

Modelovanie viacrozmerných časových radov

Ing. Tomáš Bacigál

školiťel':

Prof. RNDr. Magda Komorníková, CSc.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie

školiťel' konzultant:

Prof. Ing. Ján Hefty, PhD.

Katedra geodetických základov

Stavebná fakulta STU v Bratislave

apríl 2005

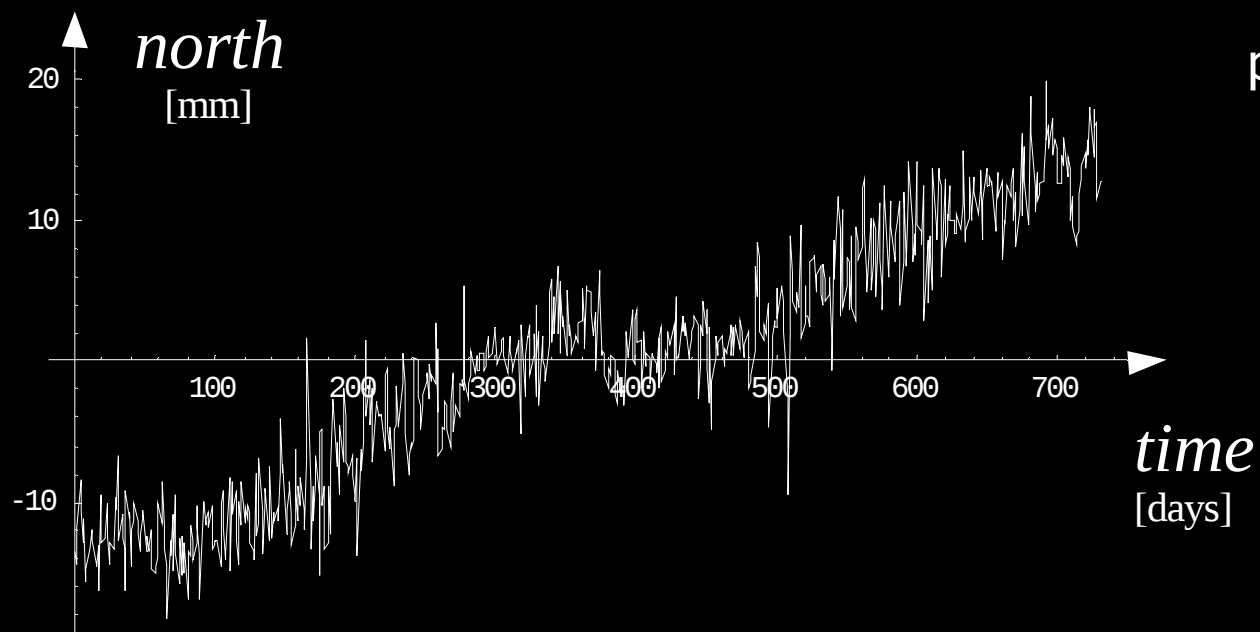
Obsah:

- Časové rady
- Lineárne modelovanie
 - prístup k modelovaniu
 - kointegrované procesy
 - » testovanie na stochastický trend
 - » testovanie na kointegráciu
 - » geometrická predstava spoločného trendu
 - » testovanie na spoločný deterministický trend
- Nelineárne modelovanie
 - modely s premenlivými režimami
 - » testovanie na nelinearitu
- Záver a tézy dizertačnej práce

