Hyperbolická geometria očami algebraika

Jozef Širáň

SvF STU

Namiesto úvodu

- História objavenia hyperbolickej geometrie v rovine je dobre známa
- N. I. Lobačevskij a J. Bólyai začiatkom 19. stor. (1829 a 1832)
- Pôvodne - od axióm ku štruktúre a algebraickým a analytickým vlastnostiam
- Fundamentálne objavy v analýze a v algebre v 2. polovici 19. stor. zmenili pohľad na neeuklidovské geometrie
- Objavy vo fyzike, algebre a teórii čísiel v 20. stor. ešte viac zvýraznili úlohu neeuklidovských geometrií
- Dnes - hyperbolická geometria vo svetle týchto objavov

Analýza v komplexnej rovine

- Analýza v $\mathcal{R}$ a v $\mathcal{C}$
- Funkcia f je *analytická v* $O(a)$ ak $f'(z)$ existuje pre každé $z \in O(a)$
- Ak f je analytická v $O(a)$, tak pre každé $z \in O(a)$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

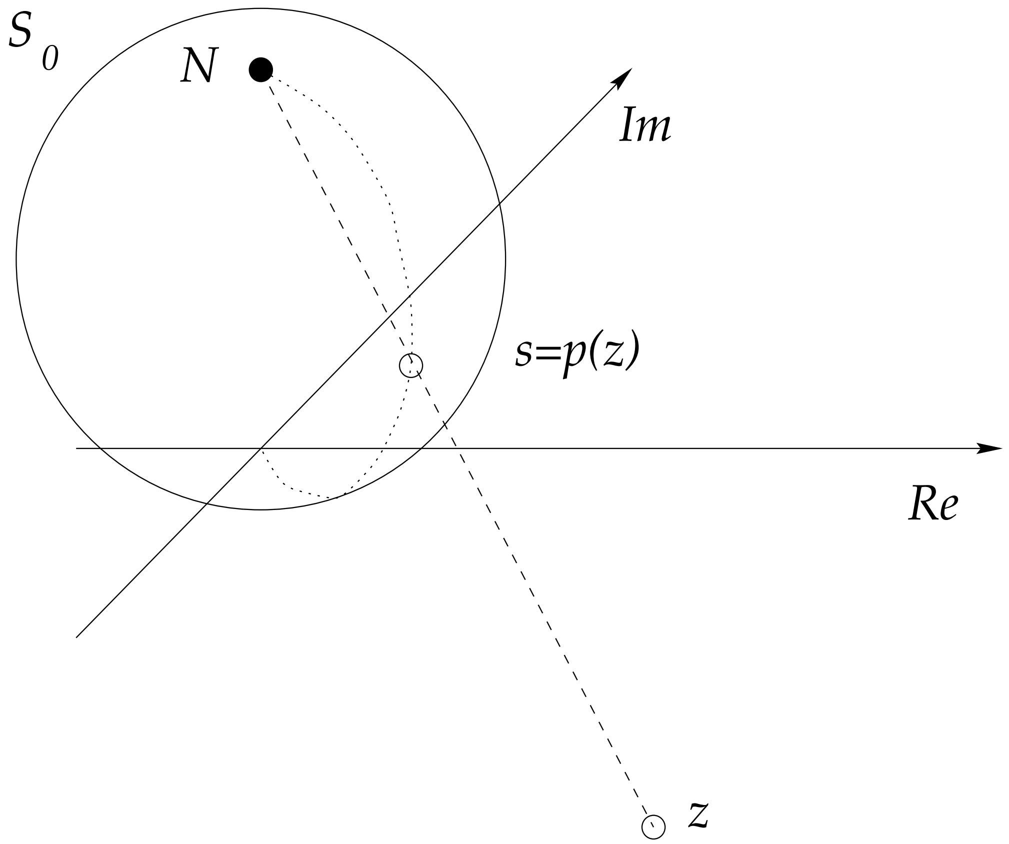
- Funkcia f definovaná v $O(a)$ je *meromorfná* v a, ak existuje $k > 0$ tak, že $(z-a)^k f(z)$ je analytická v $O(a)$
- Meromorfné funkcie – hlboko skúmané v 19. stor.: Gauss, Cauchy, Abel, Dirichlet, Riemann, Weierstrass, Klein, Poincaré ...

Anaýza na iných plochách?

