

Priamky na algebrických plochách

RNDr. Zuzana Tereňová, PhD.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebná fakulta Slovenskej technickej univerzity Bratislava
zuzana.terenova@stuba.sk

Príspevok sa zaoberá nerozložiteľnými algebrickými plochami 2., 3. a 4. stupňa v 3-rozmernom projektívnom priestore \mathbf{P}^3 nad algebricky uzavretým poľom, singulárnymi bodmi a priamkami, ktoré tieto plochy obsahujú.

Regulárne kvadratické plochy buď neobsahujú žiadne priamky, alebo obsahujú nekonečne veľa priamok. Nerozložiteľné singulárne plochy 2. stupňa môžu obsahovať maximálne 1 dvojnásobný bod. Sú to kužeľové plochy.

Každá regulárna kubická plocha obsahuje presne 27 priamok. Dokázal to G. Salmon v r. 1849. Nepriamkové kubické plochy môžu obsahovať maximálne 4 dvojnásobné nekomplanárne body. Počet priamok na singulárnych kubických plochách s konečným počtom singulárnych bodov závisí nielen od počtu dvojnásobných bodov, ale aj od ich typu a od toho, v čom dotyková kužeľová plocha kubickej plochy v dvojnásobnom bode pretína kubickú plochu. Ak nerozložiteľná kubická plocha obsahuje nekonečne veľa dvojnásobných bodov, tak tieto body musia ležať na jednej priamke a plocha okrem dvojnásobnej priamky neobsahuje už žiadne ďalšie singulárne body. Kubická plocha s dvojnásobnou priamkou je priamková plocha. Plochy určené rovnicami

$$V_1 : x_3^3 + x_0 x_1 x_3 + x_0^3 = 0$$

$$V_3 : x_3^3 + x_0 x_1 x_3 + x_0^2 x_2 = 0$$

$$V_2 : x_3^3 + x_0^2 x_1 = 0$$

$$V_4 : x_3^3 + x_1 x_3^2 + x_0 x_1 x_3 + x_0^2 x_2 = 0$$

sú 4 ireducibilné kubické plochy s dvojnásobnou priamkou. Tieto plochy sú projektívne neekvivalentné a ľubovoľná kubická plocha v \mathbf{P}^3 s dvojnásobnou priamkou je projektívne ekvivalentná práve s jednou z nich. Plochy V_1, V_2 sú kužeľové plochy a plochy V_3, V_4 sú nekužeľové plochy.

Regulárne plochy 4. stupňa sú buď bez priamok, alebo obsahujú konečný počet priamok, maximálne 64 priamok. Singulárne plochy 4. stupňa môžu obsahovať dvojnásobné aj trojnásobné body. Maximálny konečný počet dvojnásobných bodov je 16 a tieto plochy sú známe ako Kummerove plochy. Ak plocha 4. stupňa obsahuje 3 nekolineárne trojnásobné body, tak je rozložiteľná. Ak obsahuje 3 kolineárne trojnásobné body A, B, C , tak všetky body priamky AB sú trojnásobné a plocha okrem trojnásobnej priamky neobsahuje žiadne iné singulárne body. Plocha 4. stupňa s trojnásobnou priamkou je priamková plocha. Ak navyše na trojnásobnej priamke plochy existuje štvornásobný bod, tak je to kužeľová plocha. Pre nekužeľové plochy 4. stupňa s trojnásobnou priamkou platí, že existujú maximálne 2 roviny incidentné s trojnásobnou priamkou plochy, ktoré pretínajú plochu iba v trojnásobnej priamke. To znamená, že tieto plochy môžeme rozdeliť do 3 skupín podľa toho, koľko rovín incidentných s trojnásobnou priamkou pretína plochu iba v trojnásobnej priamke. Ak plocha 4. stupňa obsahuje iba 2 trojnásobné body A, B , tak všetky ostatné body priamky AB sú dvojnásobné a navyše platí, že v rovine, ktorá obsahuje 2 trojnásobné body plochy 4. stupňa, môže mimo ich spojnice ležať najviac 1 dvojnásobný bod plochy. To znamená, že ak plocha 4. stupňa obsahuje napr. 2 trojnásobné a 2 dvojnásobné body, ktoré neležia na dvojnásobnej priamke, tak tieto 4 body musia byť lineárne nezávislé.