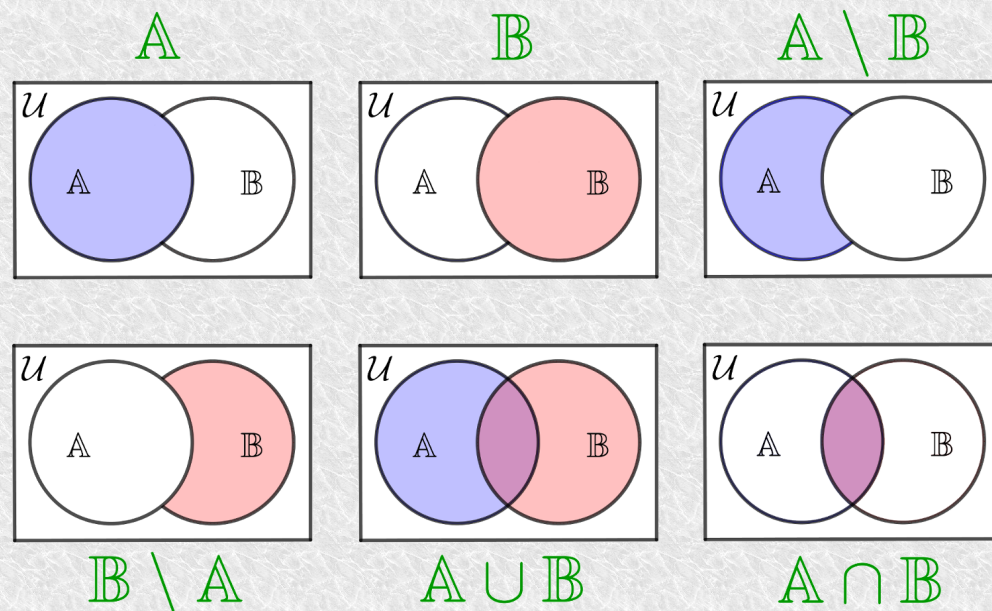




1. Množiny a úvod do logiky

1.1 Množiny

Celá moderná matematika je vybudovaná na pojme množiny. Žiaľ samotný kľúčový pojem *množina* nevieme presne definovať. Pre naše potreby si zatiaľ môžeme vypomôcť nasledovnou opisnou „definíciou“.

Definícia 1.1.1 — Množina. Pod množinou budeme rozumieť nejaký súbor objektov, pričom na poradí týchto objektov a počte opakovaní rovnakých objektov nezáleží.

P Množiny budeme väčšinou označovať pomocou veľkých písmen latinskej abecedy ($A, B, C, \dots$). Skutočnosť, že objekt a patrí do množiny A , označujeme $a \in A$. To, že a nepatrí do množiny A , označujeme $a \notin A$.

Uvedená definícia bude pre nás postačujúca, ale z matematického hľadiska je veľmi problematická. Problémy s takouto definíciou spôsobuje nepresnosť prirodzeného jazyka, pomocou ktorého by sme chceli „súbor objektov“ vymedziť. Viaceré príklady takto problematicky definovaných množín môžeme nájsť v knihe [29]. V teórii množín sa množiny budujú axiomatically pomocou jazyka teórie množín, ktorý je, na rozdiel od prirodzeného jazyka, exaktný. S týmto prístupom sa môžeme bližšie zoznámiť napr. v knihe [2], samotnú definíciu množiny však ani tam nenájdeme.

Definícia 1.1.2 — Prázdna množina. Prázdna množina je množina, ktorá neobsahuje žiadne prvky. Označujeme ju symbolom $\emptyset$.

P Študenti veľmi často a radi zapisujú prázdnu množinu ako $\{0\}$, čo je chyba! To, prečo je to nesprávne, vyplýva z nasledovnej definície.

Definícia 1.1.3 — Rovnosť množín. Množiny A a B sa rovnajú práve vtedy, ak obsahujú rovnaké prvky. Ak sa uvedené dve množiny rovnajú, tak sa to zapisuje $A = B$. Ak sa nerovnajú, tak to zapisujeme pomocou $A \neq B$.

Teraz sa môžeme vrátiť ku predošlej poznámke. Z definície 1.1.3 je už zrejmé, že množiny $A = \emptyset$ a $B = \{0\}$ sa nerovnajú. Množina A neobsahuje žiadne prvky, je to prázdna množina. A množina

$\mathbb{B}$ obsahuje práve jeden prvok – prázdnu množinu. To, že množiny $\emptyset$ a $\{\emptyset\}$ sú rôzne, vyplýva aj z nasledujúcej definície.

Definícia 1.1.4 — Mohutnosť množiny. Pod mohutnosťou (veľkosťou) množiny budeme rozumieť počet jej prvkov. Mohutnosť množiny $\mathbb{M}$ budeme označovať $|\mathbb{M}|$.



- Ak je počet prvkov množiny konečný, tak hovoríme o *konečnej množine*.
- Ak je počet prvkov množiny nekonečný, tak hovoríme o *nekonečnej množine*.

■ **Príklad 1.1** Majme množiny $\mathbb{A} = \emptyset$ a $\mathbb{B} = \{\emptyset\}$. Potom ich mohutnosti sú $|\mathbb{A}| = 0$ a $|\mathbb{B}| = 1$, čím sa opäť vraciame ku predošlej poznámke a tomu, že množiny $\emptyset$ a $\{\emptyset\}$ sú rôzne. ■

Množiny s menším počtom prvkov, podľa definície 1.1.1, môžeme zadať vymenovaním ich prvkov. Napríklad $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$ a keďže na poradí prvkov nezáleží, tak platí zároveň $\mathbb{A} = \{2, 3, 1\}$.

■ **Príklad 1.2** Mohutnosť množiny $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$ je, podľa definície 1.1.4, $|\mathbb{A}| = 3$. Mohutnosť množiny $\mathbb{B} = \{2, 3, 1, 3, 3\}$ je, podľa definícií 1.1.1 a 1.1.4, $|\mathbb{B}| = 3$. ■

Ak je množina veľká, tak vymenovanie všetkých jej prvkov nie je praktické a v prípade nekonečných množín ani možné. V takom prípade množinu zadávame určením vlastnosti spoločnej práve pre prvky tejto množiny.

■ **Príklad 1.3** Zapište množiny všetkých párnych ($\mathbb{P}$) a všetkých nepárnych ($\mathbb{N}$) prirodzených čísel¹.
Riešenie: Môžeme použiť buď kombináciu matematického zápisu a prirodzeného jazyka

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ je párne}\} \quad \text{a} \quad \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{N}; x \text{ je nepárne}\},$$

alebo čisto matematický zápis

$$\mathbb{P} = \{2k; k \in \mathbb{N}\} \quad \text{a} \quad \mathbb{N} = \{2k - 1; k \in \mathbb{N}\}.$$

Teraz si zadefinujeme vzťahy medzi množinami a operácie s množinami a potom si pripomenieme definície základných číselných množín.

Definícia 1.1.5 — Podmnožina. Majme dve množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$. Potom hovoríme, že

- $\mathbb{A}$ je *podmnožina* $\mathbb{B}$, zapisujeme to $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$, ak platí $\forall a: (a \in \mathbb{A} \Rightarrow a \in \mathbb{B})$. Inak povedané, množina $\mathbb{B}$ obsahuje všetky prvky množiny $\mathbb{A}$,
- $\mathbb{A}$ je *vlastná podmnožina* $\mathbb{B}$, zapisujeme to $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$, ak platí $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ a $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$. Inak povedané, množina $\mathbb{B}$ obsahuje všetky prvky množiny $\mathbb{A}$ a tieto dve množiny sa nerovnajú.

■ **Príklad 1.4** Majme množiny $\mathbb{A} = \{1, 2\}$ a $\mathbb{B} = \{1, 2, 3, 4\}$. Potom platí $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ a zároveň platí $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$, čiže platí aj $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$. ■



Pre ľubovoľnú množinu $\mathbb{A}$ platí $\emptyset \subseteq \mathbb{A}$.

Definícia 1.1.6 — Zjednotenie množín. Majme dve množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$. Potom ich zjednotením, označujeme ho $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, je množina $\mathbb{C}$, pre ktorú platí

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{x; x \in \mathbb{A} \text{ alebo } x \in \mathbb{B}\}.$$

¹Množinu prirodzených čísel označujeme $\mathbb{N}$. Pozri definíciu 1.1.13 ďalej.

- **Príklad 1.5** Majme množiny $\mathbb{A} = \{1, 2\}$ a $\mathbb{B} = \{1, 2, 3, 4\}$. Potom platí $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{1, 2, 3, 4\}$. ■

Definícia 1.1.7 — Prienik množín. Majme dve množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$. Potom ich prienikom, označujeme ho $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$, je množina $\mathbb{C}$, pre ktorú platí

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{x; x \in \mathbb{A} \text{ a } x \in \mathbb{B}\}.$$

- **Príklad 1.6** Majme množiny $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$ a $\mathbb{B} = \{2, 3, 4, 5\}$. Potom platí $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{2, 3\}$. ■

Definícia 1.1.8 — Disjunktné množiny. Majme dve množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$. Potom hovoríme, že tieto množiny sú disjunktné, ak platí $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$, čiže ak prienik týchto dvoch množín je prázdna množina. Inými slovami, dve množiny sú disjunktné, ak nemajú žiadne spoločné prvky.

- **Príklad 1.7**

(a) Množiny $\mathbb{A} = \{1, 4, 5\}$ a $\mathbb{B} = \{2, 6\}$ sú disjunktné, pretože platí

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{1, 4, 5\} \cap \{2, 6\} = \emptyset.$$

(b) Množiny $\mathbb{A} = \{1, 4, 5\}$ a $\mathbb{B} = \{2, 5, 6\}$ nie sú disjunktné, pretože platí

$$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{1, 4, 5\} \cap \{2, 5, 6\} = \{5\} \neq \emptyset.$$

■

Definícia 1.1.9 — Rozdiel množín. Majme dve množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$. Potom ich rozdiel, označujeme ho $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$, je množina $\mathbb{C}$, pre ktorú platí

$$\mathbb{C} = \mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{x; x \in \mathbb{A} \text{ a } x \notin \mathbb{B}\}.$$



Zjednotenie a prienik dvoch množín sú symetrické operácie, čiže platí $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{B} \cup \mathbb{A}$ a $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{B} \cap \mathbb{A}$. Avšak rozdiel dvoch množín nie je symetrická operácia, vo všeobecnosti neplatí $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$.

- **Príklad 1.8** Majme množiny $\mathbb{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\mathbb{B} = \{2, 3\}$. Potom platí $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{1, 4, 5\}$ a $\mathbb{B} \setminus \mathbb{A} = \emptyset$. ■

Definícia 1.1.10 — Potenčná množina. Majme množinu $\mathbb{A}$. Potom potenčná množina množiny $\mathbb{A}$, označujeme ju $\mathcal{P}(\mathbb{A})$, bude množina

$$\mathcal{P}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{X}; \mathbb{X} \subseteq \mathbb{A}\}.$$

Čiže potenčná množina množiny $\mathbb{A}$ je množina všetkých podmnožín množiny $\mathbb{A}$.

- **Príklad 1.9** Majme množinu $\mathbb{A} = \{a, b, c\}$. Potom

$$\mathcal{P}(\mathbb{A}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

a platí $|\mathbb{A}| = 3$ a $|\mathcal{P}(\mathbb{A})| = 8 = 2^3$. ■

Ďalší pojem, ktorý si potrebujeme zadať, je *univerzum*. Avšak matematicky korektné zadefinovanie tohto pojmu, bez použitia jazyka teórie množín, nie je možné. Každý pokus o popis množinového univerza pomocou prirodzeného jazyka je vopred odsúdený na nepresnosť z matematického hľadiska, rovnako ako pokusy zadefinovať množinu pomocou prirodzeného jazyka. Pre naše obmedzené potreby sa preto pokúsime aspoň o približné vymedzenie pojmu univerzum.