- Fyzikálne aplikácie komplexnej analýzy podnietili potrebu analogickej teórie aj pre iné plochy
- Topologická klasifikácia *kompaktných* plôch (orientovateľné a neorientovateľné):
  - $\mathcal{S}_g$ – " sféra s g rúčkami "
  - $\mathcal{N}_h$ – " sféra s h čiapočkami "
- My: len orientovateľné plochy
- Základný problém: Ako definovať analytickú, resp. meromorfnú funkciu na $\mathcal{S}_g$?
- Na to je potrebné akosi " stiahnuť " komplexnú štruktúru z $\mathcal{C}$ na $\mathcal{S}_g$

Komplexná štruktúra na sfére

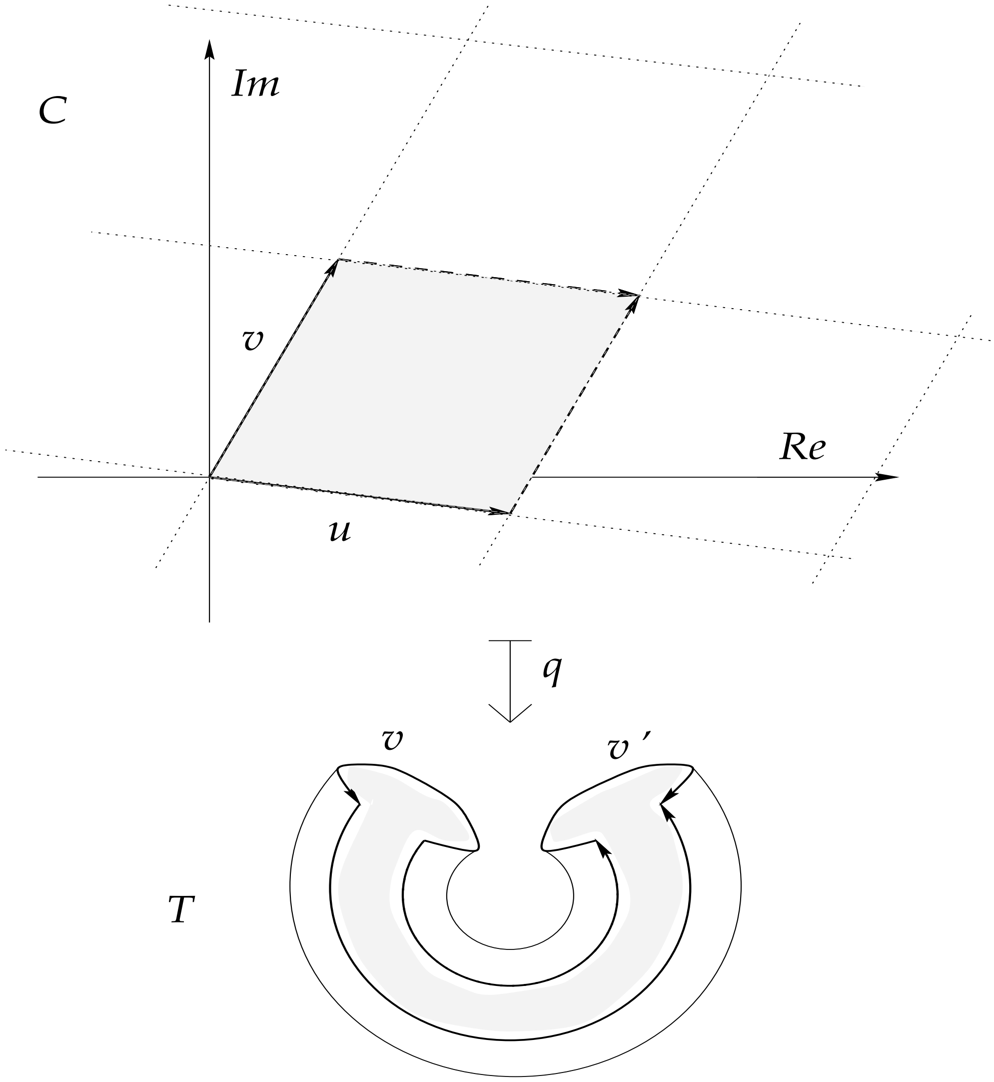
Stereografická projekcia $p: \ \mathcal{C} \cup \infty = \mathcal{C}^* \to \mathcal{S}_0$



$$f: \ \mathcal{S}_0 \to \mathcal{C}^* \ ; \quad f'(s) = \frac{d}{dz}(f \circ p)_{|z=p^{-1}(s)}$$

Definícia: f je *analytická* (*meromorfná*) na $\mathcal{S}_0$ ak $f \circ p$ je analytická (meromorfná) v $\mathcal{C}^*$.

Komplexná štruktúra na tore



$H =$ grupa generovaná transláciami u, v

$q: \ \mathcal{C} \to T; \ q(z) = q(h(z))$ pre každé $h \in H$

- Predchádzajúci obrázok názorne ukazuje, že komplexnú štruktúru na tore možno definovat' faktorizá ciou $T = \mathcal{C}/H$, kde H je grupa generovaná dvoma nezávislými (Euklidovskými) transláciami v $\mathcal{C}$.

