Diferenciálna geometria plochy

Užívateľské funkcie

derivácia vektorovej funkcie:

$D_u(f,u,v,ord) := \begin{array}{|l} n \leftarrow length(f(u,v)) \\ for\ i \in 1..n \\ \quad vec_i \leftarrow \frac{d^{ord}}{du^{ord}} f(u,v)_i \\ vec \end{array}$

$D_v(f,u,v,ord) := \begin{array}{|l} n \leftarrow length(f(u,v)) \\ for\ i \in 1..n \\ \quad vec_i \leftarrow \frac{d^{ord}}{dv^{ord}} f(u,v)_i \\ vec \end{array}$

gradient funkcie troch premenných:

$grad(f,x,y,z,ord) := \left(\frac{d^{ord}}{dx^{ord}} f(x,y,z) \quad \frac{d^{ord}}{dy^{ord}} f(x,y,z) \quad \frac{d^{ord}}{dz^{ord}} f(x,y,z) \right)^T$

Vyšetrovaný bod: $(u_0 \ \ v_0) := (2 \ \ 4)$

Vektorová rovnica plochy a jej derivácie:

$Pl(u,v) := \left(u \quad v \quad \frac{u^2}{4} + \frac{v^2}{8} \right)^T$ $\qquad Pl(u_0,v_0)^T = (2 \ \ 4 \ \ 3)$

$Pl_u(u,v) := D_u(Pl,u,v,1) \qquad Pl_u(u,v)^T \rightarrow \left(1 \quad 0 \quad \frac{1}{2}\cdot u\right)$ $\qquad Pl_u(u_0,v_0)^T = (1 \ \ 0 \ \ 1)$

$Pl_v(u,v) := D_v(Pl,u,v,1) \qquad Pl_v(u,v)^T \rightarrow \left(0 \quad 1 \quad \frac{1}{4}\cdot v\right)$ $\qquad Pl_v(u_0,v_0)^T = (0 \ \ 1 \ \ 1)$

$Pl_{uu}(u,v) := D_u(Pl,u,v,2) \qquad Pl_{uu}(u,v)^T \rightarrow \left(0 \quad 0 \quad \frac{1}{2}\right)$ $\qquad Pl_{uu}(u_0,v_0)^T = (0 \ \ 0 \ \ 0.5)$

$Pl_{vv}(u,v) := D_v(Pl,u,v,2) \qquad Pl_{vv}(u,v)^T \rightarrow \left(0 \quad 0 \quad \frac{1}{4}\right)$ $\qquad Pl_{vv}(u_0,v_0)^T = (0 \ \ 0 \ \ 0.25)$

$Pl_{uv}(u,v) := D_v(Pl_u,u,v,1) \qquad Pl_{uv}(u,v)^T \rightarrow (0 \ \ 0 \ \ 0)$ $\qquad Pl_{uv}(u_0,v_0)^T = (0 \ \ 0 \ \ 0)$

Vektor normály a dotyková rovina:

$nvek_\sigma(u,v) := \frac{Pl_u(u,v) \times Pl_v(u,v)}{\left|Pl_u(u,v) \times Pl_v(u,v)\right|}$ $\qquad nvek_\sigma(u_0,v_0)^T = (-0.577 \ \ -0.577 \ \ 0.577)$

$norm_\sigma(u,v,\lambda) := Pl(u,v) + \lambda \cdot nvek_\sigma(u,v)$ $\qquad norm_\sigma(u_0,v_0,\lambda)^T \rightarrow \left(2 - \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot\lambda \quad 4 - \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot\lambda \quad 3 + \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot\lambda \right)$

$drov_\sigma(u,v,x,y,z) := \left((x \ \ y \ \ z)^T - Pl(u,v)\right)\cdot nvek_\sigma(u,v)$ $\qquad drov_\sigma(u_0,v_0,x,y,z)\ simplify \rightarrow \frac{-1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot x + 3^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot y + \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot z$

Implicitné vyjadrenie plochy (značené "I" pred názvom)

vyšetrovaný bod: $(x_0 \ \ y_0 \ \ z_0) := Pl(u_0,v_0)^T$ $\qquad (x_0 \ \ y_0 \ \ z_0) = (2 \ \ 4 \ \ 3)$

rovnica plochy: (IPl = 0)