Definícia 1.1.11 — Univerzum. Univerzum bude súhrn všetkých objektov, ktoré v danom kontexte prichádzajú do úvahy. Univerzum, niekedy nazývané aj *univerzálna množina*, budeme označovať symbolom $\mathcal{U}$.

P Predošlá definícia je skutočne veľmi nepresná. V našich úlohách budeme pracovať s rôznymi objektami. Najčastejšie to budú čísla. V takom prípade budú univerzum tvoriť všetky čísla. Pokiaľ by sme pracovali len s prirodzenými číslami a so žiadnymi inými, tak univerzum budú tvoriť len prirodzené čísla. Ak by sme pracovali napr. s písmenami latinskej abecedy, tak univerzum budú tvoriť všetky písmená latinskej abecedy. V iných úlohách môžeme pracovať s farbami, ľudmi, zvieratami... a vtedy príslušné univerzá budú tvorené všetkými farbami, ľudmi, alebo zvieratami...

Ako vidno z definície 1.1.11, samotné univerzum je tiež množina. Je to množina všetkých, do úvahy prichádzajúcich, objektov. Keď už máme „zadefinované“ univerzum, tak všetky množiny v príkladoch budeme vyberať ako súbory objektov z príslušného univerza. Znamená to, že pre každú množinu A na univerze $\mathcal{U}$ platí $A \subseteq \mathcal{U}$. Následne si môžeme definovať ďalší pojem.

Definícia 1.1.12 — Komplementárna množina. Majme množinu A na univerze $\mathcal{U}$, čiže $A \subseteq \mathcal{U}$. Potom komplement, niekedy nazývaný aj doplnok, množiny A , označujeme ho $\bar{A}$, bude množina $\bar{A} = \mathcal{U} \setminus A$.

Inak povedané, komplementom množiny A na univerze $\mathcal{U}$ budú všetky tie prvky univerza $\mathcal{U}$, ktoré nepatria do množiny A .

■ Príklad 1.10

(a) Majme univerzum $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a množinu $A = \{1, 3, 5\}$. Potom $\bar{A} = \{2, 4\}$.

(b) Majme univerzum $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a množinu $A = \{1, 3, 5\}$. Potom $\bar{A} = \{2, 4, 6\}$. ■

1.1.1 Základné číselné množiny

Venujme sa teraz základným číselným množinám. Medzi bežné číselné množiny, s ktorými budeme pracovať, patria množiny prirodzených ($\mathbb{N}$), celých ($\mathbb{Z}$), racionálnych ($\mathbb{Q}$), reálnych ($\mathbb{R}$) a komplexných ($\mathbb{C}$) čísel. Ešte existujú aj iracionálne čísla (to sú tie reálne čísla, ktoré nie sú racionálne) a aj ďalšie číselné množiny, ale tie v tomto kurze potrebovať nebudeme.

Definícia 1.1.13 — Prirodzené čísla. Prirodzené čísla sú čísla používané na počítanie počtu objektov, alebo určovanie ich poradia. Množina prirodzených čísel je najmenšia nekonečná množina, označuje sa písmenom $\mathbb{N}$ a platí $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

P V axiomatickej teórii množín, rovnako ako aj v informatike, sa nula považuje za prirodzené číslo. Avšak v školskej matematike sa nula obvykle neradí medzi prirodzené čísla a platí $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

■ **Príklad 1.11** Pre $a, b \in \mathbb{N}$ riešte, na množine prirodzených čísel, rovnicu $a + x = b$.

Riešenie: V prípade, že $a < b$, nemáme žiaden problém. Vtedy bude riešením rovnice $x = b - a$, pričom $x \in \mathbb{N}$. Avšak pre $a > b$ uvedenú rovnicu vyriešiť nevieme, pretože $x = b - a$ nie je prirodzené číslo. Riešenie takýchto rovníc (obchodnícke a účtovnícke počty) si vynútilo rozšírenie množiny prirodzených čísel. ■

Definícia 1.1.14 — Celé čísla. Množina celých čísel je rozšírením množiny prirodzených čísel. Patria do nej prirodzené čísla a prirodzené čísla so znamienkom mínus. Množina celých čísel sa označuje písmenom $\mathbb{Z}$ a platí

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

■ **Príklad 1.12** Pre $a, b \in \mathbb{Z}$ riešte, na množine celých čísel, rovnicu $ax = b$.

Riešenie: Takýto typ rovníc sa opäť často vyskytuje v obchodníckych a účtovníckych počtoch. Riešením rovnice je $x = \frac{b}{a}$. Je však jasné, že pre ľubovoľné hodnoty $a, b \in \mathbb{Z}$, nemusí byť číslo $\frac{b}{a}$ celým číslom. Preto uvedená rovnica vo všeobecnosti nemá na celých číslach riešenie a množinu celých čísel potrebujeme rozšíriť. ■

Definícia 1.1.15 — Racionálne čísla. Množina racionálnych čísel je rozšírením množiny celých čísel a označujeme ju $\mathbb{Q}$. Platí

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

V staroveku sa ľudia zopár storočí domnievali, že už iné ako racionálne čísla neexistujú. Napríklad jeden zo základných článkov učenia sekty pytagorejcov bol, že všetky čísla sa dajú vyjadriť v tvare zlomku. Hippasos, jeden z členov pytagorejskej sekty žijúci v 5. storočí pred n. l., zistil, že to tak nie je. Podľa legendy bol za to zo sekty vylúčený a utopený v mori. Podľa iných zdrojov išlo o nehodu.

■ **Príklad 1.13** Pre $a, b \in \mathbb{Q}$ riešte, na množine racionálnych čísel, rovnicu $a^2 + b^2 = x^2$.

Riešenie: Uvedená rovnica už nemá nič spoločné s obchodnými a účtovníckymi počtami. Táto rovnica súvisí s počítaním dĺžky prepony pravouhlého trojuholníka (Pythagorova veta), ktorého odvesny majú dĺžky a a b . Ak si položíme $a = b = 1$, tak dostaneme riešenie $x^2 = 2$, pričom kladným riešením (počítame dĺžku prepony a tá nemôže byť záporná) bude $\sqrt{2}$. Už Hippasos v 5. storočí pred n. l. prišiel na to, že číslo $\sqrt{2}$ sa nedá zapísať ako zlomok. Ale až Euklides z Alexandrie ([14], str. 47) v 4. storočí pred n. l. prelomil bariéru a formálne dokázal, že číslo $\sqrt{2}$ nie je racionálne. Takýmto číslom sa potom začalo hovoriť *iracionálne*. ■

P Medzi najznámejšie iracionálne čísla patria $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ a konštanty π a e .

Ak dáme dokopy racionálne a iracionálne čísla, dostaneme ďalšiu číselnú množinu.

Definícia 1.1.16 — Reálne čísla. Množina reálnych čísel je zjednotením množín racionálnych a iracionálnych čísel a označujeme ju $\mathbb{R}$.

Podobne ako pri množine racionálnych čísel sa aj pri reálnych číslach ukázalo, že to ešte nie sú všetky „čísla“.

■ **Príklad 1.14** Pre $a \in \mathbb{R}$ riešte, na množine reálnych čísel, rovnicu $x^2 = a$.

Riešenie: Uvedená rovnica nemá vo všeobecnosti na množine reálnych čísel riešenie. Ak si napríklad položíme $a = -1$, tak dostávame rovnicu $x^2 = -1$ a riešenia $x_{1,2} = \pm\sqrt{-1}$ nie sú reálne čísla. ■

Riešením rovníc typu $x^2 = a$ sa teda dostávame ku komplexným číslam. Prvý známy náznak toho, že reálne čísla ešte nie sú všetky možné čísla, sa nachádza v úlohach Heróna Alexandrijského

z 1. storočia n. l. z tzv. *Moskovského papyrusu* ([14], str. 113). Definitívne boli komplexné čísla do matematiky zavedené až v 15. storočí, v súvislosti s riešením kubických rovníc.

Definícia 1.1.17 — Komplexné čísla. Množina komplexných čísel, označujeme ju $\mathbb{C}$, je množina

$$\mathbb{C} = \{a + i.b; a, b \in \mathbb{R}\},$$

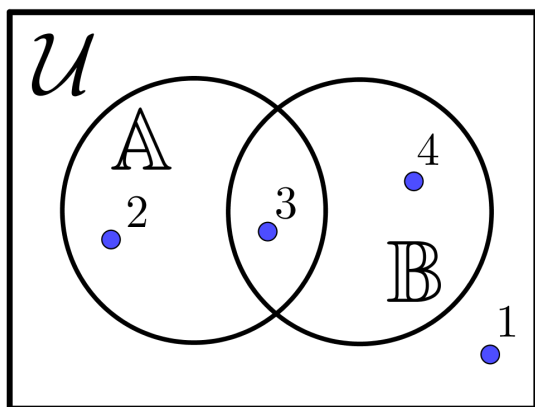
kde i sa nazýva imaginárna jednotka a definuje sa ako $i = \sqrt{-1}$.

Komplexnými číslami sa náš exkurz do číselných množín končí. Vďaka *Základnej vete algebry* vieme, že každá algebraická rovnica s komplexnými koeficientami má všetky riešenia v komplexných číslach. Z hľadiska algebraických rovníc je preto množina komplexných čísel úplná. Avšak ani komplexné čísla ešte nie sú „všetky“ čísla ([14] str. 121–123). V 40. rokoch 19. storočia najskôr Hamilton rozšíril komplexné čísla na *kvaterniony*, čo sú čísla s reálnou a troma *kvaternionovými jednotkami*. Hamilton takto vlastne objavil prvú nekomutatívnu algebru. Kvaterniony sa neskôr ukázali byť viac, než len čisto abstraktné matematické cvičenie. V súčasnosti majú široké využitie v matematickej fyzike, astronómii, vyššej geometrii a v počítačovej grafike. Krátko po Hamiltonovi jeho priateľ Graves a nezávisle od neho ešte Arthur Cayley rozšírili kvaterniony na *oktoniony*, čo sú čísla s reálnou a siedmimi *oktonionovými jednotkami*. Množina oktonionov je už kompletná. Zjednodušene povedané, žiadne ďalšie číselné množiny už neexistujú. Na dôkaz tejto skutočnosti si matematici museli počkať viac než 100 rokov od objavu oktonionov. Až v roku 1958 dokázali Michel André Kervaire a John Milnor, že existujú práve štyri algebraické štruktúry, v ktorých sa dá zmysluplne zaviesť delenie medzi ich prvkami. Sú nimi 1-, 2-, 4- a 8- rozmerné štruktúry. Tieto štruktúry, interpretované ako čísla, zodpovedajú reálnym a komplexným číslam, kvaternionom a oktonionom ([14], str. 123). Žiadne ďalšie druhy čísel už hľadať nemusíme, pretože neexistujú.

1.1.2 Vennove diagramy

Vennove diagramy sú grafické spôsoby vyjadrenia príslušnosti objektov z daného univerza do množín a vzťahov medzi týmito množinami. Samotné univerzum sa zvykne kresliť ako obdĺžnik a jednotlivé množiny ako v ňom ležiace kruhy. Vennove diagramy a ich využitie si ilustrujeme na niekoľkých príkladoch.

