Geometria a jej aplikácie, SvF STU, Radlinského 11, Bratislava, 28. január 2010
Abstrakt prednášky
RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.: Uzol asociovaný s izolovaným singulárnym bodom

Uzol asociovaný s izolovaným singulárnym bodom

RNDr. Pavel Chalmovianský, PhD.

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky,
oddelenie geometrie
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave
pavel.chalmoviansky@fmph.uniba.sk

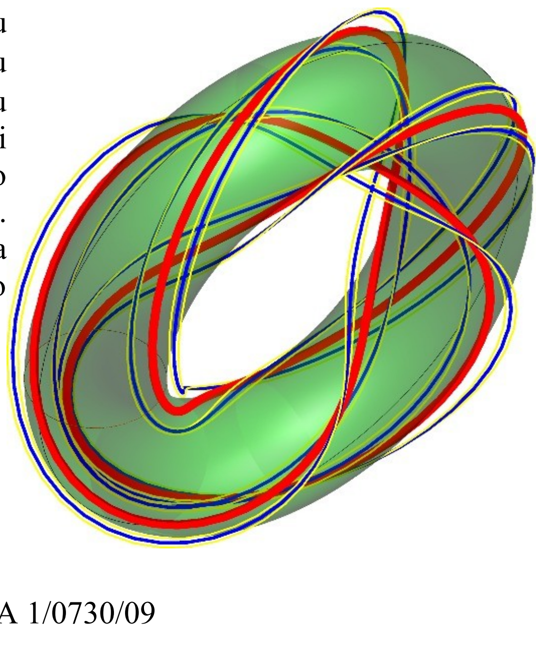
Algebraická krivka v komplexnej rovine daná holomorfnou funkciou $f:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ má singulárny bod v začiatku sústavy súradníc, ak $f(0,0)=f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. Ak v jeho okolí nie je žiaden ďalší singulárny bod, hovoríme, že je izolovaný. Každú vetvu algebraickej krivky idúcu cez začiatok sústavy súradníc možno lokálne parametrizovať Puiseuxovym radom t.j. jej body možno napísať v tvare $x=t^m, y=\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$ resp. $y=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{i/m}$.

Priestor $\mathbb{C}^2$ možno prirodzene stotožniť s $\mathbb{R}^4$. Uvažujme guľovú nadplochu $S_\epsilon^3\subset\mathbb{R}^4$ so stredom v začiatku sústavy súradníc. Rovnica $f(0,0)=f_1(x_1,y_1)+if_2(x_2,y_2)=0$ určuje plochu P v okolí začiatku v $\mathbb{R}^4$. Prienik $K=P\cap S_\epsilon^3$ dáva v prípade lokálne ireducibilnej singularity vnorenie kružnice S^1 do S^3 , čím je definovaný *uzol* prislúchajúci k tejto singularite. V prípade reducibilnej singularity možno každému ireducibilnému komponentu priradiť jeden uzol, spolu ich nazývame *link*.

Puiseuxova charakteristika radu je konečná postupnosť čísel tvaru $(m;\beta_1,\dots,\beta_g)$, kde m je menovateľ z exponentov Puiseuxovho radu (najmenší možný), β_1 je najmenší čitateľ v exponente taký, že m nedelí β_1 a $e_1=NSD(m,\beta_1)$, β_2 je najmenší čitateľ v exponente taký, že e_1 nedelí β_2 a $e_2=NSD(e_1,\beta_2)$ atď, až po $e_g=1$.

Topologické vlastnosti uzla sú určené Puiseuxovou parametrizáciou vetvy krivky. Dá sa ukázať, že dva uzly prislúchajúce izolovaným singularitám na ireducibilných krivkách sú izotopické práve vtedy, ak je ich *Puiseuxova charakteristika* rovnaká. Výsledok závisí teda len na konečnom počte členov radu. Takéto singularity nazývame *ekvisingulárne.* Pozorovanie možno zovšeobecniť pre singularity ľubovoľných kriviek.

Ak vezmeme vhodnú parametrizáciu uzla tvaru $t=e^{i\theta},\theta\in[0,2\pi]$, možno ho vizualizovať pomocou iteratívnej káblovej konštrukcie. Pre Puiseuxovu charakteristiku (12;16,18,19) výsledný uzol (pozri obr. žltou farbou) dosiahneme navinutím červeného uzla okolo kružnice idúcej stredom zeleného torusu. Následne ovíjame modrý uzol okolo červeného a nakoniec žltý okolo modrého. Počet navití možno určiť pomocou Herbrandovej funkcie.



Príspevok bol vypracovaný za podpory grantu VEGA 1/0730/09