- Na sfére $\mathcal{S}_0$ sme meromorfné funkcie zaviedli pomocou bijekcie $p: \ \mathcal{C}^* \to \mathcal{S}_0$. Tento postup sa nedá aplikovat' na tore: Projekcia $q: \ \mathcal{C} \to T$ nie je bijekcia!

- Nápad: Stotožnit' meromorfné funkcie na $T = \mathcal{C}/H$ s meromorfnými funkciami na $\mathcal{C}$ *invariantnými* vzhl'adom na grupu H: $f(z) = f(h(z))$ pre každé $z \in \mathcal{C}$ a $h \in H$.

- Terminológia: *Automorfné funkcie* vzhl'adom na grupu H generovanú dvoma nezávislými Euklidovskými transláciami.

- Ekvivalentný názov: *eliptické funkcie.*

- Príklady eliptických funkcií $f: \; T \to \mathcal{C}^*$:

$$f_k(z) = \sum_{h \in H} (z - h(0))^{-k} \; , \quad k \geq 3$$

- Prečo názov *eliptické* funkcie ? Analógia s trigonometrickými, resp. hyperbolickými funkciami, ktoré sú inverzné ku

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \; , \; \int \frac{dx}{1+x^2} \; , \; \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

- H-automorfné funkcie sú inverzné funkcie ku niektorým integrálom tvaru

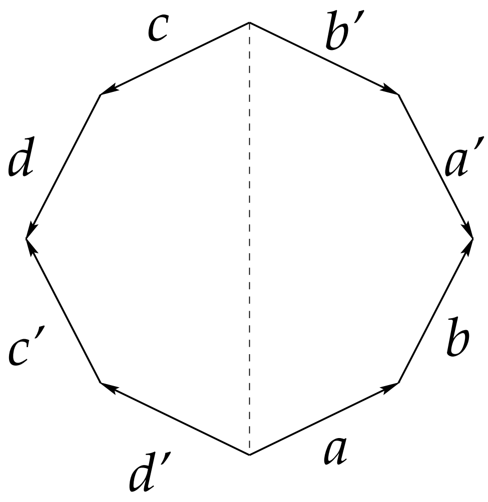
$$\int \frac{dx}{\sqrt{p_4(x)}} \; , \text{ napr. } \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

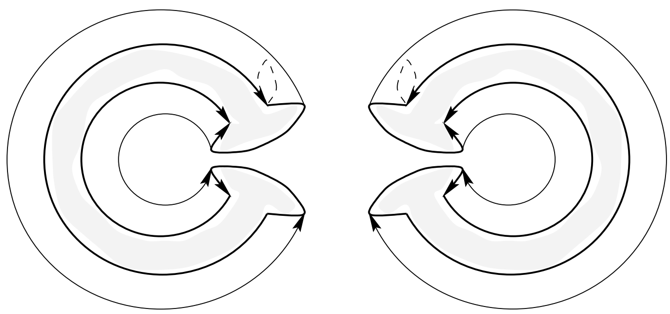
  Sem patria aj *eliptické integrály 1. druhu*:

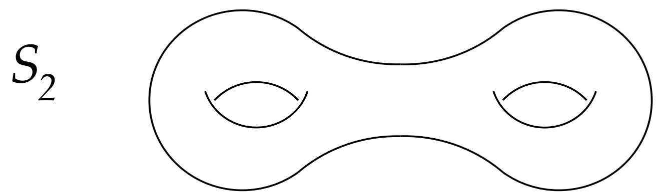
$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varepsilon^2 x^2)}}$$

- Ale čo je tu hyperbolické ??? O chvíľu ...