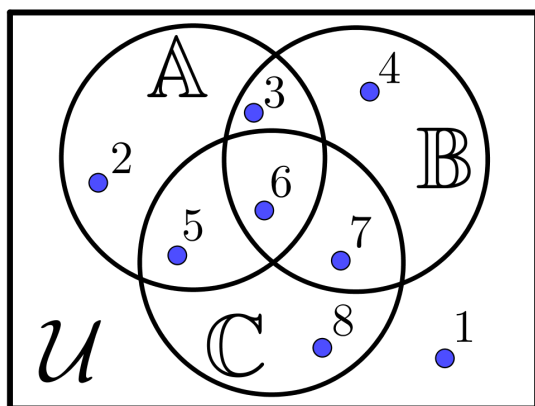
■ **Príklad 1.15** Majme dané univerzum $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$ a v ňom dve množiny $\mathbb{A} = \{2, 3\}$ a $\mathbb{B} = \{3, 4\}$. Túto situáciu potom zakreslíme nasledovným Vennovým diagramom, z ktorého hneď vidno, že platia uvedené vzťahy



- $\emptyset = (\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \setminus (\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$
- $\{1\} = \overline{\mathbb{A} \cup \mathbb{B}} = \overline{\mathbb{A}} \cap \overline{\mathbb{B}}$
- $\{2\} = \mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \mathbb{A} \cap \overline{\mathbb{B}}$
- $\{3\} = \mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \overline{\overline{\mathbb{A}} \cup \overline{\mathbb{B}}}$
- $\{4\} = \mathbb{B} \setminus \mathbb{A} = \overline{\mathbb{A}} \cap \mathbb{B}$

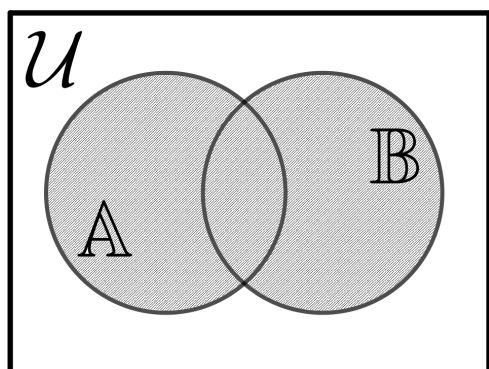
■

■ **Príklad 1.16** Dané je univerzum $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ a v ňom tri množiny $A = \{2, 3, 5, 6\}$, $B = \{3, 4, 6, 7\}$ a $C = \{5, 6, 7, 8\}$. Túto situáciu potom zakreslíme nasledovným Vennovým diagramom, z ktorého hneď vidno, že platia uvedené vzťahy

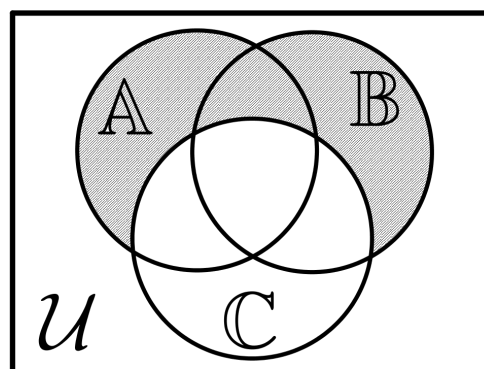


- $\{1\} = \overline{A \cup B \cup C} = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$
- $\{2\} = A \setminus (B \cup C) = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$
- $\{3\} = (A \cap B) \setminus C = A \cap B \cap \bar{C}$

■ **Príklad 1.17** Ak máme dané univerzum $\mathcal{U}$ a na ňom tri množiny A , B a C , tak vzťahy $A \cup B$ a $(A \cup B) \setminus C$ medzi týmito množinami zakreslíme pomocou Vennových diagramov takto



$A \cup B$

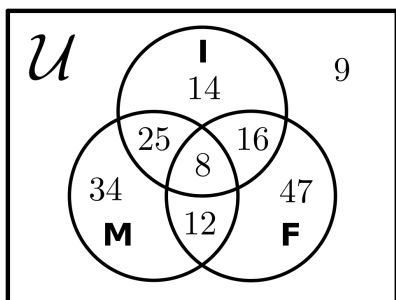
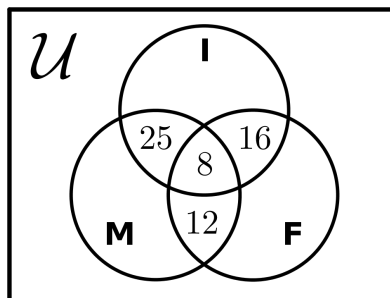


$(A \cup B) \setminus C$

■ **Príklad 1.18** V 1. ročníku je 165 študentov. Všetci títo študenti by mali navštevovať prednášky z matematiky, fyziky aj informatiky. Avšak len 8 študentov navštevuje všetky tri prednášky z matematiky, fyziky aj informatiky, 33 študentov navštevuje prednášky z matematiky a informatiky, 20 študentov navštevuje prednášky z matematiky a fyziky, 24 študentov navštevuje prednášky z fyziky a informatiky, 79 študentov navštevuje prednášky z matematiky, 83 študentov navštevuje prednášky z fyziky a 63 študentov navštevuje prednášky z informatiky. Koľko študentov nenavštevuje žiadnu z uvedených prednášok?

Riešenie: Situáciu popísanú v zadaní si zakreslíme pomocou Vennovho diagramu. Treba si však uvedomiť, že študenti, navštevujúci všetky tri prednášky, sú zarátaní aj medzi študentmi, ktorí navštevujú dve, alebo jednu prednášku. Napríklad sa v zadaní hovorí, že matematiku navštevuje 79 študentov. Niektorí z nich však môžu navštevovať aj prednášky z fyziky, a/alebo informatiky. Preto si uvedené počty zo zadania musíme upraviť. Najskôr do obrázku zapíšeme len počty študentov, ktorí navštevujú všetky tri prednášky a počty študentov, ktorí navštevujú práve dve z uvedených troch prednášok.

Na obrázku vpravo máme zapísané počty študentov, ktorí navštevujú všetky tri prednášky a počty študentov, navštevujúcich práve dve z uvedených troch prednášok. Teraz si podľa zadania úlohy môžeme dopočítať počty študentov, ktorí navštevujú práve jednu prednášku.

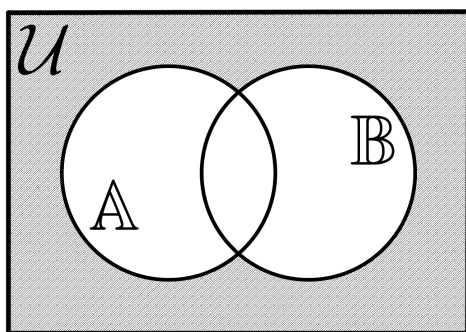


Na obrázku vľavo máme zapísané počty študentov, ktorí navštevujú všetky tri prednášky, počty študentov, navštevujúcich práve dve z uvedených troch prednášok a počty študentov navštevujúcich práve jednu z uvedených troch prednášok. Keď si všetky tieto počty zráame, tak zistíme, koľko študenti nenavštevujú žiadnu z uvedených troch prednášok (koľko študentov chýba do celkového počtu 165). Takých študentov je 9.

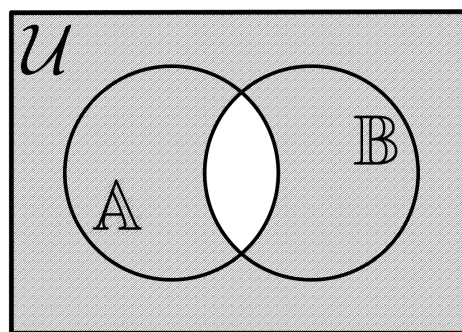
Uvedený postup sa nazýva *princíp zapojenia-vypojenia* a pre viac než 2–3 množiny sa dá realizovať aj menej ťažkopádny spôsobom, než je kreslenie Vennových diagramov. ■

■ **Príklad 1.19** Ak máme dané univerzum $\mathcal{U}$ a na ňom množiny, napr. A a B , tak pomocou Vennových diagramov vieme zakresliť rôzne zŕahy medzi týmito množinami. Napríklad

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = \mathcal{U} \setminus (A \cup B) \quad \text{alebo} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} = \mathcal{U} \setminus (A \cap B).$$



$$\mathcal{U} \setminus (A \cup B)$$



$$\mathcal{U} \setminus (A \cap B)$$

1.1.3 Kartézsky súčin množín a usporiadané n -tice

Definícia 1.1.1 hovorí, že v množine nezáleží na poradí jej objektov. Niekdy však potrebujeme, aby na poradí objektov záležalo. Zavedieme si preto nasledovný pojem.

Definícia 1.1.18 — Usporiadaná dvojica. Pod usporiadanou dvojicou budeme rozumieť dvojicu objektov a a b , na ktorých poradí záleží. Označovať ju budeme (a, b) .

Pokiaľ $a \neq b$, tak $(a, b) \neq (b, a)$. Rovnosť dvoch usporiadaných dvojíc je definovaná predpisom

$$(a, b) = (c, d) \iff ((a = c) \wedge (b = d)).$$



Analogicky ako usporiadanú dvojicu môžeme definovať aj usporiadanú trojicu, štvoricu a vo všeobecnosti n -ticiu.

Pomocou usporiadaných dvojíc následne môžeme definovať kartézsky (karteziánsky) súčin dvoch množín.

Definícia 1.1.19 — Kartézsky súčin. Majme dve množiny $\mathbb{X}$ a $\mathbb{Y}$. Potom ich kartézsky súčin, označujeme ho $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, sa definuje ako

$$\mathbb{X} \times \mathbb{Y} = \{(x, y); x \in \mathbb{X} \text{ a } y \in \mathbb{Y}\}.$$

P Podobne ako pri usporiadaných dvojiciach, aj pri kartézskom súčine môžeme analogicky definovať kartézsky súčin troch, štyroch a vo všeobecnosti n množín.

■ **Príklad 1.20** Dané sú dve množiny $\mathbb{A} = \{1, 2\}$ a $\mathbb{B} = \{a, b\}$. Potom

$$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\} \quad \mathbb{B} \times \mathbb{A} = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}.$$

Vidíme teda, že vo všeobecnosti platí $\mathbb{A} \times \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \times \mathbb{A}$. Platí však nasledujúca veta. ■

Veta 1.1.1 — Veta o mohutnosti kartézskeho súčinu. Majme dve konečné množiny $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$. Potom platí $|\mathbb{A} \times \mathbb{B}| = |\mathbb{A}| \cdot |\mathbb{B}|$.

P Kartézsky súčin množiny samej so sebou budeme označovať aj ako mocninu množiny. Napríklad

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2 \quad \text{alebo} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3 \quad \dots$$

1.2 Úvod do matematickej logiky

Úlohou tejto časti nie je nahradiť prednášky z matematickej logiky, ale len zopakovať si základné pojmy, definície logických spojok a ich vlastností a pripomenúť si význam kvantifikátorov. Ako dobrý zdroj informácií o matematickej logike môžu poslúžiť skriptá [9], ktoré sú voľne stiahnuteľné, prípadne kniha [27]. Základný pojem, s ktorým v matematickej logike pracujeme, je *logický výrok*.

Definícia 1.2.1 — Logický výrok. Logický výrok je oznamovacia veta, o ktorej pravdivosti sa vieme presvedčiť, t. j. poznáme jej pravdivostnú hodnotu.

P V prípade logického výroku musí byť rozhodnuteľné, či je pravdivý, alebo nepravdivý. Každý logický výrok má jednoznačnú pravdivostnú hodnotu: buď PRAVDA, alebo NEPRAVDA. Podľa toho potom hovoríme o pravdivých, alebo nepravdivých výrokochoch.

