

Ť

ťah (v grafe) 55

U

univerzum množín 13, 14
 usporiadaná dvojica 18
 usporiadanie
 čiasťočné 137
 neporovnateľnosť, 137
 porovnateľnosť, 137
 lineárne 138

Ú

úplný binárny strom 81

V

Vennove diagramy 16
 veta
 Cayleyho 242
 Eulerova o rovinných grafoch 110
 Kuratowského 112
 multinomická 177
 o centre stromu 224
 o cykloch 58
 o existencii cesty v grafe 56
 o existencii jadra grafu 226

veta	
o existencii kostry grafu	63
o explicitnom vyjadrení rekurentných postupností	170
o invariantnosti cyklu C_n	102
o invariantnosti stupňov vrcholov	101
o inverznej funkcii	145
o komponentoch grafu	61
o korektnosti prehľ. algoritmov	191
o matematickej indukcii	39
o matici susednosti	71
o matici zloženej relácie	131
o maticiach susednosti izomorfných grafov	100
o mohutnosti kartézskeho súčinu	19
o optimálnej lokalizácii v prehľadávacom binárnom strome	217
o otvorenom eulerovskom ťahu	87
o počte koncových vrcholov úplných binárnych stromov	81
o potenčnej množine	40
o relácii danej rozkladom množiny	139
o rozklade danom rel. ekvivalencie	141
o správnosti Jarníkovho algoritmu	199
o stromoch	76
o stupňoch vrcholov rovinného grafu	111
o súčte stupňov vrcholov grafu	52
o súvislosti výšky a počtu koncových vrcholov binárnych stromov	82
o tranzitívnosti relácie na množine	132
o uzavretom eulerovskom ťahu	86
o vrchoch stromov	76
pravidlo sylogizmu	34
základná algebry	16
základná aritmetiky	37
veta (matematická)	31
vrchol	
dieťa	78
koncový	50, 78
list	77
otec	78
počiatočný	50
potomok	78
predkovia	78
rodič	78
súrodenci	78
syn	78
vnútorný	78
výroková formula	20, 22

vytvárajúca funkcia	
exponenciálna	175
obyčajná	160
súčet	161
súčin	162
vyvážený binárny strom	81

W

Werner Benjamin	48
-----------------	----

Z

základná veta algebry	16
základná veta aritmetiky	37
zásobník	180
zjednotenie množín	12
zložená funkcia	146
zvyšková trieda	142
zvyšok po delení (modulo)	41