Časové rady

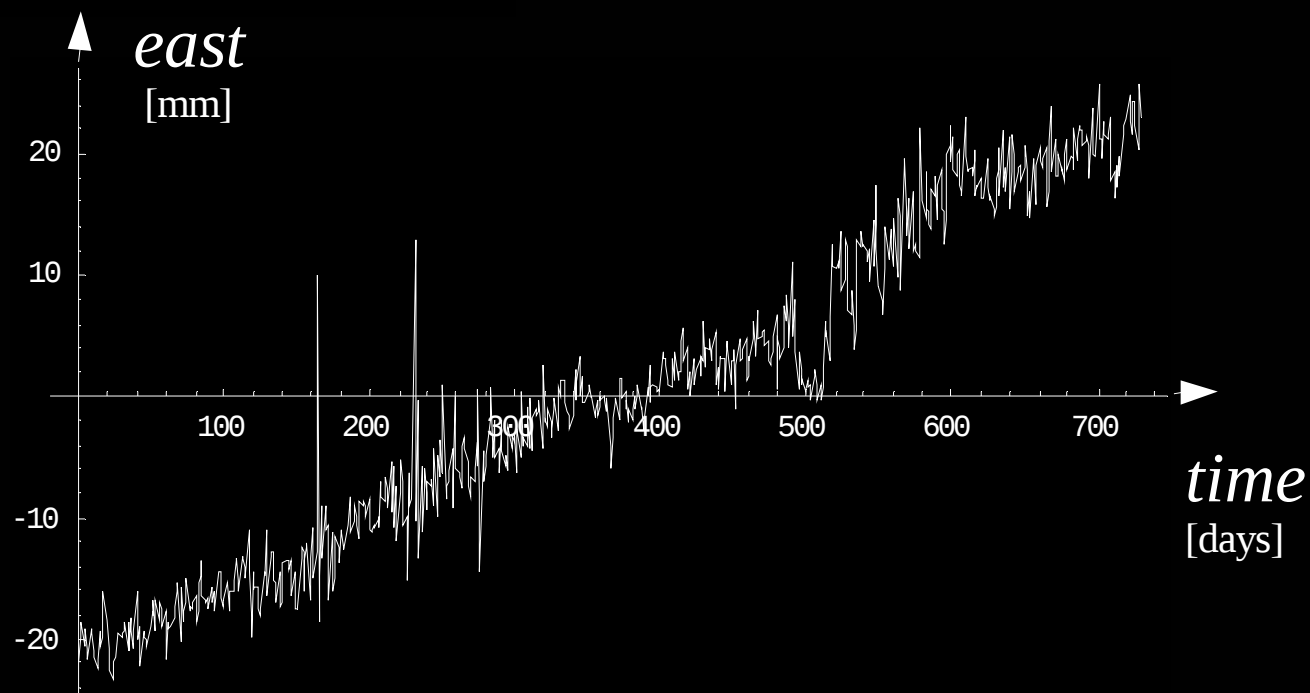
- diskrétny časový rad $\{X_1, X_2 \dots X_t\}$ je množina pozorovaní zaznamenaných postupne v čase (predpokladá sa konštantný časový krok)
- použité GPS merania na permanentných staniciach:
 - denné riešenia po dobu 2 rokov (2001 – 2002) = 730 hodnôt
 - súradnice v Medzinárodnom terestrickom referenčnom systéme ITRS
 - transformácia z geocentrického systému do lokálneho horizontálneho topocentrického súradnicového systému (n, e, v)
 - permanentné stanice súčasťou EUREF Permanent Network
 - jeden z cieľov: sledovanie pohybov zemskej kôry
 - permanentné stanice: BOR1 (Poľsko), GOPE (ČR), HFLK (Rakúsko), PENC (Maďarsko), POTS (Nemecko)
 - pohyb bodov v horizontálnej rovine (n,e) dominantne zaťažený pohybom eurázijskej litosférickej dosky

Časové rady



pozorovania na bode BOR1:

- n_t smer sever juh
- e_t smer východ západ



Lineárne modelovanie - prístup

Porovnávané prístupy k modelovaniu časových radov n_t , e_t :

- spracovanie oddelene (ako jednorozmerných č.r.)
- modelovanie reziduí ako viacrozmerných č.r. pomocou VAR(p)
- testovanie na kointegráciu a transformácia do systému lineárnych kombinácií časových radov :
 - stacionárnej (ekvilíbrio) a
 - integrovanej rádu 1 (spoločný trend)

Štandardný postup dekompozície časových radov:

- modelovanie trendu
- modelovanie sezónnych príp. cyklických zložiek
- modelovanie zvyškových korelácií v reziduách pomocou lineárnych modelov Box-Jenkinsonovej metodológie - ARMA(p, q), ...

