Monomiálne krivky a množinové úplné prieniky

Doc. RNDr. Štefan Solčan, PhD.

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky, oddelenie geometrie
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave
stefan.solcan@fmph.uniba.sk

1. **Formulácia problému.** V roku 1882 Kronecker bol prvý, kto sformuloval výsledok, ktorý v dnešnej formulácii znie: Každá algebraická varieta v n-rozmernom priestore je prienikom $n+1$ (algebraických) nadplôch. V roku 1891 Vahlen „uviedol“ príklad, ktorým „dokázal“, že Kroneckerov výsledok bol najlepší možný. Chybu vo Vahlenovom príklade objavil až Perron v roku 1941, ktorý našiel 3 plochy, pretínajúce sa vo Vahlenovej krivke. V roku 1961 Kneser dokázal, že každá krivka v 3-rozmernom priestore je prienikom 3 nadplôch.
Pretože mnohé krivky v 3-rozmernom priestore sú prienikom 2 plôch, začal sa riešiť problém: Je každá krivka prienikom 2 plôch? Ak nie, tak za akých podmienok? Kontra príkladom sa vylúčili nesúvislé krivky, kladná odpoveď bola napr. pre krivky, ktoré boli lokálne úplnými prienikmi. Rozdiel bol aj v tom, či to bol afinný alebo projektívny priestor a či bol nad poľom konečnej charakteristiky, alebo ak charakteristika základného poľa bola rovná nule (napr. pole reálnych alebo komplexných čísel). K histórii vzniku a riešenia problému pozri napr. [3], [4].

2. **Monomiálne krivky.** V algebraickej formulácii – ak existujú 2 také prvky, že radikál ideálu, ktorý generujú, je rovný (radikálu) ideálu danej krivky C v A^3 alebo P^3, tak sa nazýva **množinovým úplným prienikom (MÚP)**. Geometricky to značí, že daná krivka je prienikom dvoch (nad)plôch. Ako „testovacie“ krivky slúžia často monomiálne krivky $C = C(a,b,c)$, ktorých parametrické vyjadrenie je $(x_1, x_2, x_3) = (t^a, t^b, t^c)$ v A^3 , resp. v P^3: $(x_0, x_1, x_2, x_3) =$ $= (s^n, s^{n-a}t^a, s^{n-b}t^b, t^n)$, ich definujúci ideál je prvoideál. Sú dve skupiny matematikov - jedni tvrdia, že sa dá nájsť príklad krivky, ktorá nie je MÚP **už medzi monomiálnymi krivkami,** druhí, že každá súvislá ireducibilná krivka (aj monomiálna) je MÚP.

Aj keď problém, či sú monomiálne krivky MÚP, je stále otvorený, dosiahli sa tieto výsledky: - všetky monomiálne krivky v A^3 sú MÚP [3], - v A^4 sú monomiálne krivky pre symetrické numerické pologrupy MÚP [1], - v A^4 sú všetky monomiálne krivky, ktorých ideál je generovaný 5 prvkami MÚP [2], - v A^n je krivka $C(m_1,...m_n)$ MÚP, ak n-1 čísel z $m_1,...m_n$ tvorí aritmetickú postupnosť (výsledok D.Patila, citované napr. v [5]).
V poslednom období sú zaujímavé výsledky prepájajúce afinné a projektívne krivky a ktoré z kriviek, ktoré sú MÚP, „produkujú“ nové triedy kriviek - množinových úplných prienikov.

Literatúra

[1] Bresinsky, H.: *Monomial gorenstein curves in A^4 as set-theoretic complete intersections.* Manuscripta Math, 27, 1979, s. 353–358.
[2] Holešová, M.: *Asociované ideály ku niektorým monomiálnym krivkám v A^4*. Dizertačná práca, UK Bratislava, FMFI, 2005.
[3] Kunz, E.: *Einführung in die kommutative Algebra und algebraische Geometrie.* Vieweg, Braunschweig, 1980. (angl.preklad 1985)
[4] Stückrad, J., Vogel, W.: *On the number of equations defining an algebraic set of zeros in n-space.* Sem. Eisenbud-Singh-Vogel Vol.2., Teubner Texte zur Math. No.48, Leipzig, 88-107, 1982.
[5] Thoma, A.: *On the set-theoretic complete intersection problem for monomial curves in A^n and P^n*. J.Pure App.Alg. 104 (1995) 333-344.

Príspevok bol vypracovaný za podpory grantu VEGA 1/0730/09.