Logické výroky budeme obvykle označovať veľkými písmenami latinskej abecedy, napr. $A, B, \dots$. Okrem toho budeme používať aj logické premenné a označovať ich malými písmenami latinskej abecedy, napr. $p, q, \dots$. Logická premenná bude taká premenná, za ktorú môžeme dosadiť nejaký logický výrok. Pravdivostnú (logickú) hodnotu logických výrokov budeme označovať písmenami P (pravda) a N (nepravda), alebo číslami 1 alebo 0, pričom 1 označuje pravdu a 0 nepravdu. Logické výroky môžeme pomocou logických spojok spájať do zložitejších výrokových formúl. To, ako sa to robí, popisuje jazyk výrokovej logiky, ktorým sa tu my zaoberať nebudeme a čitateľov len odkazujeme na už spomenuté skriptá [9]. Logické spojky sa zvyknú nazývať aj operátory, alebo logické funkcie.

Definícia 1.2.2 — Logické spojky. Medzi základné logické spojky sa radia:

- ▷ *negácia*, označujeme ju symbolom $\neg$, je unárna logická spojka,
- ▷ *konjunkcia*, logické „a“, označujeme ju symbolom $\wedge$, je binárna logická spojka,
- ▷ *disjunkcia*, logické „alebo“, označujeme ju symbolom $\vee$, je binárna logická spojka,
- ▷ *implikácia*, označujeme ju symbolom $\Rightarrow$, je binárna logická spojka a
- ▷ *ekvivalencia*, označujeme ju symbolom $\Leftrightarrow$, je binárna logická spojka.

Pomocou logických spojok môžeme buď nejakým spôsobom meniť hodnotu logického výroku, v prípade unárnej spojky $\neg$, alebo spájať dva logické výroky, v prípade binárnej spojky. Napríklad ak A a B sú dva logické výroky, tak ich spojením, napr. implikáciou $A \Rightarrow B$, dostávame tiež logický výrok, ktorý sa navýša *výroková formula*. Pôvodné logické výroky tejto formuly, t.j. A a B , sa nazývajú *prvotné formuly*, alebo aj *atomické formuly*.

My si teraz postupne definujeme uvedených päť logických spojok pomocou ich pravdivostných tabuliek. Avšak nie všetky uvedené spojky sú potrebné. Napríklad posledné dve sa dajú zapísať pomocou prvých troch. Pri axiomatickom prístupe k matematickej logike (pozri [9]) používame jazyk matematickej logiky, ktorý využíva z uvedených spojok len negáciu a implikáciu. Všetky ostatné spojky sa dajú zapísať pomocou týchto dvoch. Ale s uvedenými piatimi spojkami sa väčšinou stretávajú už žiaci stredných škôl, pokiaľ preberajú logiku, a preto sa medzi základné spojky obvykle zaraďujú. Okrem toho sa pri konštrukcii logických obvodov často stretávame aj s logickými spojkami xor, nand a nor.

Pravdivostné tabuľky, pomocou ktorých budeme definovať logické spojky, sú tabuľky, v ktorých pre všetky možné hodnoty prvotných formúl budú uvedené pravdivostné hodnoty zložených výrokových formúl. Ešte skôr, než sa pustíme do definícií logických spojok, uvedieme si definície *tautológie* a *kontradikcie*.

Definícia 1.2.3 — Tautológia a kontradikcia. Tautológia a kontradikcie sú dva špeciálne typy výrokových formúl.

- ▷ *Tautológia* je taká výroková formula, ktorá je vždy pravdivá, bez ohľadu na pravdivostné hodnoty svojich prvotných formúl.
- ▷ *Kontradikcia* je taká výroková formula, ktorá je vždy nepravdivá, bez ohľadu na pravdivostné hodnoty svojich prvotných formúl.

A teraz sľúbené logické spojky.

Definícia 1.2.4 — Negácia ($\neg$). Negácia je unárna logická spojka, čiže vzťahuje sa len na jeden logický výrok. Tabuľka pravdivostných hodnôt pre negáciu je nasledovná

p	$\neg p$
0	1
1	0

Z pravdivostnej tabuľky vidíme, že negácia mení (neguje) pravdivostnú hodnotu logického výroku. Pravdivé výroky mení na nepravdivé a naopak.

Definícia 1.2.5 — Konjunkcia ($\wedge$). Konjunkcia, alebo aj logické „a“, je binárna logická spojka, čiže spája dva logické výroky. Tabuľka pravdivostných hodnôt pre konjunkciu je nasledovná

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ak konjunkciou spojíme dva logické výroky, tak výsledný výrok bude pravdivý len ak oba pôvodné výroky sú pravdivé. Čiže musí byť pravdivý prvý a druhý výrok súčasne.

Definícia 1.2.6 — Disjunkcia ($\vee$). Disjunkcia, alebo aj logické „alebo“, je binárna logická spojka, čiže spája dva logické výroky. Tabuľka pravdivostných hodnôt pre disjunkciu je nasledovná

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Disjunkcia, logické „alebo“, nie je vylučovacie „alebo“, ako sa to často používa v bežnej hovorovej reči. Ak v bežnom rozhovore niekto povie: „*Večer pôjdem do divadla, alebo do kina.*“ tak tým obvykle chce povedať, že pôjde buď do divadla, alebo do kina, ale nie súčasne do oboch. Ak ale disjunkciou spojíme dva logické výroky, tak výsledný výrok bude pravdivý ak aspoň jeden z pôvodných výrokov je pravdivý. Čiže výsledný výrok je pravdivý aj keď sú oba pôvodné výroky súčasne pravdivé. Preto ak sa matematika, novopečeného otca, opýtate: „*Je to chlapec, alebo dievčatko?*“, tak od neho dostanete matematicky korektnú, správnu a zároveň nič nehovoriacu² odpoveď: „Áno“.

Definícia 1.2.7 — Implikácia ($\Rightarrow$). Implikácia je binárna logická spojka, čiže spája dva logické výroky. Tabuľka pravdivostných hodnôt pre implikáciu je nasledovná

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Implikácia je vyjadrovaná slovnou konštrukciou „ak . . . , tak . . .“, je intuitívne zrejme najťažšie pochopiteľná logická spojka. Bežným ľuďom, v rôznych logických hmlamových úlohách, robí spomedzi všetkých logických spojok najväčšie problémy, o čom sa môžeme sami presvedčiť v úlohách na konci kapitoly. Problém s implikáciou je v tom, že ak ňou spojíme dva logické výroky, tak výsledný výrok bude pravdivý ak prvý výrok je nepravdivý alebo druhý výrok je pravdivý (opäť tu nie je použité vylučovacie „alebo“). Takže výrok

„Ak päť plus päť je dva, tak xyz“

² „nič nehovoriacu“ – dvojitá negácia, čo je špecialita mnohých slovanských jazykov a logický nezmysel.

bude pravdivý, nech by sme xyz nahradili akýmkoľvek výrokom.

Definícia 1.2.8 — Ekvivalencia ($\Leftrightarrow$). Ekvivalencia je binárna logická spojka, čiže spája dva logické výroky. Tabuľka pravdivostných hodnôt pre ekvivalenciu je nasledovná

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ekvivalencia sa vyjadruje konštrukciou „... práve vtedy keď ...“. Ak dva výroky spojíme ekvivalenciou, tak výsledný výrok bude mať pravdivú hodnotu práve vtedy, keď oba pôvodné výroky budú mať rovnakú pravdivostnú hodnotu. Čiže keď oba pôvodné výroky sú súčasne pravdivé, alebo sú oba súčasne nepravdivé.

Spôsob, akým môžeme z prvotných formúl a logických spojok konštruovať komplexnejšie výrokové formuly, nie je ľubovoľný. Napríklad konštrukcie $A \Leftrightarrow$, alebo $\Rightarrow \neg A$, alebo $A \Rightarrow B \Rightarrow C$, nie sú výrokové formuly. Takže teraz si uvedieme definíciu toho, čo výroková formula je.

Definícia 1.2.9 — Výroková formula. Majme množinu prvotných formúl, označme si ju $\mathbb{P}$. Potom pomocou prvotných formúl a logických spojok výrokovú formulu skonštruujeme, ak konečný počet krát aplikujeme nasledovné pravidlá

1. Každá prvotná formula z množiny $\mathbb{P}$, čiže každé $p \in \mathbb{P}$, je výroková formula.
2. Ak A a B sú výrokové formuly, tak potom aj

$$(\neg A) \quad , \quad (A \wedge B) \quad , \quad (A \vee B) \quad , \quad (A \Rightarrow B) \quad \text{a} \quad (A \Leftrightarrow B)$$

sú výrokové formuly.

P Pri definícii výrokovej formuly sme použili aj zátvorky, symboly $()$, ktoré dovtedy neboli spomenuté. Pomocou zátvoriek sa určuje priorita operácií, aplikovania logických spojok, pretože táto nie je vždy jednoznačná. V istých situáciách možno zátvorky vynechať, ale pokiaľ si nie sme istí, je lepšie ich písať. Napríklad

- Vonkajšie zátvorky výrokovej formuly možno vždy vynechať. Napríklad $(A \wedge (B \Rightarrow C))$ môžeme a budeme zapisovať ako $A \wedge (B \Rightarrow C)$.
- $A \wedge B \wedge C$ bude výroková formula aj bez použitia zátvoriek, pretože $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$. Čiže bez ohľadu na to, akým spôsobom zátvorky zapíšeme, výsledok bude mať vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu.
- $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ nie je výroková formula, pretože do úvahy prichádzajú dve výrokové formuly $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ a $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$. Tieto dve výrokové formuly sú rôzne, majú rôzne pravdivostné hodnoty a nie je jasné, ktorá z týchto dvoch výrokových formúl je zápisom $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ myslená.

Definícia 1.2.10 — Tautologicky ekvivalentné formuly. Majme dve výrokové formuly A a B . Tieto dve formuly sa nazývajú tautologicky ekvivalentné, alebo stručne len ekvivalentné, ak výroková formula $A \Leftrightarrow B$ je tautológia.

Pojmy, ktoré sme si doteraz definovali, t. j. výroky, prvotné formuly, logické spojky a výrokové formuly, sú súčasťou tzv. *výrokovej logiky*. My však budeme potrebovať viac než len výrokovú logiku. Výroky často budú hovoriť o objektoch z istej množiny, napr. čísla, ľudia atď., ktoré budú, alebo nebudú mať nejaké vlastnosti. Objekty, s ktorými budeme pracovať budú patriť do nejakého univerza. Bude to napríklad množina všetkých prirodzených, celých, alebo reálnych čísel,

prípadne všetci ľudia, alebo všetci muži, alebo všetky ženy atď. V našich výrokových formulách budeme potrebovať vyjadriť aj to, koho alebo akej skupiny objektov sa daný výrok týka. Na to potrebujeme zaviesť pojem kvantifikátora a vlastností (predikátov), ktoré objekty môžu nadobúdať. Kvantifikátory budeme používať dva – všeobecný a existenčný.

Definícia 1.2.11 — Kvantifikátory. Majme univerzum objektov $\mathbb{P}$ a nech premenná p vyjadruje objekt z tohto univerza. Toto budeme označovať pomocou $p \in \mathbb{P}$. Potom

- ▷ Symbol $\forall$ sa nazýva *všeobecný kvantifikátor* a zápis $\forall p \in \mathbb{P}$ znamená *pre všetky objekty z univerza $\mathbb{P}$* .
- ▷ Symbol $\exists$ sa nazýva *existenčný kvantifikátor* a zápis $\exists p \in \mathbb{P}$ znamená *existuje (nejaký) objekt z univerza $\mathbb{P}$* .

P Ak by sme si zobrali za univerzum $\mathbb{P}$ všetkých žijúcich ľudí, tak potom výroková formula

$$\forall p \in \mathbb{P} : „p \text{ dýcha}“$$

hovorí o tom, že každý žijúci človek dýcha a bude to pravdivá formula. Takže uvedené tvrdenie musí byť pravdivé pre každého jedného žijúceho človeka. Druhý príklad bude výroková formula

$$\exists p \in \mathbb{P} : „p \text{ má hnedé oči}“$$

hovorí o tom, že existuje človek, ktorý má hnedé oči a táto formula je tiež pravdivá. Pritom stačí, ak spomedzi všetkých žijúcich ľudí existuje jeden konkrétny človek, pre ktorého je uvedené tvrdenie pravdivé.

