

Využitie viacohniskových lemniskát pri aproximácii dát v euklidovskej rovine

Mgr. Mária Gemeranová

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky,
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky,
Univerzita Komenského v Bratislave

Polárne súradnice bodu v euklidovskej rovine sú definované polárnym uhlom θ a vzdialenosťou r vzhľadom na zvolený pól. Bipolárne súradnice definujú bod v euklidovskej rovine pomocou bipolárneho súradnicového páru (r_1, r_2) , ktorý popisuje bod pomocou jeho vzdialeností od dvoch fixovaných pólov. Multipolárne súradnice sú dimenzionálne nehomogénne polárne súradnice definujúce bod v euklidovskej rovine pomocou vzdialeností r_1, r_2, \dots, r_n od n fixovaných pólov. Bipolárne a multipolárne súradnice majú svoje využitie v geometrickej optike pri charakterizovaní geometrie sférických vln, Bernoulliho antikaustikách, či v Huygensovom princípe. Ďalšou oblasťou využitia je Minkowského geometrická algebra.

Množina bodov v euklidovskej rovine, ktorých súčin vzdialeností, ku konečnej množine fixovaných bodov, je rovný konštante, sa nazýva viacohnisková lemniskáta v E^2 .

Platí:

- z_1, z_2, \dots, z_n – ohniská (póly) lemniskáty
- R – polomer lemniskáty (pevne zvolená konštanta)
- $z = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ – multipolárne súradnice bodu lemniskáty
- $r_k = |z - z_k|$, pre $k = 1..n$ – je vzdialenosť bodu z od pevne zvoleného ohniska z_k
- $r_1 r_2 \dots r_n = R$ – rovnica lemniskáty

Viacohniskové lemniskáty sú algebraické krivky stupňa $2n$, ktoré ležia vo svojom ohraničujúcom obdĺžniku. Môžu pozostávať z jedného alebo niekoľkých komponentov súvislosti v závislosti od hodnoty polomeru a polohy jednotlivých ohnísk. Každý komponent súvislosti obsahuje vo svojom vnútri aspoň jedno ohnisko. Na lemniskáte sa môže vyskytovať singulárny bod, t.j nulový gradient lemniskáty v danom bode. Pre vierohodné a efektívne vykresľovanie lemniskát je vhodné poznať polohu singulárneho bodu ako aj hodnotu príslušného polomeru.

Lemniskáty majú svoje využitie v Minkowského geometrickej algebre komplexných množín, pri analýze konvergenie polynomických aproximácií a ukázalo sa, že vo viacerých oblastiach je potrebné vedieť vykresľovať tieto krivky efektívne a s požadovanou presnosťou.

Zdroje:

- R.T. Farouki, H.P. Moon, Bipolar and multipolar coordinates, in: R. Cippola, R. Martin (Eds.), The Mathematics of Surfaces IX, Springer, Berlin, 2000, pp. 348-371
- R.T. Farouki, C.Y. Han, Robust plotting of generalized lemniscates, Applied Numerical Mathematics 51, 2004, pp. 257-272