Kointegrované procesy

- Dva nestacionárne časové rady $I(1)$ sú kointegrované ak jedna z ich lineárnych kombinácií je $I(0)$, teda stacionárna. $I(d)$ značí “integrovaný rádu d ”.
- Časový rad môže byť trendovo stacionárny (teda okolo deterministického trendu) alebo môže obsahovať stochastický trend, ktorý síce sleduje určitý smer, ale výchylka z tohto smeru je dlhodobejšia (má charakter náhodnej prechádzky)
 - deterministický trend $X_t = \delta t + \varepsilon_t$
 - stochastický trend $X_t = X_0 + \delta t + \sum_{i=1}^t \varepsilon_i$

Testy na prítomnosť stochastického trendu:

- testy jednotkového koreňa Dickey-Fullerov test
- testy stacionarity KPSS test, LM test

Testy na kointegráciu:

- Engle-Grangerova dvojkroková metóda
- Johansenova metóda

Kointegrácia - testovanie

- Engle-Granger

- pomocná regresia $X_{2,t} = \beta_0 + \beta_1 X_{1,t} + u_t$

$$\Delta \hat{u}_t = \gamma_0 + \rho \hat{u}_{t-1} + \gamma_1 \Delta \hat{u}_{t-1} + \dots + \gamma_p \Delta \hat{u}_{t-p} + \varepsilon_t$$

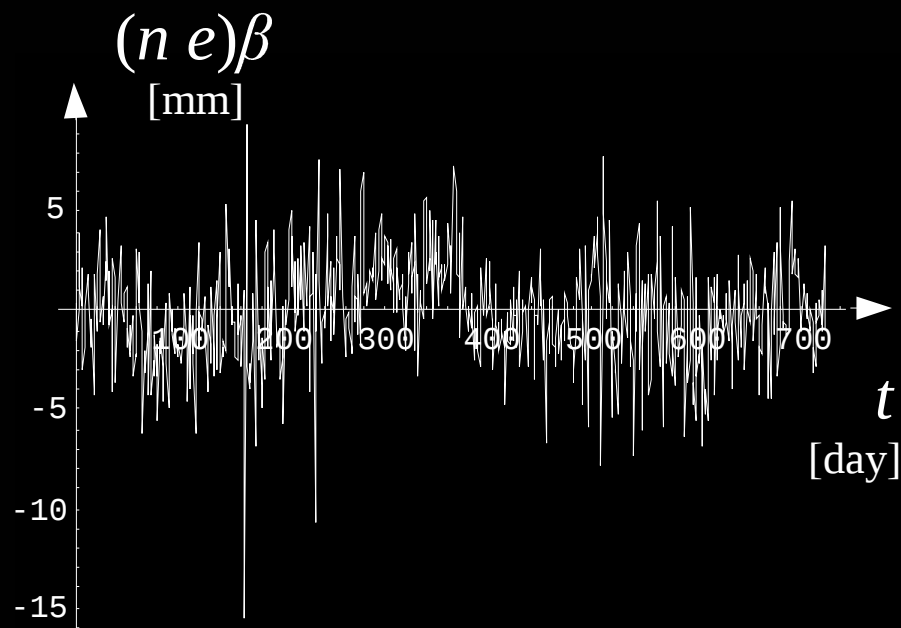
- testujeme $H_0: r = 0$, teda že u_t má jednotkový koreň, teda obidve premenné nie sú kointegrované. H_0 zamietame ak $t(r) < t_{crit}$.