Výroková logika rozšírená o kvantifikátory a predikáty (vlastnosti objektov) tvorí tzv. *predikátovú logiku* a jej jazyk sa nazýva *jazyk prvého rádu*. Pre podrobnejšie informácie pozri [9].

Pri výrokových formulách predikátovej logiky si treba dať pozor práve pri práci s kvantifikátormi. V dôsledku nepresností vo vyjadrovaní sa pomocou bežného hovorového jazyka, často dochádza ku chybám. Ak napríklad máme výrok:

„Všetky okná sú špinavé.“

tak jeho negáciou nie je výrok: „Všetky okná sú čisté.“, ale jeho negáciou je výrok

„Existuje okno, ktoré nie je špinavé.“

Negáciu kvantifikovaných výrokových formúl dostaneme tak, že zmeníme kvantifikátor ($\forall \leftrightarrow \exists$) a negujeme výrok.

$$\neg(\forall p \in \mathbb{P} : \text{výrok}) \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{P} : \neg \text{výrok}) \quad \text{a} \quad \neg(\exists p \in \mathbb{P} : \text{výrok}) \Leftrightarrow (\forall p \in \mathbb{P} : \neg \text{výrok})$$

■ **Príklad 1.21** Uvedieme si niekoľko pravdivých (P) a nepravdivých (N) výrokových formúl predikátovej logiky. Všetky tieto formuly budú hovoriť o reálnych číslach. Univerzom preto bude množina reálnych čísel $\mathbb{R}$.

- | | | | |
|--|-----|--|-----|
| a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ | (P) | f) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 < 4$ | (P) |
| b) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$ | (N) | g) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 > 4$ | (P) |
| c) $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$ | (P) | h) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 \leq 4$ | (N) |
| d) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$ | (N) | i) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\exists z \in \mathbb{R}) : x + y = z$ | (P) |
| e) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x^2 + y^2 \geq 4$ | (N) | j) $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R}) : x + y \neq z$ | (N) |

V uvedených príkladoch sú dvojice a) $\leftrightarrow$ b), c) $\leftrightarrow$ d), ..., i) $\leftrightarrow$ j) vzájomné negácie. ■

1.3 Cvičenia

Cvičenie 1.1 Dokážte, že ak $|\mathbb{A}| = n$, tak $|\mathcal{P}(\mathbb{A})| = 2^n$. ■

Cvičenie 1.2 Vypíšte všetky prvky množiny

- (a) $\mathbb{A} = \{x; x \leq 100, x \text{ je prvočíslo}\}$
- (b) $\mathbb{A} = \{x; x \leq 100, x \text{ je prvočíslo, } x \text{ je párne}\}$
- (c) $\mathbb{A} = \{x; x \leq 100, 7 \mid (x+2), x \text{ je prvočíslo}\}$
- (d) $\mathbb{A} = \{x; x \leq 100, 7 \mid (x+1), x \text{ je prvočíslo}\}$

Cvičenie 1.3 Majme dané $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$, $\mathbb{A} = \{1, 4, 7, 10\}$, $\mathbb{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\mathbb{C} = \{2, 4, 6, 8\}$. Nájdite

- | | | |
|--|--|--|
| (a) $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ | (g) $\overline{\mathcal{U}}$ | (m) $\overline{\mathbb{A}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{B})$ |
| (b) $\mathbb{B} \cap \mathbb{C}$ | (h) $\mathbb{A} \cup \emptyset$ | (n) $\overline{\mathbb{B}} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{A})$ |
| (c) $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$ | (i) $\mathbb{B} \cap \emptyset$ | (o) $(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \setminus \mathbb{C}$ |
| (d) $\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$ | (j) $\mathbb{A} \cup \mathcal{U}$ | (p) $(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \cup \mathbb{C}$ |
| (e) $\overline{\mathbb{A}}$ | (k) $\mathbb{B} \cap \mathcal{U}$ | (q) $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \setminus (\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbb{B})$ |
| (f) $\mathcal{U} \setminus \mathbb{C}$ | (l) $\mathbb{A} \cap (\mathbb{B} \cup \mathbb{C})$ | (r) $(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \cup (\mathcal{U} \setminus (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{A}}))$ |

Cvičenie 1.4 Určte mohutnosť množiny

- | | | |
|------------------------------------|---|--|
| (a) $\emptyset$ | (d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ | (f) $\{a, b, a, c\}$ |
| (b) $\{\emptyset\}$ | (e) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$ | (g) $\{a, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, b\}$ |
| (c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ | | (h) $\{\emptyset, a, \{\emptyset\}, \{a\}\}$ |

Cvičenie 1.5 Dokážte, že $\mathbb{A} \neq \mathbb{B}$

- (a) $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$, $\mathbb{B} = \emptyset$
- (b) $\mathbb{A} = \{1, 3, 5\}$, $\mathbb{B} = \{n; n \in \mathbb{Z}^+, n^2 - 1 < n\}$
- (c) $\mathbb{A} = \{1, 2\}$, $\mathbb{B} = \{x; x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$
- (d) $\mathbb{B} = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathbb{C} = \{2, 4, 6, 8\}$ a $\mathbb{A} = \mathbb{B} \cap \mathbb{C}$

Cvičenie 1.6 Zistite, ktoré dvojice množín $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ sa rovnajú

- (a) $\mathbb{A} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathbb{B} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\}$
- (b) $\mathbb{A} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathbb{B} = \{\{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset\}$
- (c) $\mathbb{A} = \{x; x \in \mathbb{N}, -2 \leq x \leq 3\}$, $\mathbb{B} = \{1, 2, 3\}$
- (d) $\mathbb{A} = \{x; x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 3\}$, $\mathbb{B} = \{1, 2, 3\}$

Cvičenie 1.7 Dokážte, že $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$

- | | |
|--|--|
| (a) $\mathbb{A} = \{1, 2\}$, $\mathbb{B} = \{3, 2, 1\}$ | (c) $\mathbb{A} = \{2n; n \in \mathbb{Z}^+\}$, $\mathbb{B} = \{n; n \in \mathbb{Z}^+\}$ |
| (b) $\mathbb{A} = \{1\} \times \{1, 2\}$, $\mathbb{B} = \{1\} \times \{1, 2, 3\}$ | (d) $\mathbb{A} = \{n; n \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{B} = \{n+1; n \in \mathbb{Z}\}$ |

Cvičenie 1.8 Dokážte, že $A \not\subseteq B$

- (a) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2\}$
- (b) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \emptyset$
- (c) $A = \{x; x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$, $B = \{1, 2\}$

■

Cvičenie 1.9 Majme dané univerzum $\mathcal{U}$ a v ňom tri množiny A , B a C . Nakreslite Vennov diagram a vyšrafujte danú množinu

- (a) $A \cap \overline{B}$
- (b) $\overline{A} \setminus B$
- (c) $B \cup (B \setminus A)$
- (d) $(A \cup B) \setminus B$
- (e) $B \cap \overline{(A \cup C)}$
- (f) $(\overline{A} \cup B) \cap (\overline{C} \setminus A)$
- (g) $(C \cap A) \setminus (B \setminus A \cap C)$
- (h) $(B \setminus \overline{C}) \cup ((B \setminus \overline{A}) \cap (C \cup B))$

■

Cvičenie 1.10 V skupine 191 študentov

- 10 študuje francúzštinu, ekonómiu a hudbu,
- 36 francúzštinu a ekonómiu,
- 20 francúzštinu a hudbu,
- 18 ekonómiu a hudbu,
- 65 francúzštinu,
- 76 ekonómiu a
- 63 hudbu.

Koľko študentov

- (a) študuje francúzštinu a hudbu, ale nie ekonómiu?
- (b) študuje ekonómiu, ale nie francúzštinu, ani hudbu?
- (c) študuje francúzštinu alebo ekonómiu?
- (d) neštuduje žiaden z uvedených troch predmetov?

■

Cvičenie 1.11 Študenti študujú matematiku alebo informatiku. Jedna pätina z tých, ktorí študujú matematiku, študuje aj informatiku. Jedna osmina z tých, ktorí študujú informatiku, študuje aj matematiku. Rozhodnite, či viac než tretina spomedzi týchto študentov študuje matematiku.

■

Cvičenie 1.12 Majme dané množiny $X = \{1, 2\}$ a $Y = \{a, b, c\}$. Zapište množinu

- (a) $X \times X$
- (b) $X \times Y$
- (c) $Y \times X$
- (d) $Y \times Y$

■

Cvičenie 1.13 Majme dané množiny $X = \{1, 2\}$, $Y = \{a\}$ a $Z = \{\alpha, \beta\}$. Zapište množinu

- (a) $X \times Y \times Z$
- (b) $X \times Y \times Y$
- (c) $X \times X \times X$
- (d) $Z \times Y \times Z$

■

Cvičenie 1.14 Uveďte geometrický popis každej z nasledovných číselných množín

- (a) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- (b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$
- (c) $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$
- (d) $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}^+$
- (e) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- (f) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- (g) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$
- (h) $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

■

Cvičenie 1.15 Nech $\mathcal{P}(\mathbb{A})$ je potenčná množina množiny $\mathbb{A}$. Rozhodnite, či sú pravdivé tvrdenia

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $\{\mathbb{X}\} \subseteq \{\mathbb{X}\}$ | (c) $\{\mathbb{X}\} \in \{\mathbb{X}, \{\mathbb{X}\}\}$ | (e) $\{2\} \subseteq \mathcal{P}(\{1, 2\})$ |
| (b) $\{\mathbb{X}\} \in \{\mathbb{X}\}$ | (d) $\{\mathbb{X}\} \subseteq \{\mathbb{X}, \{\mathbb{X}\}\}$ | (f) $\{2\} \in \mathcal{P}(\{1, 2\})$ |

Cvičenie 1.16 Vypíšte všetky prvky množiny $\mathcal{P}(\{a, b\})$. Koľko ich je a ktoré sú vlastné podmnožiny množiny $\{a, b\}$?

Cvičenie 1.17 Vypíšte všetky prvky množiny $\mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$. Koľko ich je a ktoré sú vlastné podmnožiny množiny $\{a, b, c, d\}$?

Cvičenie 1.18 Ak $|\mathbb{X}| = n$, koľko prvkov má $\mathcal{P}(\mathbb{X})$? Koľko vlastných podmnožín má $\mathbb{X}$?

Cvičenie 1.19 Aký je vzťah medzi množinami $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$, ak platí

- | | | | |
|---|---|--|---|
| (a) $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{A}$ | (b) $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{A}$ | (c) $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \emptyset$ | (d) $\overline{\mathbb{A} \cap \mathbb{B}} = \overline{\mathbb{B}}$ |
|---|---|--|---|

Cvičenie 1.20 Zistite, ktorá z nasledujúcich množín je prázdna

- | | |
|---|--|
| (a) $\{a; a \text{ je nepárne celé číslo a } a^2 = 4\}$ | (c) $\{a; a \text{ je kladné celé číslo a } a^2 < 1\}$ |
| (b) $\{a; a \text{ je celé číslo a } a + 9 = 9\}$ | (d) $\{a; a \text{ je celé číslo a } a < 1\}$ |

Cvičenie 1.21 Nájdite príklad množín, pre ktoré platí $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{A} \cup \mathbb{C}$ a $\mathbb{B} \neq \mathbb{C}$.

