Horocykly a jednotkové kružnice

Doc. RNDr. Vojtech Bálint, CSc.

Katedra kvantitatívnych metód a hospodárskej informatiky
Fakulta prevádzky a ekonomiky dopravy a spojov
Žilinská univerzita
Žilina

V roku 1893 Sylvester [1] uverejnil nasledovnú otázku: *Dokážte, že žiadnu konečnú množinu bodov v rovine nie je možné usporiadať tak, aby každá priamka prechádzajúca dvomi z tých bodov prechádzala aj tretím bodom bez toho, aby všetky body ležali na jednej priamke*. Korektný dôkaz sa objavil až o 40 rokov neskôr. Počet priamok obsahujúcich práve k bodov danej konečnej bodovej množiny označme t_k. Najlepší známy výsledok je $t_2 \geq 6n/13$, čo je aj po vyše 100 rokoch menej, ako hypoteticky najlepšia hodnota $t_2 \geq n/2$ pre všetky $n \neq 7 \text{ a } 13$. Zaujímavé sú aj otázky o maximálnom počte t_k pre $k \geq 3$, ako aj otázka minimálneho počtu všetkých určených priamok alebo aj otázky týkajúce sa štruktúry takých systémov bodov a priamok nimi určených. Vyriešené sú len niektoré, aj to len čiastočne.

Analogické kombinatoricko-geometrické otázky boli neskôr skúmané pre kružnice určené konečnou množinou bodov v rovine [2], [3]. Jucovič [4] formuloval tie otázky pre horocykly v hyperbolickej rovine.

Veta 1. Nech S je množina $n \geq 2$ bodov v hyperbolickej rovine. Potom ľubovoľným bodom $P \in S$ prechádza aspoň $\left(1+\sqrt{8n-7}\right)/2$ horocyklov, pričom tento odhad je najlepší možný. [5]

O mnoho rokov neskôr boli v [6] podobné otázky formulované pre jednotkové kružnice určené konečnou množinou bodov v rovine takou, ktorej priemer je menší ako 2.

Veta 2. Nech S je množina $n \geq 2$ bodov v Euklidovskej rovine taká, že $diam\, S < 2$. Potom ľubovoľným bodom $P \in S$ prechádza aspoň $\left(1+\sqrt{8n-7}\right)/2$ jednotkových kružníc, pričom tento odhad je najlepší možný. [7]

Prekvapujúce je, že dôkaz sa dá urobiť kruhovou inverziou, ktorá „pokazí“ jednotkové kružnice.

Mimoriadne veľa informácií a otvorených problémov nájde záujemca v [8].

Literatúra

[1] J. J. Sylvester: *Mathematical Question 11851*. The Educational Times **46** (1893), 156.
[2] P. D T. A. Elliott: *On the number of circles determined by n points*. Acta Math. Hungarica **18** (3-4) (1967), 181-188.
[3] A. Bálintová, V. Bálint: *On the number of circles determined by n points in Euclidean plane*. Acta Math. Hungarica **63** (3-4) (1994), 283-289.
[4] E. Jucovič: *Problem 24*. Combinatorial Structures and their Applications, Gordon and Breach, New York-London-Paris, 1970.
[5] V. Bálint: *O určitej triede incidenčných štruktúr*. Práce a štúdie Vysokej školy dopravnej v Žiline **2** (1979), 97-106.
[6] A. Bezdek, F. Fodor, I. Talata: *On Sylvester type theorems for unit circles*. Disc. Math. Special volume in honour of Helge Tverberg (1998), 1-6.
[7] V. Bálint: *On a connection between unit circles and horocycles determined by n points*. Periodica Math. Hungarica **38** (1-2 (1999), 15-17.
[8] P. Brass – W. Moser – J. Pach: *Research Problems in Discrete Geometry*. Springer, 2005.