Príklady

Funkcie 2 premenných

Načítanie referenčného súboru s definovanými funkciami:

Reference:D:\Math\Vyucba\funkcie2prem-ref.mcd(R)

1. Vypočítajte **gradient** funkcie F a jej **deriváciu v smere** vektora v v bode B[x_0,y_0]

a)

$F(x,y) := \ln(x^2 + y^2)$

$(x_0\ \ y_0) := (1\ \ 1)$

$v := (8\ \ 6)^T$

všeobecné riešenie

$\mathrm{grad}(F,x,y)^T \rightarrow \left(2\cdot\frac{x}{x^2+y^2}\ \ 2\cdot\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

riešenie v bode B

$\mathrm{grad}(F,x_0,y_0) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

symbolické a numerické vyhodnotenie:

$\mathrm{dvsmere}(F,x_0,y_0,v) \rightarrow \frac{7}{5}$

$\mathrm{dvsmere}(F,x_0,y_0,v) = 1.4$

b)

$F(x,y) := \mathrm{asin}(x - 2y)$

$(x_0\ \ y_0) := (2\ \ 1)$

$v := (1\ \ -1)^T$

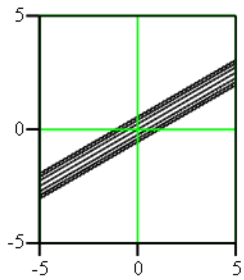
$\mathrm{grad}(F,x,y)^T \rightarrow \left[\frac{1}{(1-x^2+4\cdot x\cdot y-4\cdot y^2)^{\frac{1}{2}}}\ \ \frac{-2}{(1-x^2+4\cdot x\cdot y-4\cdot y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$

$\mathrm{grad}(F,x_0,y_0) = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$

$\mathrm{dvsmere}(F,x_0,y_0,v) \rightarrow \frac{3}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}$

znázornenie definičného oboru:

$P(x,y) := (x\ \ y\ \ \mathrm{Re}(\mathrm{asin}(x-2y)))^T$



P

2. Nájdite **dotykovú rovinu** k funkcii v bode B[x_0,y_0]

a)

$z(x,y) := x^2 + y^2$

$(x_0\ \ y_0) := (1\ \ -2)$

$z(x_0,y_0) = 5$

dotyková rovina predstavuje lineárnu aproximáciu funkcie, preto použijeme Taylorov rozvoj prvého stupňa $z = T_1(x_0,y_0)$ *:*

$T(z,x_0,y_0,x,y,1) \rightarrow -5 + 2\cdot x - 4\cdot y$

môžme tiež použiť zabudovanú symbolickú funkciu "series"

$z(x,y)\ \mathrm{series}, x = 1, y = -2, 2\ \rightarrow -5 + 2\cdot x - 4\cdot y$

b)

$z(x,y) := 4\,\mathrm{atan}(\sqrt{x\cdot y})$

$(x_0\ \ y_0) := (1\ \ 1)$

$z(x_0,y_0) \rightarrow \pi$

$T(z,x_0,y_0,x,y,1) \rightarrow \pi + x - 2 + y$

parciálna derivácia funkcie podľa x:

$\frac{d}{dx}z(x,y) \rightarrow \frac{2}{(x\cdot y)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{y}{1+x\cdot y}$

3. Nájdite **Taylorov rozvoj** stupňa 2 funkcie v bode B[x_0,y_0]

a) $z(x,y) := e^{x}\sin(y)$

$(x_0 \;\; y_0) := (0 \;\; 0)$

$z(x_0, y_0) = 0$

$T(z, x_0, y_0, x, y, 2) \rightarrow y + x\cdot y$

parciálna derivácie:

(gradient funkcie obsahuje parc.derivácie prvého rádu)-> $\mathrm{grad}(z,x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} \exp(x)\cdot\sin(y) \\ \exp(x)\cdot\cos(y) \end{pmatrix}$

(Hessova matica obsahuje parc.derivácie druhého rádu)-> $H(z,x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} \exp(x)\cdot\sin(y) & \exp(x)\cdot\cos(y) \\ \exp(x)\cdot\cos(y) & -\exp(x)\cdot\sin(y) \end{pmatrix}$

b) $F(x,y) := x^3 + 2y^3 - 2x\cdot y$

$(x_0 \;\; y_0) := (1 \;\; 1)$

$F(x_0, y_0) = 1$

$T(F, x_0, y_0, x, y, 2) \rightarrow -4 + x + 4\cdot y + \frac{1}{2}\cdot(6\cdot x - 4 - 2\cdot y)\cdot(x-1) + \frac{1}{2}\cdot(-2\cdot x - 10 + 12\cdot y)\cdot(y - 1$

$T(F, x_0, y_0, x, y, 2)$ simplify $\rightarrow 3 - 3\cdot x - 6\cdot y + 3\cdot x^2 - 2\cdot x\cdot y + 6\cdot y^2$

4. Nájdite voľné extrémy funkcie dvoch premenných

a) $z(x,y) := 3 + (x^2 + y)\cdot e^{y}$

- najprv zistíme stacionárne body riešením 2 rovníc o 2 neznámych:

Given $\frac{d}{dx}z(x,y) = 0$

$\frac{d}{dy}z(x,y) = 0$ $\quad \mathrm{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- výsledok skopírujeme do premennej SB $\quad SB := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

- pomocou Hessovej matice a jej hlavných minorov špecifikujeme stacionárne body (o aký extrém ide a jeho súradnice v priestore)

$\mathrm{volneX}(z, SB) \rightarrow [\text{"minimum"} \;\; (0 \;\; -1 \;\; 3 - \exp(-1))\,]$

b) $f(x,y) := e^{2x}(x + y^2 + 2y)$

parcialne derivácie:

$\mathrm{grad}(f,x,y) \rightarrow \begin{bmatrix} 2\cdot\exp(2\cdot x)\cdot(x + y^2 + 2\cdot y) + \exp(2\cdot x) \\ \exp(2\cdot x)\cdot(2\cdot y + 2) \end{bmatrix}$

$H(f,x,y) \rightarrow \begin{bmatrix} 4\cdot\exp(2\cdot x)\cdot(x + y^2 + 2\cdot y) + 4\cdot\exp(2\cdot x) & 2\cdot\exp(2\cdot x)\cdot(2\cdot y + 2) \\ 2\cdot\exp(2\cdot x)\cdot(2\cdot y + 2) & 2\cdot\exp(2\cdot x) \end{bmatrix}$

Given $\frac{d}{dx}f(x,y) = 0$

$\frac{d}{dy}f(x,y) = 0$ $\quad \mathrm{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad SB := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{volneX}(f, SB) \rightarrow \left[\text{"minimum"} \;\; \left(\frac{1}{2} \;\; -1 \;\; \frac{-1}{2}\cdot\exp(1)\right)\right]$

c) $h(x,y) := x\cdot y - x^2 - y^2 - 6y$

Given $\frac{d}{dx}h(x,y) = 0$

$\frac{d}{dy}h(x,y) = 0$ $\quad \mathrm{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad SB := \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{volneX}(h, SB) \rightarrow [\text{"maximum"} \quad (-2 \ \ -4 \ \ 12)]$$

d) $F(x,y) := x^3 - x^2 - y^3 + y^2$

Given $\frac{d}{dx}F(x,y) = 0$

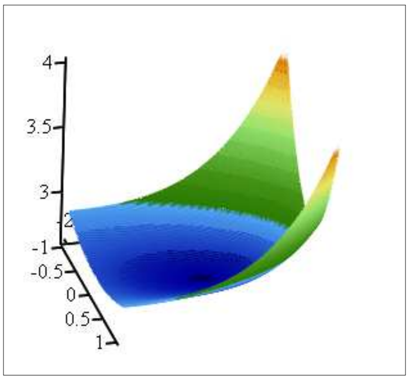
$\frac{d}{dy}F(x,y) = 0$

$$\mathrm{Find}(x,y) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad SB := \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{volneX}(F, SB) \rightarrow \begin{bmatrix} \text{"sedlovy bod"} & (0 \ \ 0 \ \ 0) \\ \text{"minimum"} & \left(\frac{2}{3} \ \ 0 \ \ \frac{-4}{27}\right) \\ \text{"maximum"} & \left(0 \ \ \frac{2}{3} \ \ \frac{4}{27}\right) \\ \text{"sedlovy bod"} & \left(\frac{2}{3} \ \ \frac{2}{3} \ \ 0\right) \end{bmatrix}$$

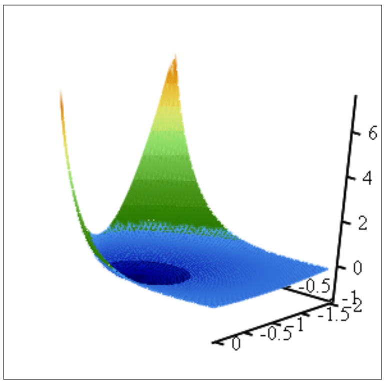
Vizualizácia:

$P_z(x,y) := (x \ \ y \ \ z(x,y))^T$



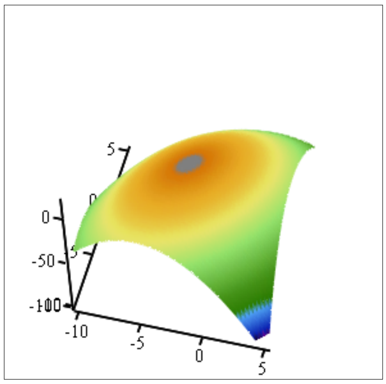
P_z

$P_f(x,y) := (x \ \ y \ \ f(x,y))^T$



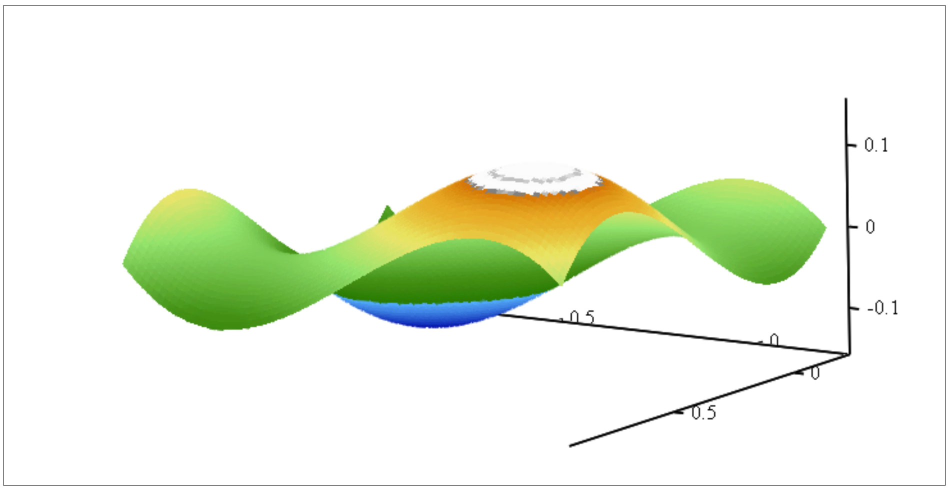
P_f

$P_h(x,y) := (x \ \ y \ \ h(x,y))^T$



P_h

$P_F(x,y) := (x \ \ y \ \ F(x,y))^T$



P_F