$IPl(x,y,z) := \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} - z$ $\qquad IPl(x_0,y_0,z_0) = 0$

gradient (vektor normály):

$grad(IPl,x,y,z,1)^T \rightarrow \left(\frac{1}{2}\cdot x \quad \frac{1}{4}\cdot y \quad -1 \right)$

$Invek_\sigma(x,y,z) := \frac{grad(IPl,x,y,z,1)}{\left|grad(IPl,x,y,z,1)\right|}$ $\qquad grad(IPl,x_0,y_0,z_0,1)^T = (1 \ \ 1 \ \ -1)$

normála plochy:

$Inorm_\sigma(x,y,z,\lambda) := IPl(x,y,z) + \lambda\cdot Invek_\sigma(x,y,z)$ $\qquad Inorm_\sigma(x_0,y_0,z_0,\lambda)^T \rightarrow \left(\frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot\lambda \quad \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot\lambda \quad \frac{-1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot\lambda \right)$

dotyková rovina: ($Idrov_\sigma$ = 0)

$Idrov_\sigma(x0,y0,z0,x,y,z) := \left((x \ \ y \ \ z)^T - (x0 \ \ y0 \ \ z0)^T\right)\cdot Invek_\sigma(x0,y$

$Idrov_\sigma(x_0,y_0,z_0,x,y,z)\ simplify \rightarrow \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot x - 3^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot y - \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot z$

Pomocné členy pre ďalší výpočet

$E(u,v) := Pl_u(u,v)\cdot Pl_u(u,v)$ $\qquad E(u_0,v_0) = 2$

$F(u,v) := Pl_u(u,v)\cdot Pl_v(u,v)$ $\qquad F(u_0,v_0) = 1$

$G(u,v) := Pl_v(u,v)\cdot Pl_v(u,v)$ $\qquad G(u_0,v_0) = 2$

$L(u,v) := nvek_\sigma(u,v)\cdot Pl_{uu}(u,v)$ $\qquad L(u_0,v_0) = 0.289 \qquad L(u_0,v_0) \rightarrow \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}}$

$M(u,v) := nvek_\sigma(u,v)\cdot Pl_{uv}(u,v)$ $\qquad M(u_0,v_0) = 0$

$N(u,v) := nvek_\sigma(u,v)\cdot Pl_{vv}(u,v)$ $\qquad N(u_0,v_0) = 0.144 \qquad N(u_0,v_0) \rightarrow \frac{1}{12}\cdot 3^{\frac{1}{2}}$

$$H(u,v) := \frac{E(u,v)\cdot N(u,v) + L(u,v)\cdot G(u,v) - 2\cdot F(u,v)\cdot M(u,v)}{2\left(E(u,v)\cdot G(u,v) - F(u,v)^2\right)} \qquad H(u_0,v_0) = 0.144 \qquad H(u_0,v_0) \to \frac{1}{12}\cdot 3^{\frac{1}{2}}$$

$$K(u,v) := \frac{L(u,v)\cdot N(u,v) - M(u,v)^2}{E(u,v)\cdot G(u,v) - F(u,v)^2} \qquad K(u_0,v_0) = 0.014 \qquad K(u_0,v_0) \to \frac{1}{72}$$

Základné formy plochy

$$ZF_\sigma(u,v,du,dv) := \begin{pmatrix} E(u,v)\,du^2 + 2\,F(u,v)\,du\cdot dv + G(u,v)\,dv^2 \\ L(u,v)\cdot du^2 + 2\cdot M(u,v)\cdot du\cdot dv + N(u,v)\cdot dv^2 \end{pmatrix}$$

$$ZF_\sigma(u_0,v_0,du,dv) \to \begin{pmatrix} 2\cdot du^2 + 2\cdot du\cdot dv + 2\cdot dv^2 \\ \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot du^2 + \frac{1}{12}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot dv^2 \end{pmatrix}$$

Krivosti

normálová:

$$nkriv_\sigma(u,v,du,dv) := \frac{ZF_\sigma(u_0,v_0,du,dv)_2}{ZF_\sigma(u_0,v_0,du,dv)_1} \qquad nkriv_\sigma(u_0,v_0,du,dv)\ \text{simplify} \to \frac{1}{24}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{2\cdot du^2 + dv^2}{du^2 + d}$$

hlavné:

$$hkriv_\sigma(u,v) := H(u,v) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\sqrt{H(u,v)^2 - K(u,v)} \qquad hkriv_\sigma(u_0,v_0) = \begin{pmatrix} 0.228 \\ 0.061 \end{pmatrix} \qquad hkriv_\sigma(u_0,v_0)\ \text{simplify} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{12} + \frac{1}{12}\cdot 3^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{12} + \frac{1}{12}\cdot 3^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

