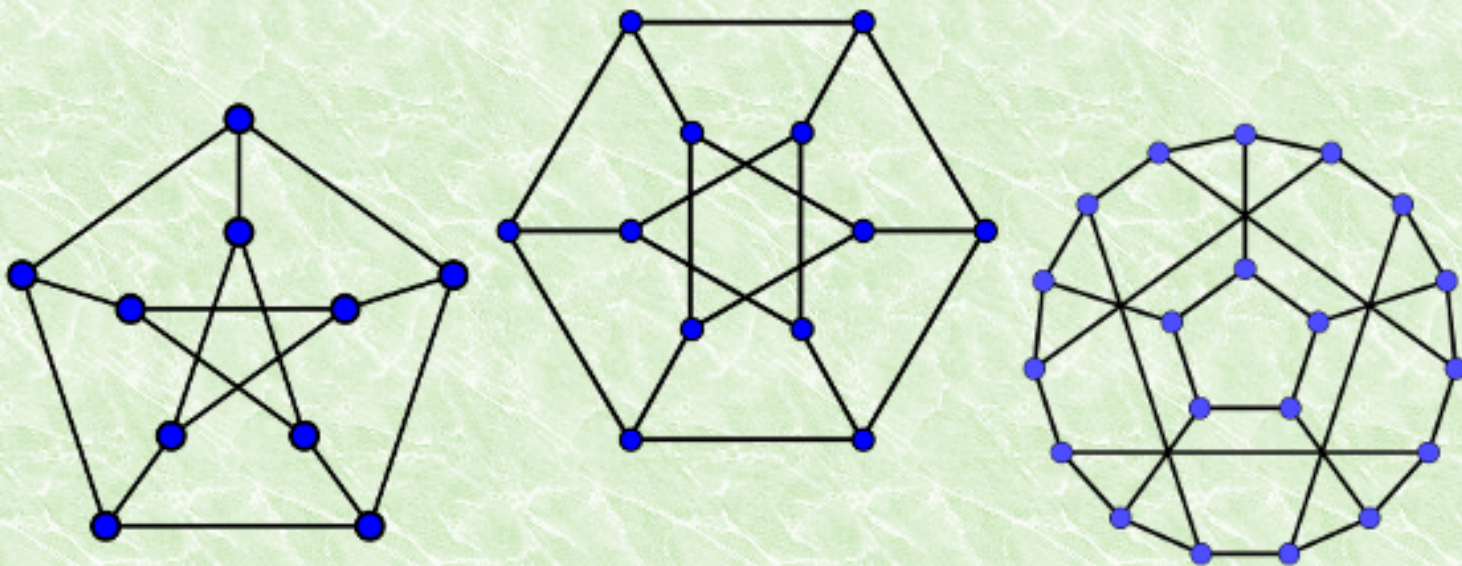




3. Základné pojmy teórie grafov

3.1 Historický úvod

Teória grafov je pomerne mladá matematická disciplína, má však veľmi vážne praktické uplatnenie. Prvopočiatky teórie grafov siahajú do začiatku 18. storočia a sú spojené s menom švajčiarskeho matematika a fyzika Leonharda Eulera, ktorý väčšinu svojho života pôsobil v Rusku, kde je aj pochovaný. V roku 1736 Euler publikoval prácu s názvom *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, v ktorej riešil problém prechádzky po mostoch mesta Königsberg (dnešný Kaliningrad). Bola to, z dnešného pohľadu, hlavolamová úloha. Až oveľa neskôr sa ukázalo, že problém, ktorý



Obr. 3.1: Problém mostov mesta Königsberg

Euler vyriešil, má významné uplatnenia v doprave, elektrotechnike, informatike a v mnohých ďalších technických disciplínach. Euler pri svojom riešení abstrahoval podstatu problému. Mapu mesta previedol do jej topologickej podoby, tú ďalej reprezentoval pomocou grafu a pomocou grafu potom problém vyriešil.

Ďalších takmer 200 rokov sa teória grafov rozvíjala v „ilegalite“. To znamená, že matematici riešili problémy, ktoré dnes patria do teórie grafov, ale teória grafov ešte neexistovala ako samostatná matematická disciplína. Medzi slávne a veľmi známe problémy teórie grafov, ktorými sa matematici zaoberali už v 19. storočí, patria napríklad *problém obchodného cestujúceho* a *problém štyroch farieb*. Problém obchodného cestujúceho¹ ako prvý matematicky sformuloval írsky mate-

¹ https://en.wikipedia.org/wiki/Travelling_salesman_problem

matik W. R. Hamilton v roku 1800 a odvtedy sa ním zaoberali a stále zaoberajú mnohí významní matematici. Tento problém sa radí medzi problémy kombinatorickej optimalizácie a je to NP-úplný problém súvisiaci s plánovaním, logistikou, mikroelektronikou, operačným výskumom a informatikou. Problém štyroch farieb² ako prvý sformuloval F. Guthrie, žiak známeho matematika Augusta de Morgana, v roku 1852. Týmto problémom sa tiež zaoberali mnohí slávni matematici, okrem iného aj Arthur Cayley, ktorý sa považuje za jedného z otcov teórie grafov. Problém štyroch farieb veľmi dlho odolával pokusom o vyriešenie. Už v 19. storočí prišli matematici s jeho „dôkazmi“. S najúspešnejšími pokusmi prišli A. Kempe v roku 1879 a P. Tait v roku 1880. Oba tieto „dôkazy“ odolávali vyše 11 rokov, ale nakoniec sa ukázali ako chybné v rokoch 1890 a 1891. Okrem týchto dvoch nasledoval ešte celý rad viac či menej úspešných pokusov o vyriešenie problému štyroch farieb. Na jeho vyriešenie bola dokonca vypísaná aj veľká finančná odmena. Avšak až v roku 1976 sa dvom matematikom, K. Appelovi a W. Hakenovi, podarilo vyriešiť tento problém za pomoci počítačov. Ich dôkaz spočíval v overovaní 1936³ možností pomocou počítača. Bol to prvý významný matematický problém dokázaný s podporou počítačov. Formálny matematický dôkaz problému štyroch farieb sa, síce bez overovania možností, ale taktiež s pomocou programu *Coq*, podaril až v roku 2005 matematikom B. Wernerovi a G. Gonthierovi.

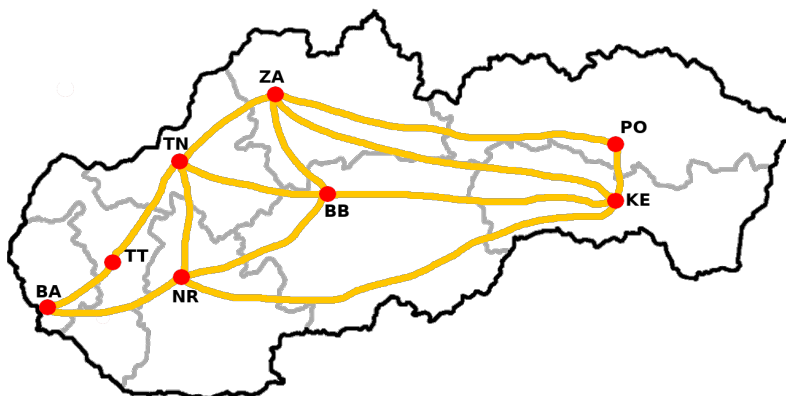
Oba spomenuté problémy boli spočiatku sformulované ako hlavolamové úlohy. Až o desaťročia neskôr sa ukázalo, že majú obrovský význam pre mnohé nové odvetvia techniky aj prírodných vied, ktoré v čase formulácie týchto problémov ešte ani neexistovali. To isté platí aj o ďalších problémoch teórie grafov a matematických problémoch všeobecne. To, čo dnes vyzerá ako od života odtrhnutá teória, sa o pár desaťročí môže ukázať ako pre technickú prax podstatná vec.

Prvú monografiu o teórii grafov napísal až v roku 1936 maďarský matematik Dénes Kőnig. Odvtedy patrí teória grafov medzi najrýchlejšie sa rozvíjajúce matematické disciplíny s množstvom praktických aplikácií v informatike, technike, prírodných vedách, v ekonómii a dokonca aj v tzv. humanitných vedách.

Okrem prednášok a tohto textu sú veľmi dobrým zdrojom informácií z teórie grafov, kniha [15], prípadne dvojce voľne dostupné skriptá [10] a [18], knihy [6], [4], [5], [17] atď.

3.2 Definícia grafu, typy grafov, základné pojmy

V praxi sa často stretávame s rôznymi typmi diagramov. Môžu to byť napríklad mapy cestnej alebo železničnej siete, rozvody plynu, elektriny alebo vody, výrobné plány, plošné spoje alebo návrhy mikroprocesorov, chemické väzby, štruktúra DNA atď. Napríklad môžeme mať cestnú mapu medzi

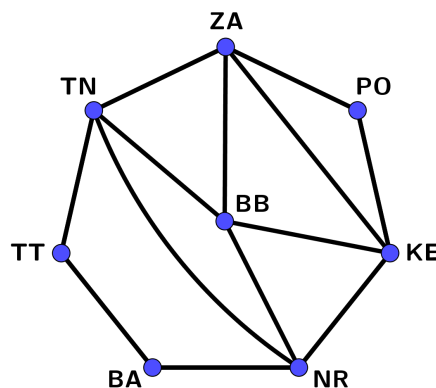


8 slovenskými krajskými mestami, ktorá vyzerá tak, ako je to znázornené na obrázku vyššie. Červené kruhy predstavujú krajské mestá a žlté čiary predstavujú cesty, ktoré ich spájajú. Predpokladajme, že máme za úlohu naplánovať trasu zásobovacieho auta, ktoré má vyštartovať z Bratislavy,

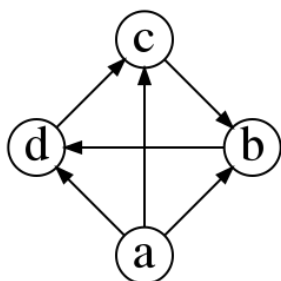
²https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem

³Neskôr sa tento počet podarilo zredukovať.

po každej z ciest má prejsť práve raz a má skončiť opäť v Bratislave. Pri takomto type úlohy nie je podstatné, aké dlhé a kľukaté sú cesty, ani aké sú veľké mestá a dokonca ani to, ako sú tieto mestá rozložené. Takže cestnú sieť medzi mestami môžeme abstrahovať od týchto, pre danú úlohu nepodstatných detailov a môžeme si ju znázorniť grafom, ktorý vidíme na obrázku vpravo. Body na grafe zodpovedajú mestám a budeme ich nazývať *vrcholy grafu*. Čiary spájajúce vrcholy grafu zodpovedajú cestám a budeme ich nazývať *hrany grafu*. Na grafe potom budeme riešiť popísanú úlohu. Podrobnejšie sa takýmito úlohami budeme zaoberať až v ďalších častiach. Nateraz sme si na uvedenej úlohe len ilustrovali pojem *neorientovaného grafu*. Ako vidíme, pojem graf v teórii grafov sa líši od pojmu graf v matematickej analýze.



Okrem neorientovaných grafov existujú ešte aj orientované grafy. Na predošlej úlohe by sme to mohli predstaviť tak, že cesty medzi mestami sú jednosmerné, čiže autá po nich môžu jazdiť



len jedným predpísaným smerom. Pojem orientovaného grafu si, pre väčšiu názornosť, ilustrujeme ešte aj na úplne odlišnom type úlohy. Na športovom turnaji hrajú štyri mužstvá **a**, **b**, **c**, **d** systémom „každý s každým“. Mužstvo **a** porazilo mužstvá **b**, **c** a **d**, mužstvo **b** porazilo mužstvo **d**, mužstvo **c** porazilo mužstvo **b** a napokon mužstvo **d** porazilo mužstvo **c**. Toto môžeme znázorniť pomocou orientovaného grafu, ktorý vidíme na obrázku vľavo. Vrcholy grafu predstavujú mužstvá a šípky, nazývané *orientované hrany grafu*, znázorňujú kto koho porazil.

Pojmy, ktoré sme si neformálne ilustrovali na predošlých príkladoch, si teraz definujeme aj formálne. Najskôr si definujeme neorientovaný a potom orientovaný graf. Pojem orientovaného grafu však budeme, v rámci predmetu *Diskrétna matematika*, používať len na prednáškach o reláciách. Na prednáškach, zaoberajúcich sa teóriou grafov a jej aplikáciami v informatike, sa budeme zaoberať len neorientovanými grafmi.