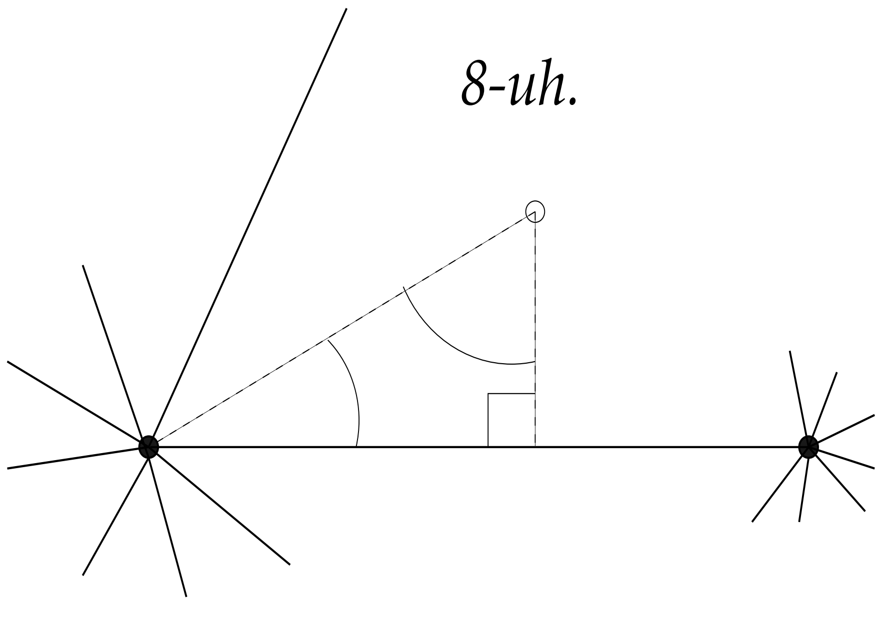
Štruktúry na plochách vyššieho rodu







- Aby sme mohli skonštruovať projekciu $q: \mathcal{C} \to \mathcal{S}_2$ analogicky ako na tore, je potrebné mať mapu typu $(8,8)$ v $\mathcal{C}$ invariantnú vzhľadom na istú grupu translácií H; potom $\mathcal{S}_2 = \mathcal{C}/H$.
- To nie je možné v Euklidovskej geometrii:



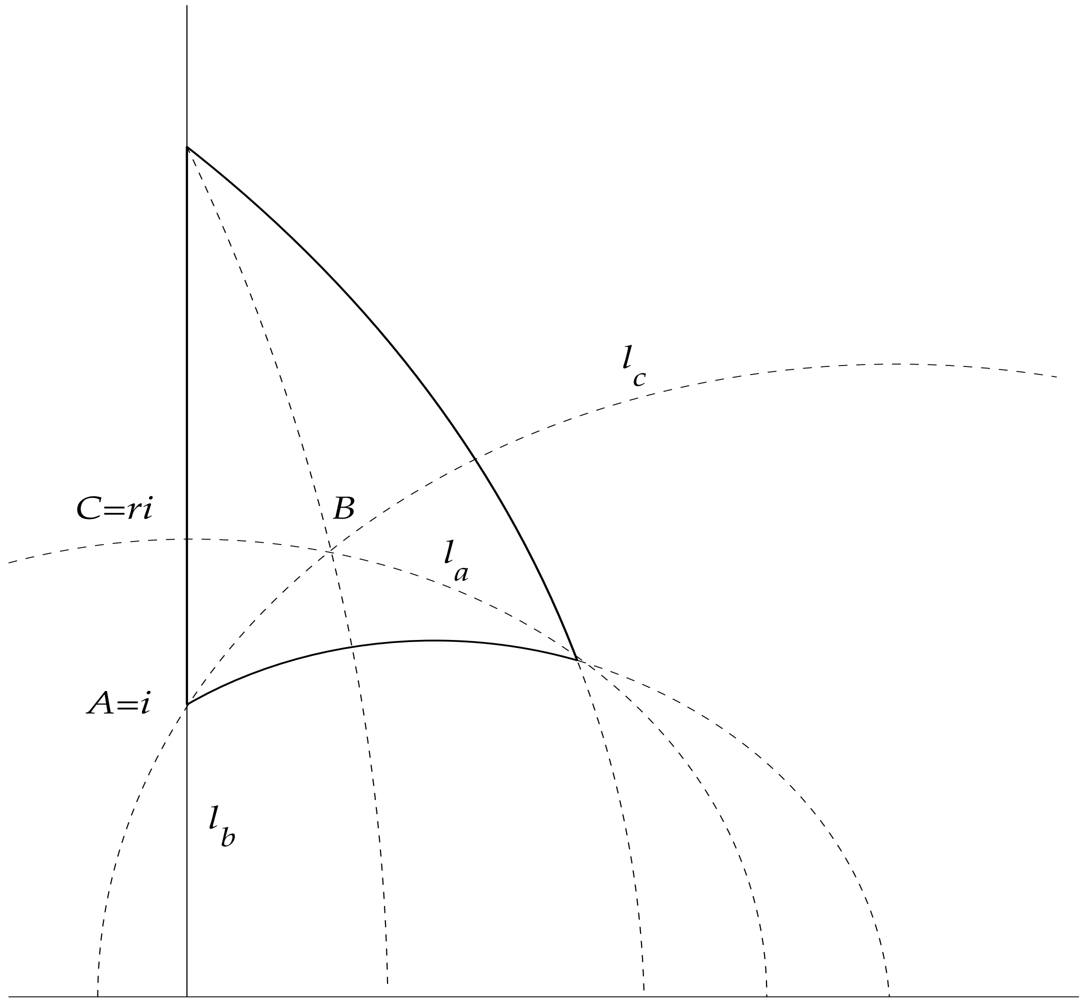
- Východisko: *Hyperbolická geometria*, kde súčet veľkostí uhlov v trojuholníku môže byť ľubovoľné kladné číslo $< \pi$.