- Johansen

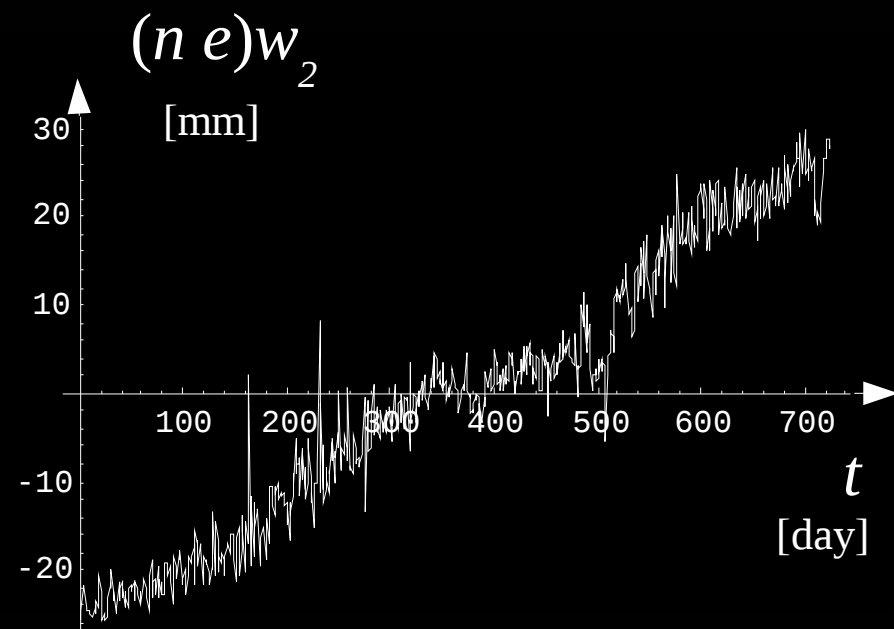
$$\Delta X_t = \mu + \Gamma_1 \Delta X_{t-1} + \dots + \Gamma_{p-1} \Delta X_{t-p+1} + \Pi X_{t-p} + \varepsilon_t$$

- testuje sa hodnosť matice Π , ktorá obsahuje informácie o možnom kointegračnom vzťahu. Z reziduí dvoch pomocných regresíí sa vypočítajú štyri matice a ich vlastné čísla, ktoré zostupne radené vystupujú v testovacích štatistikách.

Kointegrácia - znázornenie lineárnych kombinácií



Ekvilíbrio medzi n , e .



Spoločný stochastický trend.

β označuje vektor kointegračných parametrov obsiahnutý v matici P a w_2 je vlastný vektor prislúchajúci smeru spoločného trendu (z Gonzalo-Grangerovej metódy)