Cvičenie 1.22 Nakreslite Vennove diagramy znázorňujúce situácie

- | | |
|---|---|
| (a) $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} \subset \mathbb{A} \cup \mathbb{C}$, ale $\mathbb{B} \not\subset \mathbb{C}$ | (c) $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \subset \mathbb{A} \cap \mathbb{C}$, ale $\mathbb{B} \not\subset \mathbb{C}$ |
| (b) $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \mathbb{C} \cup \mathbb{B}$, ale $\mathbb{A} \neq \mathbb{C}$ | (d) $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \mathbb{C} \cap \mathbb{B}$, ale $\mathbb{A} \neq \mathbb{C}$ |

Cvičenie 1.23 Pomocou Vennových diagramov dokážte

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $\mathbb{A} \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}) = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ | (b) $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \setminus \mathbb{A} = \mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$ | (c) $\mathbb{A} \cup (\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) = \mathbb{A}$ |
|--|---|--|

Cvičenie 1.24 Nájdite príklady množín $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ a $\mathbb{C}$, tak aby platilo

- | | |
|---|--|
| (a) $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \subset (\mathbb{A} \cup \mathbb{C})$ a $\mathbb{B} \not\subset \mathbb{C}$ | (c) $(\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) = (\mathbb{C} \cup \mathbb{B})$ a $\mathbb{A} \neq \mathbb{C}$ |
| (b) $(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \subset (\mathbb{A} \cap \mathbb{C})$ a $\mathbb{B} \not\subset \mathbb{C}$ | (d) $(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) = (\mathbb{C} \cap \mathbb{B})$ a $\mathbb{A} \neq \mathbb{C}$ |

Cvičenie 1.25 Dokážte, že pre $\forall n \in \mathbb{N}$ platí rovnosť

$$\mathbb{A} \cup (\mathbb{B}_1 \cap \mathbb{B}_2 \cap \dots \cap \mathbb{B}_n) = (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}_1) \cap (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}_2) \cap \dots \cap (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}_n).$$

Cvičenie 1.26 Dokážte vetu 1.1.1 (strana 19). ■

Cvičenie 1.27 Máme dvojčky Romana a Sanyho, ktorí sú si na nerozoznanie podobní. Rozdiel je len v tom, že jeden z nich vždy hovorí pravdu (volajme ho pravdovravný) a druhý vždy klame (volajme ho klamár). Pravdovravný nemôže nikdy povedať nepravdivý výrok a klamár nemôže nikdy povedať pravdivý výrok. Žiaľ nevieme, ktorý z nich hovorí pravdu a ktorý klame a ani nevieme na pohľad rozlíšiť, ktorý je Roman a ktorý Sany. Raz ich oboch stretne spolu na ulici.

- (a) Môžeme jedinou otázkou (na jedného z nich), na ktorú existuje odpoveď typu ÁNO/NIE, zistiť, ktorý z nich je Roman?
- (b) Môžeme jedinou otázkou (na jedného z nich), na ktorú existuje odpoveď typu ÁNO/NIE, zistiť, či je Roman pravdovravný alebo klamár?

Cvičenie 1.28 Existuje ostrov, na ktorom všetci obyvatelia buď vždy hovoria pravdu (nazývame ich pravdovravní), alebo vždy klamú (nazývame ich klamári). Pravdovravní teda nemôžu nikdy povedať nepravdivý výrok a klamári nemôžu nikdy povedať pravdivý výrok. Okolo ostrova sú zátoky, v niektorých z nich sa nachádzajú perly a v niektorých sa nenachádzajú perly. Všetci domorodci pritom presne vedia, v ktorej zátokke sú a v ktorej nie sú perly. K jednej zo zátok príde turista a opýta sa domorodca, ktorého tam stretne.

Turista: „Sú v tejto zátokke perly?“

Domorodec: „Ak som pravdovravný, tak v tejto zátokke sú perly.“

- (a) Môže turista z uvedenej odpovede zistiť, či v zátokke sú perly? Ak sa to dá zistiť, tak oplatí sa mu šnorchlovať a hľadať perly?
- (b) Môže turista z uvedenej odpovede zistiť, či je domorodec klamár alebo pravdovravný? Ak sa to dá zistiť, tak akého typu je domorodec?

Cvičenie 1.29 Napíšte výrokovú formulu vyjadrujúcu stavbu výroku a utvorte negáciu:

- (a) Dva plus tri je viac než šesť.
- (b) Do školy pôjdem pešo alebo autobusom.
- (c) Dva je menšie, nanajvýš rovné než štyri, štyri je menšie než päť.
- (d) Prirodzené číslo je deliteľné tromi práve vtedy, keď jeho ciferný súčet je deliteľný tromi.
- (e) Ak má graf práve jeden vrchol nepárneho stupňa, tak sa nedá nakresliť jedným ťahom.
- (f) V predpovedi počasia dnes hovorili, že zajtra bude pršať, alebo bude snežiť.
- (g) Keď sa vonku zotmie, zapne sa pouličné osvetlenie.
- (h) Prídeš neskoro na prednášku, ak okamžite nevstaneš a nevyrazíš.
- (i) Na večeru zjem zvyšky zo včera, ak ešte niečo zostalo, a ak nie, tak budem musieť navariť, alebo si objednáť pizzu.

Cvičenie 1.30 Ktoré z nasledujúcich výrokov sú pravdivé?

- | | | |
|---------------------------------|------------------------------------|-------------------------------|
| (a) $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$ | (e) $\emptyset \subseteq \{1, 2\}$ | (i) $\{1\} \subseteq \{1\}$ |
| (b) $\{1, 2, 3\} = (1, 2, 3)$ | (f) $\emptyset \subset \{1, 2\}$ | (j) $\{1\} \subset \{1\}$ |
| (c) $(1, 2) = (2, 1)$ | (g) $1 \in \{1\}$ | (k) $2 \in \{1, 2, 3\}$ |
| (d) $\emptyset \in \{1, 2\}$ | (h) $\{1\} \in \{1\}$ | (l) $2 \subseteq \{1, 2, 3\}$ |

Cvičenie 1.31 Jankovi nechutil špenátový prívarok, ktorý dostal na obed, a tak mu mama povedala: „Ak nezješ celý obed, nedostaneš potom zmrzlinu.“ Janko teda zjedol celý obed, ale zmrzlinu napriek tomu nedostal. Oklamala ho mama, alebo nie? ■

Cvičenie 1.32 Nasledujúce výroky vyjadrite len pomocou implikácie a negácie. Potom utvorte negácie týchto výrokov.

- (a) Ak bude pekné počasie, Martin pôjde na túru.
 - (b) Ak som smädný, dám si čaj.
 - (c) Voda začína vriť práve vtedy, keď dosiahne teplotu 100° Celzia pri normálnom atmosférickom tlaku.
 - (d) Dočítam knihu, alebo si pozriem film.
 - (e) Ráno vstanem a naraňajkujem sa.
 - (f) Pôjdem tam iba v tom prípade, ak tam pôjdeš aj ty.
-

Cvičenie 1.33

- (a) Zistite, koľko existuje rôznych binárnych logických spojok.
 - (b) Zistite koľko binárnych logických spojok je takých, že sa len pomocou tejto jednej spojky dajú definovať všetky ostatné logické spojky.
-

Cvičenie 1.34 Určte, či nasledujúce zápisy sú výrokové formuly. Vysvetlite prečo sú, resp. ak nie sú, doplňte do zápisov zátvorky tak, aby to boli výrokové formuly. Koľkými spôsobmi sa to dá spraviť v jednotlivých prípadoch? Dajú sa zátvorky doplniť tak, aby vzniknutá výroková formula bola tautológia? Ak áno, ako?

- (a) $A \wedge A \vee \neg A$
 - (b) $A \vee B \implies \neg \neg A \wedge B \vee A$
 - (c) $A \wedge B \wedge C \iff \neg A \vee \neg B \vee \neg C$
-

Cvičenie 1.35 Vyjadrite implikáciu ($\implies$) pomocou konjunkcie, disjunkcie a negácie a svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.36 Pomocou negácie a implikácie zapíšte konjunkciu a disjunkciu a svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.37 Zapíšte nand pomocou konjunkcie, disjunkcie a negácie a svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.38 Zapíšte nor pomocou negácie a implikácie a svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.39 Zapíšte „exkluzívne alebo“ xor ($\oplus$) pomocou konjunkcie, disjunkcie a negácie a svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.40 Zapište negáciu, konjunkciu, disjunkciu, implikáciu a ekvivalenciu pomocou nand a svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.41 Zapište negáciu, konjunkciu, disjunkciu, implikáciu a ekvivalenciu pomocou nor a svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.42 Pomocou konjunkcie, disjunkcie a negácie zapíšte takú logickú funkciu dvoch premenných $f(p, q)$, ktorá je pravdivá vtedy a len vtedy, keď práve jedna zo vstupných premenných má pravdivú hodnotu. Svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.43 Pomocou konjunkcie, disjunkcie a negácie zapíšte takú logickú funkciu troch premenných $f(p, q, r)$, ktorá je pravdivá vtedy a len vtedy, keď práve dve zo vstupných premenných majú pravdivú hodnotu. Svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.44 Pomocou konjunkcie, disjunkcie a negácie zapíšte takú logickú funkciu troch premenných $f(p, q, r)$, ktorá je pravdivá vtedy a len vtedy, keď práve jedna zo vstupných premenných má pravdivú hodnotu. Svoj výsledok dokážte pomocou pravdivostnej tabuľky. ■

Cvičenie 1.45 Dokážte, že nasledovné výrokové formuly sú tautológie

- | | |
|---|---|
| (a) $\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ | (c) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ |
| (b) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ | (d) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ |

Cvičenie 1.46 Rozhodnite o pravdivosti nasledovných výrokových formúl a napíšte ich negácie

- | | |
|--|--|
| (a) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 3$ | (d) $(\forall x \in \mathbb{R}), (\exists y \in \mathbb{R}) : x + y = 4$ |
| (b) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 5$ | (e) $(\exists x \in \mathbb{R}), (\forall y \in \mathbb{R}) : x + y = 4$ |
| (c) $(\forall x \in \mathbb{R}), (\forall y \in \mathbb{R}) : x + y = 4$ | (f) $(\exists x \in \mathbb{R}), (\exists y \in \mathbb{R}) : x + y = 4$ |
| | (g) $(\exists x \in \mathbb{R}), (\forall y \in \mathbb{R}), (\exists z \in \mathbb{R}) : x + y + z = 3$ |

Cvičenie 1.47 Sformulujte výroky, ktoré možno reprezentovať výrokovými formulami

- | | | | |
|---------------------|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| (a) $A \vee \neg B$ | (b) $(A \wedge B) \Rightarrow C$ | (c) $A \Rightarrow (B \vee C)$ | (d) $\neg A \Leftrightarrow B$ |
|---------------------|----------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|

Cvičenie 1.48 Pomocou pravdivostných tabuliek zistite, či sú nasledovné tvrdenia tautológie

- | | |
|---|--|
| (a) $(A \vee B) \Rightarrow (A \wedge B)$ | (f) $(A \wedge B) \Rightarrow A$ |
| (b) $(A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$ | (g) $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ |
| (c) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ | (h) $A \Rightarrow (A \wedge (A \vee B))$ |
| (d) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$ | (i) $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$ |
| (e) $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$ | (j) $A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$ |