Definícia 3.2.1 — Neorientovaný graf. Neorientovaný graf, alebo stručne len graf, je usporiadaná dvojica $G = (V, E)$. Prvky množiny V sa nazývajú *vrcholy* (vertices) grafu G . Prvky množiny E sa nazývajú *hrany* (edges) grafu G a zodpovedajú jedno a dvojprvkovým podmnožinám množiny V .

P Treba si uvedomiť, že na množinu V sa v definícii 3.2.1 nekladú žiadne požiadavky. Uvedená definícia preto zahŕňa aj *prázdny graf*, t. j. graf, ktorý nemá žiadne vrcholy ani hrany. Prázdny graf dostaneme, ak bude $V = \emptyset$. Ďalej uvedená definícia pripúšťa aj *nekonečný graf*, t. j. graf, ktorý má nekonečný počet vrcholov, napríklad ak bude $V = \mathbb{Z}$. My sa budeme zaoberať len *konečnými grafmi*, t. j. grafmi s konečným počtom vrcholov a hrán.

Vrcholy grafu obvykle označujeme písmenami $u, v, v_1, v_2, \dots$ avšak môžeme ich označiť aj inak, ako sme to videli na príklade s krajskými mestami Slovenska. Hrany grafu budeme obvykle označovať písmenami $h, h_1, h_2, \dots$ a ak to bude potrebné, budeme ich zapisovať ako jednoprvkové alebo dvojprvkové množiny. Napríklad $h_1 = \{u, v\}$ bude označovať hranu spájajúcu vrcholy u a v a $h_2 = \{u\}$ bude označovať hranu spájajúcu vrchol u sám so sebou.

P Definícia 3.2.1 pripúšťa aj možnosť, že medzi dvoma vrcholmi grafu G je aj viac než len jedna hrana. Majme napríklad graf s vrcholmi $V = \{u, v, \dots\}$ a hranami $E = \{h_1, h_2, \dots\}$, pričom $h_1 = \{u, v\}$ a $h_2 = \{u, v\}$. Uvedený zápis znamená, že vrcholy u a v sú spojené aspoň dvoma hranami. V definícii 3.2.1 je v slove „zodpovedajú“ ukryté priradenie medzi hranami grafu a podmnožinami množiny V . Takže správne by sme mali písať $h_1 \rightarrow \{u, v\}$ a $h_2 \rightarrow \{u, v\}$. Pre jednoduchosť však aj naďalej budeme používať symbol „ $=$ “.

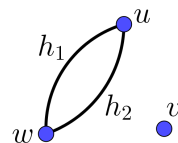
Teraz si ešte definujeme pojmy týkajúce sa vrcholov a hrán grafu a potom si tieto nové pojmy ilustrujeme na príkladoch.

Definícia 3.2.2 — Vrcholy a hrany grafu.

- ▷ **Incidencia** – Ak $h = \{u, v\}$, čiže hrana h spája vrcholy u a v , tak potom hovoríme, že tieto vrcholy *inciduujú* s hranou h a aj naopak, hrana h *inciduje* s vrcholmi u a v .
- ▷ **Susednosť** – Ak máme hranu $h = \{u, v\}$, t.j. vrcholy u a v sú spojené hranou, tak tieto vrcholy sa nazývajú *susedné vrcholy*.
- ▷ **Násobné hrany** – Ak sú dva vrcholy spojené viac než jednou hranou, tak hrany, ktoré ich spájajú, sa nazývajú *násobné hrany*.
- ▷ **Slučka** – Ak je vrchol u spojený hranou (susedí) sám so sebou, napríklad $h = \{u\}$, potom sa taká hrana sa nazýva *slučka*.
- ▷ **Izolovaný vrchol** – Vrchol, ktorý neinciduje so žiadnou hranou sa nazýva *izolovaný vrchol*.

■ Príklad 3.1

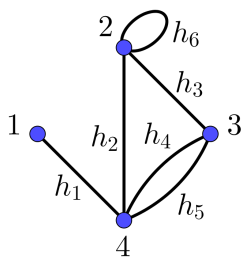
V grafe, ktorý vidíme na obrázku vpravo, je vrchol v izolovaný vrchol a hrany h_1 a h_2 , ktoré spájajú vrcholy u a w , sú násobné hrany. Vrcholy u a w sú susedné vrcholy a oba inciduujú s hranami h_1 aj h_2 .



Vzťah medzi vrcholom a hranou, alebo hranou a vrcholom, sa vždy bude nazývať *incidencia* a vzťah medzi vrcholom a vrcholom sa vždy bude nazývať *susednosť*.

■ **Príklad 3.2** Daný je neorientovaný graf $G = (V, E)$ s vrcholovou množinou $V = \{1, 2, 3, 4\}$ a s hranami $E = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$, pričom hrany sú definované predpisom

$$h_1 = \{1, 4\}, \quad h_2 = \{2, 4\}, \quad h_3 = \{2, 3\}, \quad h_4 = \{3, 4\}, \quad h_5 = \{3, 4\}, \quad h_6 = \{2\}$$



Graf G je zobrazený na obrázku vľavo. Hrana h_6 je slučka, inciduje len s vrcholom 2. Hrany h_4 a h_5 sú násobné hrany, spájajúce vrcholy 3 a 4. Hrana h_2 inciduje s vrcholmi 2 a 4 a rovnako aj tieto vrcholy inciduujú s hranou h_2 .

Formálna definícia orientovaného grafu je podobná definícii neorientovaného grafu, len navyše ešte musíme definovať orientáciu hrán.

Definícia 3.2.3 — Orientovaný graf. Orientovaný graf, alebo *digraf* (directed graph), je usporiadaná dvojica $G = (V, E)$. Prvky množiny V sa nazývajú *vrcholy* grafu G . Prvky množiny E sa nazývajú *orientované hrany* grafu G a zodpovedajú usporiadaným dvojiciam prvkov množiny V .

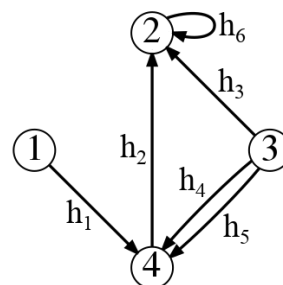
Ak $h = (u, v)$ kde $u \neq v$, tak hovoríme, že orientovaná hrana h spája vrcholy u a v , pričom vrchol u je *počiatočný* a vrchol v je *koncový* vrchol hrany h . Ak $h = (u, u)$, tak hovoríme, že orientovaná hrana h je *slučka*.

Ostatné pojmy z definície 3.2.2 platia rovnako pre neorientované aj pre orientované grafy.

■ **Príklad 3.3** Daný je orientovaný graf $G = (V, E)$ s vrcholovou množinou $V = \{1, 2, 3, 4\}$ a s hranami $E = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$, pričom hrany sú definované predpisom

$$h_1 = (1, 4), \quad h_2 = (4, 2), \quad h_3 = (3, 2), \quad h_4 = (3, 4), \quad h_5 = (3, 4), \quad h_6 = (2, 2)$$

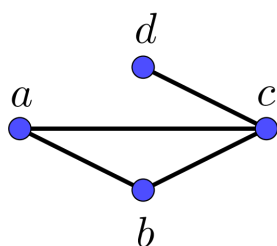
Graf G je zobrazený na obrázku vpravo. Všetky hrany tohto grafu majú orientáciu. Hrana $h_6 = (2, 2)$ je slučka, inciduje len s vrcholom 2. Hrany h_4 a h_5 sú násobné hrany. Obe majú počiatočný vrchol 3 a koncový vrchol 4.



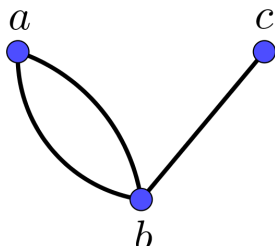
Teraz si definujeme pojem *obyčajný graf*. Väčšina grafov, s ktorými sa na predmete *Diskrétna matematika* budeme stretávať, budú obyčajné grafy.

Definícia 3.2.4 — Obyčajný graf. Obyčajný graf, nazývaný aj jednoduchý graf, je graf bez slučiek a násobných hrán.

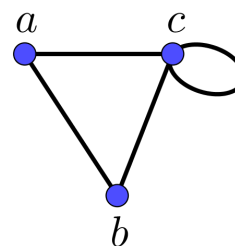
■ **Príklad 3.4** Graf na obrázku 3.2 je obyčajný graf. Graf na obrázku 3.3 má násobné hrany, a preto nie je obyčajný. Rovnako ani graf na obrázku 3.4 nie je obyčajný, pretože má slučku.



Obr. 3.2: Obyčajný graf



Obr. 3.3: Násobné hrany



Obr. 3.4: Graf so slučkou

Ďalším dôležitým pojmom, s ktorým sa často budeme stretávať, je *stupeň vrcholu*. Jeho formálna definícia je nasledovná.

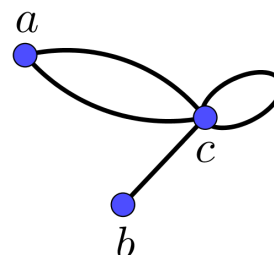
Definícia 3.2.5 — Stupeň vrcholu. Stupeň vrcholu u v grafe G je počet hrán, ktoré s vrcholom u incidujú, pričom slučky sa počítajú dvakrát. Stupeň vrcholu u označujeme $st(u)$.

■ Príklad 3.5

Stupne vrcholov grafu na obrázku vpravo sú

$$st(a) = 2, \quad st(b) = 1, \quad st(c) = 5.$$

Slučka pri vrchole c inciduje s týmto vrcholom dvakrát, a preto sa do stupňa vrcholu c aj započítava dvojnásobne.



Pre súčet stupňov vrcholov v grafe, platí nasledujúca, veľmi jednoduchá, ale zároveň aj veľmi dôležitá a často využívaná veta.

Veta 3.2.1 — Súčet stupňov vrcholov v grafe. Nech G je graf a $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ sú jeho vrcholy. Potom platí rovnosť

$$\sum_{i=1}^n \text{st}(v_i) = 2e,$$

kde e je počet hrán grafu G .

Dôkaz: Tvrdenie budeme dokazovať matematickou indukciou vzhľadom na počet hrán grafu.

1. Overenie pre $e = 0$: Ak graf G nemá žiadnu hranu, tak potom $\sum_{i=1}^n \text{st}(v_i) = 2 \cdot 0 = 0$, takže tvrdenie platí.
2. Indukčný krok: Predpokladajme, že tvrdenie platí pre všetky grafy s $e = (k - 1)$ hranami. Potom ukážeme, že tvrdenie platí aj pre grafy s $e = k$ hranami. Zoberme si graf G s $e = k$ hranami. Vynechaním jednej jeho hrany dostaneme graf G' s $e' = (k - 1)$ hranami, pre ktorý podľa indukčného predpokladu tvrdenie platí. Takže

$$G' : \quad \sum_{i=1}^n \text{st}(v_i) = 2e' = 2k - 2.$$

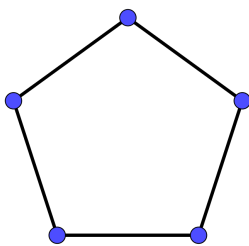
Ak do grafu G' vrátíme odobratú hranu, tak táto súčet stupňov vrcholov zvýši o 2. Každá hrana má 2 konce a buď inciduje s jedným vrcholom dvakrát a je to slučka, alebo inciduje s dvoma rôznymi vrcholmi, s každým práve raz. V každom prípade do súčtu stupňov vrcholov prispieje číslom 2. Preto pre graf G platí

$$G : \quad \sum_{i=1}^n \text{st}(v_i) = 2k - 2 + 2 = 2k = 2e. \quad \text{Q.E.D.}$$

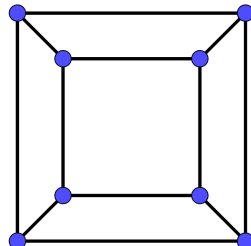
Veta 3.2.1 je síce veľmi jednoduchá ale fakt, že súčet stupňov vrcholov grafu je vždy párny má vážne praktické dôsledky, o ktorých sa môžeme presvedčiť napríklad aj v cvičeniach 3.3 až 3.6 na konci kapitoly. Pomocou stupňa vrcholov môžeme definovať pojem *pravidelný graf*. Pravidelné grafy majú množstvo aplikácií v praktických úlohách a patria medzi najviac skúmané grafy.

Definícia 3.2.6 — Pravidelný graf. Graf nazývame pravidelný stupňa s , ak všetky jeho vrcholy sú stupňa s .