úplná:

$$ukriv_\sigma(u,v) := hkriv_\sigma(u,v)_1\cdot hkriv_\sigma(u,v)_2 \qquad ukriv_\sigma(u_0,v_0) = 0.014$$

stredná:

$$skriv_\sigma(u,v) := \frac{1}{2}\left(hkriv_\sigma(u,v)_1 + hkriv_\sigma(u,v)_2\right) \qquad skriv_\sigma(u_0,v_0) = 0.144$$

Hlavné smery

rovnica:
($rovhs_\sigma = 0$)

$$rovhs_\sigma(u,v,u',v') := \begin{pmatrix} L(u,v)\cdot F(u,v) - M(u,v)\cdot E(u,v) \\ L(u,v)\cdot G(u,v) - N(u,v)\cdot E(u,v) \\ M(u,v)\cdot G(u,v) - N(u,v)\cdot F(u,v) \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} u'^2 \\ u'\cdot v' \\ v'^2 \end{pmatrix}$$

$$rovhs_\sigma(u_0,v_0,u',v') \to \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot u'^2 + \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot u'\cdot v' - \frac{1}{12}\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot v'^2$$

podmienka prirodzenej parametrizacie:
($ppp_\sigma = 1$)

$$ppp_\sigma(u,v,u',v') := \begin{vmatrix} v \leftarrow Pl_u(u,v)\cdot u' + Pl_v(u,v)\cdot v' \\ \sqrt{v\cdot v} \end{vmatrix} \qquad ppp_\sigma(u_0,v_0,u',v') \to \left[u'^2 + v'^2 + (u' + v')^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

riešenie sústavy 2rovníc o 2neznámych:

Given $\quad rovhs_\sigma(u,v,u',v') = 0$

$ppp_\sigma(u,v,u',v') = 1$

$$u'v'_\sigma(u,v,u',v') := \text{Find}(u',v')$$

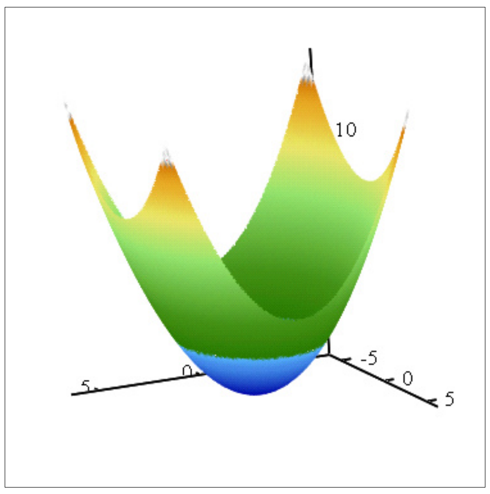
$$u'v'_\sigma(u_0,v_0,u',v') \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{-1}{2} + \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{-1}{2} - \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{-1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

hlavné smery:

$$hsmery_\sigma(u,v,u',v') := \begin{vmatrix} korene \leftarrow u'v'_\sigma(u,v,u',v')^T \\ Pl_u(u,v)\cdot korene^{\langle 1\rangle^T} + Pl_v(u,v)\cdot korene^{\langle 2\rangle^T} \end{vmatrix}$$

$$hsmery_\sigma(u_0,v_0,u',v') \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{-1}{2} + \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{-1}{2} - \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}} \\ \frac{-1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{-1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{-1}{2} - \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{-1}{2} + \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Grafické znázornenie: $\quad Plot(u,v) := Pl(u,v)$



Plot

Pozn.:
Hlavné smery sú ktorékoľvek 2 vzájomne lineárne nezávislé stĺpcové vektory z matice "$hsmery_\sigma$", teda napríklad:

$$hsmery_\sigma(u_0,v_0,u',v')^{\langle 2\rangle^T} \to \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} - \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{-1}{2} + \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

$$hsmery_\sigma(u_0,v_0,u',v')^{\langle 4\rangle^T} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\cdot 3^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$