Kointegrácia - geometrická predstava spoločného trendu

Hľadáme lineárnu kombináciu

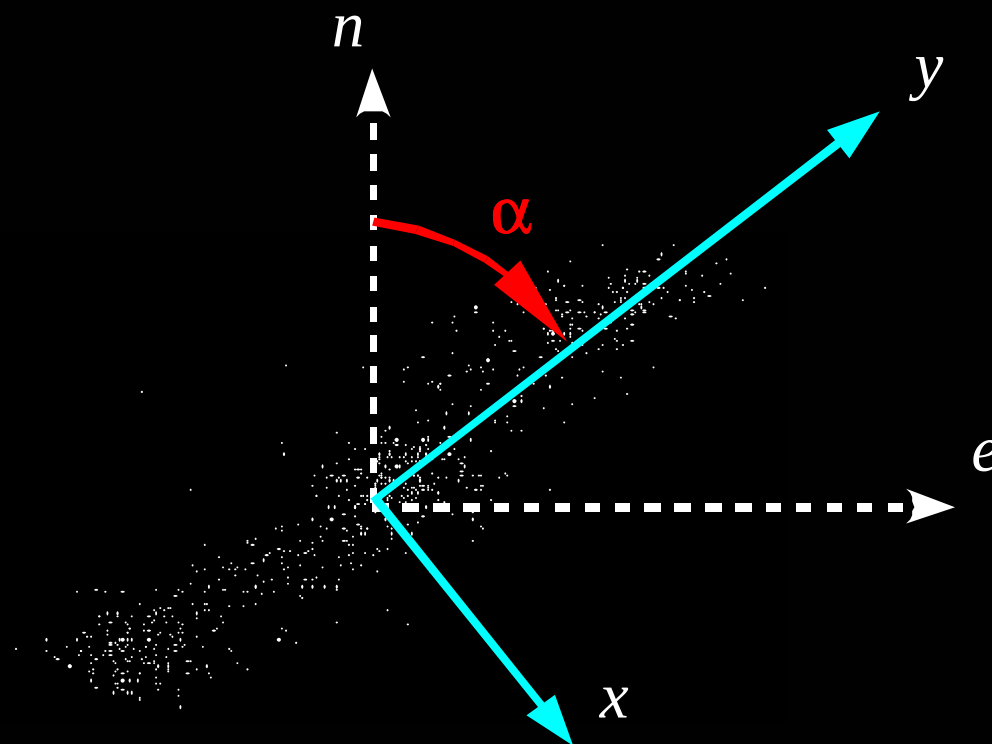
$$y_t = \gamma_1 n_t + \delta_1 e_t$$

$$x_t = \gamma_2 n_t + \delta_2 e_t$$

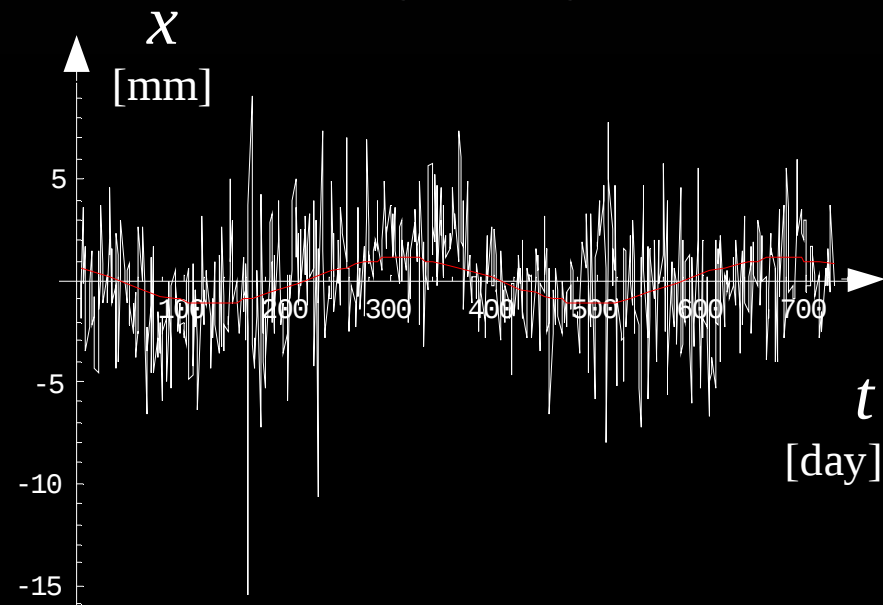
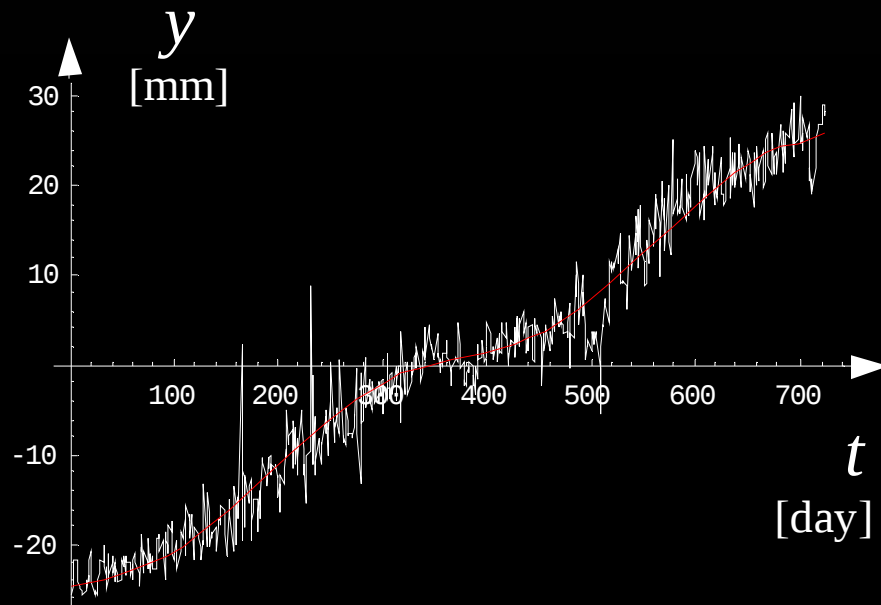
takú, že y_t reprezentuje smer spoločného trendu a x_t stacionárnu veličinu (bez trendu) a kolmú na y_t . Problém sa dá ľahko popísať do známej transformácie:

$$\begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_t \\ e_t \end{bmatrix}$$

Uhol α sa vypočíta z analýzy deterministického (alebo) stochastického trendu.