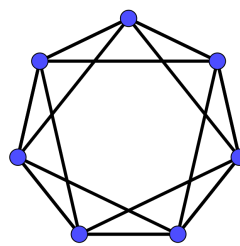
■ **Príklad 3.6** Pravidelné sú napríklad grafy na nasledovných obrázkoch



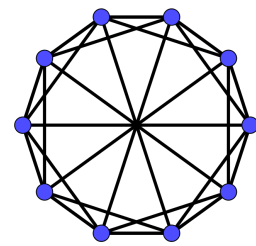
Obr. 3.5: Stupeň 2



Obr. 3.6: Stupeň 3



Obr. 3.7: Stupeň 4

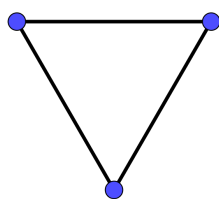
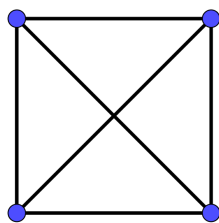
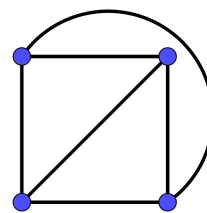


Obr. 3.8: Stupeň 5

Ďalším dôležitým pojmom teórie grafov je *kompletný graf*.

Definícia 3.2.7 — Kompletný graf. Kompletný (úplný) graf na n vrcholoch sa označuje K_n a je to obyčajný graf s n vrcholmi, ktorý obsahuje hranu medzi ľubovoľnými dvoma rôznymi vrcholmi.

■ **Príklad 3.7** Na obrázku 3.9 je kompletný graf na 3 vrcholoch (K_3). Na obrázkoch 3.10 a 3.11 je kompletný graf na 4 vrcholoch (K_4), nakreslený dvoma rôznymi spôsobmi. Graf K_4 je na obrázku 3.10 nakreslený s pretínajúcimi sa hranami a na obrázku 3.11 bez pretínajúcich sa hrán.

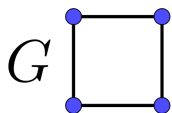
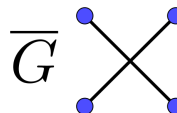
Obr. 3.9: Graf K_3 Obr. 3.10: Graf K_4 Obr. 3.11: Graf K_4

Pomocou kompletného grafu vieme jednoducho definovať pojem *komplementárny graf*, ktorý sa využíva v niektorých aplikáciách. Stretne sa s ním napríklad v cvičeniach 3.7, 3.8.

Definícia 3.2.8 — Komplementárny graf. Nech G je obyčajný graf na n vrcholoch. Potom komplementárny (doplňkový) graf ku grafu G budeme označovať $\overline{G}$ a dostaneme ho tak, že z grafu K_n vynecháme všetky hrany, ktoré patria do grafu G .

P Predošlá definícia vlastne hovorí, že $\overline{G}$ má rovnakú množinu vrcholov ako graf G a hranou sú v grafe $\overline{G}$ spojené práve tie vrcholy, ktoré nie sú spojené hranou v grafe G .

■ **Príklad 3.8** Na nasledujúcich dvoch obrázkoch je príklad grafu G a jeho komplementu $\overline{G}$.

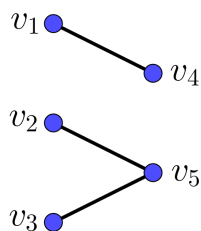
Obr. 3.12: Graf G Obr. 3.13: Komplementárny graf $\overline{G}$

Nasledujúcou dôležitou kategóriou grafov sú *bipartitné grafy*.

Definícia 3.2.9 — Bipartitný graf. Graf G s množinou vrcholov V sa nazýva bipartitný, ak existujú podmnožiny V_1 a V_2 množiny V také, že platí $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ a každá hrana grafu G inciduje s jedným vrcholom z množiny V_1 a s jedným vrcholom z množiny V_2 .

P Bipartitné grafy sú také grafy, v ktorých množinu vrcholov môžeme rozdeliť na dve časti tak, že ľubovoľné dva vrcholy, patriace do rovnakej časti, nie sú navzájom spojené hranou.

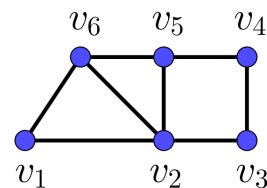
■ **Príklad 3.9**



Graf na obrázku vľavo je bipartitný. Jeho množinu vrcholov V môžeme rozdeliť na dve podmnožiny $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ a $V_2 = \{v_4, v_5\}$ tak, že $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ a každá hrana tohto grafu inciduje s jedným vrcholom z množiny V_1 a s jedným vrcholom z množiny V_2 . Pritom, ako môžeme vidieť, tento graf neobsahuje všetky hrany medzi V_1 a V_2 . Napríklad medzi vrcholmi v_1 a v_5 nie je hrana.

■ **Príklad 3.10**

Dokážeme, že graf na obrázku vpravo nie je bipartitný. Dôkaz budeme robiť sporom. Budeme preto predpokladať, že graf na obrázku vpravo bipartitný je. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $v_1 \in V_1$, pretože úvaha pre prípad $v_1 \in V_2$ by bola identická. Vrcholy v_2 a v_6 sú susedné vrcholu v_1 , pretože incidujú s hranami



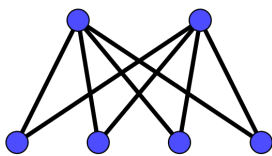
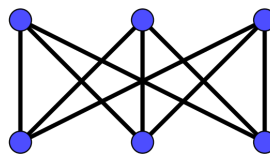
vychádzajúcimi z vrcholu v_1 . To znamená, že vrcholy v_2 a v_6 musia patriť do V_2 . To však je spor s tým, že daný graf je bipartitný, pretože vrcholy v_2 a v_6 sú spojené hranou. V bipartitnom grafe každá hrana musí incidovať s jedným vrcholom z V_1 a s jedným vrcholom z V_2 . Preto daný graf nemôže byť bipartitný. ■

Ďalší pojem, ktorý si zadefinujeme, je *kompletný bipartitný graf*.

Definícia 3.2.10 — Kompletný bipartitný graf. Nech $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ a $n \geq 1$. Kompletný (úplný) bipartitný graf označujeme $K_{m,n}$ a je to obyčajný graf na $m + n$ vrcholech, ktorého množina vrcholov sa dá rozdeliť na dve disjunktné podmnožiny V_1 a V_2 tak, že $|V_1| = m$ a $|V_2| = n$, pričom každý vrchol z V_1 je spojený hranou s každým vrcholom z V_2 .

■ **Príklad 3.11** Graf z príkladu 3.9 nie je kompletný bipartitný, pretože v ňom chýbajú napríklad hrany medzi vrcholmi v_1 a v_5 alebo medzi vrcholmi v_2 a v_4 .

Grafy na obrázkoch 3.14 a 3.15 sú príklady kompletných bipartitných grafov $K_{2,4}$ a $K_{3,3}$.

Obr. 3.14: Graf $K_{2,4}$ Obr. 3.15: Graf $K_{3,3}$

3.3 Sledy, ťahy, cesty a cykly v grafe

Vráťme sa ku motivačným príkladom z častí 3.1 a 3.2. Nech vrcholy grafu predstavujú mestá (alebo geografické miesta) a hrany grafu predstavujú cesty medzi týmito mestami. Potom „pochôdzku“, začínajúcu v niektorom z miest, vedenú po vyznačených cestách a prechádzajúcu ďalšími mestami, nazývame v teórii grafov *sled*⁴.

Definícia 3.3.1 — Sled, dĺžka sledu. Nech v_0 a v_n sú vrcholy grafu G . Sled z vrcholu v_0 do vrcholu v_n dĺžky n je striedavá (striedajú sa vrcholy s hranami) postupnosť $(n + 1)$ vrcholov a n hrán $(v_0, h_1, v_1, h_2, \dots, v_{n-1}, h_n, v_n)$, kde hrana h_i inciduje s vrcholmi v_{i-1} a v_i pre $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pod dĺžkou sledu sa rozumie počet jeho hrán.

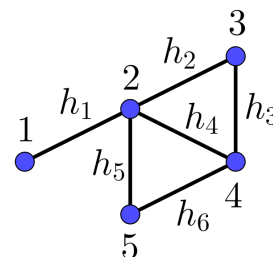
P V obyčajnom grafe môžeme sled $(v_0, h_1, v_1, \dots, v_{n-1}, h_n, v_n)$ stručne zapísať ako $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n)$, čiže môžeme vynechať z jeho zápisu hrany. V obyčajnom grafe nám postupnosť vrcholov jednoznačne určuje aj postupnosť hrán medzi nimi.

⁴V niektorých starších publikáciách z oblasti teórie grafov českej a slovenskej proveniencie sa sled nazýval aj *pochôdzka* alebo *prechádzka*.

■ **Príklad 3.12**

V grafe na obrázku vpravo je $(1, h_1, 2, h_2, 3, h_3, 4, h_4, 2)$ sled dĺžky 4 z vrcholu 1 do vrcholu 2. Keďže daný graf nemá násobné hrany, dá sa tento sled zapísať aj ako $(1, 2, 3, 4, 2)$.

Iný sled v danom grafe je $(1, h_1, 2, h_4, 4, h_6, 5, h_5, 2, h_2, 3)$. Je to sled dĺžky 5 z vrcholu 1 do vrcholu 3 a dá sa skrátene zapísať ako $(1, 2, 4, 5, 2, 3)$. Napokon (5) je sled dĺžky 0 na vrchole 5.



Definícia 3.3.2 — Uzavretý a otvorený sled. Sled z vrcholu u do vrcholu v sa nazýva uzavretý, ak $u = v$. Ak $u \neq v$, tak sled sa nazýva otvorený.

■ **Príklad 3.13** Prvé dva sledy z príkladu 3.12 sú otvorené sledy. Prvý z nich začína vo vrchole 1 a končí vo vrchole 2 a druhý z nich začína vo vrchole 1 a končí vo vrchole 3. Posledný sled z príkladu 3.12 je uzavretý sled. Sled (5) je sled dĺžky 0, ktorý sa začína aj končí vo vrchole 5. Iný príklad uzavretého sledu z grafu v príklade 3.12 je $(2, h_2, 3, h_3, 4, h_6, 5, h_5, 2)$.

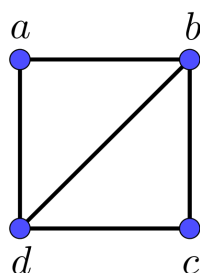
V sledoch sa vo všeobecnosti vrcholy aj hrany môžu opakovať. Napríklad v grafe z príkladu 3.12 by sme mohli chodiť „dokola“ po slede $(2, h_4, 4, h_6, 5, h_5, 2, h_4, 4, h_6, 5, h_5, 2, \dots)$ Definujeme si teraz špeciálne typy sledov, v ktorých takého „behánie dokola“ nie je povolené.

Definícia 3.3.3 — Ťah a cesta a ich dĺžka. Sled, v ktorom sa každá hrana vyskytuje najviac raz, sa nazýva ťah. Sled, v ktorom sa každý vrchol vyskytuje najviac raz, sa nazýva cesta. Dĺžka ťahu alebo cesty je počet hrán príslušného ťahu alebo cesty.

P Treba si uvedomiť, že každá cesta je aj ťah a každý ťah je aj sled. Preto ak by sme si označili sled, ťah a cesta množiny všetkých sledov, ťahov a ciest, tak platí

$$\text{cesta} \subset \text{ťah} \subset \text{sled}$$

Naopak to vo všeobecnosti neplatí, pretože existujú sledy, ktoré nie sú ťahmi a existujú ťahy, ktoré nie sú cestami.

■ **Príklad 3.14**

V grafe, na obrázku vľavo, (a, b, d, c, b) **je ťah**, (a, b, d, a, b) **nie je ťah**, pretože dvakrát obsahuje hranu $\{a, b\}$. (a, b, d, c) **je cesta** a (a, b, d, c, b) **nie je cesta**, pretože dvakrát obsahuje vrchol b .

P Rovnako, ako sa v definícii 3.3.2 definoval uzavretý a otvorený sled, sa definuje aj uzavretý a otvorený ťah.

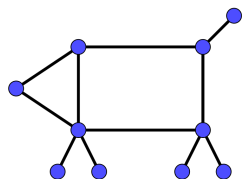
Ako už bolo spomenuté v poznámke za definíciou 3.3.3, je zrejmé, že každá cesta je aj ťah a každý ťah je aj sled. Opačná implikácia však neplatí, t. j. nie každý sled je ťah a nie každý ťah je cesta. Platí však nasledujúca veta.

3.4 Súvislý graf, podgraf, komponent súvislosti

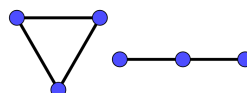
Ďalšou dôležitou vlastnosťou grafov je ich súvislosť.