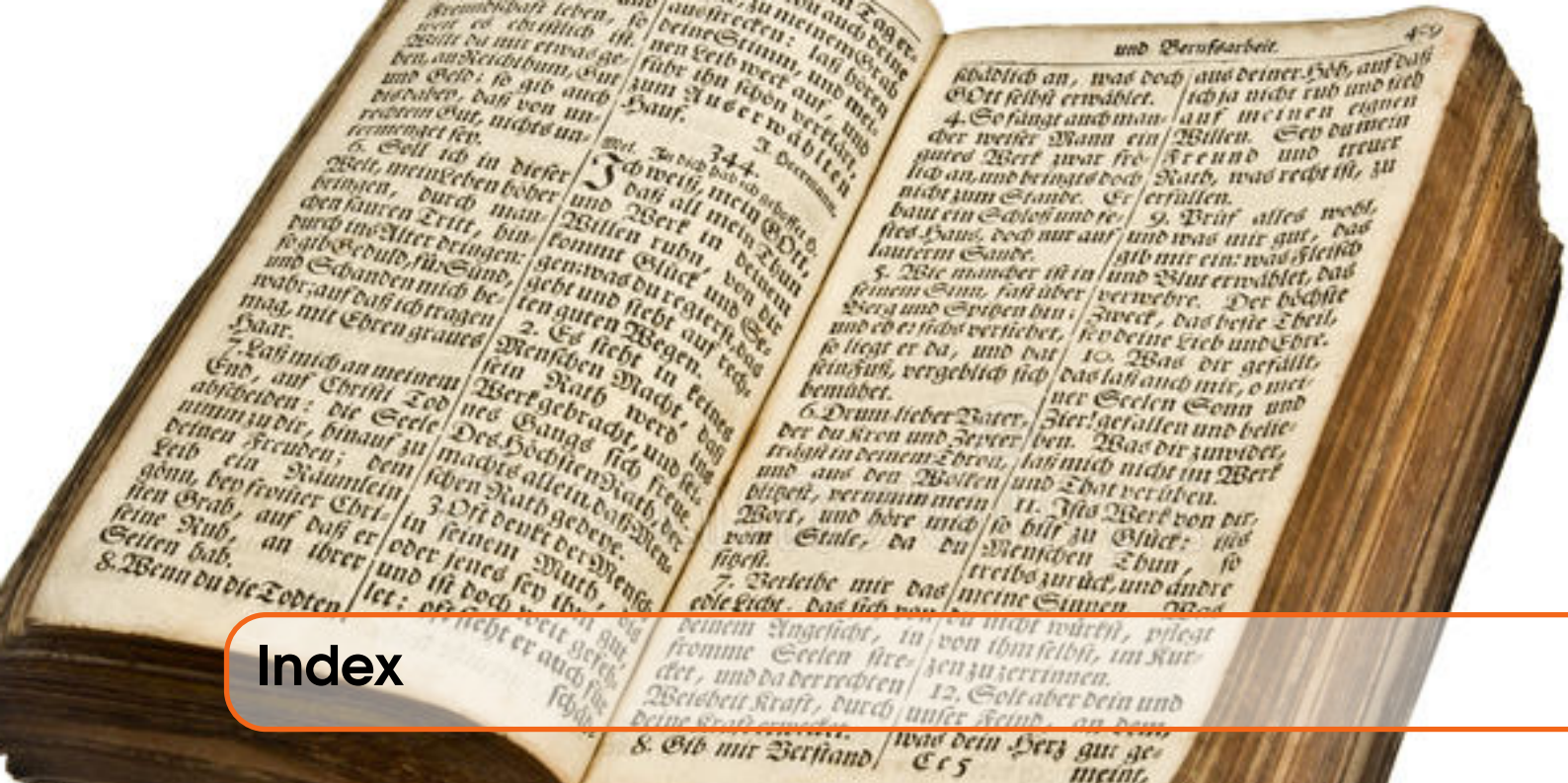
Použitá a odporúčaná literatúra

- [1] Martin Aigner: **Combinatorial Theory**, SPRINGER VERLAG, HEIDELBERG 1979.
- [2] Bohuslav Balcar, Petr Štěpánek: **Teorie množin**, ACADEMIA, PRAHA 1986.
- [3] Berežný, Draženská, Kravcová: **Zbierka úloh z diskkrétnej matematiky**, FEI TU, KOŠICE 2005. <http://web.tuke.sk/fei-km/sites/default/files/prilohy/10/Zbierka-DM.pdf>
- [4] J. A. Bondy, U. S. Murty: **Graph Theory With Applications**, NORTH-HOLLAND 1976.
- [5] Reinhard Diestel: **Graph Theory**, SPRINGER 2000.
- [6] Harary, Frank: **Graph theory**, ADDISON-WESLEY 1969.
- [7] Richard Johnsonbaugh: **Discrete Mathematics**, PEARSON 2017.
- [8] Josef Kaucký: **Kombinatorické identity**, VEDA, VYDAVATELSTVO SAV, BRATISLAVA 1975.
- [9] Martin Knor: **Úvod do matematickej logiky**, FIIT STU, BRATISLAVA 2016.
<http://www.math.sk/jmkollar/literatura/Knor-Uvod.do.matematickej.logiky.pdf>
- [10] Martin Knor: **Teória grafov**, SVF STU, BRATISLAVA 2008.
<http://www.svf.stuba.sk/docs/dokumenty/skripta/teoria-grafov.martin.knor.pdf>
- [11] Martin Knor, Jozef Kollár: **Matematika pre architektov**, STU BRATISLAVA, 2002.
- [12] Donald E. Knuth: **The Art of Computer Programming, Volume 1**, ADDISON-WESLEY, 1997.
- [13] Sergei K. Lando: **Lectures on Generating Functions**, AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, STUDENT MATHEMATICAL LIBRARY 2003.
- [14] Milan Mareš: **Příběhy matematiky**, PISTORIUS & OLŠANSKÁ, PŘÍBRAM 2011.
- [15] J. Matoušek, J. Nešetřil: **Kapitoly z diskrétní matematiky**, KAROLINUM, PRAHA 2002.

- [16] М. В. Меньшиков, А. М. Ревякин, А. Н. Копылова, Ю. Н. Макаров, Б. С. Стечкин: **Комбинаторный Анализ – Задачи и упражнения**, ИЗДАТЕЛЬСТВО »НАУКА«, МОСКВА 1982.
- [17] В. А. Носов: **Комбинаторика и теория графов**, МОСКВА 1999.
<http://intsys.msu.ru/staff/vnosov/combgraph.htm> (PDF verzia)
- [18] Stanislav Palúch: **Algoritmická teória grafov**, ŽILINSKÁ UNIVERZITA, 2008.
<http://frcatel.fri.uniza.sk/users/paluch/grafy.pdf>
- [19] Ján Plesník: **Grafové algoritmy**, VEDA, BRATISLAVA 1983.
- [20] Franco P. Preparata, Raymond T. Yeh: **Úvod do teórie diskretných matematických štruktúr**, ALFA, BRATISLAVA 1982.
- [21] Edward M. Reingold, Jurg Nievergelt, Narsingh Deo: **Combinatorial Algorithms – Theory and Practice**, PRENTICE-HALL, NEW JERSEY 1977.
- [22] Beloslav Riečan a kol.: **Úlohy z matematiky pre 4. ročník gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1976.
- [23] Beloslav Riečan a kol.: **Matematika pre 4. ročník gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1987.
- [24] Beloslav Riečan a kol.: **Zbierka úloh z matematiky pre 4. ročník gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1991.
- [25] Karol Rován a kol.: **Zbierka riešených úloh z algebry pre SVŠ a odborné školy**, SPN, BRATISLAVA 1969.
- [26] К. А. Рыбников: **Введение в Комбинаторный Анализ**, ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА, МОСКВА 1985.
- [27] Raymond M. Smullyan: **A Beginner's Guide to Mathematical Logic**, DOVER PUBLICATIONS, NEW YORK 2014.
- [28] František Vejsada, František Talafous: **Zbierka úloh z matematiky pre SVŠ a gymnázia**, SPN, BRATISLAVA 1973.
- [29] Naum J. Vilenkin: **Rozhovory o množinách**, SPN, BRATISLAVA 1972.
- [30] Herbert S. Wilf: **generatingfunctionology**, ACADEMIC PRESS, INC. 1994.
<https://www.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html>
- [31] Niklaus Wirth: **Algoritmy a štruktúry údajov**, ALFA, BRATISLAVA 1989.
- [32] Štefan Znáť: **Kombinatorika a teória grafov**, PF UK, BRATISLAVA 1978.

IV

Index



Index

Symboly

∈ operátor „patrí do množiny“	11
∉ operátor „nepatří do množiny“	11
⊂ operátor vlastnej podmnožiny	12
⊆ operátor nevlastnej podmnožiny	12
∪ operátor zjednotenia množín	12
∩ operátor prieniku množín	13
∖ operátor rozdielu množín	13
Ā komplement množiny A	14
¬ operátor logickej negácie	20
∨ operátor disjunkcie	20
∧ operátor konjunkcie	20
⇔ operátor ekvivalencie	20
⇒ operátor implikácie	20
∃ existenčný kvantifikátor	23
∀ všeobecný kvantifikátor	23
operátor „a delí b“ (a b)	40
△ operátor symetrickej diferencie	41

A

acyklický graf	62
algoritmus	
Borůvkov	203
Dijkstrov	229–231
hľadania kostry grafy	179
Jarníkov (Primov)	197
konštrukcie očíslovaného stromu z Prüfe- rovho kódu	241

B

konštrukcie optimálneho Huffmanovho kódu	206
konštrukcie Prüferovho kódu z očíslova- ného stromu	235
konštrukcie prehľadávacieho binárneho stromu	215
Kruskalov	201, 202
pažravý	201
prehľadávania grafu do hĺbky	187
prehľadávania grafu do šírky	182
zostavovania identifikačného kódu binár- neho stromu	219
zostavovania identifikačného kódu kore- ňového stromu	222
antisymetrickosť (relácie)	125, 130
Appel Kenneth (1932–2013)	48
ASCII kód	204
atomická formula	20
axióma	31
backtracking	186
bijektivnosť	145
binárny strom	80
binomický koeficient	171
Borůvka Otakar (1899–1995)	196, 203
Bouton Charles Leonard (1869–1922)	224

C

Catalanovo číslo 174, 213
 Cayley Arthur (1821–1895) 16, 48, 241
 centrálny vrchol grafu 56
 centrum grafu 56
 cesta (v grafe) 55, 112
 cyklus (v grafe) 57, 112

Č

číslo

Catalanovo 174, 213
 celé $\mathbb{Z}$ 15
 iracionálne 15
 komplexné $\mathbb{C}$ 16
 kvaternion 16
 oktonion 16
 prirodzené $\mathbb{N}$ 14
 racionálne $\mathbb{Q}$ 15
 reálne $\mathbb{R}$ 15

