

Lokálna prieseková násobnosť' a Bézoutova veta

Doc. RNDr. Eduard Bod'a, CSc.

Katedra algebry, geometrie a didaktiky matematiky,
oddelenie geometrie
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave
eduard.boda@fmph.uniba.sk

Algebraická teória násobnosti má svoje korene vo fundamentálnej vete algebry. Podľa nej má polynóm jednej neurčitej nad algebraicky uzavretým poľom práve toľko koreňov, koľko je jeho stupeň (pričom každý koreň sa počíta s príslušnou násobnosťou).

Geometrická interpretácia tohto faktu má svoje zovšeobecnenie v klasickej Bézoutovej vete: Dve rovinné algebraické krivky stupňov r a s (v projektívnej rovine nad algebraicky uzavretým poľom) majú spoločných práve $r \cdot s$ bodov (alebo nekonečne veľa bodov). Pritom každý bod je opatrený „vhodnou násobnosťou“.

V príspevku poukazujeme na fakt, že Samuelova definícia násobnosti primárneho ideálu v lokálnom noetherovskom okruhu je tým univerzálnym nástrojom (tou „vhodnou násobnosťou“), ktorý zabezpečuje platnosť Bézoutovej vety vo všetkých jej možných zovšeobecneniach. Metódy výpočtu tejto násobnosti sú obsahom predloženého príspevku.

Uvádžeme definíciu Samuelovej násobnosti m -primárneho ideálu q v lokálnom noetherovskom okruhu (A, m) ako vedúceho koeficientu Hilbertovho-Samuelovho polynómu $l(A/q^n)$ ($l(A/q^n)$ označuje dĺžku A -modulu A/q^n).

V úvode popíšeme tzv. U-proces a jeho aplikáciu na výpočet Samuelovej násobnosti parametrického ideálu v (A, m) . Parametrický ideál je m -primárny ideál generovaný minimálnym počtom (t.j. $\dim(A)$) generátorov. Načrtne dôkaz zovšeobecnenej n -rozmernej verzie Bézoutovej vety ako dôsledku vlastností U-procesu.

Uvedieme štandardné fakty týkajúce sa metód výpočtu Samuelovej násobnosti. Z najnovších metód uvedieme :

1. Redukciu ideálu
2. Štandardnú bázu ideálu
3. Redukciu rozmeru
4. Substitúciu neurčitých

U- proces a metódy 3 a 4 sú originálnymi metódami umožňujúcimi praktický výpočet Samuelovej násobnosti ideálu (a teda násobnosti bodu v prieseku algebraických variet) v rozsiahlej triede ideálov, popisujúcich prienik algebraických variet.

Príspevok je bohato ilustrovaný príkladmi demonštrujúcimi praktickosť uvádzaných metód výpočtu Samuelovej násobnosti.