Definícia 3.4.1 — Súvislý a nesúvislý graf. Graf $G = (V, E)$ sa nazýva súvislý, ak pre ľubovoľné $u, v \in V$ existuje cesta z vrcholu u do vrcholu v . Graf G sa nazýva nesúvislý, ak nie je súvislý.

■ **Príklad 3.15** Graf na obrázku 3.16 je súvislý, pretože medzi jeho ľubovoľnými dvoma vrcholmi existuje cesta. Graf na obrázku 3.17 nie je súvislý, pretože sa v ňom dajú nájsť viaceré dvojice vrcholov, medzi ktorými neexistuje cesta. Koľko takých rôznych dvojíc vrcholov existuje?



Obr. 3.16: Súvislý graf



Obr. 3.17: Nesúvislý graf ■

Na predošlom príklade sme si ilustrovali, že súvislý graf pozostáva „z jedného kusa“ a nesúvislý graf pozostáva „z viacerých (súvislých) kusov“. Tieto súvislé kusy, z ktorých graf pozostáva, sa nazývajú *komponenty súvislosti* a formálne budú definované neskôr. Dôležité ale je zapamätať si, že súvislé grafy majú vždy len jeden komponent súvislosti a nesúvislé grafy majú vždy viac než jeden komponent súvislosti. Napríklad graf na obrázku 3.17 má dva komponenty súvislosti.

Ďalším dôležitým pojmom, ktorý definujeme, bude *cyklus*.

Definícia 3.4.2 — Cyklus. Cyklus je súvislý pravidelný graf stupňa 2. Dĺžka cyklu je počet jeho hrán. Cyklus dĺžky n sa označuje C_n .

Pre cyklus C_n platí nasledujúce tvrdenie.

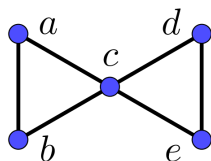
Veta 3.4.1 Ak v_i a v_j sú dva rôzne vrcholy cyklu C_n , tak medzi nimi existujú dve rôzne cesty.

Dôkaz: cyklus C_n má n vrcholov, ktorým postupne priradíme označenia v_0 až v_{n-1} . Na začiatku si zvolíme ľubovoľný vrchol cyklu C_n a označme ho v_0 . Podľa definície 3.4.2 je C_n pravidelný graf stupňa 2, takže vrchol v_0 má 2 susedov. Jedného z nich označme v_1 . Vrchol v_1 má takisto 2 susedov. Jeden z nich je vrchol v_0 a toho druhého označíme v_2 . Takto budeme postupovať ďalej, pričom vrchol v_i , pre $i < (n-1)$, bude susediť s vrcholmi v_{i-1} a v_{i+1} .

Teraz predpokladajme, že niektorý vrchol v_k , pre $k < (n-1)$, by v C_n susedil s vrcholom v_0 . Potom by žiaden vrchol v_l , pre $k < l \leq (n-1)$, kvôli stupňom vrcholov nemohol susediť so žiadnym z vrcholov v_i pre $i \in \{0, \dots, k\}$. To by znamenalo, že daný graf by bol nesúvislý, čo by bol spor s definíciou 3.4.2. Náš predpoklad bol preto nesprávny a žiaden vrchol v_k , pre $k < (n-1)$, nie je susedný s vrcholom v_0 .

Uvedeným spôsobom postupne označíme všetky vrcholy C_n ako v_0 až v_{n-1} . Tým dostaneme sled, v ktorom vrcholy v_0 a v_{n-1} majú stupeň 1 a všetky ostatné vrcholy majú stupeň 2. Naviac sa, vzhľadom na spôsob označovania vrcholov a ich stupne, žiaden vrchol nemôže opakovať. Preto je tento sled cestou. Podľa definície 3.4.2 má byť C_n pravidelný graf stupňa 2, takže ešte musíme navzájom hranou spojiť vrcholy v_0 a v_{n-1} . Tým dostaneme uzavretý sled $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0)$. Ak si zoberieme ľubovoľné dva rôzne vrcholy v_i a v_j cyklu C_n , tak medzi nimi existujú dve rôzne cesty. Tieto cesty vyberieme zo sledu $(v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_0)$ tak, že jedna bude začínať vo vrchole v_i a druhá bude začínať vo vrchole v_j a obe pôjdu v smere rastúcich indexov vrcholov. Q.E.D.

■ Príklad 3.16



V grafe, na obrázku vľavo, (a, c, d, e, c, b, a) **nie je cyklus**, pretože sa v ňom opakuje vrchol c , ktorý preto nie je stupňa 2. Ale (a, c, b, a) a (c, d, e, c) **sú cykly**, oba majú dĺžku 3. V oboch prípadoch sa jedná o pravidelné grafy stupňa 2. ■

P Ľubovoľný vrchol cyklu si môžeme označiť ako počiatočný (koncový). Potom sa v zápise cyklu okrem počiatočného (koncového) vrcholu žiaden iný vrchol nesmie opakovať. Čiže v jednom vrchole „rozpojený“ cyklus je cesta. Táto poznámka naznačuje inú možnú definíciu cyklu.

V teórii grafov sa mnohé pojmy dajú definovať viacerými alternatívnymi spôsobmi. Preto sa v literatúre a na webe môžeme stretnúť s rôznymi, avšak významovo ekvivalentnými, definíciami rovnakých pojmov. Jedným z dvoch príkladov takýchto alternatívnych definícií, ktoré si v tomto texte ukážeme, bude práve definovaný pojem *cyklus*. Druhým takýmto pojmom bude pojem *strom*, ktorý bude definovaný až v nasledujúcej kapitole. Vo vete 4.2.7 (str. 76) si uvedieme až 4 rôzne definície pojmu strom.

Platí nasledujúca veta.

Veta 3.4.2 — Alternatívne definície cyklu C_n . Nasledujúce dve tvrdenia sú ekvivaletné.

- A) Cyklus C_n je súvislý pravidelný graf stupňa 2 na n vrchoch.
- B) Cyklus C_n je cesta dĺžky n , na ktorej stotožníme jej počiatočný a koncový vrchol.

Dôkaz: máme dokázať ekvivalenciu dvoch tvrdení. Budeme to dokazovať ako dve implikácie.

- ▷ A) $\Rightarrow$ B): **Ak v súvislom pravidelnom grafe stupňa 2 na n vrchoch rozdvojíme jeden vrchol, tak dostaneme cestu dĺžky n .**

Majme súvislý pravidelný graf stupňa 2 na n vrchoch. Označme si ľubovoľný vrchol ako v_0 a vrcholy s ním susediace označme v_1 a v_{n-1} . Podľa vety 3.4.1 musí medzi vrcholmi v_1 a v_{n-1} existovať cesta neobsahujúca vrchol v_0 . Preto ak vrchol v_0 „zdvojíme“ (rozsekne), spravíme z neho vrcholy v_{0P} a v_{0K} , pričom vrchol v_{0P} bude sused vrcholu v_1 a vrchol v_{0K} bude sused vrcholu v_{n-1} , tak dostaneme cestu dĺžky n (cestu na $n+1$ vrchoch). Q.E.D.

- ▷ B) $\Rightarrow$ A): **Ak na ceste dĺžky n stotožníme jej počiatočný a koncový vrchol, tak dostaneme súvislý pravidelný graf stupňa 2 na n vrchoch.**

Cesta dĺžky n je súvislý graf na $n+1$ vrchoch s n hranami, pričom počiatočný a koncový vrchol cesty majú stupeň 1 a všetky jej ostatné vrcholy majú stupeň 2. Označme si počiatočný vrchol cesty v_{0P} a jej koncový vrchol v_{0K} . Ak stotožníme vrcholy v_{0P} a v_{0K} do vrcholu označeného v_0 , tak dostaneme súvislý graf na n vrchoch, ktoré všetky majú stupeň 2. Dostali sme teda súvislý, pravidelný graf stupňa 2 na n vrchoch. Q.E.D.

P Pokiaľ je explicitne dané, že ide o cyklus, alebo ak to je zrejmé z kontextu, tak sa v zápise cyklu koncový vrchol vynecháva, pretože je totožný s počiatočným vrcholom. Takže cykly z príkladu 3.16 by sa zapísali ako cyklus (a, c, b) resp. cyklus (c, d, e) .

Nasledujúcim dôležitým pojmom, ktorý potrebujeme poznať, je *podgraf*.

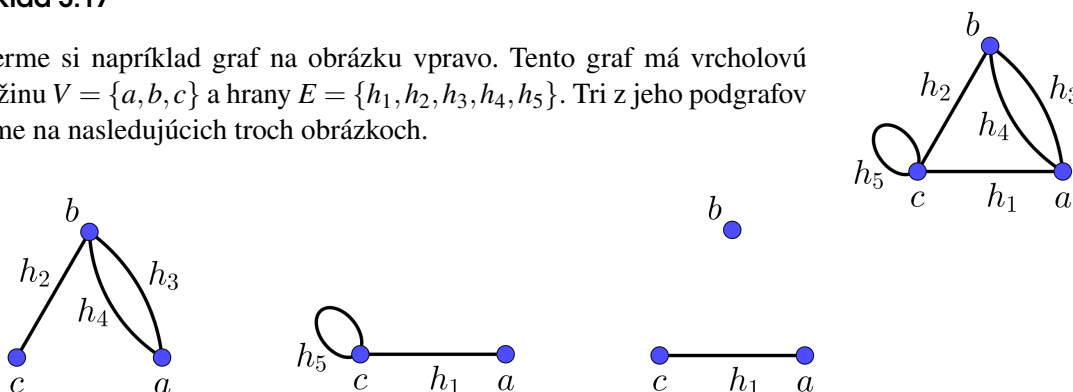
Definícia 3.4.3 — Podgraf. Graf $G' = (V', E')$ sa nazýva podgraf grafu $G = (V, E)$, ak platí $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$.

P Jednoducho by sa dalo povedať, že podgraf grafu G dostaneme, ak vyberieme niektoré jeho vrcholy a niektoré hrany spájajúce tieto vrcholy. Hrany môžeme vybrať len také, ktorých oba inciduujúce vrcholy sú vybraté.

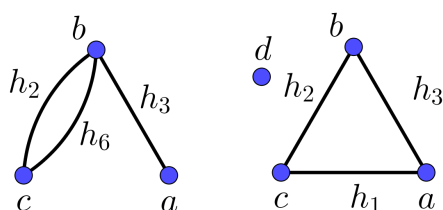
V definícii 3.4.3 by samotné podmienky $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$ nestačili na to, aby išlo o podgraf. Dôležitý je aj fakt, že v prípade G' ide o graf. O tom hovorí aj predchádzajúca poznámka. Pojem podgrafu si ilustrujeme na nasledujúcich dvoch príkladoch.

■ Príklad 3.17

Zoberme si napríklad graf na obrázku vpravo. Tento graf má vrcholovú množinu $V = \{a, b, c\}$ a hrany $E = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$. Tri z jeho podgrafov vidíme na nasledujúcich troch obrázkoch.



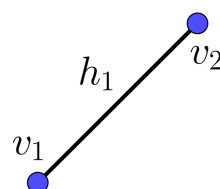
Ale nasledujúce dva grafy nie sú podgrafy pôvodného grafu.



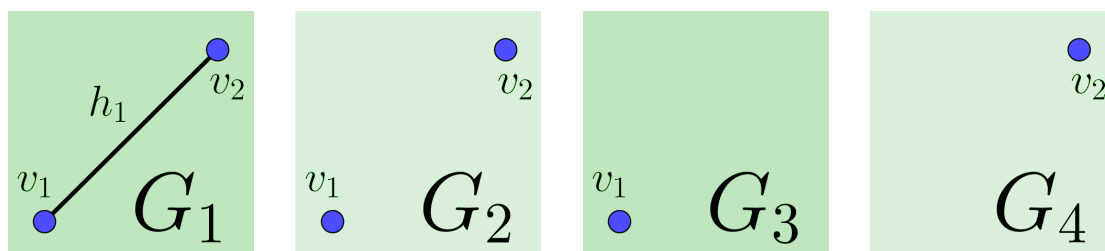
Prvý z nich obsahuje hranu h_6 , ktorá v pôvodnom grafe nie je a druhý obsahuje vrchol d , ktorý v pôvodnom grafe nie je.

■ Príklad 3.18

Nájdite všetky neprázdne podgrafy grafu na obrázku vpravo.



Riešenie: Daný graf má len jednu hranu a s ňou inciduujúce dva vrcholy. Takže v jeho podgrafoch buď hranu vyberieme, alebo nie a keď hranu nevyberieme, môžeme vybrať jeden alebo oba z daných vrcholov. Takže daný graf má 4 neprázdne podgrafy, ktoré vidíme na nasledujúcich obrázkoch.