Hyperbolická algebra?

- *Erlangenský program* - F. Klein (1872): Geometria je štúdium invariantov grúp transformácií.
- Hyperbolická geometria v rovine: Horná komplexná polrovina a grupa $PSL(2, \mathcal{R})$ tzv Möbiových transformácií, t.j. funkcií $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$, kde $a, b, c, d \in \mathcal{R}$, $ad - bc = 1$
- Ekvivalentne: Multiplikatívna grupa reálnych 2×2 matíc s det$= 1$, pričom matice M a $-M$ sa považujú za jeden objekt
- Dôsledok: Existencia metriky; $PSL(2, \mathcal{R})$ je grupou orientáciu zachovávajúcich hyperbolických izometrií.

- Priamky: Otvorené polkružnice kolmo pretínajúce reálnu os. Hyperbolické reflexie = euklidovské inverzie!
- Matica $M \in PSL(2, \mathcal{R})$ reprezentuje otočenie, "otočenie v nekonečne" a posunutie podľa toho, či $|\mathrm{tr}(M)|$ je menšia ako 2, $= 2$, alebo > 2.
- Každá Möbiova transformácia M je súčinom dvoch reflexií; charakter M je určený vzájomnou polohou príslušných priamok. (Ukážka v diskovom modeli.)
- Fundamentálny súvis hyperbolickej geometrie a komplexnej analýzy objavil H. Poincaré okolo r. 1870: $PSL(2, \mathcal{R})$ je zároveň grupou meromorfných bijekcií hornej komplexnej polroviny.

Komplikovanú grupu $PSL(2,\mathcal{R})$ Möbiových transformácií možno študovat' pomocou tzv. *trojuholníkových grúp*:



Rovnice príslušných inverzií sú:

$$I_a(z) = \frac{r^2}{\overline{z}}\ , \quad I_b(z) = -\overline{z}\ ,$$

$$I_c(z) = \frac{\overline{z}\cos\alpha + \sin\alpha}{\overline{z}\sin\alpha - \cos\alpha}$$

Möbiova transformácia [prvok $PSL_2(\mathcal{R})$]

$$I_c I_a(z) = \frac{(z/r)\sin\alpha + r\cos\alpha}{-(z/r)\cos\alpha + r\sin\alpha}$$

je rotáciou okolo B o uhol 2β práve keď

$$(r + 1/r)\sin\alpha = \mathrm{tr}(I_c I_a) = 2\cos\beta$$

Maticový zápis: $I_c I_a \mapsto M_{ca}$, pričom

$$M_{ca}\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\sin\alpha & r\cos\alpha \\ -\frac{1}{r}\cos\alpha & r\sin\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Špeciálne, ak $\alpha = \pi/m$ a $\beta = \pi/n$, kde $1/m + 1/n < 1/2$, tak matice otočení $A := M_{bc}$ a $B := M_{ca}$ môžu mať tvar:

$$A = \begin{bmatrix} \omega/\tau & \zeta/\tau \\ -\zeta\tau & \omega\tau \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{bmatrix} \zeta & \omega \\ -\omega & \zeta \end{bmatrix},$$