D

dátová štruktúra

fronta 180
 zásobník 180

dôkaz

matematickou indukciou 37, 39
 nepriamy 35
 priamy 32
 sporom 36

de Moivre Abraham (1667–1754) 155

de Morgan Augustus (1806–1871) 48

definícia 32

Dijkstra Edsger Wybe (1930–2002) . 197, 230

Dijkstrov algoritmus 229, 231

disjunkcia ($\vee$) 21

disjunktné množiny 13

E

ekvivalencia ($\Leftrightarrow$) 22

ekvivalencia (relácie) 140

entropický kód 204

Euklides Alexandrijský (~3. stor. pred n. l.) 15

Euklidovský priestor 108

Euler Leonhard (1707–1783) 47, 84, 109, 156

F

faktor grafu 62

faktoriál 39

dvojný 172

Fano Roberto Mario (1917–2016) 204

Fibonacci Leonardo (~1170 – ~1240) ... 167

Fibonacciho postupnosť 167

formula

atomatická 20

prvotná 20

výroková 20, 22

formuly

ekvivalentné 22

fronta 180

funkcia 143

bijektívna 145

charakteristická funkcia množiny 149

definičný obor 143

injektívna 144

inverzná 145

koobor 143

obor hodnôt 143

parciálna 143

surjektívna 144

vytvárajúca

exponenciálna, 175

obyčajná, 160

zložená 146

G

Gauss Carl Friedrich (1777-1855) 38

geometrická postupnosť

súčet prvých n členov 39

Gonthier Georges 48

graf

acyklický 62

artikulácia 61

bipartitný 53

kompletný ($K_{m,n}$), 54, 112

centrum 56

cesta 55, 112

cesta (P_n) 112

cyklus 57, 112

hamiltonovský, 95

cyklus (C_n) 112

digraf 50

dĺžka ťahu 55

dĺžka cesty 55

graf

dĺžka cyklu	57
dĺžka sledu	54
dokonalé párovanie	89
Eulerova veta o rovinných grafoch	110
eulerovský	87
eulerovský ťah	85
otvorený, 85, 87	
uzavretý, 85, 86	
excentricita vrcholu	56
faktor	62
hodnota	196
hodnota hrany	195
hodnota sledu	229
homeomorfné grafy	112
hrana	49
ohodnotená, 195	
hranica oblasti	108
húsenica	113
hviezda (S_n)	113
incidencia (vrchol–hrana)	50
invariant	101
izomorfizmus	
binárnych stromov, 106	
koreňových stromov, 105	
izomorfizmus grafov	98, 99
izomorfné grafy	99
jadro	225
jednoduchý (obyčajný)	51
Knight graph	98
koleso (W_n)	113
komplementárny	53
kompletný (K_n)	52, 112
kompletný bipartitný ($K_{m,n}$)	54, 112
komponent súvislosti	57, 60
konečný	49
koreňový strom	77
dieťa vrcholu, 78	
koncový vrchol, 78	
list, 78	
otec vrcholu, 78	
podstrom, 78	
potomok vrcholu, 78	
predkovia vrcholu, 78	
súrodenci (vrcholy), 78	
úroveň vrcholu, 77	
vnútorný vrchol, 78	
výška, 77	

graf

kostra	62
minimálna, 196	
Kuratowského veta	112
ľavý podstrom	213
les	77
list	77
matica incidencie	72
matica susednosti	69
minimálna kostra	196
množina vrcholov	
nezávislá, 225	
stabilná, 225	
most	61
najlacnejšia cesta	230
najlacnejšia kostra	196
násobné hrany	50
nekonečný	49
neorientovaný	49
nesúvislý	57
nezávislá množina vrcholov	225
oblasť	108
obyčajný (jednoduchý)	51
ohodnotený	195
ohodnotenie hrany	195
orientovaná hrana	49, 50
orientovaný	49, 50
otvorený sled	55
párovanie	89
maximálne, 89	
perfektné párovanie	89
podgraf	58
polomer	56
pravý podstrom	213
pravidelný	52
prázdny	49, 80
prehľadávanie do šírky	182
prehľadávanie do hĺbky	187
priemer	56
problém obchodného cestujúceho	234
rovinné nakreslenie	108
rovinný	108
sled	54
otvorený, 55	
uzavretý, 55	
slučka (hrana)	50
stabilná množina vrcholov	225

graf
 strom 73
 binárny, 80
 binárny úplný, 81
 binárny dokonalý, 82
 binárny prehľadavací, 214
 binárny vyvážený, 81
 koreň, 77, 105
 očíslovaný, 234
 prehľadavací binárny, 213
 stupeň vrcholu 51
 subdivízia hrany 111
 susedné oblasti 108
 susednosť (vrchol–vrchol) 50
 súvislý 57
 ťah 55
 uzavretý sled 55
 vrchol 49, 50
 centrálny, 56
 izolovaný, 50
 stupeň, 51
 vzdialenosť vrcholov 56
 Graves John Thomas (1806–1870) 16
 Guthrie Francis (1831–1899) 48

H

Haken Wolfgang (1928–...) 48
 Hamilton William R. (1805–1865) . 16, 48, 95
 harmonická postupnosť 166
 Herón Alexandrijský (10–75) 15
 Hippasos (~530–~450 pred n. l.) 15
 hodnota grafu 196
 hrana
 koncový vrchol 181
 počiatočný vrchol 181
 Huffman David Albert (1925–1999) 204
 Huffmanov kód 80, 204, 206
 húsenica (graf) 113
 hviezda (graf) 113
 hypotéza 32

I

implikácia ($\Rightarrow$) 21
 indukčný
 krok 38
 predpoklad 38
 injektívnosť 144
 inverzná funkcia 145

inverzná relácia 127

J

jadro grafu 225
 Jarník Vojtěch (1897–1970) 196, 197
 Jarníkov (Primov) algoritmus 197
 jazyk 1. rádu 23
 jednotka
 imaginárna 16
 kvaternionová 16
 oktonionová 16

K

kartézsky súčin 19
 Kempe Alfred Bray (1849–1922) 48
 kód
 ASCII 204
 Huffmanov 80, 204, 206
 Prüferov 234
 koeficient
 binomický 171
 Newtonov, 171
 multinomický 177
 koleso (graf) 113
 komplementárna množina 14
 komponent súvislosti (grafu) 60
 konjunkcia ($\wedge$) 21
 kontradikcia 20
 koreň 77
 koreňový strom 77
 kostra grafu 62
 Kőnig Dénes (1884–1944) 48
 Kruskal Joseph B. (1928–2010) 196, 201
 Kruskalov algoritmus 202
 Kuratowski Kazimierz (1896–1980) 111
 kvantifikátor
 existenčný 23
 všeobecný 23

L

Laplace Pierre-Simon (1749–1827) 156
 lema 62
 les 77
 list 77
 logická
 hodnota 19
 premenná 19

logická	
spojka	19, 20
logický	
operátor	19
výrok	19
logika	
predikátová	23
výroková	22

M

matematická indukcia	37, 39
matica	
incidencie grafu	72
relácie	128
susednosti grafu	69
maximálne párovanie grafu	89
množina	11
charakteristická funkcia	149
kartézsky súčin množín	19
komplementárna	14
konečná	12
mohutnosť	12
nekonečná	12
podmnožina	12
potenčná	13
prázdna	11
rozklad	138
spočítateľná	37
systém množín	138
univerzálna	14
univerzum	13, 14
množiny	
disjunktné	13
prienik množín	13
rovnosť množín	11
rozdiel množín	13
symetrická diferencia množín	41
zjednotenie množín	12
mocninový rad	156
modulo (zvyšok po delení)	41
modulo $a \pmod{b}$	41
modus ponens	32
mohutnosť množiny	12
Moskovský papyrus	16
multinomická veta	177
multinomický koeficient	177

N

negácia ($\neg$)	20
Newton Isaac (1642–1727)	171
Newtonov binomický koeficient	171

P

P-kód (prefixový kód)	204
párovanie grafu	89
perfektné párovanie	89
podgraf grafu	58
podmnožina	
vlastná	12
postupnosť	
Fibonacciho	167
harmonická	166
potenčná množina	13
pravdivostná hodnota	19
pravdivostná tabuľka	20
prázdna množina	11
prázdny graf	80
prefixový kód	204
prehľadavací binárny strom	213, 214
prehľadávanie grafu	
do hĺbky	186, 187
do šírky	181, 182
prienik množín	13
Prim Robert Clay (1921–...)	197
princíp zapojenia-vypojenia	18
problém	
NP-úplný	96
obchodného cestujúceho	47, 234
štyroch farieb	48
Prüfer Ernst Paul Heinz (1896–1934)	241
Prüferov kód	234
prvky	
porovnateľné	137
neporovnateľné	137
prvotná formula	20
pseudokód	
Dijkstrovho algoritmu	231
hľadania kostry grafu	179
Jarníkovho algoritmu	197
konštrukcie očíslovaného stromu z Prüferovho kódu	241
konštrukcie optimálneho Huffmanovho kódu	206
konštrukcie prehľadávacieho binárneho stromu	215

konštrukcie Prüferovho kódu z očíslovaného stromu 235
 Kruskalovho algoritmu 202
 prehľadávania grafu do hĺbky 187
 prehľadávania grafu do šírky 182
 zostavovania identifikačného kódu binárneho stromu 219
 zostavovania identifikačného kódu koreňového stromu 222
 pytagorejci 15

R

rad
 formálny mocninový 156
 Maclaurinov 156
 mocninový 156
 Taylorov 156
 reflexívnosť (relácie) 124, 129
 relácia
 n -árna 123
 antisymetrická 125, 130
 binárna 123, 124
 čiasťočné usporiadanie 137
 ekvivalencie 140
 inverzná 127
 maticová reprezentácia 128
 na množine 124
 reflexívna 124, 129
 symetrická 125, 129
 tranzitívna 126
 zložená 128
 rovnosť množín 11
 rozdiel množín 13
 rozklad množiny 138
 triedy ekvivalencie 141
 triedy rozkladu 138

S

semifaktoriál 172
 skladanie funkcií 146
 skladanie relácií 128
 sled (v grafe) 54
 slučka (graf) 50
 spočítateľná množina 37
 Stirling James (1692–1770) 156
 strom (graf) 73
 vyvážený binárny 81
 subdivízia hrany 111

súčín
 kartézsky 19
 surjektívnosť 144
 sylogizmus 34
 symetrická diferencia množín (Δ) 41
 symetrickosť (relácie) 125, 129
 systém množín 138

T

tabuľka
 pravdivostná 20
 Tait Peter Guthrie (1831–1901) 48
 tautológia 20
 tautologicky ekvivalentné formuly 22
 tranzitívnosť (relácie) 126
 trieda
 rozkladu 138
 zvyšková 142
 trieda ekvivalencie 141

Ť

ťah (v grafe) 55

U

univerzum množín 13, 14
 usporiadaná dvojica 18
 usporiadanie
 čiasťočné 137
 neporovnateľnosť, 137
 porovnateľnosť, 137
 lineárne 138

Ú

úplný binárny strom 81

V

Vennove diagramy 16
 veta
 Cayleyho 242
 Eulerova o rovinných grafoch 110
 Kuratowského 112
 multinomická 177
 o centre stromu 224
 o cykloch 58
 o existencii cesty v grafe 56
 o existencii jadra grafu 226

veta	
o existencii kostry grafu	63
o explicitnom vyjadrení rekurentných postupností	170
o invariantnosti cyklu C_n	102
o invariantnosti stupňov vrcholov	101
o inverznej funkcii	145
o komponentoch grafu	61
o korektnosti prehľ. algoritmov	191
o matematickej indukcii	39
o matici susednosti	71
o matici zloženej relácie	131
o maticiach susednosti izomorfných grafov	100
o mohutnosti kartézskeho súčinu	19
o optimálnej lokalizácii v prehľadávacom binárnom strome	217
o otvorenom eulerovskom ťahu	87
o počte koncových vrcholov úplných binárnych stromov	81
o potenčnej množine	40
o relácii danej rozkladom množiny	139
o rozklade danom rel. ekvivalencie	141
o správnosti Jarníkovho algoritmu	199
o stromoch	76
o stupňoch vrcholov rovinného grafu	111
o súčte stupňov vrcholov grafu	52
o súvislosti výšky a počtu koncových vrcholov binárnych stromov	82
o tranzitívnosti relácie na množine	132
o uzavretom eulerovskom ťahu	86
o vrchoch stromov	76
pravidlo sylogizmu	34
základná algebry	16
základná aritmetiky	37
veta (matematická)	31
vrchol	
dieťa	78
koncový	50, 78
list	77
otec	78
počiatočný	50
potomok	78
predkovia	78
rodič	78
súrodenci	78
syn	78
vnútorný	78
výroková formula	20, 22

vytvárajúca funkcia	
exponenciálna	175
obyčajná	160
súčet	161
súčin	162
vyvážený binárny strom	81

W

Werner Benjamin	48
-----------------	----

Z

základná veta algebry	16
základná veta aritmetiky	37
zásobník	180
zjednotenie množín	12
zložená funkcia	146
zvyšková trieda	142
zvyšok po delení (modulo)	41