P Z príkladu 3.18 vidíme, že graf je podgrafom samého seba, čo je aj v súlade s definíciou 3.4.3, pretože $V' \subseteq V$ a $E' \subseteq E$ platí aj keď $V' = V$ a $E' = E$.

Teraz si „súvislé kusy“ grafu, spomenuté za príkladom 3.15, formálne definujeme ako *komponenty súvislosti*. Ide o ďalší dôležitý pojem teórie grafov a pri jeho definícii sa používajú pojmy *súvislý graf* a *podgraf*, ktoré sme už definovali.

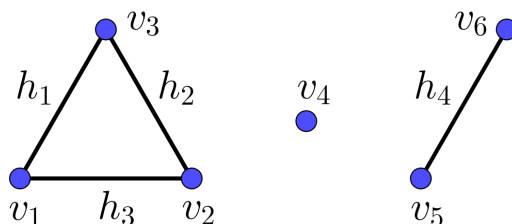
Definícia 3.4.4 — Komponent súvislosti grafu. Nech G je graf. Potom komponent súvislosti grafu G je maximálny súvislý podgraf grafu G .

P Pojem „maximálny“ sa v definícii 3.4.4 chápe v množinovom zmysle. To znamená, že maximálny súvislý podgraf grafu G je taký podgraf grafu G , do ktorého sa nedá pridať žiadna hrana a s ňou incidujúce vrcholy z grafu G tak, aby podgraf zostal súvislý.

Pojem „maximálny“ v definícii 3.4.4 neznamená, že každý graf má len jeden komponent súvislosti. Ak by sme použili terminológiu matematickej analýzy, tak by sa to dalo prirovnať k lokálnemu maximu. Rovnako ako funkcia môže mať viacero lokálnych maxim, môže mať aj graf viacero maximálnych súvislých podgrafov – komponentov. Napríklad graf na obrázku 3.16 je súvislý a má len jeden komponent súvislosti. Ale graf na obrázku 3.17 nie je súvislý a má dva komponenty. Jeden z jeho komponentov je graf K_3 (trojuholník) a druhý je cesta dĺžky 2.

P Ako už bolo spomenuté za príkladom 3.15, každý súvislý graf má práve jeden komponent súvislosti a každý nesúvislý graf má vždy viac než jeden komponent súvislosti. Toto tvrdenie by sa dalo sformulovať a dokázať aj ako veta, ale nebudeme to robiť, pretože dôkaz je triviálny.

■ **Príklad 3.19** Majme graf G daný nasledovným obrázkom

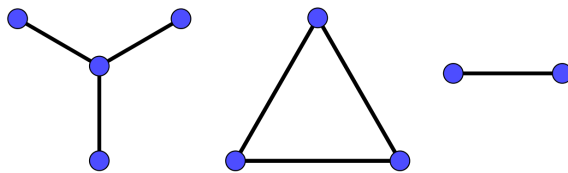


Tento graf má tri komponenty súvislosti. Označme si ich $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ a $G_3 = (V_3, E_3)$. Komponent G_1 obsahuje len vrcholy $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, komponent G_2 obsahuje len vrchol $V_2 = \{v_4\}$ a komponent G_3 obsahuje len vrcholy $V_3 = \{v_5, v_6\}$. Hranové množiny komponentov sú $E_1 = \{h_1, h_2, h_3\}$, $E_2 = \emptyset$ a $E_3 = \{h_4\}$. ■

■ **Príklad 3.20**

Graf na obrázku vpravo má tri komponenty súvislosti

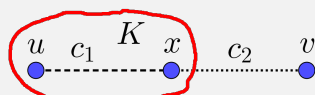
- hviezdu s tromi „cípmi“.
- kompletný graf K_3 (trojuholník)
- a cestu dĺžky 1 (jednu hranu).



O komponentoch súvislosti triviálne platí nasledujúca veta.

Veta 3.4.3 — O komponentoch. Majme graf $G = (V, E)$ a nech $u, v \in V$. Ak sú vrcholy u a v spojené sledom (cestou), tak patria do rovnakého komponentu súvislosti.

Dôkaz: Nech vrcholy u a v sú spojené sledom. Potom sú, podľa vety 3.3.1, spojené aj cestou c . Označme si komponent súvislosti, do ktorého patrí vrchol u , ako K a predpokladajme, že vrchol v nepatrí do K . V takom prípade existuje na ceste c vrchol x , ktorý ako posledný ešte patrí do K (môže byť aj $u = x$). Cesta c , spájajúca vrcholy u a v , sa dá potom rozdeliť na dve časti c_1 a c_2 tak, že jej časť c_1 ešte patrí do K a časť c_2 , aj s vrcholom v , už do K nepatrí. Situácia je znázornená na nasledujúcom obrázku.



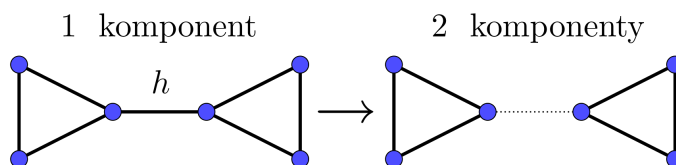
Ak teraz do grafu K pridáme ešte aj všetky hrany a vrcholy cesty c_2 , tak podľa definície 3.4.1 zostane takýto graf súvislý. To je však spor s definíciou 3.4.4, pretože komponent súvislosti grafu G je maximálny súvislý podgraf grafu G . Preto predpoklad, že vrchol v nepatrí do komponentu K bol nesprávny, a tým je veta dokázaná. Q.E.D.

S komponentmi súvislosti súvisia aj ďalšie dva pojmy, ktoré budeme využívať v ďalších kapitolách. Sú to pojmy *most* a *artikulácia*.

Definícia 3.4.5 — Most a artikulácia. Majme graf $G = (V, E)$. Potom

- ▷ hrana $h \in E$ sa nazýva *most*, ak sa po jej vynechaní zväčší počet komponentov grafu G .
- ▷ vrchol $v \in V$ sa nazýva *artikulácia*, ak sa po vynechaní vrcholu v a všetkých s ním inciduujúcich hrán zväčší počet komponentov grafu G .

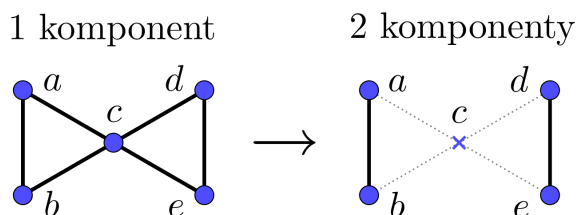
■ **Príklad 3.21** Zoberme si ako príklad graf z nasledujúceho obrázku



Tento graf má jeden komponent, čiže je súvislý. Hrana h v uvedenom grafe je most, pretože keď ju z grafu vynecháme, rozpadne sa nám na dva komponenty. Zároveň je hrana h v danom grafe jediný most, pretože vynechaním žiadnej inej (jednej) hrany sa počet komponentov nezvýši. ■

Na ďalšom príklade si ilustrujeme pojem *artikulácia*.

■ **Príklad 3.22** Zoberme si graf z príkladu 3.16. Tento graf je súvislý, t. j. má len 1 komponent súvislosti. Ak ale z neho vynecháme vrchol c a hrany s ním inciduujúce, tak sa nám graf rozpadne na 2 komponenty.

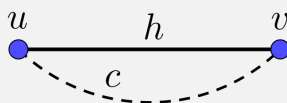


Pojmy most a artikulácia sú veľmi jednoduché, ale často tieto pojmy a vlastnosti grafov z nich vyplývajúce využívame pri formulovaní a dôkazoch rôznych aj netriviálnych tvrdení. Väčšina

vlastností týkajúcich sa uvedených pojmov je taká jednoduchá, že ich môžeme zaradiť medzi cvičenia. Len jednu z týchto vlastností si tu dokážeme ako lemu⁵.

Lema 3.4.4 — O mostoch. Daný je graf $G = (V, E)$. Ak hrana $h \in E$ nie je most, tak patrí do nejakého cyklu.

Dôkaz: Máme graf $G = (V, E)$ a v ňom hranu $h \in E$, ktorá nie je most. To znamená, že jej vynechaním sa počet komponentov nezvýši. Nech u a v sú vrcholy incidujúce s hranou h . Tieto dva vrcholy sú spojené hranou h , čo podľa vety 3.4.3 znamená, že v grafe G patria do rovnakého komponentu súvislosti. Keďže vynechaním hrany h sa počet komponentov grafu G nezvýši, musia vrcholy u a v , aj po vynechaní hrany h , patriť do toho istého komponentu. Podľa definícií 3.4.4 a 3.4.1 to znamená, že musí existovať cesta c spájajúca vrcholy u a v , neobsahujúca hranu h . Situácia musí vyzeráť tak, ako vidíme na nasledovnom obrázku



Keď k ceste c pridáme hranu h dostaneme cyklus, t. j. hrana h patrí do cyklu grafu G . Q.E.D.

P Tvrdenie lemy 3.4.4 je ekvivalentné s tvrdeniami:

- Hrana h je most, ak nepatrí do žiadneho cyklu grafu G .
Takto sa napríklad v [32] definuje pojem most.
- Hrana h je buď most, alebo patrí do nejakého cyklu. (pozri cvičenie 3.34)

3.5 Kostra grafu

Na záver tejto kapitoly si ešte definujeme pojem „kosta grafu“, ktorý je veľmi dôležitý a budeme sa s ním ešte často stretávať v nasledujúcich kapitolách a mnohých praktických aplikáciách teórie grafov. Kosta grafu sa v aplikáciach využíva všade tam, kde v súvislom grafe na n vrcholoch potrebujeme mať minimálny možný počet hrán (spojení) medzi týmito n vrcholmi. Najskôr si definujeme dva jednoduché pomocné pojmy a pomocou nich definujeme kosta grafu.

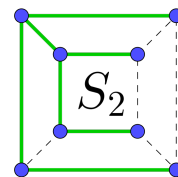
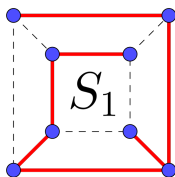
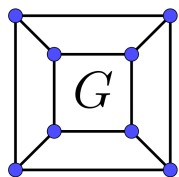
Definícia 3.5.1 — Faktor grafu. Faktor grafu G je taký podgraf grafu G , ktorý obsahuje všetky jeho vrcholy.

Definícia 3.5.2 — Acyklický graf. Graf G sa nazýva acyklický, ak neobsahuje žiadny cyklus.

P Predošlá definícia spadá skôr do oblasti „jazykovedného okienka“, keďže je všeobecne známe, že predpona a - pochádza z gréčtiny a vyjadruje zápor. Takže a -cyklický v preklade znamená „necyklický, nemajúci cyklus, netvoriaci cyklus...“.

Definícia 3.5.3 — Kosta grafu. Kosta grafu G je súvislý, acyklický faktor grafu G .

■ **Príklad 3.23** Napríklad S_1 a S_2 , zvýraznené červenou a zelenou farbou, sú dve kostry grafu G . Pozri nasledovné obrázky.



⁵Lemou sa v matematike nazývajú pomocné tvrdenia.

Z príkladu 3.23 vidíme, že graf môže mať aj viac než jednu kosť. Ľahko sa dá dokázať, že každý súvislý graf musí mať aspoň jednu kosť (cvičenie 3.35). Keďže priamo z definície kostry grafu vyplýva, že ak graf G má kosť, tak je súvislý, tak platí nasledujúca veta.

Veta 3.5.1 — O existencii kostry. Konečný graf G má kosť práve vtedy, keď je súvislý.

Dôkaz: tvrdenie je ekvivalencia, budeme ho preto dokazovať ako dve implikácie.

⇒ **Ak graf G má kosť, tak je súvislý.**

Podľa definície 3.5.3 je kosť súvislý faktor grafu G . To znamená, že medzi ľubovoľnými dvoma vrcholmi grafu G existuje cesta, čiže G je súvislý graf.

⇐ **Ak graf G je súvislý, tak má kosť.**

Ak graf G je acyklický, tak je sám sebe kosťou. Predpokladajme preto, že graf G obsahuje nejaký cyklus C . Hrana cyklu nemôže byť most (lema 3.4.4 a poznámka za ňou), takže vynechaním jednej hrany cyklu C , dostaneme podgraf grafu G , ktorý má všetky vrcholy grafu G , je súvislý a neobsahuje cyklus C . Graf G môže obsahovať len konečný počet cyklov, takže konečným počtom opakovaní uvedeného postupu dostaneme podgraf grafu G , ktorý obsahuje všetky jeho vrcholy a je súvislý aj acyklický. To znamená, že graf G má kosť. Q.E.D.

Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že veta 3.5.1 nám dáva vhodný návod, algoritmus, na konštrukciu kostry grafu. Zdanie však klame! Problém je v tom, že nájsť (všetky) cykly v danom grafe je zložitý, časovo náročný problém. Existujú iné, omnoho efektívnejšie algoritmy, ktorými sa budeme zaoberať neskôr.

3.6 Cvičenia

Cvičenie 3.1 Daná je množina čísel $\{1, 3, 4, 6, 9, 12, 36\}$. Priradíte týmto číslam vrcholy grafu a vrchol u spojte orientovanou hranou s vrcholom v práve vtedy, keď platí $u \mid v$ (číslo u delí číslo v). Koľko hrán bude mať takýto orientovaný graf? Pre ktoré čísla u, v platí, že existuje hrana (u, v) a súčasne aj hrana (v, u) ? ■

Cvičenie 3.2 K_n je kompletný graf na n vrchoch.

- (a) Nakreslite $K_2, K_3, K_4, \dots, K_8$.
- (b) Koľko hrán má graf K_n pre $n \in \mathbb{N}$? ■

Cvičenie 3.3 Nakreslite graf so šiestimi vrcholmi, ktorých stupne sú 1, 2, 3, 4, 5, 2 alebo dokážte, že to nie je možné. ■

Cvičenie 3.4 Predseda viktoriánskeho klubu klenotníkov nahlásil Scotland Yardu vlamanie a krádež šperkov a hotovosti v hodnote miliónov libier z ich klubového trezoru. Keďže si inšpektor Lestrade nevedel s prípadom rady, prizval na pomoc Sherlocka Holmesa, ktorý raz vypočul predsedu klubu a chcel po ňom zoznam všetkých členov klubu. Ten mu na to povedal: „Členovia nášho klubu si veľmi zakladajú na svojom súkromí a nikdy sa nestretávajú všetci naraz a ani neexistuje kompletný zoznam členov klubu. Stretávajú sa maximálne v 5 - členných skupinkách, keď spolu vedieme obchodné rokovania a uzatvárame obchody. Ako predseda klubu vám viem povedať len to, že náš klub má spolu 13 členov a každý člen klubu pozná práve 5 ďalších členov klubu.“ Na to Sherlock Holmes povedal inšpektorovi Lestradovi, že tak to určite nebolo a predseda klubu zrejme klame aj pokiaľ ide o krádež šperkov a peňazí. Ako to zistil? ■

Cvičenie 3.5 Dokážte, že neexistuje pravidelný graf nepárneho stupňa, s nepárnym počtom vrcholov. ■

Cvičenie 3.6 Dokážte, že v každom grafe je počet vrcholov nepárneho stupňa vždy párný. ■

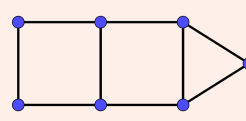
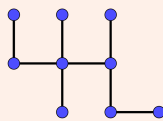
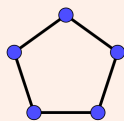
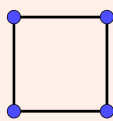
Cvičenie 3.7 Nakreslite komplementárne grafy ku grafom z obrázkov 3.5, 3.6, 3.7 a 3.8 na strane 52. Sú tieto grafy pravidelné? ■

Cvičenie 3.8 Dokážte, že ak je graf G pravidelný, tak aj graf $\overline{G}$ je pravidelný. ■

Cvičenie 3.9 Nakreslite tri príklady nekompletných bipartitných grafov a tri príklady kompletných bipartitných grafov. ■

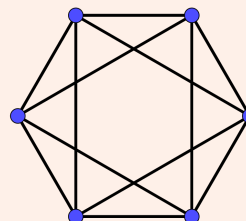
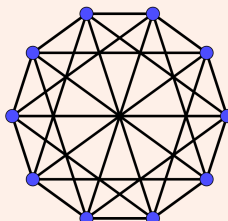
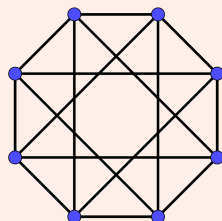
Cvičenie 3.10 Určte počet hrán grafu $K_{m,n}$ (kompletný bipartitný) pre $m, n \in \mathbb{N}$. ■

Cvičenie 3.11 Rozhodnite, či sú nasledujúce 4 súvislé grafy bipartitné



■

Cvičenie 3.12 Rozhodnite, či sú nasledujúce 3 súvislé grafy bipartitné



■

Cvičenie 3.13 Ak sa dá nakresliť graf G s danými vlastnosťami alebo zdôvodnite, prečo taký graf neexistuje

- (a) G má 6 vrcholov, každý stupňa 3.
- (b) G má 7 vrcholov, každý stupňa 3.
- (c) G má 4 vrcholy, každý stupňa 1.
- (d) G má 6 vrcholov a 4 hrany.
- (e) G má 4 hrany a 4 vrcholy so stupňami 1, 2, 3, 4.
- (f) G má 4 vrcholy so stupňami 1, 2, 3, 4.
- (g) G je obyčajný graf a má 6 vrcholov so stupňami 1, 2, 3, 4, 5, 5.
- (h) G je obyčajný graf a má 5 vrcholov so stupňami 2, 3, 3, 4, 4.
- (i) G je obyčajný graf a má 5 vrcholov so stupňami 2, 2, 4, 4, 4.

■

Cvičenie 3.14 Nakreslite graf, v ktorom platí $r(G) = d(G)$.

■

Cvičenie 3.15 Nakreslite graf, v ktorom platí $d(G) = 2r(G)$.

■

Cvičenie 3.16 Dokážte, že pre každý graf platia nerovnosti $r(G) \leq d(G) \leq 2r(G)$.

■

Cvičenie 3.17 Dokážte, že okrem počiatočného (koncového) vrcholu sa v cykle žiadne iné vrcholy nemôžu opakovať. Inak povedané, ak cyklus „rozsekne“ v ľubovoľnom jeho vrchole, tak dostaneme cestu.

■

Cvičenie 3.18 Nakreslite dva príklady súvislých a dva príklady nesúvislých grafov.

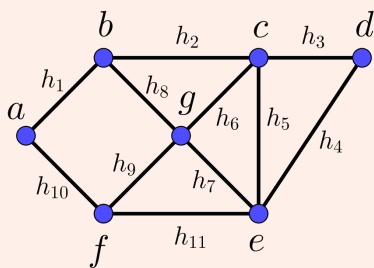
■

Cvičenie 3.19 Dokážte, že každý súvislý graf má práve jeden komponent súvislosti a že každý nesúvislý graf má viac než jeden komponent súvislosti.

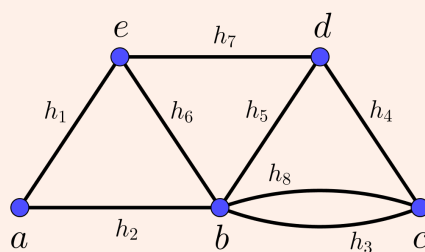
■

Cvičenie 3.20 Pre grafy z obrázkov 3.18, 3.19 a 3.20 nájdite

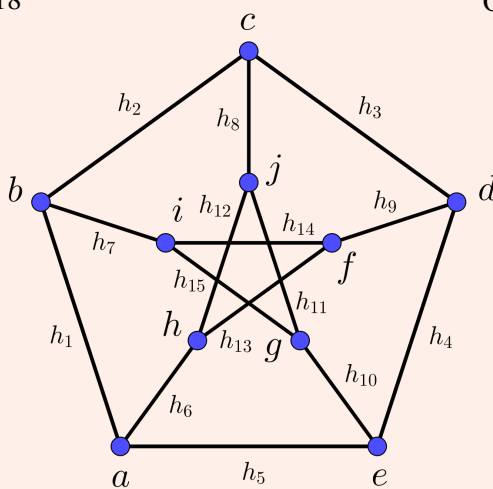
- (a) sledy rôznej dĺžky,
- (b) uzavreté a otvorené sledy,
- (c) sledy, ktoré sú / nie sú ťahy, cesty, cykly,
- (d) cykly.



Obr. 3.18



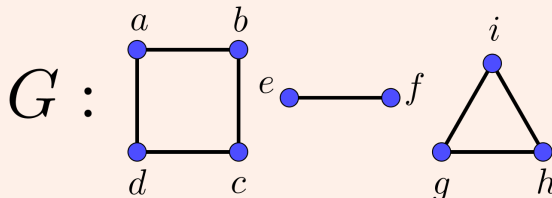
Obr. 3.19



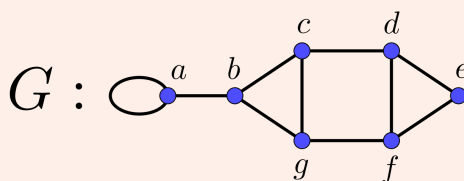
Obr. 3.20: Petersenov graf

Cvičenie 3.21 Pre grafy z obrázkov 3.18, 3.19 a 3.20 nájdite ich rôzne podgrafy.

Cvičenie 3.22 Pre graf G z nasledujúceho obrázku nájdite všetky komponenty súvislosti a zapíšte ich formálne ako jeho podgrafy (pomocou množíc ich vrcholov a hrán).



Cvičenie 3.23 Pre graf G z nasledujúceho obrázku nájdite všetky jeho cykly



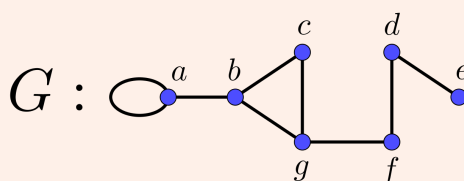
Obr. 3.21

Cvičenie 3.24 Pre graf G z obrázku 3.21 nájdite všetky cesty z vrcholu a do vrcholu e .

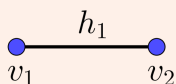
Cvičenie 3.25 Dokážte, že ak je graf G nesúvislý, tak graf $\overline{G}$ je súvislý.

Cvičenie 3.26 Pre graf G z nasledujúceho obrázku nájdite

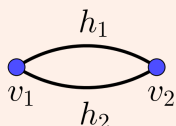
- (a) niektoré jeho súvislé podgrafy,
- (b) všetky súvislé podgrafy $G' = (V', E')$ s najmenším možným počtom hrán tak, aby platilo $V' = V$.



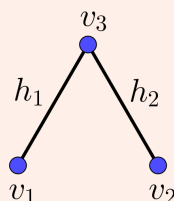
Cvičenie 3.27 Pre grafy z obrázkov 3.22, 3.23, 3.24 a 3.25 nájdite všetky ich podgrafy.



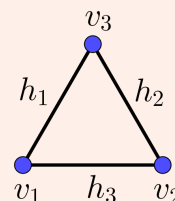
Obr. 3.22



Obr. 3.23



Obr. 3.24



Obr. 3.25

Cvičenie 3.28 Na večierku sa zišiel istý počet (aspoň 2) ľudí, z ktorých sa niektorí poznajú a niektorí nie. Môže nastať situácia, v ktorej

- (a) jeden človek sa pozná práve s jedným prítomným a všetci ostatní ľudia sa poznajú práve s dvoma prítomnými?
- (b) jeden človek sa pozná práve s jedným prítomným a všetci ostatní ľudia sa poznajú aspoň s dvoma prítomnými?
- (c) žiadni dvaja ľudia sa nepoznajú práve s rovnakým počtom prítomných?

Cvičenie 3.29 Koľko rôznych cyklov obsahuje graf

- (a) K_4
- (b) K_5
- (c) K_6
- (d) $K_{3,3}$
- (e) $K_{3,5}$.