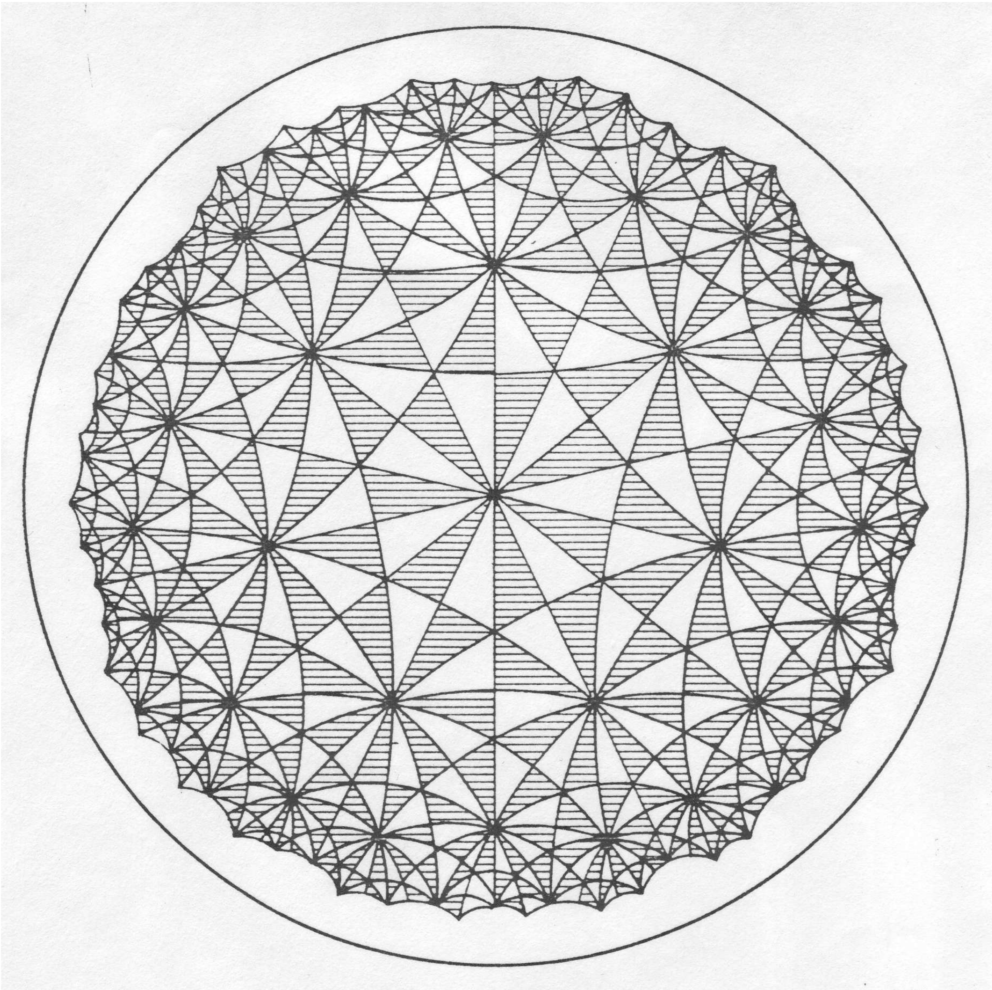
pričom $\eta = \cos\pi/m$, $\zeta = \cos\pi/n$, $\omega = \sqrt{1-\zeta^2}$, a $\tau + \tau^{-1} = 2\eta/\omega$.

Trojuholníková (pod)grupa v $PSL(2, \mathcal{R})$:
$T(m,n) = \langle A, B;\ A^m = B^n = (AB)^2 = I\rangle$

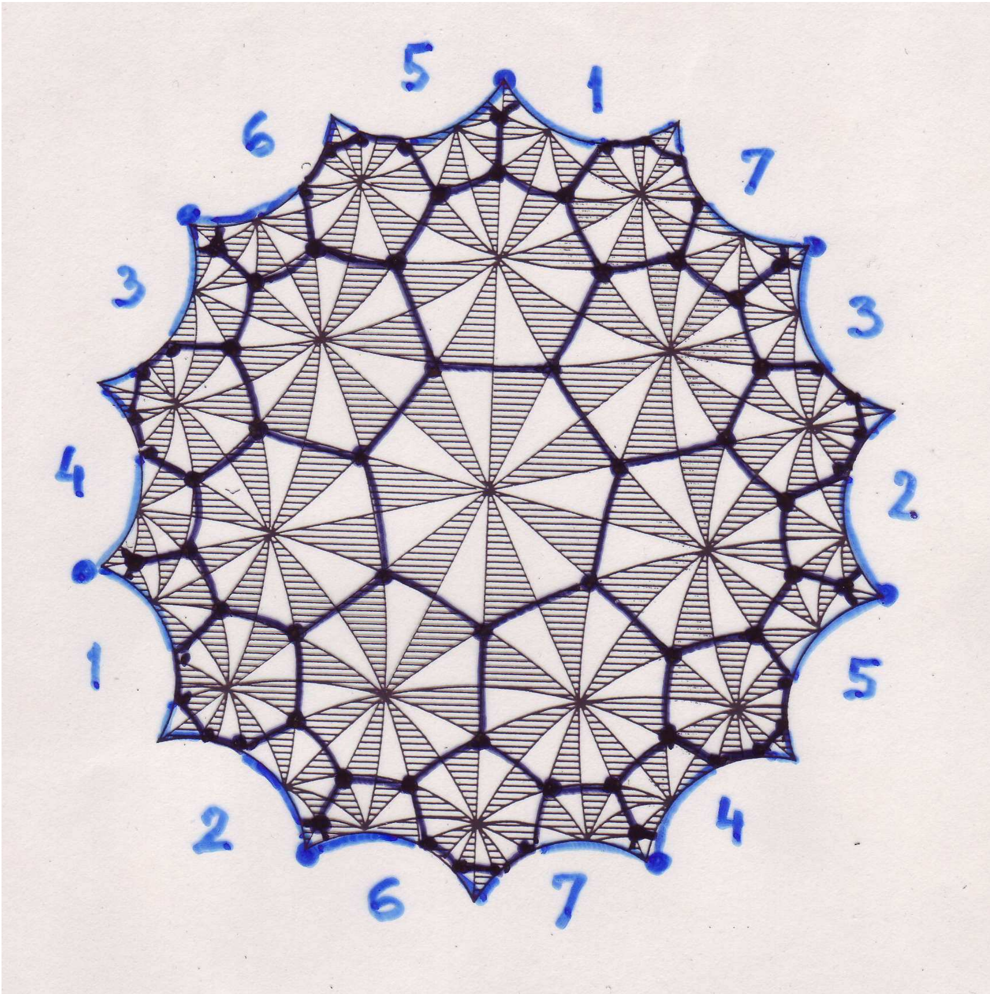
Komplikovanosť grupy $PSL(2, \mathcal{R})$ ilustruje príklad $T(7,3)$ - klasifikácia jej (normálnych) podgrúp je stále veľký otvorený problém!