Lineárne modelovanie - postup po transformácii a výsledky



Ďalší postup:

- dekompozícia lineárneho trendu a sezónnych zložiek,
- aplikácia Box-Jenkinsonovej metodológie,
- transformácia modelu späť do systému (n, e) system,
- predpoveď 5 hodnôt dopredu,
- výpočet strednej kvadratickej chyby (MSE) a strednej percentuálnej chyby (MPE) z predpovedaných a skutočných hodnôt,
- porovnanie troch navrhnutých metód.

Lineárne modelovanie – výsledky a porovnanie

Parametre deterministického modelu

premenná	trend [mm/rok]	sezónna zložka	
		amplitúda [mm]	perióda [dni]
n	13.2	2.2	365
e	21.5	1.6	
y	25.2	2.5	
x	0	1.1	

Porovnanie efektívnosti predikcie

metóda	variable	order p	mse [mm ²]	mpe [%]
1.) separátne spracovanie časových radov	n	1	7.40	5.08
	e	4	3.70	2.88
2.) modelovanie dvojrozmerných reziduí	n	2	8.13	5.44
	e	2	5.06	5.13
3.) modelovanie transformovaných č.r.	n	2 (y)	5.90	4.04
	e	4 (x)	4.10	2.49

Nelineárne modelovanie - viacrežimové modely

Jednorozmerný prahový autoregresný (threshold autoregressive) TAR model

- z_t je prahová premenná
- r je prah
- d je oneskorenie

$$y_t = \begin{cases} \Phi_1^{(1)} y_{t-1} + \dots + \Phi_p^{(1)} y_{t-p} + \varepsilon_t^{(1)} & \text{if } z_{t-d} \leq r \\ \Phi_1^{(2)} y_{t-1} + \dots + \Phi_p^{(2)} y_{t-p} + \varepsilon_t^{(2)} & \text{if } z_{t-d} > r \end{cases}$$

Mnohorozmerný TAR v skrátrenom zápise:

$$\mathbf{y}_t = \Phi_0^{(j)} + \sum_{i=1}^p \Phi_i^{(j)} \mathbf{y}_{t-i} + \boldsymbol{\varepsilon}_t^{(j)} \quad \text{if } r_{j-1} < z_{t-d} \leq r_j$$

Postup modelovania:

- nájsť vhodný rádu (AIC, BIC pre VAR),
- testovanie na nelinearitu (Tsayov test)
- určenie najlepších hodnôt oneskorenia d a prahovej hodnoty r pomocou
 - informačného kritéria AIC
 - podmieneného odhadu MNŠ
- odhad parametrov modelu

Záver

- Časové rady súradníc bodov v horizontálnej rovine možno efektívne modelovať využitím predpokladu kointegrácie, pre potvrdenie ktorého existuje niekoľko testov.
- Testovanie časových radov konkrétnej súradnice na spoločný trend môže štatisticky potvrdiť spoločnú rýchlosť pohybu niektorých sledovaných bodov a pri iných vyvrátiť.
- Nelineárne modelovanie viacrežimovými modelmi sa uplatní pri predpoklade určitých nelineárnych závislostí, kedy dochádza k zmene stavu vplyvom aktivácie konkrétnych merateľných procesov.

Tézy projektu dizertačnej práce

- Kointegrácia
 - Testovanie spoločných trendov
 - Transformácia do smeru spoločného trendu
- Testovanie spoločných peridických zložiek
- Mnohorozmerné prahové autoregresné modely
 - s vonkajšou prahovou premennou
 - s použitím agregáčnych operátorov
- Prahová kointegrácia
- Mnohorozmerné autoregresné modely s použitím kopulí
- Aplikácia v geodézii