Cvičenie 3.30 Dokážte, že v každom obyčajnom grafe s aspoň 2 vrcholmi musia existovať aspoň dva vrcholy rovnakého stupňa. ■

Cvičenie 3.31 Dokážte, že vynechaním mosta z grafu G sa počet jeho komponentov súvislosti zväčší vždy práve o 1. ■

Cvičenie 3.32 Dokážte, že vynechaním artikulácie a hrán s ňou incidujúcich z grafu G sa počet komponentov súvislosti grafu G môže zväčšiť o ľubovoľné $n \geq 1$, kde $n \in \mathbb{N}$. ■

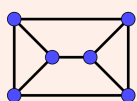
Cvičenie 3.33 Daný je graf $G = (V, E)$. Dokážte, že ak $h \in E$ je most, tak nepatrí do žiadneho cyklu v grafe G . ■

Cvičenie 3.34 Daný je graf $G = (V, E)$ a hrana $h \in E$. Dokážte, že h je buď most, alebo patrí do nejakého cyklu v grafe G . ■

Cvičenie 3.35 Dokážte, že každý súvislý graf má aspoň jednu kostru. ■

Cvičenie 3.36 Dokážte, že každý súvislý graf na n vrchoch má aspoň $(n - 1)$ hrán. ■

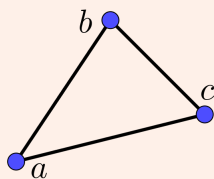
Cvičenie 3.37



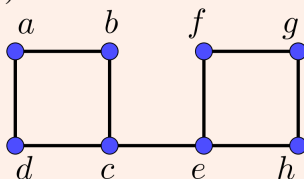
Nájdite aspoň tri rôzne kostry grafu zobrazenom na obrázku vľavo. ■

Cvičenie 3.38 Nájdite všetky kostry nasledujúcich grafov

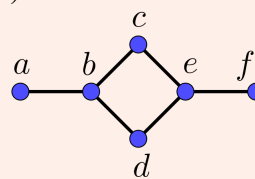
(a)



(b)



(c)





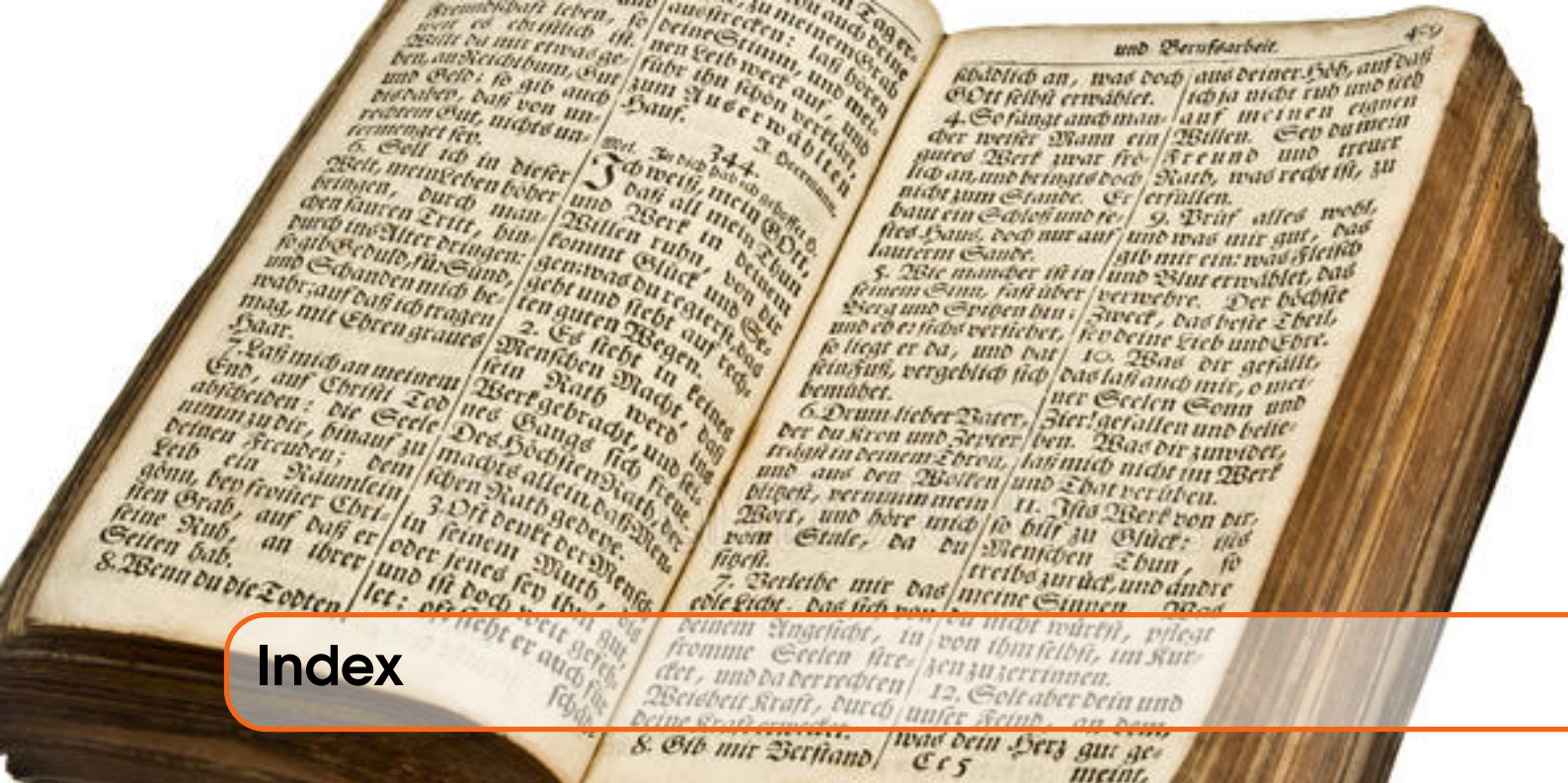
Použitá a odporúčaná literatúra

- [1] Martin Aigner: **Combinatorial Theory**, SPRINGER VERLAG, HEIDELBERG 1979.
- [2] Bohuslav Balcar, Petr Štěpánek: **Teorie množin**, ACADEMIA, PRAHA 1986.
- [3] Berežný, Draženská, Kravcová: **Zbierka úloh z diskkrétnej matematiky**, FEI TU, KOŠICE 2005. <http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/10/Zbierka-DM.pdf>
- [4] J. A. Bondy, U. S. Murty: **Graph Theory With Applications**, NORTH-HOLLAND 1976.
- [5] Reinhard Diestel: **Graph Theory**, SPRINGER 2000.
- [6] Harary, Frank: **Graph theory**, ADDISON-WESLEY 1969.
- [7] Richard Johnsonbaugh: **Discrete Mathematics**, PEARSON 2017.
- [8] Josef Kaucký: **Kombinatorické identity**, VEDA, VYDAVATELSTVO SAV, BRATISLAVA 1975.
- [9] Martin Knor: **Úvod do matematickej logiky**, FIIT STU, BRATISLAVA 2016.
<http://www.math.sk/jmkollar/literatura/Knor-Uvod.do.matematickej.logiky.pdf>
- [10] Martin Knor: **Teória grafov**, SVF STU, BRATISLAVA 2008.
<http://www.svf.stuba.sk/docs/dokumenty/skripta/teoria-grafov.martin.knor.pdf>
- [11] Martin Knor, Jozef Kollár: **Matematika pre architektov**, STU BRATISLAVA, 2002.
- [12] Donald E. Knuth: **The Art of Computer Programming, Volume 1**, ADDISON-WESLEY, 1997.
- [13] Sergei K. Lando: **Lectures on Generating Functions**, AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, STUDENT MATHEMATICAL LIBRARY 2003.
- [14] Milan Mareš: **Příběhy matematiky**, PISTORIUS & OLŠANSKÁ, PŘÍBRAM 2011.
- [15] J. Matoušek, J. Nešetřil: **Kapitoly z diskrétní matematiky**, KAROLINUM, PRAHA 2002.

- [16] М. В. Меньшиков, А. М. Ревякин, А. Н. Копылова, Ю. Н. Макаров, Б. С. Стечкин: **Комбинаторный Анализ – Задачи и упражнения**, ИЗДАТЕЛЬСТВО »НАУКА«, МОСКВА 1982.
- [17] В. А. Носов: **Комбинаторика и теория графов**, МОСКВА 1999.
<http://intsys.msu.ru/staff/vnosov/combgraph.htm> (PDF verzia)
- [18] Stanislav Palúch: **Algoritmická teória grafov**, ŽILINSKÁ UNIVERZITA, 2008.
<http://frcatel.fri.uniza.sk/users/paluch/grafy.pdf>
- [19] Ján Plesník: **Grafové algoritmy**, VEDA, BRATISLAVA 1983.
- [20] Franco P. Preparata, Raymond T. Yeh: **Úvod do teórie diskrétnych matematických štruktúr**, ALFA, BRATISLAVA 1982.
- [21] Edward M. Reingold, Jurg Nievergelt, Narsingh Deo: **Combinatorial Algorithms – Theory and Practice**, PRENTICE-HALL, NEW JERSEY 1977.
- [22] Beloslav Riečan a kol.: **Úlohy z matematiky pre 4. ročník gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1976.
- [23] Beloslav Riečan a kol.: **Matematika pre 4. ročník gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1987.
- [24] Beloslav Riečan a kol.: **Zbierka úloh z matematiky pre 4. ročník gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1991.
- [25] Karol Rován a kol.: **Zbierka riešených úloh z algebry pre SVŠ a odborné školy**, SPN, BRATISLAVA 1969.
- [26] К. А. Рыбников: **Введение в Комбинаторный Анализ**, ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА, МОСКВА 1985.
- [27] Raymond M. Smullyan: **A Beginner's Guide to Mathematical Logic**, DOVER PUBLICATIONS, NEW YORK 2014.
- [28] František Vejsada, František Talafous: **Zbierka úloh z matematiky pre SVŠ a gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1973.
- [29] Naum J. Vilenkin: **Rozhovory o množinách**, SPN, BRATISLAVA 1972.
- [30] Herbert S. Wilf: **generatingfunctionology**, ACADEMIC PRESS, INC. 1994.
<https://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>
- [31] Niklaus Wirth: **Algoritmy a štruktúry údajov**, ALFA, BRATISLAVA 1989.
- [32] Štefan Znáť: **Kombinatorika a teória grafov**, PF UK, BRATISLAVA 1978.

IV

Index



Index

Symboly

$\in$ operátor „patrí do množiny“	11
$\notin$ operátor „nepatrí do množiny“	11
$\subset$ operátor vlastnej podmnožiny	12
$\subseteq$ operátor nevlastnej podmnožiny	12
$\cup$ operátor zjednotenia množín	12
$\cap$ operátor prieniku množín	13
$\setminus$ operátor rozdielu množín	13
$\bar{A}$ komplement množiny A	14
$\neg$ operátor logickej negácie	20
$\vee$ operátor disjunkcie	20
$\wedge$ operátor konjunkcie	20
$\Leftrightarrow$ operátor ekvivalencie	20
$\Rightarrow$ operátor implikácie	20
$\exists$ existenčný kvantifikátor	23
$\forall$ všeobecný kvantifikátor	23
$ $ operátor „ a delí b “ ($a b$)	40
$\triangle$ operátor symetrickej diferencie	41

A

acyklický graf	62
algoritmus	
Borůvkov	203
Dijkstrov	229–231
hľadania kostry grafy	179
Jarníkov (Primov)	197
konštrukcie očíslovaného stromu z Prüferovho kódu	241

B

konštrukcie optimálneho Huffmanovho kódu	206
konštrukcie Prüferovho kódu z očíslovaného stromu	235
konštrukcie prehľadávacieho binárneho stromu	215
Kruskalov	201, 202
pažravý	201
prehľadávania grafu do hĺbky	187
prehľadávania grafu do šírky	182
zostavovania identifikačného kódu binárneho stromu	219
zostavovania identifikačného kódu koreňového stromu	222
antisymetrickosť (relácie)	125, 130
Appel Kenneth (1932–2013)	48
ASCII kód	204
atomická formula	20
axióma	31
backtracking	186
bijektivnosť	145
binárny strom	80
binomický koeficient	171
Borůvka Otakar (1899–1995)	196, 203
Bouton Charles Leonard (1869–1922)	224

C

Catalanovo číslo 174, 213
 Cayley Arthur (1821–1895) 16, 48, 241
 centrálny vrchol grafu 56
 centrum grafu 56
 cesta (v grafe) 55, 112
 cyklus (v grafe) 57, 112

Č

číslo

Catalanovo 174, 213
 celé $\mathbb{Z}$ 15
 iracionálne 15
 komplexné $\mathbb{C}$ 16
 kvaternion 16
 oktonion 16
 prirodzené $\mathbb{N}$ 14
 racionálne $\mathbb{Q}$ 15
 reálne $\mathbb{R}$ 15