Trojuholníkové grupy sa študujú pomocou hyperbolických (m,n)-teselácií, čo sú presné pokrytia hyperbolickej roviny pravidelnými m-uholníkmi (n z nich v každom vrchole).

Príklad: $(7,3)$-teselácia invariantná vzhľadom na grupu $T(7,3)$:



Príklad: Kleinova mapa typu $(7, 3)$:



Viac hyperbolickej algebry:

Pre $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ a $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$ položme $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3$, a $|\mathbf{x}| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$ ak $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$.

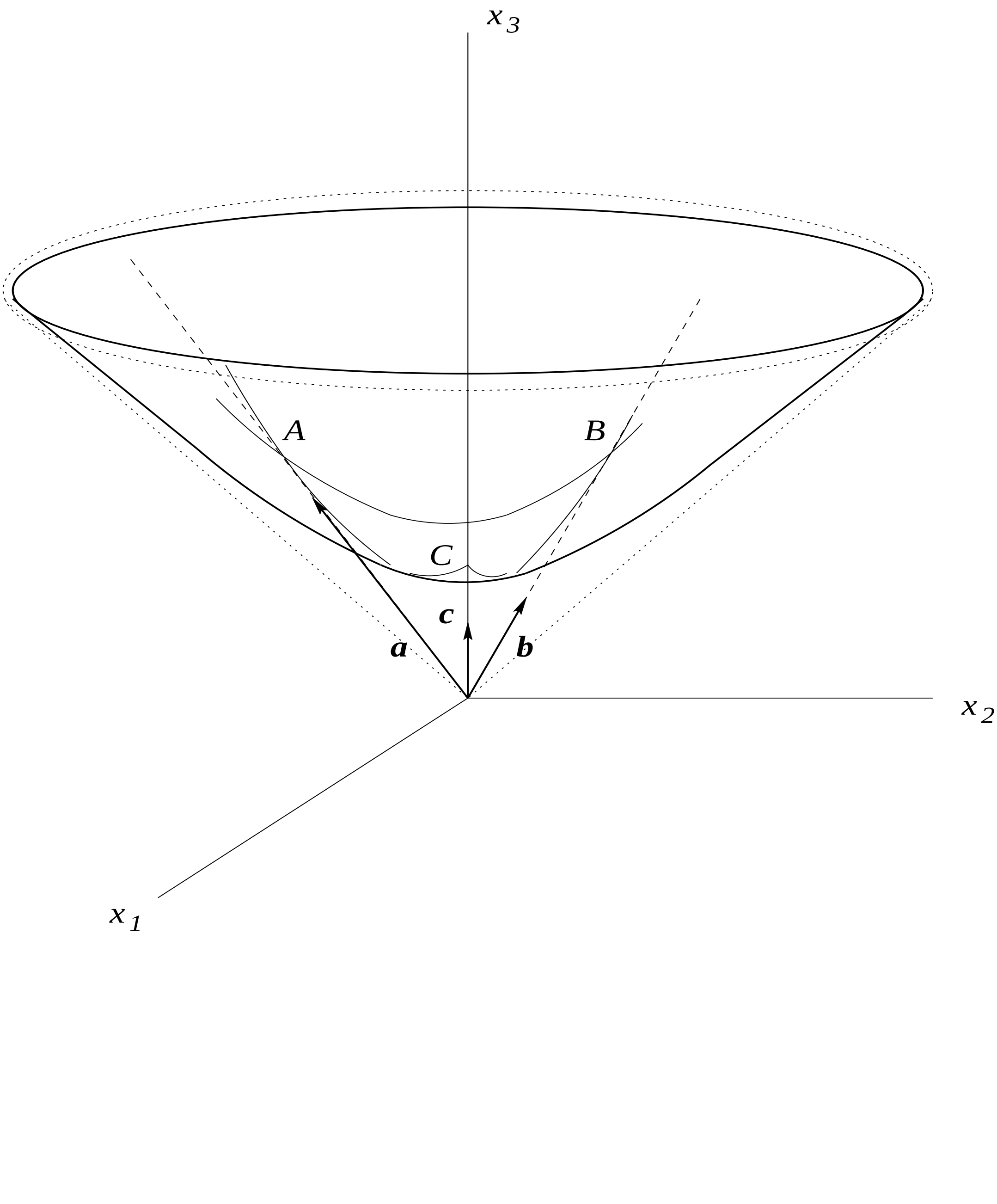
Hyperboloidný model hyperbolickej geometrie:

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{x} \ ; \ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = -1 \text{ and } x_3 > 0\}$$

Priamky: $\mathcal{H} \cap \{\mathbf{x}; \langle \mathbf{x}, \mathbf{u} \rangle = 0\}$, $|\mathbf{u}| = 1$, $u_3 \geq 0$.

Izometrie: Dané 3×3 reálnymi maticami M s vlastnosťou $M^T J M = J$, kde J je matica $\text{diag}\{1, 1, -1\}$. Ich grupa je, samozrejme, izomorfná s $PSL(2, \mathcal{R})$.

Ekvivalencia so zachovaním "skalárneho súčinu": $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle M\mathbf{x}, M\mathbf{y} \rangle$


x 3
A
B
C
c
a
b
x 2
x 1

Modulárna grupa

Definícia: Modulárna grupa je $PSL(2, \mathcal{Z})$. Je zrejmé, že ide o podgrupu $PSL(2, \mathcal{R})$ grupy hyperbolických izometrií, kde vystupujú iba celočíselné koeficienty.

Napriek tomu ide o *veľmi* zložitú grupu. Ak by sme lepšie poznali jej štruktúru, asi by sme mali kratší dôkaz Veľkej Fermatovej Vety!!!

Moduárna grupa je vlastne $T(3, \infty)$, a teda je invariantnou grupou trojuholníkovej teselácie; v každom vrchole sa stretá ∞ trojuholíkov!

Komplexná funkcia f je *modulárna*, ak platí $f(Mz) = f(z)$ pre každé $z \in \mathcal{C}^+$ a pre každú $M \in PSL(2, \mathcal{Z})$. Ide teda o funkcie, ktoré sú na trojuholníkoch našej teselácie periodické.

Eliptické funkcie, teória čísiel a hyperbolická geometria

- Teraz sa vrátime k eliptickým funkciám, t.j. k s meromorfným funkciám na $\mathcal{C}$ *invariantným* vzhľadom na grupu H generovanú dvoma posunutiami: $f(z) = f(h(z))$ pre každé $z \in \mathcal{C}$ a $h \in H$.
- Dá sa ukázať, že (reálna časť) eliptických funkcií splĺňa rovnicu $u = \int dx/\sqrt{p_3(x)}$, kde $p_3(x)$ je polynóm 3. stupňa. Ekvivalentne: $(x')^2 = p_3(x)$
- *Prirodzená parametrizácia* kriviek: (x, x')
- *Eliptická krivka* $\{(x, y); x \in \mathcal{C}, y^2 = p_3(x)\}$ V skutočnosti je to dvojrozmerná plocha.

Eliptická krivka $y^2 = p_3(x)$ je *modulárna*, ak k nej príslušná eliptická funkcia $u : \mathcal{C} \to T$ je invariantná vzhľadom na modulárnu grupu, čiže ak $u(Mz) = u(z)$ pre každé $z \in \mathcal{C}$ a pre každú $M \in PSL(2, \mathcal{Z})$.

Pomocou modularity kriviek bola dokázaná Veľká Fermatova Veta !!! Dva piliere:

1: Ak pre nejaké $p > 3$ existuje netriviálne riešenie a, b, c rovnice $a^p + b^p = c^p$, tak tzv. Freyova eliptická krivka daná rovnicou $y^2 = x(x - a^p)(x + b^p)$ nie je modulárna.

2: Ak $p_3(x)$ je normovaný celočíselný polynóm 3. stupňa s 3 reálnymi koreňmi, tak eliptická krivka $y^2 = p_3(x)$ je modulárna.

A.Wiles (+ R. Taylor): 1 000 000 USD ...

Namiesto záveru

- Hyperbolická geometria v 3 dimenziách: Fieldsova medaila (W. Thurston, 1982)
- Hyperbolická geometria v 4 dimenziách: Einsteinova všeobecná teória relativity (bez Nobelovej ceny...)
- Fulerény sú špeciálne priestorové molekuly, ktorých uhlíkový "rám" je z matematického hľadiska "mapa" stupňa 3 na nejakej ploche, ktorej steny sú 5- a 6-uholníky. Prvý príklad: Dodekaéder. Nobel prize (Kroto, Curl, Smalley, 1996)
- Fyzikálna existencia "hyperbolických" fulerénov je stále otvorená ...

Takže: Vitajte v hyperbolickom svete!