D

dátová štruktúra

fronta 180
 zásobník 180

dôkaz

matematickou indukciou 37, 39
 nepriamy 35
 priamy 32
 sporom 36

de Moivre Abraham (1667–1754) 155

de Morgan Augustus (1806–1871) 48

definícia 32

Dijkstra Edsger Wybe (1930–2002) . 197, 230

Dijkstrov algoritmus 229, 231

disjunkcia ($\vee$) 21

disjunktné množiny 13

E

ekvivalencia ($\Leftrightarrow$) 22

ekvivalencia (relácie) 140

entropický kód 204

Euklides Alexandrijský (~3. stor. pred n. l.) 15

Euklidovský priestor 108

Euler Leonhard (1707–1783) 47, 84, 109, 156

F

faktor grafu 62

faktoriál 39

dvojný 172

Fano Roberto Mario (1917–2016) 204

Fibonacci Leonardo (~1170 – ~1240) ... 167

Fibonacciho postupnosť 167

formula

atomatická 20

prvotná 20

výroková 20, 22

formuly

ekvivalentné 22

fronta 180

funkcia 143

bijektívna 145

charakteristická funkcia množiny 149

definičný obor 143

injektívna 144

inverzná 145

koobor 143

obor hodnôt 143

parciálna 143

surjektívna 144

vytvárajúca

exponenciálna, 175

obyčajná, 160

zložená 146

G

Gauss Carl Friedrich (1777–1855) 38

geometrická postupnosť

súčet prvých n členov 39

Gonthier Georges 48

graf

acyklický 62

artikulácia 61

bipartitný 53

kompletný ($K_{m,n}$), 54, 112

centrum 56

cesta 55, 112

cesta (P_n) 112

cyklus 57, 112

hamiltonovský, 95

cyklus (C_n) 112

digraf 50

dĺžka ťahu 55

dĺžka cesty 55

graf

dĺžka cyklu	57
dĺžka sledu	54
dokonalé párovanie	89
Eulerova veta o rovinných grafoch	110
eulerovský	87
eulerovský ťah	85
otvorený, 85, 87	
uzavretý, 85, 86	
excentricita vrcholu	56
faktor	62
hodnota	196
hodnota hrany	195
hodnota sledu	229
homeomorfné grafy	112
hrana	49
ohodnotená, 195	
hranica oblasti	108
húsenica	113
hviezda (S_n)	113
incidencia (vrchol–hrana)	50
invariant	101
izomorfizmus	
binárnych stromov, 106	
koreňových stromov, 105	
izomorfizmus grafov	98, 99
izomorfné grafy	99
jadro	225
jednoduchý (obyčajný)	51
Knight graph	98
koleso (W_n)	113
komplementárny	53
kompletný (K_n)	52, 112
kompletný bipartitný ($K_{m,n}$)	54, 112
komponent súvislosti	57, 60
konečný	49
koreňový strom	77
dieťa vrcholu, 78	
koncový vrchol, 78	
list, 78	
otec vrcholu, 78	
podstrom, 78	
potomok vrcholu, 78	
predkovia vrcholu, 78	
súrodenci (vrcholy), 78	
úroveň vrcholu, 77	
vnútorný vrchol, 78	
výška, 77	

graf

kostra	62
minimálna, 196	
Kuratowského veta	112
ľavý podstrom	213
les	77
list	77
matica incidencie	72
matica susednosti	69
minimálna kostra	196
množina vrcholov	
nezávislá, 225	
stabilná, 225	
most	61
najlacnejšia cesta	230
najlacnejšia kostra	196
násobné hrany	50
nekonečný	49
neorientovaný	49
nesúvislý	57
nezávislá množina vrcholov	225
oblasť	108
obyčajný (jednoduchý)	51
ohodnotený	195
ohodnotenie hrany	195
orientovaná hrana	49, 50
orientovaný	49, 50
otvorený sled	55
párovanie	89
maximálne, 89	
perfektné párovanie	89
podgraf	58
polomer	56
pravý podstrom	213
pravidelný	52
prázdny	49, 80
prehľadávanie do šírky	182
prehľadávanie do hĺbky	187
priemer	56
problém obchodného cestujúceho	234
rovinné nakreslenie	108
rovinný	108
sled	54
otvorený, 55	
uzavretý, 55	
slučka (hrana)	50
stabilná množina vrcholov	225

graf
 strom 73
 binárny, 80
 binárny úplný, 81
 binárny dokonalý, 82
 binárny prehľadavací, 214
 binárny vyvážený, 81
 koreň, 77, 105
 očíslovaný, 234
 prehľadavací binárny, 213
 stupeň vrcholu 51
 subdivízia hrany 111
 susedné oblasti 108
 susednosť (vrchol–vrchol) 50
 súvislý 57
 ťah 55
 uzavretý sled 55
 vrchol 49, 50
 centrálny, 56
 izolovaný, 50
 stupeň, 51
 vzdialenosť vrcholov 56
 Graves John Thomas (1806–1870) 16
 Guthrie Francis (1831–1899) 48

H

Haken Wolfgang (1928–...) 48
 Hamilton William R. (1805–1865) . 16, 48, 95
 harmonická postupnosť 166
 Herón Alexandrijský (10–75) 15
 Hippasos (~530–~450 pred n. l.) 15
 hodnota grafu 196
 hrana
 koncový vrchol 181
 počiatočný vrchol 181
 Huffman David Albert (1925–1999) 204
 Huffmanov kód 80, 204, 206
 húsenica (graf) 113
 hviezda (graf) 113
 hypotéza 32

I

implikácia ($\Rightarrow$) 21
 indukčný
 krok 38
 predpoklad 38
 injektívnosť 144
 inverzná funkcia 145

inverzná relácia 127

J

jadro grafu 225
 Jarník Vojtěch (1897–1970) 196, 197
 Jarníkov (Primov) algoritmus 197
 jazyk 1. rádu 23
 jednotka
 imaginárna 16
 kvaternionová 16
 oktonionová 16

K

kartézsky súčin 19
 Kempe Alfred Bray (1849–1922) 48
 kód
 ASCII 204
 Huffmanov 80, 204, 206
 Prüferov 234
 koeficient
 binomický 171
 Newtonov, 171
 multinomický 177
 koleso (graf) 113
 komplementárna množina 14
 komponent súvislosti (grafu) 60
 konjunkcia ($\wedge$) 21
 kontradikcia 20
 koreň 77
 koreňový strom 77
 kostra grafu 62
 Kőnig Dénes (1884–1944) 48
 Kruskal Joseph B. (1928–2010) 196, 201
 Kruskalov algoritmus 202
 Kuratowski Kazimierz (1896–1980) 111
 kvantifikátor
 existenčný 23
 všeobecný 23

L

Laplace Pierre-Simon (1749–1827) 156
 lema 62
 les 77
 list 77
 logická
 hodnota 19
 premenná 19

logická	
spojka	19, 20
logický	
operátor	19
výrok	19
logika	
predikátová	23
výroková	22

M

matematická indukcia	37, 39
matica	
incidencie grafu	72
relácie	128
susednosti grafu	69
maximálne párovanie grafu	89
množina	11
charakteristická funkcia	149
kartézsky súčin množín	19
komplementárna	14
konečná	12
mohutnosť	12
nekonečná	12
podmnožina	12
potenčná	13
prázdna	11
rozklad	138
spočítateľná	37
systém množín	138
univerzálna	14
univerzum	13, 14
množiny	
disjunktné	13
prienik množín	13
rovnosť množín	11
rozdiel množín	13
symetrická diferencia množín	41
zjednotenie množín	12
mocninový rad	156
modulo (zvyšok po delení)	41
modulo $a \pmod{b}$	41
modus ponens	32
mohutnosť množiny	12
Moskovský papyrus	16
multinomická veta	177
multinomický koeficient	177

N

negácia ($\neg$)	20
Newton Isaac (1642–1727)	171
Newtonov binomický koeficient	171

P

P-kód (prefixový kód)	204
párovanie grafu	89
perfektné párovanie	89
podgraf grafu	58
podmnožina	
vlastná	12
postupnosť	
Fibonacciho	167
harmonická	166
potenčná množina	13
pravdivostná hodnota	19
pravdivostná tabuľka	20
prázdna množina	11
prázdny graf	80
prefixový kód	204
prehľadavací binárny strom	213, 214
prehľadávanie grafu	
do hĺbky	186, 187
do šírky	181, 182
prienik množín	13
Prim Robert Clay (1921–...)	197
princíp zapojenia-vypojenia	18
problém	
NP-úplný	96
obchodného cestujúceho	47, 234
štyroch farieb	48
Prüfer Ernst Paul Heinz (1896–1934)	241
Prüferov kód	234
prvky	
porovnateľné	137
neporovnateľné	137
prvotná formula	20
pseudokód	
Dijkstrovho algoritmu	231
hľadania kostry grafu	179
Jarníkovho algoritmu	197
konštrukcie očíslovaného stromu z Prüferovho kódu	241
konštrukcie optimálneho Huffmanovho kódu	206
konštrukcie prehľadávacieho binárneho stromu	215

konštrukcie Prüferovho kódu z očíslovaného stromu 235
 Kruskalovho algoritmu 202
 prehľadávania grafu do hĺbky 187
 prehľadávania grafu do šírky 182
 zostavovania identifikačného kódu binárneho stromu 219
 zostavovania identifikačného kódu koreňového stromu 222
 pytagorejci 15

R

rad
 formálny mocninový 156
 Maclaurinov 156
 mocninový 156
 Taylorov 156
 reflexívnosť (relácie) 124, 129
 relácia
 n -árna 123
 antisymetrická 125, 130
 binárna 123, 124
 čiasťočné usporiadanie 137
 ekvivalencie 140
 inverzná 127
 maticová reprezentácia 128
 na množine 124
 reflexívna 124, 129
 symetrická 125, 129
 tranzitívna 126
 zložená 128
 rovnosť množín 11
 rozdiel množín 13
 rozklad množiny 138
 triedy ekvivalencie 141
 triedy rozkladu 138

S

semifaktoriál 172
 skladanie funkcií 146
 skladanie relácií 128
 sled (v grafe) 54
 slučka (graf) 50
 spočítateľná množina 37
 Stirling James (1692–1770) 156
 strom (graf) 73
 vyvážený binárny 81
 subdivízia hrany 111

súčín
 kartézsky 19
 surjektívnosť 144
 sylogizmus 34
 symetrická diferencia množín (Δ) 41
 symetrickosť (relácie) 125, 129
 systém množín 138

T

tabuľka
 pravdivostná 20
 Tait Peter Guthrie (1831–1901) 48
 tautológia 20
 tautologicky ekvivalentné formuly 22
 tranzitívnosť (relácie) 126
 trieda
 rozkladu 138
 zvyšková 142
 trieda ekvivalencie 141

Ť

ťah (v grafe) 55

U

univerzum množín 13, 14
 usporiadaná dvojica 18
 usporiadanie
 čiasťočné 137
 neporovnateľnosť, 137
 porovnateľnosť, 137
 lineárne 138

Ú

úplný binárny strom 81

V

Vennove diagramy 16
 veta
 Cayleyho 242
 Eulerova o rovinných grafoch 110
 Kuratowského 112
 multinomická 177
 o centre stromu 224
 o cykloch 58
 o existencii cesty v grafe 56
 o existencii jadra grafu 226

veta	
o existencii kostry grafu	63
o explicitnom vyjadrení rekurentných postupností	170
o invariantnosti cyklu C_n	102
o invariantnosti stupňov vrcholov	101
o inverznej funkcii	145
o komponentoch grafu	61
o korektnosti prehľ. algoritmov	191
o matematickej indukcii	39
o matici susednosti	71
o matici zloženej relácie	131
o maticiach susednosti izomorfných grafov	100
o mohutnosti kartézskeho súčinu	19
o optimálnej lokalizácii v prehľadávacom binárnom strome	217
o otvorenom eulerovskom ťahu	87
o počte koncových vrcholov úplných binárnych stromov	81
o potenčnej množine	40
o relácii danej rozkladom množiny	139
o rozklade danom rel. ekvivalencie	141
o správnosti Jarníkovho algoritmu	199
o stromoch	76
o stupňoch vrcholov rovinného grafu	111
o súčte stupňov vrcholov grafu	52
o súvislosti výšky a počtu koncových vrcholov binárnych stromov	82
o tranzitívnosti relácie na množine	132
o uzavretom eulerovskom ťahu	86
o vrchoch stromov	76
pravidlo sylogizmu	34
základná algebry	16
základná aritmetiky	37
veta (matematická)	31
vrchol	
dieťa	78
koncový	50, 78
list	77
otec	78
počiatočný	50
potomok	78
predkovia	78
rodič	78
súrodenci	78
syn	78
vnútorný	78
výroková formula	20, 22

vytvárajúca funkcia	
exponenciálna	175
obyčajná	160
súčet	161
súčin	162
vyvážený binárny strom	81

W

Werner Benjamin	48
-----------------	----

Z

základná veta algebry	16
základná veta aritmetiky	37
zásobník	180
zjednotenie množín	12
zložená funkcia	146
zvyšková trieda	142
zvyšok po delení (modulo)	41